حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

وليم ه. دورفنى

الدار الدولية للنشر والتوزيع

حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

تأليف

وليم هـ . دورفنى
كلية مونت هوليوك

ترجمة

الدكتور محمد على محمد السمرى
أستاذ الرياضيات ووكيل كلية الهندسة والتكنولوجيا
جامعة حلوان
جمهورية مصر العربية

مراجعة

الأستاذ الدكتور راجى حليم مختار
رئيس قسم الرياضيات البحتة - كلية العلوم
جامعة عين شمس
جمهورية مصر العربية



الدار الدولية للنشر والتوزيع

القاهرة - الكويت - لندن

حقوق النشر

* أعد الترجمة العربية مركز الاهرام للترجمة العلمية بالقاهرة .

الدار الدولية للنشر والتوزيع

٣٨ شارع الاهرام - روكسي - مصر الجديدة

ص . ب : ٥٥٩٩ هليوبوليس غرب - القاهرة

ت : ٢٥٨٢٨٨٧

تلكس : ٢٠٠٧٠ / ٢٠٠٧١ PBCRB UN

فاكس : ٢٩١٨٠٥٩ / ٢٠٢-٠٠

ISBN 084269 8

قوانين من الهندسة والجبر وحساب المثلثات

المساحة = A

مساحة القاعدة = B

الحجم = V

المساحة الجانبية (لاتشمل القاعدة أو القمة) = S

طول القاعدة = b

الارتفاع (مقيسا عموديا على القاعدة) = h

نصف القطر = r

متوازى الاضلاع $A = bh.$

المثلث $A = \frac{1}{2}bh.$

شبه المنحرف $A = \frac{a+b}{2}h$ (a = طول القمة)

الدائرة $A = \pi r^2, C = 2\pi r$ (C = المحيط)

القطاع الدائرى $s = r\theta$ (s طول القوس) و $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

حيث الزاوية المركزية θ مقيسة بالتقدير الدائرى .

الأسطوانة أو المنشور حيث القاعدة والقمة متوازيتان $V = Bh.$

الأسطوانة الدائرية القائمة $V = \pi r^2 h, S = 2\pi rh.$

المخروط أو الهرم $V = \frac{1}{3}Bh.$

المخروط الدائرى القائم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, S = \pi rt.$ (t = طول الراسم)

الكرة $V = \frac{4}{3}\pi r^3, A = 4\pi r^2.$

حلا المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هما $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cot\theta},\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}.$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\ \cos(-\theta) = \cos\theta,\ \tan(-\theta) = -\tan\theta.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta,\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta,\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta.$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,\ \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta,\ 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

$$\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta),\ \cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta).$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

لتكن a, b, c, أضلاع المثلث ، A,B,C, الزوايا المقابلة .

قانون جيب التمام : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

قانون الجيب : $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}.$

المحتويات

الموضوع | صفحة

الموضوع	صفحة

الموضوع	صفحة

الموضوع	صفحة

مقدمة

هذا الكتاب مدخل لحساب التفاضل والتكامل وللهندسة التحليلية . ورغم أن المقصود منه أساسا أن يكون منهاجا لمدة عام واحد على مستوى الكليات إلا أنه يصلح لأن يكون منهاجا متقدما بالمدرسة الثانوية . يمكن أيضا الاستفادة به لمنهاج لمدة فصل دراسى واحد إذا ما أعطيت البنود من ت ـ ١ الى ت ـ ٧ من التذييل الذى فى آخر الكتاب عن الحقائق الأساسية فى الهندسة التحليلية ، مع أجزاء من الفصول من واحد الى خمسة ، وأى أجزاء إضافية من الفصول من واحد الى سبعة أو من الهندسة التحليلية إذا وجد وقت لذلك .

تفهم حساب التفاضل والتكامل يعتمد على فهم بدهى للموضوع . برهان النظرية لايعنى كثيراً للطالب الذى لايفهم النظرية . لقد حاولت أن أغذى هذا الفهم بتقديم الأفكار الجديدة بالتدريج ، موضحا بأمثلة كثيرة . لقد أعطيت التفسير الهندسى للمفهوم أو النظرية كلما أمكن ذلك . إن الدارس يفقد الكثير فى الرياضيات إذا كان غير مدرك لتركيبها وطبيعتها الاستنتاجية . فيما عدا حذف براهين قليلة تبدو أنها صعبة بالنسبة الى منهاج أولى فى حساب التفاضل والتكامل ، فان الكتاب يطور الموضوع بأسلوب منطقى ، مفترضاً فقط خواص الأعداد الحقيقية . ولمساعدة هؤلاء الذين يفضلون مدخلا سهلا لحساب التفاضل والتكامل ، وضعنا براهين النظريات الأكثر صعوبة فى نهاية البند أو فى بند متفصل فى نهاية الفصل . بهذه الكيفية يمكن حذفها بسهولة . ولقد حاولت جعل العرض واضحا وبسيطا بقدر الامكان . وقد اشتمل الكتاب فقط على التعريفات والنظريات الضرورية لتطور الموضوع بعناية وبدرجة معتدلة من الكمال . التطبيقات جزء هام من مقرر أولى فى حساب التفاضل والتكامل فلم تهمل هنا . بالاضافة الى التطبيقات المعتادة من الفيزياء والعلوم الهندسية فانه يوجد بند على التطبيقات فى الاقتصاديات .

حيث أن كثيرا من الطلاب يأتون الآن الى الكليات وهم على معرفة ما أو حتى على إلمام كبير بالهندسة التحليلية ، فقد بدا أنه من الأفضل عدم إدماج هذه المادة مع الباقى بل وضعها فى تذييل فى آخر الكتاب . بهذه الصورة من السهل على المحاضر أن يغطى كثيراً أو قليلا من المادة على حسب رغبته .

فقط البنود من ت ـ ١ الى ت ـ ٧ عن المستقيمات والدوائر والقطع المكافىء تلزمنا فى حساب التفاضل والتكامل المقدم هنا . المادة عن القطوع المخروطية الاخرى وعن نقل ودوران المحاور يمكن قراءتها فيما بعد أو حتى حذفها إذ أنها تستخدم فقط عرضا فى الكتاب . وقد عولجت الهندسة التحليلية بتفصيل أكثر مما هى عليه فى كثير من الكتب الحديثة حتى أن الطالب يمكنه أن يتعلم أو يراجع المادة بنفسه مع مساعدة بسيطة من المدرس . لقد استخدمنا هذه الطريقة بنجاح لسنوات عديدة فى Mount Holyoke College . المادة عن الهندسة التحليلية فى البنود من ت ـ ١ الى ت ـ ٧ قد استخدمت فى الفصل الثانى . اذا كانت لتدرس فى الفصل ، فالوقت الملائم لدراستها يمكن أن يكون بعد الفصل الأول مباشرة .

بدلا من التعريف (epsilon - delta) للنهاية ، قد استخدمنا الجوار . من تجربتى ، الجوار يجعل تعريف النهاية أسهل للفهم ويبسط براهين بعض نظريات النهاية . المعكوس التفاضلى قدم مع التفاضل لكل نوع درس من الدوال . هذا يقوى فهم الطالب للأسلوب التكنولوجى للتفاضل ويسمح بمقدمة مبكرة عن المعادلات التفاضلية . هاته قد درست خلال الكتاب وليس فى فصل مستقل . نوع من المعادلات التفاضلية قد عولج بمجرد أن أصبح الطالب لديه الكيفية اللازمة لحلها ، وهذا يعطيه خبرة عملية فى تطبيق هام لحساب التفاضل والتكامل .

الفصل الأول مقدمة ويعالج موضوعات فى الجبر قد لاتدرس فى بعض المدارس الثانوية ، وهى لها أهميتها فى حساب التفاضل والتكامل . معظم الفصل وصفى ويمكن الطالب فهمه بدون مساعدة . البند ١ ـ ٦ عن كثيرات الحدود يمكن تأجيله بدون فقد الاتصال .

أولئك الذين يرغبون مقدمة مبكرة عن التكامل المعين يمكنهم قراءة الفصل الخامس عن التكامل قبل الفصل الرابع عن تطبيقات المشتقة . اذا عمل ذلك ، فينبغى على الطالب أن يقرأ أولا ذلك الجزء من البند ٤ ـ ١ عن القيمة العظمى للدالة المتصلة فى فترة محدودة مقفلة . أيضا الفصلان السادس والسابع عن الدوال المثلثية واللوغاريتمية يمكن قراءتهما بأى ترتيب ، بشرط أن نأخذ الحرص فى اختيار المسائل . دراسة الخواص الأساسية لحساب التفاضل والتكامل أكملت فى الفصل السابع . ابتداء من الفصل الثامن ، الفصول مستقلة عن بعضها الى حد كبير ، ويمكن قراءتها بأى ترتيب ، وأى واحد منها يمكن حذفه بدون فقد خطير لاتصال المادة .

لكى يكون للمدرس مجال للاختيار ، قد أدخلت موضوعات أكثر مما يمكن تغطيته فى منهاج لمدة عام دراسى واحد . المسائل المميزة بعلامة نجم تدرس نظريات تستخدم فى مادة لاحقة .

أنا أشكر Mrs. William W. Zebrowski لمعاونتها فى الكتابة على الآلة الكاتبة واعداد الأصول ، وأيضا

Mr. Chin - hung Ching and Miss Katherine F. Bergmann

اللذين أعدا أجوبة المسائل ، وأيضا

Miss Elizabeth T. Durfee and Mr. William K. Durfee

اللذين عاونا فى الفهرست والتوضيحات .

وأخيرا ، من دواعى سرورى أن أعبر عن تقديرى لزوجتى لمعاونتها فى الكتابة على الآلة الكاتبة ، وبالأكثر لتشجيعها وصبرها أثناء كتابة هذا الكتاب .

William H. Durfee

وليم هـ . دورفى

الفصل الأول

الأوليات الجبرية

حساب التفاضل والتكامل هو محور الرياضيات الأولية بسبب أفكاره وأساليبه وتطبيقاته . وقد اكتشفه فى وقت واحد ، كل مستقلا عن الآخر ، الفيزيائى الإنجليزى إسحق نيوتن (١٦٤٢ - ١٧٢٧) والفيلسوف الألمانى جوتفرد ليبنز (١٦٤٦ - ١٧١٦) . واكتشافه فى نهاية القرن السابع عشر كان بداية لعصر جديد فى العلوم والرياضيات .

توصل نيوتن إلى حساب التفاضل والتكامل فى بحثه عن حلول لمسائل فى الفيزياء والفلك . ومنذ ذلك الوقت أصبح حساب التفاضل والتكامل وسيلة ضرورية لتلك العلوم ولعلوم أخرى ، ونموها السريع بعد نيوتن يرجع إلى حد كبير إلى حساب التفاضل والتكامل . تقدم حساب التفاضل والتكامل بسرعة خلال القرن التالى إلى ما هو عليه الآن تقريبا . وبعد ذلك اتجه الاهتمام الى فحص شروط وبراهين نظرياته ودراسة امتداده ، التحليل الرياضى .

معظم المواقف الفيزيائية تشتمل على كميات تعتمد على كميات أخرى . المسافة التى يسقطها حجر تعتمد على الزمن الذى يستغرقه الحجر فى السقوط . ضغط الغاز فى إناء مغلق يعتمد على حجم الإناء . قوة الجذب بين الشمس وكوكب تعتمد على المسافة بينهما . عادة الكمية الثانية لاتكون ثابتة بل متغيرة . حساب التفاضل يوضح بدقة كيف يؤثر هذا التغير على الكمية الأولى ، ومن ثم يمكن الحصول على معلومات عن الكمية الأولى . فمثلا ، معدل تغير المسافة لحجر ساقط يعطى السرعة عند أى لحظة .

كثيرا ما يقابلنا الموقف العكسى . لانعلم العلاقة بين الكميتين ، لكن نعلم كم تتأثر الكمية الأولى بتغير فى الثانية . حساب التفاضل يمكننا من استخدام هذه المعلومات لتعيين العلاقة بين الكميتين . مثال ذلك ، من المعروف أنه خلال فترات قصيرة من الزمن الزيادة فى عدد السكان بدولة ما يتناسب مع عدد الأشخاص الموجودين عندئذ . من ذلك يمكننا أن نتنبأ بعدد السكان عند أى وقت فى المستقبل .

هذه بعض استخدامات حساب التفاضل . الفرع الآخر للحساب ، أى حساب التكامل ، يتناول مسائل مثل إيجاد المساحات والحجوم ومركز ثقل مناطق مستوية ومصمتة . لكن أهمية حساب التكامل تذهب بعيدا عن هذه التطبيقات البسيطة . فهو يستخدم فى الفيزياء والعلوم الهندسية لحساب القوة على سدوالشغل المبذول فى تحريك شحنة كهربية خلال مجال كهربى ورفع جناح

طائرة . تعميمات حساب التكامل إلى نظرية القياس والتكامل لها أثر جوهرى فى الرياضيات الحديثة ، فهى تعطى الرياضيين رؤ يا أعمق للموضوعات القديمة وتفتح مجالات جديدة للدراسة .

بالرغم من فائدة أجزاء من الرياضيات ، فإن معظم الرياضيات ليس لها تطبيق عملى . فقد درس الاغريق الرياضيات لتحدياتها الفكرية ، ولثراء المادة وجمالها . وهى تدرس الآن من كثيرين لنفس الأسباب .

رغم أننا نفترض أن القارىء قد درس الجبر الأولى ، فإنه توجد حقائق جبرية معينة لاتدرس دائما فى المدرسة الثانوية وهى مفيدة لحساب التفاضل والتكامل . قبل البدء فى حساب التفاضل والتكامل ندرس من الحقائق الجبرية ماهو أهمها .

١ - ١
الفئات

الفئة ليست أكثر من فصيلة أو تجمع من أشياء . الفكرة أساسية لدرجة أنه لاجدوى من محاولة تعريف المصطلح . أحسن مايمكن عمله هو إعطاء بعض التوضيحات . بعض الأمثلة عن الفئات هى :

١ - فئة كل الكتب فى المكتبة العامة بنيويورك .
٢ - فئة كل الكتب فى العلوم فى المكتبة العامة بنيويورك .
٣ - فئة كل الكتب ذات الغلاف الأحمر فى المكتبة العامة بنيويورك .
٤ - فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة ، أى الأعداد ... 1, 2, 3
٥ - فئة كل الأعداد بين 1, 2 شاملة العددين .
٦ - فئة كل الدوائر التى نصف قطرها 5 فى مستوى ما .
٧ - فئة كل الولايات الامريكية التى اسمها يبدأ بالحرف F .
٨ - فئة كل الأعداد الصحيحة بين 27 و 4 وتقبل القسمة على 5.

الأشياء التى تكوّن الفئة تسمى عناصرها . الفئات فى ٤ ، ٥ ، ٦ أعلاه تشتمل على عدد لانهائى من العناصر وتسمى فئات لانهائية . الفئات الأخرى فئات محدودة .

الفئة فى ٧ تحتوى على عنصر واحد فقط ، ولاية Florida سوف نختص فى الغالب بفئات الاعداد مثل الفئتين ٤ ، ٨ .

الفئات يمكن وصفها بطرق كثيرة . غالبا ، ما يستخدم وصف كلامى ، كما سبق . اذا كانت الفئة بها عدد صغير من العناصر ، يمكن وصفها بكتابة عناصرها بين قوسين . مثال ذلك ، الفئة فى ٨ يمكن أيضا وصفها بـ { 5,10,15,20,25 } . طريقة معتادة لوصف الفئة A المكونة من جميع العناصر التى لها الخاصية P هى أن نكتب

$$A = \{x \mid P\} \qquad (١)$$

وهذه تقرأ « A فئة جميع العناصر x التى لها الخاصية P » ، مثال ذلك ، إذا كانت A هى فئة كل الاعداد بين 2 و 1 ، شاملة العددين ، فإن A يمكن وصفها بـ

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

اذا كانت $N = \{1,2,3, \ldots\}$ ، فان الفئة

$$B = \{4,7,10,13, \ldots\}$$

يمكن وصفها بـ

$$B = \{x \mid x = 3n + 1,\ n \text{ in } N\}$$

يمكننا أيضا كتابة

$$B = \{3n + 1 \mid n \text{ in } N\}$$

الفئة المحتواة فى فئة أخرى تسمى فئة جزئية لتلك الفئة . هذا يحضرنا إلى تعريفنا الأول .

١ ـ ١ تعريف . الفئة A هى فئة جزئية من الفئة B اذا كان كل عنصر بالفئة A هو أيضا عنصر بالفئة B . الرمز لذلك هو $A \subseteq B$.

مثال ذلك ، اذا كانت X و Y وZ هى الفئات فى ١ ، ٢ ، ٣ ، أعلاه ، فإن $Y \subseteq X$ و $Z \subseteq X$.
احدى النتائج لتعريفنا هى أن كل فئة A تكون فئة جزئية لنفسها ، أى أن ، $A \subseteq A$.

الفئة الخاوية هى الفئة التى ليس بها عناصر . يرمز لها بـ $\emptyset$ وتعتبر فئة جزئية لكل فئة . فئة جميع البقرات الخضراء هى فئة خاوية . كذلك أيضا فئة كل الأعداد التى هى أكبر من 10 وأصغر من 7 . أى أن

$$\{x \mid x > 10 \text{ and } x < 7\} = \emptyset$$

إذا كانت A و B فئتين ، فان الفئة المكونة من جميع العناصر التى فى الفئة A أو فى الفئة B تسمى اتحاد الفئتين A و B ويرمز لها بـ $A \cup B$ أى أن

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ in } A \text{ or } x \text{ in } B\}$$ •

الفئة المكونة من العناصر التى فى كلتا الفئتين B و A تسمى تقاطع الفئتين B و A ويرمز لها بـ $A \cap B$. أى أن

$$A \cap B = \{x \mid x \text{ in } A \text{ and } x \text{ in } B\}$$

مثال ذلك ، إذا كانت $A = \{1,-2,0,4\}$ و $B = \{3,1,4,\frac{2}{3}\}$ فان

$$A \cup B = \{1,-2,0,4,3,\tfrac{2}{3}\} \quad \text{و} \quad A \cap B = \{1,4\}.$$

• تستخدم كلمة أو فى الرياضيات بمعادن مختلفة عنها فى اللغة الانجليزية العادية . ففى الأخيرة تعنى إمكانية واحدة أو الأخرى ولكن ليست كلتيهما . اما فى الرياضيات فانها تشير إلى إمكانية كلتيهما . فمثلا العنصر فى AUB إذا كان فى A أو فى B أو فى كليهما .

اذا كانت Y و Z الفئتين فى ٢ ، ٣ أعلاه ، فإن $Y \cap Z$ هى فئة كل الكتب فى العلوم ، ذات الغلاف الأحمر ، فى المكتبة العامة بنيويورك ، وأما $Y \cup Z$ فهى فئة كل الكتب فى المكتبة العامة بنيويورك التى فى العلوم أو ذات الغلاف الأحمر أو كلتاهما .

يمكننا أيضا أن نتكلم عن الاتحاد والتقاطع ليس لفئتين فقط . بل لأى عدد من الفئات اتحاد أى عدد من الفئات هو الفئة التى تشتمل على العناصر التى هى على الأقل فى إحدى الفئات المعطاة ، والتقاطع هو الفئة التى تشتمل على العناصر التى هى فى كل الفئات المعطاة .

مسائل

صف كلا من الفئات الآتية بكتابة عناصرها داخل قوسين :

١ ـ فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أقل من أو تساوى العدد 6 .

٢ ـ فئة جميع القارات فى نصف الكرة الأرضية الشرقى .

٣ ـ فئة كل الأعداد التى مربعاتها هى العدد 9 .

٤ ـ الفئة المكونة من مربعات جميع الأعداد الصحيحة بين 4 و 4— بما فيها العددان .

٥ ـ فئة جميع المثلثات المستوية التى حاصل جمع زواياها أقل من °180 .

صف الفئات الآتية بالكلمات . أذكر عنصرين فى الفئة ، إذا وجد ، وعنصرين ليسا فى الفئة . R ترمز لفئة كل الأعداد ، Z ترمز لفئة كل الأعداد الصحيحة أى أن ،

$Z = \{. \; . \; . \; ,-3,-2,-1,0,1,2,3, \; . \; . \; .\}$

٦ ـ $\{x \text{ in } R \mid x < -5\}$

٧ ـ $\{2^n \mid n \text{ in } Z,\ n > 0\}$

٨ ـ $\{(x,y) \mid x \text{ and } y \text{ in } Z\}$

٩ ـ $\{(x,y) \mid x \text{ in } R,\ y \text{ in } R,\ x \geq 0\}$

١٠ ـ $\{(x,y) \mid x \text{ in } R,\ y \text{ in } R,\ x - 2y = 0\}$

١١ ـ $\{y \text{ in } R \mid 2y^2 + y - 15 = 0\}$

١٢ ـ $\{x \text{ in } R \mid x^2 + 1 = 0\}$

١٣ ـ $\{z \text{ in } R \mid z^2 \leq 2\}$

أكتب الفئات التالية برموز الفئات المستخدمة فى (١) . أرمز لفئة كل الأعداد بـ R ولفئة كل الأعداد الصحيحة بـ Z .

١٤ ـ فئة جميع الأعداد التى هى أكبر من $\frac{3}{4}$.

١٥ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة التى هى أكبر من $\frac{3}{4}$.

١٦ ـ فئة كل (x . y) ، حيث x , y عددان يحققان $x^2 + y^2 = 25$.

١٧ ـ فئة كل الأعداد الصحيحة التى هى مضاعف للعدد 3 .

١٨ ـ $\{3, 7, 11, 15, 19, \ldots\}$.

١٩ ـ فئة كل الأعداد الصحيحة الموجبة التى هى أقل من 100 وتقبل القسمة على 6 .

٢٠ ـ فئة كل الأعداد التى مكعباتها أكبر من 4 .
٢١ ـ اعط مثالين لفئة تحتوى عنصرا واحدا .
٢٢ ـ اعط مثالين لفئة خاوية .
٢٣ ـ اعط مثالا لفئة عناصرها فئات .
٢٤ ـ إذا كان $A = \{ a, b, c \}$ ، اكتب الفئات الجزئية الثمانية الممكنة لـ A .
٢٥ ـ أثبت أنه اذا كانت A و B و C فئات وكانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، فإن $A \subseteq C$.
٢٦ ـ إذا كانت $A = \{ 1, 3, -4, 7, 8 \}$ و $B = \{ -7, 3, 1, 0, 8 \}$ فأوجد $A \cup B$ و $A \cap B$.
٢٧ ـ إذا كانت $A = \{ 0, 1, 3 \}$ و $B = \{ 2, -1, 4 \}$ فأوجد $A \cup B$ و $A \cap B$.
٢٨ ـ إذا كانت $A = \{ 0, 6, -3, 1, 2 \}$ و $B = \{ 0, 4, -3, 1 \}$ و $C = \{ 1, 5, 3, -3 \}$
فأوجد $A \cap B,\ A \cup C,\ (A \cup B) \cup C,\ (A \cup B) \cap C,\ (A \cap B) \cup C,\ A \cap B \cap C.$
٢٩ ـ إذا كانت $A = \{ a, b, c, d \}$ و $B = \{ b, x, y \}$ و $C = \{ x, a, c, z \}$ فأوجد
$A \cup C,\ A \cap B,\ A \cup B \cup C,\ A \cap B \cap C$.
٣٠ ـ ماهو اتحاد وتقاطع الفئات فى المسألتين ١ ، ٤ ؟
٣١ ـ إذا كانت $A \subseteq B$, فأثبت أن $A \cup B = B$ و $A \cap B = A$.
٣٢ ـ اثبت أنه لكل فئتين A و B يكون
$A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A$.
٣٣ ـ هل من الصحيح أن لكل ثلاث فئات A وB و C يكون $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ ؟
٣٤ ـ دع $N(X)$ ترمز لعدد العناصر فى الفئة X ، فمثلا ، $N(C) = 4$ فى المسألة ٢٨ . اعط مثالا فيه $N(A \cup B) \neq N(A) + N(B)$. متى يكون $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$ ؟
أوجد صيغة لـ $N(A \cup B)$ بدلالة $N(A \cap B)$ و $N(A)$ و $N(B)$ تكون صحيحة لكل فئتين B و A .
٣٥ ـ احصائية لمائة عائلة أظهرت أن منهم 55 عائلة تملك سيارة ماركة شيفروليه ، 37 عائلة تملك سيارة فورد ، 33 عائلة لها سيارة بلايموث ، 12 عائلة لها سيارة شيفروليه وسيارة فورد ، 9 عائلات لها سيارة فورد وسيارة بلايموث ، 11 عائلة لها سيارة بلايموث وسيارة شيفروليه ، 4 عائلات لها كل السيارات الثلاث . كم من الـ 100 عائلة ليس لها سيارة من الأنواع الثلاثة ؟

١ ـ ٢
الأعداد

فئة الأعداد تقسم إلى تسلسل من الفئات الجزئية . رغم أن كل فئة جزئية لها أهميتها وقد درست بتوسع ، إلا أننا سنكتفى هنا بإعطاء موجز عنها لكى يعرف القارىء المصطلحات الخاصة بها .

أبسط الأعداد هى التى استعملها الانسان أولا ، أعداد العد : .... ,1, 2, 3فهى تسمى الأعداد الطبيعية . إذا أضفنا الى هذا التجمع العدد صفرا والأعداد السالبة للأعداد الطبيعية ، فإننا نحصل على فئة هامة هى فئة الأعداد الصحيحة :

$$. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

أى عدد يمكن التعبير عنه كخارج قسمة عددين صحيحين يسمى عددا كسريا . بعض الأمثلة للأعداد الكسرية هى $\frac{10}{16}$ و $\frac{1}{2}, -\frac{2}{4}$. لكى يكون العدد كسريا ، ليس ضروريا أن تكون كل طريقة للتعبير عنه خارج قسمة عددين صحيحين . إذا كان يوجد أى خارج قسمة لعددين صحيحين يساوى العدد ، فهو عدد كسرى . الأعداد

$$6, \quad -\frac{3}{5}, \quad و \quad \frac{8\sqrt{3}}{7\sqrt{12}}$$

هى أعداد كسرية لأن كلا منها يمكن التعبير عنه كخارج قسمة عددين صحيحين وهى

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{-3}{5}, \quad و \quad \frac{4}{7}.$$

بما أن كل عدد صحيح a يمكن التعبير عنه فى الصورة a/1 فإن كل عدد صحيح هو عدد كسرى ، وعليه فان فئة الأعداد الصحيحة هى فئة جزئية لفئة الأعداد الكسرية . الأعداد الممثلة بكسور عشرية محدودة أو بكسور عشرية لانهائية متكررة هى أعداد كسرية . فمثلا ، 5.343 ترمز إلى $\frac{5343}{1000}$ و ....0,666 ترمز الى $\frac{2}{3}$ الكسور العشرية اللانهائية غير المتكررة تمثل اعداد غير كسرية .

الأعداد التى ليست كسرية تسمى غير كسرية . . بعض الأعداد المعروفة بأنها غير كسرية هى $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}, \log 3, \sin 41°$. فى عام 1761 برهن على أن العدد π عدد غير كسرى ، لكن حديثا فى عام 1934 فقط تبين أن $2^{\sqrt{3}}$ عدد غير كسرى ، ولايزال غير معروف ما اذا كانت 3^{π} عددا كسريا أم غير كسرى .

الأعداد الكسرية والأعداد غير الكسرية معا تكون فئة **الأعداد الحقيقية** . بين أى عددين حقيقيين يوجد عدد كسرى (المسألة ١٩ ، ببند ١ ـ ٣) . هذا يتضمن وجود عدد لانهائى من الأعداد الكسرية بين أى عددين حقيقيين (المسألة ١٢) . باستخدام هذه الحقيقة ، يمكن إثبات وجود أعداد كسرية أصغر وأكبر من أى عدد حقيقى معطى وقريبة منه قربا اختياريا . التقريبات العشرية لعدد هى أمثلة لهذه الأعداد الكسرية . فمثلا ، الأعداد الكسرية

$$. \ 1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142,$$

مربعاتها أقل من 2 ولذلك هى أقل من $\sqrt{2}$ ، وتقترب منها أكثر فأكثر . بمتابعة المتابعة وفقا للتقريب العشرى لـ $\sqrt{2}$ يمكن إيجاد أعداد كسرية قريبة قربا اختياريا من $\sqrt{2}$.

العدد المركب هو عدد على الصورة a + bi ، حيث a و b عددان حقيقيان وحيث $i^2 = -1$. وحيث أن أى عدد حقيقى a يمكن كتابته على الصورة a + 0i ، فإن كل عدد حقيقى هو أيضا عدد مركب . العدد المركب a + bi يقال إنه تخيلى إذا كان $b \neq 0$. الأمثلة هى $5i, 2-\sqrt{3}i$.

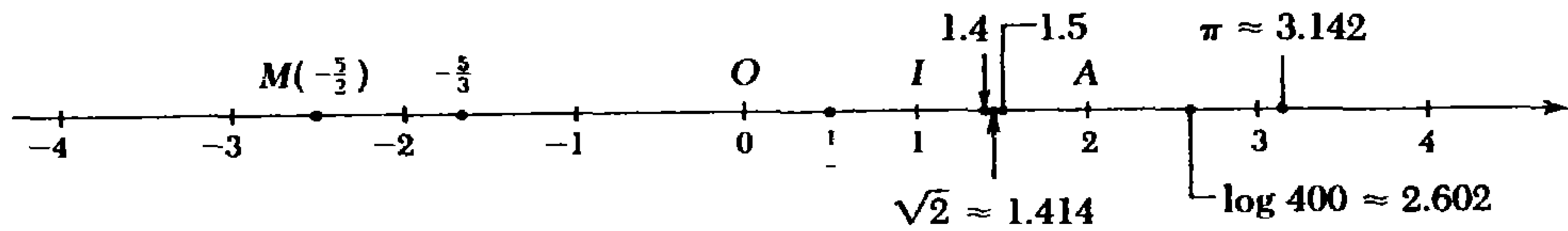
العلاقات المتبادلة بين فئات الأعداد التى ذكرناها أعلاه يوضحها الرسم الآتى :

الأعداد الطبيعية ⊇ الأعداد الصحيحة ⊇ الأعداد الكسرية } الأعداد غير الكسرية

⊇ الأعداد الحقيقية } ⊇ الأعداد التخيلية

⊇ الأعداد المركبة

سنختص أساسا بالأعداد الحقيقية ،



شكل ١ - ١
خط الاحداثيات

وعندما نستخدم الكلمة غير المميزة « عدد » فإننا نقصد عددا حقيقيا .

الأعداد الحقيقية يمكن تمثيلها تصويريا . خذ خطا مستقيما ، من المناسب أن يوضع أفقيا (شكل ١ ـ ١) . لتكن I وO نقتطين على الخط المستقيم حيث I على يمين O . ندع العددين صفر ، والواحد الصحيح يناظران I و O ونكتب 1و O تحت هاتين النقطتين . النقطة O تسمى **نقطة الأصل** . للنقطة A الواقعة على يمين I بمسافة مثل مسافة I من O نخصص العدد 2. للنقطة على يمين A مرة أخرى بنفس المسافة نخصص العدد 3 وهكذا . العدد 1 − يتعين بالنقطة الواقعة بنفس البعد ليسار O مثل I على اليمين ، والأعداد الصحيحة السالبة الأخرى تتعين كما هو موضح بالشكل . العدد $\frac{1}{2}$ يتعين بنقطة فى منتصف المسافة بين I و O ، العدد $-\frac{5}{3}$ يتعين بنقطة فى ثلثى المسافة بين 2 — , 1 — وأقرب إلى الثانى ، وبالمثل مع الأعداد الكسرية الأخرى .

الأعداد غير الكسرية يمكن أيضا تخصيصها لنقط على الخط المستقيم . اذا كان العدد a أقل من العدد b ، فإن النقطة المناظرة لـ a تكون على يسار النقطة المناظرة لـ b. هذا يعنى أن النقطة المناظرة لـ $\sqrt{2}$ ستقع بين النقطتين المناظرتين لـ 1,2 . المفكوك العشرى لـ $\sqrt{2}$ صحيحا لستة أرقام عشرية هو 1.414214. يمكننا استخدام هذا لتحديد موضع النقطة بدقة اكثر بملاحظة أنها ستقع بين النقطتين المناظرتين لـ 1.5 و *1.4* إذ أن $\sqrt{2}$ يقع بين هذين العددين الكسريين . يمكن وضعها أكثر ضبطا بين النقطتين المناظرتين للعددين 1.42 و 1.41 . بالاستمرار بهذه الكيفية ، النقطة المناظرة لـ $\sqrt{2}$ يمكن تحديد موضعها لأى درجة من الدقة .

نفترض ، كما يمكن إثبات ، أن كل عدد حقيقى يمكن تخصيصه لنقطة وحيدة وبالعكس .

إذا كانت a العدد المناظر للنقطة P ، فان a تسمى احداثى P وتشير إلى ترابطهما بالرمز P (a) . الاشارة إلى النقطة $M(-\frac{5}{2})$ ، مثلا ، تعنى النقطة M التى احداثيها هو $-\frac{5}{2}$.

الخط المستقيم باعداد حقيقية مخصصة له بالكيفية التى سبق شرحها ، يسمى خط الأحداثيات أو الخط الحقيقى . بسبب التناظر بين الأعداد والنقط ، فان الأعداد كثيرا مايشار إليها كنقط ، ونتكلم عن « النقطة 5 » بمعنى « النقطة التى احداثيها 5 » .

اذا كانت b و a عددين ، وكانت $b \neq 0$ ، فإن a/b هو حل المعادلة $b\,x = a$. فمثلا $\frac{12}{5}$ هو حل المعادلة $5\,x = 12$. إذا كانت $a \neq 0$ ، فلا يوجد عدد x بحيث أن $O\,x = a$ ، ولذلك الرمز $a/0$ منطقيا لايمثل أى عدد حقيقى . بما أن أى عدد x هو حل للمعادلة $O\,x = O$ ، فلذلك الرمز O/O سيمثل أى عدد ، فهو مبهم . وعليه فمقام الكسر لايمكن أن يكون صفرا .

المعادلة تصريح بأن التعبيرين على طرفى المتساوية يمثلان نفس العدد . كأى تصريح ، يمكن أن يكون صحيحا أو غير صحيح . إذا كانت المعادلة تحوى حروفا فان صحتها أو عدمه تعتمد على القيم المخصصة للحروف . فهى قد تكون صحيحة لبعض ، لكل ، أو للاقيمة للحروف . المعادلة

$$a^2 - 2a = 8$$

صحيحة عندما a تكون 4 أو -2 وغير صحيحة عندما a تكون واحدا صحيحا . المعادلة

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

صحيحة لكل عدد x المعادلة

$$2x + 3 = (3x + 5) - x$$

غير صحيحة لأى x . من المصطلح عليه فى الكتابات الرياضية أنه إذا كانت معادلة تحتوى حروفا ، فيفهم أن الكاتب يقصد أن المعادلة صحيحة لكل قيم الحروف التى تجعل الحدود معرّفة إذا لم ينص عكس ذلك . فمثلا ، عند رؤية النص البسيط

$$\frac{x^2 - 25}{x - 5} = x + 5 \qquad (١)$$

نفترض أن الكاتب يصرح بأنها صحيحة لكل $x \neq 5$ لأنه لم يذكر شيئا عكس ذلك . مع أن القيد $x \neq 5$ لم يذكر صراحة ، فهو مفهوم ضمنيا إذ أن الطرف الأيسر من (١) غير معرف عند $x = 5$. التعبير « حل المعادلة $3\,x - 7 = 9$ » يشير إلى أن المعادلة $3\,x - 7 = 9$ لايعتبر أنها صحيحة لكل قيم x . فى الواقع ، المسألة هى إيجاد قيم x التى تجعل المعادلة صحيحة .

من الواضح أنه إذا كانت $a = 0$ أو $b = 0$ ، فإن $a\,b = 0$. العكس أيضا مهم : إذا كانت $a\,b = 0$ ، فإما $a = 0$ أو $b = 0$. لأنه إذا كانت $a \neq 0$ ، فإن $1/a$ تكون موجودة ويمكننا ضرب طرفى المعادلة $a\,b = 0$ فى $1/a$

$$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}0$$

ونستنتج أن $b = 0$. بالمثل ، إذا كانت $b \neq 0$ ، فيجب أن يكون $a = 0$. العكس يساعد فى حل المسائل . فمثلا واضح أن 3 و1 حلان للمعادلة

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$$

هذان هما الحلان الوحيدان ، لأنه إذا كانت c أى حل ، فإن

$$(c-1)(c-3) = 0$$

العكس يكون ، $c - 1 = 0$ أو $c - 3 = 0$. أى أن 1 أو $c = 3$ النتيجة يمكن تعميمها لأكثر من عاملين .

١ ـ ٢ نظرية . إذا كانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعدادا ، بحيث أن $a_1 a_2 \ldots a_n = 0$ ، فان $a_i = 0$ على الأقل لعدد واحد a_i ، حيث $i = 1, 2, \ldots, n$.

البرهان متروك للقارىء (المسألة ٣٠) .

الكسر يكون صفرا فقط إذا كان بسطه صفرا ، لأنه إذا كان

$$\frac{a}{b} = 0,$$

فبما أن

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b}$$

وأيضا $1/b \neq 0$ (لماذا ؟) ، فإن بالنظرية ١ ـ ٢ ، يجب أن يكون $a = 0$. يستخدم ذلك فى حل المعادلات المحتوية على خوارج قسمة ، مثل

$$\frac{3(2x-5)}{x^2-1} = 0$$

أى قيمة لـ x تجعل الطرف الأيسر للمعادلة (2) صفرا يجب أن تجعل البسط صفرا . واذن علينا فقط أن نبحث عن قيمة x حيث $3(2x-5) = 0$ ، وهى $x = \frac{5}{2}$. لكن يجب الحرص أن قيمة x هذه لاتجعل أيضا المقام صفرا . اذا كانت كذلك ، فهى ليست حلا للمعادلة (2) .

مسائل

الفئة S من الأعداد يقال إنها مقفلة بالنسبة إلى الجمع إذا كان لكل عنصرين a,b بالفئة S حاصل جمعهما $a + b$ يكون أيضا بالفئة S . بالمثل ، S تكون مقفلة بالنسبة إلى الضرب إذا كان لكل عنصرين a , b بالفئة حاصل ضربهما $a\,b$ يكون أيضا بالفئة . أى الفئات الاتية مقفلة بالنسبة إلى الجمع ؟ مقفلة بالنسبة إلى الضرب ؟

١ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة .

٢ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية . (العدد الصحيح الزوجى هو عدد على الصورة $2n$. حيث n عدد صحيح .)

٣ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة الفردية . (العدد الصحيح الفردى هو عدد على الصورة $2n + 1$ ، حيث n عدد صحيح .)

٤ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة السالبة .

٥ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة التى هى مضاعف للعدد 6 .

٦ ـ فئة جميع الأعداد 2^n ، حيث n عدد صحيح .

٧ ـ فئة جميع الأعداد الحقيقية التى على الصورة $a + b\sqrt{2}$ ، حيث a , b عددان صحيحان .

٨ ـ أعط مثالا لعددين غير كسريين مجموعهما (a) عدد كسرى ، (b) غير كسرى . اعط مثالا لعددين غير كسريين حاصل ضربهما عدد كسرى .

٩ ـ اثبت أن أى عدد كسرى يمكن كتابته على الصورة m / n ، حيث m و n عددان صحيحان وحيث n موجبة .

١٠ ـ اثبت أن حاصل جمع وحاصل ضرب وخارج قسمة عددين كسريين تكون أعدادا كسرية [ارشاد : اذا كانت r_2 و r_1 عددين كسريين ، فانه توجد أعداد صحيحة m_1, n_1, m_2, n_2 بحيث أن $r_1 = m_1 / n_1 , r_2 = m_2 / n_2$ ويكون $r_1 + r_2 = (m_1 n_2 + m_2 n_1) / n_1 n_2$] .

١١ ـ أثبت أنه بين أى عددين كسريين يوجد عدد كسرى آخر . من الأصعب إثبات أنه يوجد عدد كسرى بين أى عددين حقيقيين (المسألة ١٩ ببند ١ ـ٣)

١٢ ـ بفرض أنه يوجد على الأقل عدد واحد كسرى بين أى عددين حقيقيين ، اثبت أنه يجب أن يوجد عدد لانهائى من الأعداد الكسرية بين أى عددين حقيقيين .

١٣ ـ المفكوك العشرى للعدد $\sqrt{3}$ صحيحا لستة أرقام عشرية هو 1.732051 . أوجد متتابعة من ستة أعداد كسرية كل منها أقل من $\sqrt{3}$ بحيث أن الأول يختلف عن $\sqrt{3}$ بأقل من 0.1 والثانى بأقل من 0.01 ، والثالث بأقل من 0.001 ، وهكذا . أوجد متتابعة مماثلة كل حد فيها أكبر من $\sqrt{3}$.

أوجد كل الحلول للمعادلات الآتية :

١٤ ـ $3x + 5 = 7 - x$

١٥ ـ $\frac{7x - 3}{x} = 0$

١٦ ـ $2x^2 - 3x = x^2 + 7x - 21$

١٧ ـ $3x^2 + x + 6 = 2x^2 - 7x - 10$

١٨ ـ $3x + 8 = x + 2 + 2x - 6$

١٩ ـ $\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 4} = 0$

٢٠ ـ $\frac{x^2 + 10x + 25}{x + 5} = 0$

٢١ ـ $2x + \frac{x}{x - 3} = x + 3 + \frac{x}{x - 3}$

٢٢ ـ $x^3 + 10x = -7x^2$

حل معادلات الدرجة الثانية الآتية بإكمال المربع . [إرشاد : تذكر أن لاكمال المربع على $x^2 + bx$ نضيف $(b/2)^2$ إذ أن $x^2 + bx + (b/2)^2 = (x + b/2)^2$. قبل إكمال المربع يجب قسمة المعادلة على معامل x^2 .)

٢٣ - $x^2 + 4x - 5 = 0$ ٢٤ - $x^2 - 6x + 2 = 0$

٢٥ - $4x^2 + 28x + 49 = 0$ ٢٦ - $3x^2 + x - 10 = 0$

٢٧ - (أ) بإكمال المربع على الطرف الأيسر للمعادلة $a x^2 + b x + c$ اشتق الصيغة التربيعية

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لجذرى المعادلة من الدرجة الثانية . أى نظرية أنت تستخدمها هنا ؟ (إرشاد : قبل إكمال المربع اقسم المعادلة على a) . (ب) اثبت أنه وفقا لكون المقدار $b^2 - 4ac$ موجبا أو صفرا أو سالبا ، المعادلة $ax^2 + b x + c = o$ يكون لها جذران حقيقيان وغير متساويين أو جذر حقيقى واحد أو جذران تخيليان .

٢٨ - اثبت أنه لايوجد أصغر عدد حقيقى موجب .

٢٩ - أثبت أن $1/b \neq 0$ لأى b .

٣٠ - اثبت النظرية ١ - ٢ . [إرشاد : اكتب $a_1 a_2 \ldots a_n$ فى الصورة $(a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n$] .

١ - ٣

المتباينات

العدد a يقال إنه موجب إذا كان $a > 0$ وإنه سالب اذا كان $a < 0$. وهو غير سالب إذا كان $a \geqslant 0$ وغير موجب إذا كان $a \leqslant 0$. الصفر ليس موجبا ولاسالبا . العددان يقال أن لهما نفس الإشارة إذا كان كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين . ويقال إن لهما إشارتين مختلفتين إذا كان أحدهما موجبا والآخر سالبا . لاتخلط بين « العدد السالب » و « سالب العدد » . الأخير ربما يكون موجبا ، مثل سالب العدد -8 .

المتباينات تتبع القواعد الآتية :

١ - ٣ لأى عددين حقيقيين a و b يكون واحد فقط مما يأتى صحيحا: $a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.

١ - ٤ إذا كان $b > c$ و $a > b$ ، فإن $a > c$.

١ - ٥ إذا كان $a > b$ ، فان $a \pm c > b \pm c$ لأى عدد c .

فمثلا ، بما أن $2 < 7$ ، فإننا نعرف حتى بدون حساب حاصل الجمع أن $7 + 6 > 2 + 6$.

١ - ٦ لتكن $a > b$. فيكون $a / c > b / c$ و $a c > b c$ إذا كانت $c>0$ ، لكن $a/c < b/c$ و $ac < bc$ إذا كانت $c < 0$.

فمثلا ، بما أن $7 > 2$ ، فإن $\frac{7}{3} > \frac{2}{3}$ و $7(6) > 2(6)$ لكن $7 (-6) < 2 (-6)$.

توجد عبارات مماثلة مع $\leqslant$ بدلا من $<$. قاعدة ١ - ٦ تنص على أن الضرب فى عدد موجب يحفظ اتجاه المتباينة لكن الضرب فى عدد سالب يعكس الاتجاه .

القوانين أعلاه هى مسلمات ، أى فروض أساسية عن المتباينات . من هذه الفروض يمكن اشتقاق خواص أخرى ، أهمها ما يأتى :

١ ـ ٧ إذا كانت $a > b$ ، فإن $a - b > 0$ ، وبالعكس .

١ ـ ٨ إذا كانت $a > b$، فإن $-a < -b$ ، وبالعكس .

١ ـ ٩ حاصل الضرب $a\,b$ يكون موجبا إذا وإذا فقط كان b وa كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين . حاصل الضرب يكون سالبا إذا وإذا فقط كان أحد b وa موجبا والآخر سالبا .

١ ـ ١٠ إذا كان b وa كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين وكان $a < b$ ، فإن $1/a > 1/b$.

١ ـ ١١ ليكن b و a موجبين . إذا كان $a < b$ ، فإن $a^2 < b^2$ ، وبالعكس . ليكن b و a سالبين ، إذا كان $a < b$ ، فإن $a^2 > b^2$ ، وبالعكس .

براهين هذه الخواص تترك للقارىء .

إذا كانت $c < b$ و$a < c$ ، فإن المتباينتين كثيرا ما تضمان الى المتباينة الكاملة

$$a < c < b \qquad (١)$$

بما أن c لاتساوى a أو b ، فيقال أنها تقع بين a,b . الكتابة $a < c \leqslant b$ تعنى أن c تقع بين b وa أو تساوى b .

فئة كل الأعداد بين b و a، حيث $a < b$ ، تسمى فترة . إذا كان b وa لايشملان فى الفترة ، فالفترة تسمى مفتوحة ويرمز لها بالرمز (a,b) . إذا كان a,b يشتملان ، فالفترة مقفلة ويرمز لها بالرمز $[a,b]$. إذا كانت a مشتملة لكن b غير مشتملة ، فالرمز هو $[a,b)$. مثل هذه الفترة لاتكون مفتوحة ولا مقفلة لكن هى فترة نصف مفتوحة أو فترة نصف مقفلة . باستخدام الرموز لوصف الفئات ، يمكننا أن نقول

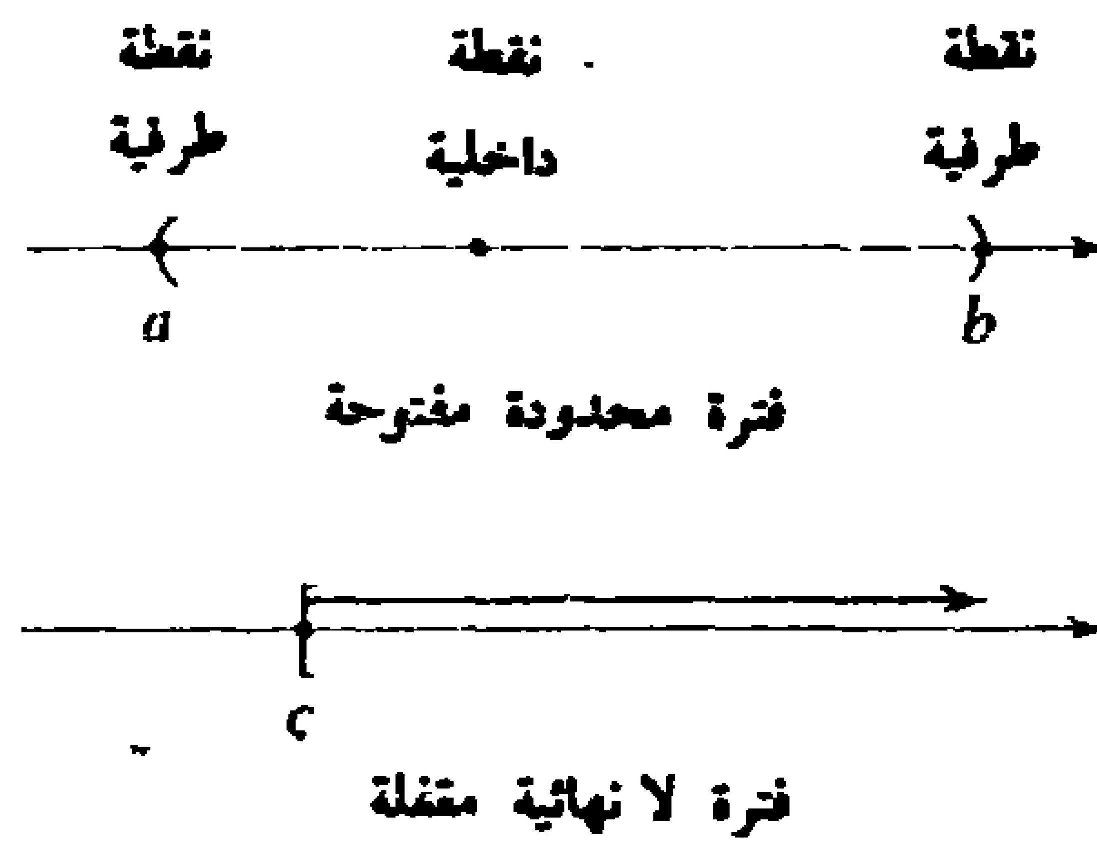
$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} \quad \text{و} \quad (a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

العددان b وa ، سواء كانا فى الفترة أم لا ، يسميان النقطتين الطرفيتين للفترة . الاعداد التى تقع بين b و a ، أى الاعداد x حيث $a < x < b$ تسمى النقط الداخلية للفترة . فئة النقط الداخلية تكون فترة جزئية مفتوحة (a,b) تسمى داخل الفترة . داخل الفترة المفتوحة هو الفترة نفسها .

فئة جميع الاعداد التى هى أكبر من أو تساوى a أيضا تسمى فترة ويرمز لها بالرمز $[a, \infty)$. بالمثل فئة جميع الأعداد التى هى أقل من a يرمز لها بالرمز $(-\infty, a)$ ، وفئة جميع الاعداد الحقيقية يرمز لها بـ $(-\infty, \infty)$. هذه هى فترات لانهائية . رمز اللانهاية ∞ لا يمثل عددا حقيقيا ولايمكن أن يضاف إلى أو يضرب فى اعداد أخرى . التعبيرات مثل $\infty + 2$ أو $1/\infty$ ليس لها معنى . سنستخدم الرمز ∞ بكيفية محدودة وسنشرح معناه مع كل استعمال جديد . الفترتان اللانهائيتان $(-\infty, a]$ و $[a, \infty)$ تعتبران مقفلتين والفترة $(-\infty, \infty)$ تعتبر مفتوحة ومقفلة .

كلمة فترة غير المميزة تعنى فترة محدودة أو فترة لانهائية . الرمز (a, b) أو $[a,b]$ للفترة ، حيث لا a ولا b رمز اللانهاية ، سيعنى أن الفترة محدودة وأن $a < b$.

الفترات يمكن تصويرها على خطوط احداثيات . في الشكل ١ - ٢ موضح الفترة المحدودة المفتوحة (b و a) والفترة اللانهائية المقفلة (c,∞] .



مسائل

١ - أثبت أن المتوسط الحسابي لعددين حقيقيين يقع بينهما . أي أن ، إذا كانت $a < b$ ، فان $a < (a + b)/2 < b$.

٢ - إذا كانت x,y موجبتين ، أثبت أن $x + y \geqslant 4xy/(x + y)$.

٣ - أثبت أن القاعدة ١ - ٥ تتضمن عكسها . أي أن ، إذا كانت $a \pm c > b \pm c$ فان $a > b$.

٤ - وضح الخواص ١ - ٧ ، ١ - ٨ ، ١ - ١٠ ، ١ - ١١ بأمثلة . (العبارتان المحتويتان على الكلمة « وبالعكس » هما نظريتان وتتطلبان توضيحين) .

٥ - أثبت أنه إذا كانت $a > 0$ ، فان $-a < 0$.

٦ - أثبت الخاصية ١ - ٧ .

٧ - أثبت الخاصية ١ - ٨ .

٨ - أثبت الخاصية ١ - ٩ .

٩ - أثبت الخاصية ١ - ١٠ (ارشاد : أقسم على ab) .

١٠ - استخدم القاعدة ١ - ٦ لاثبات أن $a^2 > 0$ لكل $a \neq 0$. (ارشاد : اعتبر الحالتين $a < 0$ و $a > 0$) .

١١ - اثبت أن $a^2 < a$ إذا كان $0 < a < 1$.

١٢ - بافتراض جزء القاعدة ١ - ٦ الذى ينص على أن $a > b$ تستلزم $ac > bc$ إذا كانت $c > 0$ ، أثبت الجزء الذى ينص على أن $a > b$ تستلزم $a/c > b/c$ إذا كانت $c > 0$.

١٣ - أثبت الجزء الأول من الخاصية ١ - ١١ : لتكن a,b موجبتين . اذا كانت $a < b$ ، فان $a^2 < b^2$ ، وبالعكس .

١٤* - أثبت أنه اذا كانت $y > 0$ و $x > 0$ ، فان $x^2 = y^2$ تستلزم $x = y$. أين فى البرهان استخدم الشرط $y > 0$ و $x > 0$ ؟ هل النتيجة صحيحة بدون هذا الشرط ؟

١٥* - أثبت أن أى متباينتين يمكن « جمعهما » . أى أن ، اذا كان $a \leqslant b$ و $c \leqslant d$ فان $a + c \leqslant b + d$ (ارشاد : اثبت أولا أن $a + c \leqslant b + c$) .

١٦*- أثبت أنه اذا كانت جميع الكميات موجبة ، فان أى متباينتين يمكن « ضربهما » . أى أن ، اذا كانت $0 < c < d$ و $0 < a < b$ ، فان $ac < bd$. أعط توضيحا يبين أن النتيجة قد لاتكون صحيحة اذا كانت بعض الكميات سالبة .

١٧*- أثبت أنه إذا كانت $a < b$ ، فان $a^3 < b^3$ (ارشاد : اعتبر أولا الحالة $0 < a < b$ وأثبت أن $a^2 < ab$ و $ab < b^2$. الحالة $a < b < 0$ يمكن اختزالها إلى هذه الحالة بملاحظة أن $0 < -b < -a$. الحالة $a < 0 < b$ سهلة ، واذا كانت a أو b صفرا ، فان النتيجة تكاد تكون تافهة) .

١٨*- طريقة عامة لاثبات أن عددا يظهر فى حل مسألة يساوى صفرا هى أن نثبت أنه ليس سالبا وأنه أصغر من كل عدد موجب . اثبت أن هذا برهان صحيح . أى اثبت أنه اذا كان $0 \leqslant a < \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$ ، فان $a = 0$ (ارشاد : افرض أن $a > 0$ واحصل على تناقض) .

١٩ - (أ) أثبت أنه يوجد عدد كسرى بين أى عددين حقيقيين . (ارشاد : ليكن a و b العددين الحقيقيين وافرض أن $a < b$. اختر عددا صحيحا موجبا n بحيث أن $n(b-a) > 1$. فيكون $b - a > 1/n$. لتكن أول عدد صحيح اكبر من na . فيكون $m - 1 \leqslant na < m$. اثبت أن $a < m/n < b$) . (ب) اذا أعطينا عددا حقيقيا a ، أثبت أنه يوجد عدد كسرى اقل من a وقريب من a قربا اختياريا . (ارشاد : دع ϵ أى عدد حقيقى موجب واعتبر العددين a و $a - \epsilon$).

ماهى النقط الداخلية للفترات التالية ؟

٢٠- $(-2 , 3)$. ٢١- $[-3 , -2]$. ٢٢- $[1 , 4]$. ٢٣- $[a , b]$.

وضح على خط أحداثيات الفئات $A \cap B$ و $A \cup B$ للفترات الآتية :

٢٤- $A = [-1,4),\ B = [3,7]$

٢٥- $A = (0,1),\ B = [1,2]$

٢٦- $A = [-4,-2],\ B = [0,6]$

٢٧- $A = [-4,4],\ B = (-4,2)$

٢٨- $A = (-2,3),\ B = (3,5)$

٢٩- اذا كانت $C = (0,5)$ و $B = (-2 , 2)$ و $A = (-5, -1)$ فترات ، وضح على خط احداثيات الفئات $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup C$ و $A \cup B \cup C$.

٣٠- إذا كانت c أى نقطة فى فترة مفتوحة ، اثبت أنه يوجد دائما نقط فى الفترة على يمين وعلى يسار النقطة c . هل يوجد أكثر من نقطة مثل هذه على يمين c ؟ كم ؟ ما هى أكبر نقطة فى فترة مفتوحة ؟

---

* المسائل المميزة بالعلامة النجمية هى نظريات ستستخدم فيما بعد .

١ - ٤

حل المتباينات

إذا شملت معادلة أو متباينة متغيرا أو مجهولا ، فأى قيمة لذلك المتغير تجعل المعادلة أو المتباينة صحيحة هى حل أو جذر للمعادلة أو المتباينة ويقال إنها تحققها . مثلا ، 10 هى حل للمتباينة

$$3x - 5 > 1 + x$$

لأن العبارة

$$3(10) - 5 > 1 + 10$$

صحيحة . العدد 2 ليس حلا لأن

$$3(2) - 5 > 1 + 2$$

ليس صحيحا . فئة الحل لمعادلة أو متباينة فى متغير واحد هى فئة جميع حلولها . حل معادلة أو متباينة هو إيجاد جميع حلولها ، أى إيجاد فئة الحل لها . أى معادلتين أو متباينتين فى متغير واحد تكونان متكافئتين إذا وإذا فقط كان لهما نفس فئة الحل . فمثلا المعادلتان $x - 2 = 0$ و $2x - 3 = 1$ متكافئتان . من الواضح أنه إذا كانت معادلة أو متباينة تكافىء أخرى التى بدورها تكافىء ثالثة ، فإن الأولى والثالثة تكونان متكافئتين . النظرية القادمة ، المنصوص عنها بدون برهان ، أساسية فى حل المعادلات .

١ - ١٢ نظرية

(أولاً) إذا أضيف نفس العدد إلى ، أو طرح من ، كلا طرفى معادلة فى x ، فالمعادلة الناتجة تكون مكافئة للأولى . العدد يمكن أن يكون مقدارا ثابتا مثل 7 أو تعبيرا يحتوى على x . لكن إذا كان الأخير ، فالمقدار يجب أن يكون معرفا لكل x التى تكون حلا لأى من المعادلتين .

(ثانياً) إذا ضرب طرفا معادلة فى x فى عدد يختلف عن الصفر أو قسما عليه ، فالمعادلة الناتجة تكون مكافئة للأولى . العدد يمكن أن يكون مقدارا ثابتا غير الصفر أو تعبيرا يحتوى على x ، لكن إذا كان الأخير ، فيجب أن يكون معرفا ومختلفا عن الصفر لكل x التى هى حل لأى من المعادلتين .

المعادلتان $7x - 6 = 2x + 4$ و $5x - 6 = 4$

متكافئتان ، لأن المعادلة الثانية يمكن الحصول عليها بطرح $2x$ من طرفى المعادلة الأولى .

المعادلتان $2x - \frac{x}{x-3} = x + 3 - \frac{x}{x-3}$ و $2x = x + 3$

غير متكافئتين ، إذ أن 3 هى حل للمعادلة الثانية لكنها ليست حلا للأولى . المقدار $x/(x-3)$ ، الذى أضيف هنا الى طرفى المعادلة الأولى للحصول على المعادلة الثانية ، غير معرف لقيمة x التى هى حل للمعادلة الثانية . الجزء (ثانيا) من النظرية ١ - ١٢ ، يبين أن المعادلتين

$$\frac{2(x^2-1)}{x+3}=4(x-1) \quad (1)$$

و

$$\frac{x^2-1}{x+3}=2(x-1) \quad (2)$$

متكافئتان . المعادلة (2) ، بدورها ، تكافىء المعادلة

$$x^2-1=2(x-1)(x+3) \quad (3)$$

إذ أن $x+3$ ، المقدار الذى ضربت فيه (2) ، يساوى صفراً فقط عند -3 ، وهذه ليست حلا لـ (2) أو (3) . لكن المعادلة (1) لاتكافىء المعادلة

$$\frac{2(x+1)}{x+3}=4 \quad (4)$$

لأن 1 هو الحل للمعادلة (1) لكن ليس حلا للمعادلة (4) . هنا قسمنا على المقدار $x-1$ ، الذى هو صفر لحل للمعادلة (1) .

طريقة أساسية لحل معادلة أومتباينة هى استخدام النظرية ١ - ١٢ ، لتكوين متابعة من المعادلات أو المتباينات ، مبتدئة بالمعطاه ، بحيث أن كلا تكون مكافئة لسابقتها لكن أسهل منها ، الى أن نحصل أخيرا على واحدة فئة الحل لها واضحة .

مثال ١ . حل المعادلة $3x/(x-6)-1=0$

كل معادلة فى المتابعة أدناه تكافىء سابقتها للسبب المعطى .

$$\frac{3x}{x-6}-1=0 \quad (5)$$

$$\frac{3x}{x-6}=1 \quad (6)$$ باضافة 1 الى كلا الطرفين

$$3x=x-6 \quad (7)$$ بضرب كلا الطرفين فى $x-6$

$$2x=-6$$ بطرح x من كلا الطرفين

$$x=-3$$ بقسمة كلا الطرفين على 2

المعادلة الأخيرة لها الحل الوحيد -3 واذن -3 هى الحل الوحيد للمعادلة (5) . الخطوة الوحيدة التى قد تكون موضع سؤال هى الانتقال من (6) الى (7) . بما أن $x-6$ تساوى صفرا فقط عند $x=6$ ، وبما أن 6 ليست حلا للمعادلة (6) أو المعادلة (7) ، فان المعادلتين متكافئتان .

القواعد للحصول على متباينات متكافئة هى نفس القواعد المعطاة فى النظرية ١ ـ ١٢ للمعادلات ، ماعدا أن فى (ثانيا) يجب ملاحظة ما إذا كان العدد الذى يضرب فيه أو يقسم عليه موجبا أم سالبا . إذا كان موجبا ، فان علامة المتباينة تبقى كما هى ، أما إذا كان سالبا فان علامة المتباينة تعكس ، طبقا للقاعدة ١ ـ ٦ المتباينتان فى كل من الأزواج الآتيه : متكافئتان .

$$3x + 7 > x + 2 \quad \text{و} \quad 3x > x - 5$$

$$4x - 12 < -20 \quad \text{و} \quad x - 3 < -5$$

$$\frac{x^2 - 6x}{-5} > 2 \quad \text{و} \quad x^2 - 6x < -10$$

$$\frac{x}{x-2} < 4 \quad \text{و} \quad x < 4(x-2) \qquad \text{اذا كان} \quad x > 2$$

$$\frac{x}{x-2} < 4 \quad \text{و} \quad x > 4(x-2) \qquad \text{اذا كان} \quad x < 2$$

مثال ٢ . حل المتباينة

$$6x - 5 > 4x + 1 \tag{8}$$

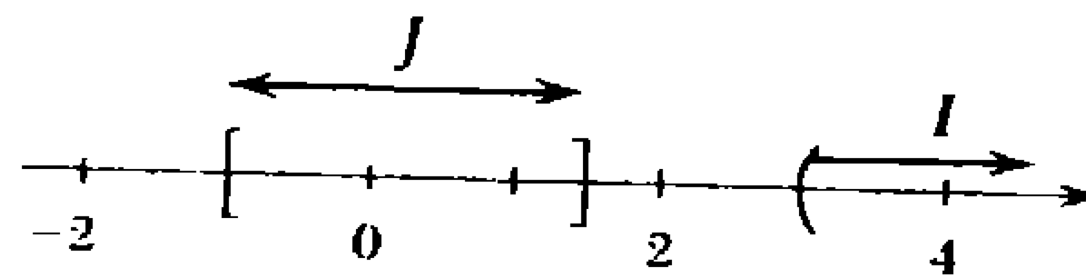
علينا أن نوجد جميع قيم x التى تجعل المتباينة صحيحة . باستخدام النظرية ١ ـ ١٢ (أولا) مرتين ، أولا طرح $4x$ ثم اضافة 5 الى كلا الطرفين ، يكون لدينا المتباينة المكافئة

$$2x > 6$$

بقسمة كل طرف على 2 ، نحصل بالنظرية ١ ـ ١٢ (ثانياً) على المتباينة المكافئة

$$x > 3 \tag{9}$$

فئة الحل لهذه المتباينة الأخيرة هى الفترة اللا نهائية $I = (3, \infty)$. بما أن (9) و (8) متكافئتان ، فهذه الفترة هى أيضا فئة الحل للمتباينة (8) وهى موضحة على خط الاحداثيات فى الشكل ١ـ٣ على القارىء أن يقنع نفسه أن I هى فئة الحل للمتباينة (8) بالتعويض عن x باعداد أكبر من 3 وأقل من 3 . العدد اللانهائى لحلول (8) هو نمطى للمتباينات



شكل ١ ـ ٣

مثال ٣ . أوجد جميع قيم x التى تجعل

$$-4 \leqslant -4x + 2 \leqslant 6$$

علينا أن نوجد جميع قيم x التى تحقق زوج المتباينات

$$-4 \leqslant -4x + 2 \quad \text{و} \quad -4x + 2 \leqslant 6 \tag{10}$$

بما أنه تجرى نفس العمليات فى حل المتباينتين ، فاننا نجريها فى آن واحد ، مرتبين العمل فى عمودين متوازيين :

$$-4 \leqslant -4x + 2 \qquad -4x + 2 \leqslant 6$$

نطرح 2 من طرفى كل متباينة ، فنحصل على المتباينتين المكافئتين

$$-6 \leqslant -4x \qquad -4x \leqslant 4$$

الآن نقسم طرفى كل على $4-$. بما أن العدد الذى نقسم عليه سالب ، فعلامتا المتباينتين يجب عكسهما ونحصل على

$$\tfrac{3}{2} \geqslant x \qquad x \geqslant -1$$

حل المتباينة الأولى فى (10) هو كل $x \leqslant \frac{3}{2}$. وحل الثانية هو كل $x \geqslant -1$. واذن الأعداد x التى تحقق كلا المتباينتين هى تلك حيث $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$. بما أن نفس العملية قد أجريت فى كل خطوة على كلا المتباينتين ، فهذه العمليات يمكن تنفيذها فى آن واحد والعمل يرتب كما يأتى :

$$-4 \leqslant -4x + 2 \leqslant 6 ,$$

نطرح 2 من كل الأجزاء الثلاثة للمتباينة ، فنحصل على

$$-6 \leqslant -4x \leqslant 4$$

نقسم على $4-$ ، فنحصل على

$$\tfrac{3}{2} \geqslant x \geqslant -1$$

ونكون قد حصلنا على الحل مباشرة . فئة الحل هى الفترة المقفلة $J = [-1, \frac{3}{2}]$. وهى موضحة فى الشكل ١-٣ .

مثال ٤ حل المتباينة

$$t^2 + 2t - 3 > 0 \tag{11}$$

هذه المتباينة تحل بسهولة إذا حللنا أولا الطرف الأيسر الى عوامله

$$(t + 3)(t - 1) > 0$$

حاصل الضرب يكون موجبا إذا وإذا فقط كانت t عددا بحيث أن العاملين يكونان موجبين معا أوسالبين معا . واذن t يجب أن تكون عددا بحيث أن اما

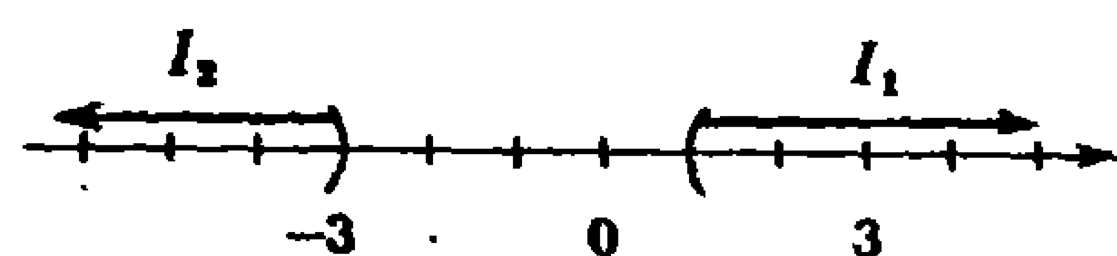
$$t - 1 > 0 \quad \text{و} \quad t + 3 > 0 \tag{12}$$

وأما

$$t - 1 < 0 \quad \text{و} \quad t + 3 < 0 \tag{13}$$

حل المتباينة الأولى فى (12) هو $t > -3$ ، وحل الثانية هو $t > 1$. واذن أى t حيث $t > 1$ هى حل لكلتا المتباينتين فى (12) . بالمثل ، الحل للزوج فى (13) هو أى t حيث

$t<-3$. وبالتالى أى t حيث $t>1$ أو $t<-3$ هى حل للمتباينة (11) . فئة الحل هى الاتحاد $I_1 \cup I_2$ للفترتين $I_1=(1,\infty)$ و $I_2=(-\infty,-3)$ ، وهى موضحة فى الشكل ١-٤ .



شكل ١-٤

مسائل

أى من الأزواج الآتية من المعادلات أو المتباينات متكافىء ؟

١- $x+7=3x-2,\ -2x=-9$

٢- $t-3=0,\ t^2-6t+9=0$

٣- $-3\le x<6,\ -1\le 2x+5<17$

٤- $3<-2x-5<-1,\ -4<x<-2$

٥- $\dfrac{x+5}{x-1}=0,\ x+5=0$

٦- $\dfrac{x^2+7x+12}{x+3}=0,\ x+4=0$

حل المعادلات الآتية :

٧- $t+\dfrac{7}{t+2}=3t+4+\dfrac{7}{t+2}$

٨- $3x+2-\dfrac{x-3}{x^2-9}=2x+5-\dfrac{1}{x+3}$

٩- $x^2+\dfrac{7x+1}{x^2-x-6}=4+\dfrac{7x+1}{x^2-x-6}$

حل المتباينات الآتية ووضح فئة الحل ، إذا لم تكن خاوية ، على خط احداثيات :

١٠- $1-3t>5t-2$

١١- $ax+3<2$ حيث $a<0$

١٢- $\dfrac{2x-b}{3}\le 0$

١٣- $\dfrac{2x+6}{3}-\dfrac{x}{5}<4$

١٤- $1<4x-3<7$

١٥- $5>-\dfrac{u}{2}+2\ge 0$

١٦- $-0.001\le\dfrac{5-3x}{2}\le 0.001$

١٧- $-\epsilon<3(x-d)<\epsilon$

١٨- $\dfrac{1}{z}-6>2$

١٩- $\dfrac{3}{4y-6}>0$

٢٠- $x^2-1<0$

٢١- $(w-2)^2\ge 7$

٢٢- $x^2-4x>0$

٢٣- $x^2-x-12>0$

٢٤- $(x+3)^2\le 0$

٢٥- $-1+2s-3s^2<0$

٢٦- $2x^2+x+3<0$

٢٧- $0\le x^2+1\le 5$

٢٨- $4<u^2+2\le 18$

٢٩- $(x-1)^3\ge 0$

٣٠- $t^3+4t^2+4t<0$

حل أزواج المتباينات الآتية :

٣١- $2x-3\ge 0,\ 2x-7<0$

٣٢- $x+2>0,\ x-4>0$

٣٣- $2x-3\ge 5+x,\ 3-4x>-40$

٣٤- $0<\frac{1}{2}x<8,\ 16<2x-4<34$

٣٥- $3<5r<10,\ 15<3r+3<21$

لأى قيم x تكون التعبيرات الآتية حقيقية

٣٦ ـ $\sqrt{5x+4}$ ٣٧ ـ $\sqrt[3]{1-2x}$ ٣٨ ـ $\sqrt[4]{ax}$ حيث a حقيقيه ٣٩ ـ $\sqrt{x^2-x-2}$

٤٠ ـ أوجد جميع القيم الحقيقية لـ c التى تجعل المعادلة $x^2+3x+c=0$ لها جذران حقيقيان .

٤١ ـ أوجد جميع القيم الحقيقية لـ k التى تجعل المعادلة $x^2+kx+6=0$ لها جذران حقيقيان .

٤٢ ـ أوجد جميع القيم الحقيقية لـ k التى تجعل المعادلة $4x^2+8x+9-k^2=0$ لها جذران تخيليان .

١ ـ ٥

القيمة المطلقة

لأى عدد $a \neq 0$ أحد العددين $a, -a$ يكون موجبا . الرمز $|a|$ ، ويقرأ « القيمة المطلقة لـ a » يستخدم ليشير الى هذا العدد الموجب . نعرف $|0| = 0$. واضح مما سبق أن $|a| = a$ اذا كانت $a \geqslant 0$ وأن $|a| = -a$ اذا كانت $a < 0$ ، من المناسب أن نعبر عن تعريف القيمة المطلقة بالكيفية الآتية .

١ ـ ١٣ تعريف

$$|a| = \begin{cases} a & \text{اذا كانت } a \geqslant 0 \\ -a & \text{اذا كانت } a < 0 \end{cases}$$

فمثلا ، $|0| = 0$ و $|-9| = -(-9) = 9$ و $|4| = 4$. من الواضح أن ، $|a| \geqslant 0$ لكل a .

لايجاد قيمة $|a|$ لعدد a . يجب أن نعين أولا ما إذا كانت a موجبة ، أم سالبة ، أم صفرا .

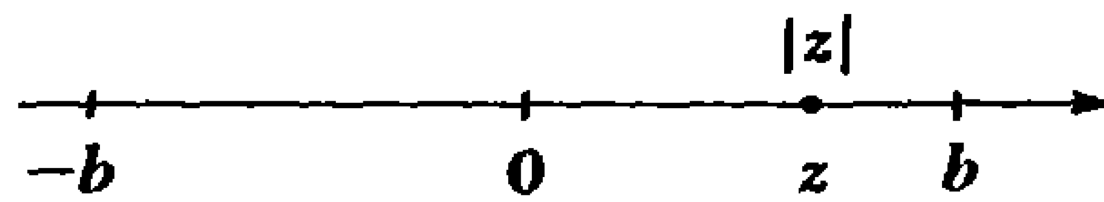
مثال ١

(أ) $|\frac{2}{7}| = \frac{2}{7}$ ، لأن $\frac{2}{7} > 0$.

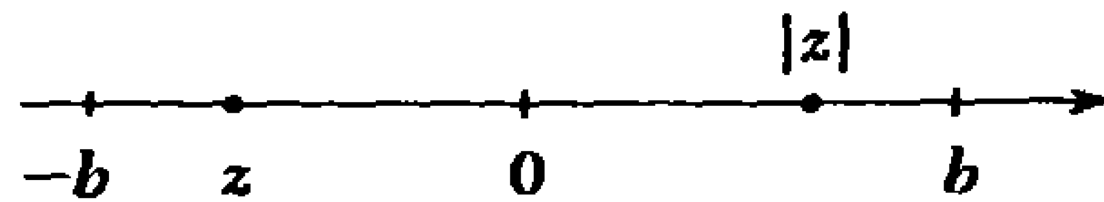
(ب) $|\sqrt{6}-2| = \sqrt{6}-2$ ، لأن $\sqrt{6}-2 > 0$.

(جـ) $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi-3$ ، لأن $3-\pi < 0$.

فى كل من جزئى الشكل ١ ـ ٥ العدد z يقع بين b و $-b$. لاحظ أن فى الحالتين $|z| < b$. هذا يوضح النظرية الآتية ، التى نذكرها بدون برهان .



(أ)



(ب)

شكل ١ ـ ٥

اذا كانت $-b < z < b$ فان $|z| < b$ ، وبالعكس .

١ - ١٤ نظرية . لتكن $b > o$. اذا كانت $-b < z < b$ فان $z < b$ ، وبالعكس .

لتكن a عدداً حقيقياً ، لتكن n عدداً صحيحاً موجباً . العدد b ، إذا وجد ، بحيث أن $b^n = a$ يسمى جذراً نونيا لـ a . إذا كانت n فردية ، فإنه يوجد جذر نونى حقيقى واحد ، وواحد فقط ، لـ a . ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ أو $a^{1/n}$ ، ويكون موجبا ، أو سالبا أو صفراً تبعاً لكون a . اذا كانت n زوجية وكانت a موجبة ، فانه يوجد جذران نونيان حقيقيان لـ a . وكل منهما السالب للآخر . الجذر النونى الموجب ، وهو واحد فقط ، يرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ($\sqrt{a}$ إذا كانت $n = 2$) أو $a^{1/n}$. مثلا $\sqrt{49}$ هو رمز للعدد الموجب الذى مربعه هو 49 ويكون 7، وليس ± 7 . الجذر التربيعى الآخر لـ 49 ويرمز له بـ $-\sqrt{49}$ أو -7 . اذا كانت n زوجية وكانت a سالبة ، فلايوجد جذر نونى حقيقى لـ a . فمثلا لايوجد جذر تربيعى حقيقى للعدد -49 . عندما يوجد الجذر النونى لـ a ، فمن ذات التعريف يكون

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a$$

الرمز $a^{1/n}$ — يعنى $(a^{1/n})$ — العبارة $\sqrt{a^2} = a$ ليست دائما صحيحة . فمثلا ، إذا كانت $a = -6, \sqrt{a^2} = \sqrt{36} = 6 = -a$. العبارة الصحيحة هى $\sqrt{a^2} = |a|$.

الاستفادة من رمز القيمة المطلقة ينجم عن النظرية الآتية التى تربط القيمة المطلقة لحاصل ضرب أو حاصل جمع بالقيم المطلقة لعوامله أو حدوده .

١ - ١٥ نظرية .

(أولا) $|ab| = |a||b|$

(ثانيا) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

يمكن تعميم النظرية لحواصل الضرب أو لحواصل الجمع لأكثر من حدين (المسألة ٣٦) . برهان النظرية يترك للقارىء (المسألتان ٣٤ ، ٣٥) . يمكنه أن يقنع نفسه بصوابها بتحقيقها عندما $b = 10$ و $a = -2$ و $b = -3$ ، $a = -5$ و $b = 9$ و $a = 6$. خواص بسيطة أخرى لرمز القيمة المطلقة معطاة فى المسائل فى نهاية هذا البند .

مثال ٢. حل المعادلة $|x - 3| = 13$

بما أن $|x - 3| = x - 3$ أو $-(x - 3)$ ، فان العدد x يكون حلا اذا واذا فقط كان عددا بحيث أن اما $x - 3 = 13$ واما $-(x - 3) = 13$. واذن الحلان الوحيدان هما -10 و 16 .

مثال ٣. حل المتباينة $|3x - 2| < 4$

بالنظرية ١ - ١٤ ، المتباينة تكافىء

ويحل هذه يكون

$$-4 < 3x - 2 < 4$$

$$-2 < 3x < 6$$
$$-\tfrac{2}{3} < x < 2$$

فئة الحل هى الفترة المفتوحة $(-\tfrac{2}{3}, 2)$.

مثال ٤ حل المتباينة $|4y + 3| > 1$.

العدد y يكون حلا للمتباينة إذا وإذا فقط كان عددا بحيث أن إما

$$4y + 3 < -1 \quad \text{أو} \quad 4y + 3 > 1$$

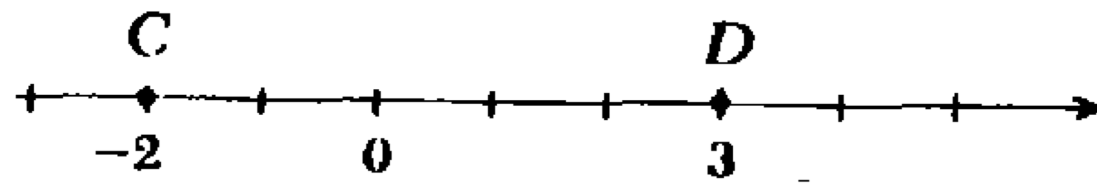
أى أن ، اما

$$y < -1 \quad \text{أو} \quad y > -\tfrac{1}{2}$$

١ ـ ١٦ تعريف . لتكن B و A نقطتين على خط الاحداثيات احداثياهما b و a . المسافة بين B و A (أى طول القطعة المستقيمة AB) يرمز لها بـ $|AB|$ وتعرف بكونها $|AB| = |b - a|$.

فى الشكل ١ ـ ٦ ، $|DC| = |-2-3| = |-5| = 5$ و $|CD| = |3-(-2)| = 5$.

بما أن $|b-a| = |a-b|$ (المسألة ٣٣) ، المسافة بين B و A تعطى أيضا بـ $|BA| = |a-b|$.



شكل ١ ـ ٦

$|GD| = |3-(-2)| = 5$

العدد x يكون فى حدود t من الوحدات من العدد a إذا واذا فقط كانت المسافة بين x ، a أقل من أو تساوى t ، أى ، اذا واذا فقط كان

$$|x-a| \leqslant t \tag{1}$$

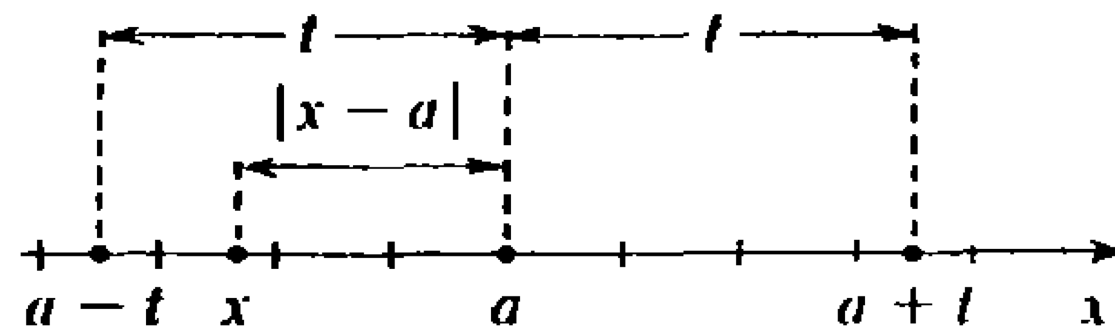
وهذا يكافىء

$$-t \leqslant x-a \leqslant t$$

واذن ، بجمع a إلى كل من الأجزاء الثلاثة ، يكافىء

$$a-t \leqslant x \leqslant a+t \tag{2}$$

وبالتالى (2) و (1) تكونان متكافئتين . وهذا معقول ، لأنه إذا كانت x فى حدود t من الوحدات من a ، فيجب وقوعها بين $a-t$ و $a+t$ وبالعكس (شكل ١ ـ ٧) .



شكل ١ ـ ٧

إذا كانت $|x-a| \leqslant t$ ، فإن $a-t \leqslant x \leqslant a+t$ ، وبالعكس

مسائل

عبر عن الآتى بدون علامات القيمة المطلقة :

١ - $|17|$ ٢ - $|-\frac{12}{8}|$ ٣ - $-|\frac{12}{8}|$ ٤ - $|\frac{33}{100}-\frac{1}{3}|$ ٥ - $|-7| + 7$

٦ - $\left|\frac{3+\frac{1}{2}-4}{12}\right|$ ٧ - $|\frac{99}{70}-\sqrt{2}|$ ٨ - $-|2\pi - \frac{44}{6}|$ ٩ - $|(1-\sqrt{6})^2 - 1|$

حل المعادلات الآتية :

١٠ - $|x| = 2$ ١١ - $|-3s+4| = 1$ ١٢ - $|z - \frac{1}{2}| = -7$ ١٣ - $|x^2 - 20| = 5$ ١٤ - $|x^2 + 2x| = 1$

١٥ - اثبت أنه اذا كانت $|x| > a$ ، وكانت $a > 0$ ، فان x تقع خارج الفترة المقفلة $[-a, a]$.

حل المتباينات الآتية ووضح فئة الحل ، اذا لم تكن خاوية ، على خط للاحداثيات .

١٦ - $|x| \geqslant 3$ ١٧ - $|x-1| < 4$ ١٨ - $|3x-4| \leqslant 0.01$

١٩ - $|2-x| \leqslant 1$ ٢٠ - $|4x+8| < \epsilon$ ٢١ - $\left|\frac{y-1}{-8}\right| \leqslant 4$

٢٢ - $|ax+b| < \epsilon, a > 0$ ٢٣ - $|7y-1| \geqslant 6$ ٢٤ - $|-3x| > 12$

٢٥ - $\left|\frac{1}{x} - 7\right| < 2$ ٢٦ - $|2w-4| \geqslant -2$ ٢٧ - $|x^2 - x - 1| < 5$

٢٨ - أوجد كل x حيث $x > 2$ و $|x-3| \leqslant 7$.

٢٩ - أوجد كل y حيث $|y-4| \geqslant 2$ و $|y-3| \leqslant 3$.

٣٠ - أوجد كل t حيث $|t-2| > 4$ و $\frac{1}{2}(t-5) \leqslant 3$.

٣١ - اذا كانت $|c| = |d|$ ، ماهى علاقة c لـ d ؟ .

٣٢* - اثبت أن $|a| = |-a|$.

٣٣* - أثبت أن $|a-b| = |b-a|$.

٣٤ - أثبت النظرية ١ - ١٥ (أولا) . (ارشاد : اعتبر أربع حالات تبعا لكون a,b غير سالبة أو سالبة واستخدم التعريف ١ - ١٣) .

٣٥ - اثبت النظرية ١ - ١٥ (ثانيا) . (ارشاد : بما أن $|a| = a$ أو $-|a|$ ، فمن الصحيح أن نكتب $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$. بالمثل ، $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. اجمع هاتين المتباينتين) .

٣٦* - أثبت أن :

(أ) $|a+b+c| \leqslant |a| + |b| + |c|$ ، (ب) $|abc| = |a|\,|b|\,|c|$.

٣٧ - اثبت أن $|a-b| \leqslant |a| + |b|$. [ارشاد : $(a - b = a + -(-b))$] .

٣٨ - اذا كانت $|y-b| < 0.01$ و $|x-a| < 0.01$ ، فاثبت أن $|(x+y) - (a+b)|\ 0.02$.

٣٩ - اثبت أنه اذا كانت $|a-y| < \frac{1}{5}$ و $|x-a| < \frac{1}{5}$ ، فإن $|x-y| < \frac{2}{5}$ [ارشاد : أكتب $x-y$ فى الصورة $[(x-a)+(a-y)]$. علم الكميات a, x, y على خط للاحداثيات وأعط تفسيرا هندسيا للمسألة .

٤٠* ـ أثبت أن $|a/b| = |a|/|b|$ اذا كانت $b \neq 0$. (ارشاد : أثبت أولا أن $|1/b| = 1/|b|$) .
٤١ ـ أثبت أن $|a - b| \geqslant |a| - |b|$. [ارشاد : أكتب a فى الصورة $(a - b) + b$] .
٤٢ ـ ليكن $\max(a_1, a_2)$ يشير الى أكبر العددين a_2 و a_1 أو أيهما اذا كان $a_1 = a_2$. فمثلا ، $\max(-4, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$. (أ) أثبت أن $\max(a_1, a_2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + |a_1 - a_2|)$. (ب) أوجد تعبيرا مماثلا لـ $\min(a_1, a_2)$.
٤٣* ـ اذا كان $a < x < b$ وكان $a < y < b$ ، فاثبت أن $|x - y| < b - a$. [ارشاد : اثبت أن $x - y < b - a$ وأن $-(b - a) < x - y$] . علم الكميات a, b, x, y على خط للاحداثيات . لاحظ المعنى الهندسى لكل من $b - a$ و $|x - y|$ وعبر عن النتيجة هندسيا .
٤٤ ـ اذا كانت D و C و B و A نقط على خط للاحداثيات احداثياتها $6-$ و $2-$ و 5 و 2 على الترتيب ، أوجد المسافات $|AD|$ و $|DA|$ و $|CD|$ و $|CA|$ و $|BA|$ و $|AB|$.

١ ـ ٦ كثيرات الحدود *

التعبير الذى على الصورة

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{1}$$

حيث a_0 و . . . و a_{n-1} و a_n أعداد مركبة وحيث n عدد صحيح غير سالب ، يسمى كثيرة حدود فى x أو للاختصار ، كثيرة حدود . فئة الأعداد المركبة تحتوى الأعداد الحقيقية ، لذلك ألـ a_i يمكن أن تكون حقيقية . أمثلة لكثيرات الحدود فى x هى

$$5x^2 + \tfrac{17}{3}x + 10, \qquad 2x + 8, \qquad 6,$$

$$x^4 + \tfrac{3}{2}ix^2 - \sqrt{2}x + (8 + 3i), \tag{2}$$

$$0x^6 - x^5 + 2x^2 + \frac{1 + \sqrt{3}}{7}x + \log 24. \tag{3}$$

التعبيرات الآتية ليست كثيرات حدود

$$x^3 - 3\sqrt{x} + 6, \qquad x^2 - 7x + \frac{2}{x} - 13, \qquad \frac{2x + 5}{x^2 + x - 10}$$

يمكن استخدام حروف أخرى غير x . فمثلا ، $at^2 + bt + c$ و $t - 5$ كثيرتا حدود فى t ، والتعبير

$$2(x + 1)^3 - 4(x + 1) + 16 \tag{4}$$

هو كثيرة حدود فى $x + 1$. بفك الحد الأول وتجميع القوى المتماثلة فى x ، يمكن التعبير عن (4) ككثيرة حدود فى x هى $2x^3 + 6x^2 + 2x + 14$.

* هذا البند يمكن تأجيله دون مساس باستمرارية الكتاب .

العدد a_i فى الحد $a_i x^i$ فى (1) يسمى معامل x^i . العدد الصحيح n هناك هو درجة كثيرة الحدود اذا كان $a_n \neq 0$. فى (2) معامل x هو $\sqrt{2}$ — ، ومعامل x^3 هو 0 . درجة كثيرة الحدود هى 4 . كثيرة الحدود فى (3) هى من الدرجة الخامسة . كثيرة الحدود المحتوية على عدد واحد a_o درجتها صفرا اذا كان $a_o \neq 0$. أى أن كثيرات الحدود من درجة صفر هى مجرد الأعداد المركبة غير الصفرية . كثيرة الحدود 0 لايعتبر لها درجة . سنختص بالأكثر بكثيرات الحدود التى معاملاتها حقيقية ، وعندما لانذكر شيئا عن معاملات كثيرة حدود سنفترض أنها أعداد حقيقية .

سنستخدم $p(x)$ أو $q(x)$ كرموز لكثيرات الحدود . العدد الناتج من تعويض العدد r لـ x فى كثيرة الحدود $p(x)$ سيرمز له بـ $p(x)$. فمثلا ، اذا كانت

$$p(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 3 \tag{5}$$

فإن

$$p(2) = 2^3 + 4(2^2) + 2(2) - 3 = 25$$

$$p(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0 \tag{6}$$

و

$$p(y+3) = (y+3)^3 + 4(y+3)^2 + 2(y+3) - 3$$

قيمة x ، سواء كانت حقيقية أم تخيلية ، التى تجعل كثيرة الحدود صفرا تسمى جذرا أو صفرا لكثيرة الحدود . المعادلة (6) توضح أن 3 — هى صفر لكثيرة الحدود فى (5) . ليس كل المعادلات لها جذور . المعادلة $4^x = 0$ ليس لها جذر . حتى اذا لم يكن يوجد تعبير صريح للجذر ، فعادة يكون من المفيد أن نعرف ما اذا كانت المعادلة لها جذر . لكثيرات الحدود هذا معروف .

١ ـ ١٧ النظرية الأساسية فى الجبر . كل كثيرة حدود معاملاتها أعداد مركبة ودرجتها أعلى من صفر لها على الأقل جذر مركب واحد .

هذا مثال لما يسمى بنظرية وجود . هى تقول إن شيئا ما ، فى هذه الحالة جذر ، يوجد ، بدون إعطاء أى معلومات أخرى عنه أو توضيح كيف نوجده . مثل هذه النظريات ليست مفيدة كما يبدو ، وعادة ، كما هنا ، ما تكون الخطوة الأولى لاشتقاق نتائج عملية . براهين هذه النظرية والنظريات الأخرى بهذا البند سوف لاتعطى .

نتيجة للنظرية هى أن كل كثيرة حدود من الدرجة n يمكن تحليلها كحاصل ضرب عوامل خطية عددها n وبالاضافة الى ذلك فان هذا يمكن إجراؤه أساسا بكيفية واحدة فقط .

١ ـ ١٨ نظرية . اذا كانت $p(x) = a_n x^n + ... + a_1'x + a_0$ كثيرة حدود من درجة n معاملاتها أعداد مركبة ، فانه يوجد n من الاعداد المركبة $r_1, r_2, ..., ..., r_n$ ، ليست بالضرورة مختلفة بحيث أن

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \tag{7}$$

بالاضافة الى ذلك ، فيما عدا بالنسبة لترتيب العوامل ، فان هذا التحليل وحيد .
مثال ذلك

$$4x^4 + 20x^3 + 29x^2 - 46x + 13$$
$$= 4(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})(x + 3 + 2i)(x + 3 - 2i)$$

هذه أيضا نظرية وجود ، فهى لاتعطى أى إشارة الى كيفية إيجاد قيم r_i's . وإيجادها يمكن أن يكون صعبا حتى لكثيرات الحدود البسيطة .

١ ـ ١٩ نظرية الأعداد المركبة $r_1, r_2, \ldots, \ldots, r_n$ التى تظهر فى صورة التحليل *(7)* لكثيرة الحدود *p(x)* هى فقط جذورها .

نتيجة مباشرة للنظرية ١ ـ ١٩ هى النظرية الآتية .

١ ـ ٢٠ نظرية كثيرة الحدود من درجة n ذات المعاملات المركبة لايمكن أن يكون لها أكثر من nمن الجذور المركبة .

عدد مرات ظهور العامل $x - r_i$ فى *(7)* يسمى عدد مرات تكراره . الجذر الذى عدد مرات تكراره *2* تسمى أيضا جذرا مزدوجا . كثيرة الحدود *q(x)* التى تحليلها الى عوامل هو

$$q(x) = -3(x - \tfrac{1}{2})(x + 5)x(x - \tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})x \qquad (8)$$

لها جذر 5 — عدد مرات تكراره *1* ، وجذر $\frac{1}{2}$ عدد مرات تكراره *3* ، وجذر صفر كجذر مزدوج . عادة تكتب *(8)* فى الصورة الموجزة

$$q(x) = -3(x - \tfrac{1}{2})^3(x + 5)x^2$$

هذه تعتبر مكافئة لـ *(8)* ولاتعتبر تحليلا مختلفا لـ *q(x)* .

١ ـ ٢١ نظرية العامل . العدد r ، سواء كان حقيقيا أم تخيليا ، يكون جذرا لكثيرة الحدود *p(x)* ، التى معاملاتها أعداد مركبة ، اذا واذا فقط كان $x - r$ عاملا لـ *p (x)* .

مثال ١ . لتكن $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6.$ بما أن $p(2) = 0$ ، فان $x - 2$ يجب أن تكون عاملا وفى الواقع

$$p(x) = (x - 2)(x^3 + 3x^2 + x + 3)$$

العدد المركب i هو جذر للعامل الثانى . واذن $x - i$ هو عامل لهذا العامل ، ويكون

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = (x - i)[x^2 + (3 + i)x + 3i]$$

النظرية الآتية تبسط ايجاد جذور كثيرة الحدود التى معاملاتها أعداد صحيحة .

١ ـ ٢٢ نظرية الجذر الكسرى . اذا كانت كثيرة الحدود

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

التى معاملاتها أعداد صحيحة لها عدد كسرى b/c كجذر ، حيث c و b عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك سوى ± 1 ، فان b تقسم a_o ، c تقسم a_n . فمثلا $\frac{2}{3}$ جذر لكثيرة الحدود

$$3x^3 - 11x^2 - 24x + 20$$

لاحظ أن 2 تقسم 20 وأن 3 تقسم معامل x^3 . عند استخدام النظرية ، الجذر b/c يجب أن يكون لأصغر حديه .

مثال ٢ حل المعادلة

$$p(x) = 2x^5 + 7x^4 - 5x^3 - 17x^2 - x + 6 = 0$$

نبحث أولا عن الجذور الكسرية . بالنظرية ١ ـ ٢٢ ، أى جذر كسرى ، لأصغر حديه ، بسطه يجب أن يقسم 6 ، ومقامه يجب أن يقسم 2 . الاحتمالات الوحيدة هى $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 6$ وسوالبها . قد لايكون أى واحد منها جذرا . النظرية لاتقول أن كثيرة الحدود يجب أن يكون لها جذر كسرى ، بل هى فقط نصف أى جذور كسرية تكون لها . بالتعويض المباشر نرى أن $1-$ هو جذر . بنظرية العامل ، $x + 1$ تكون عاملا لكثيرة الحدود $p(x)$. العامل الآخر يمكن ايجاده بالمحاولة والخطأ أوبقسمة $p(x)$ على $x + 1$ ونجد أن

$$p(x) = (x+1)(2x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 7x + 6)$$

الأصفار الباقية لكثيرة الحدود $p(x)$ يجب أن تكون أصفارا للعامل الثانى ، الاحتمالات الكسرية الوحيدة هى المدونة أعلاه . هذا العامل أيضا له الجذر $1-$. واذن $x + 1$ هو عامل له ، ونجد أن

$$p(x) = (x+1)(x+1)(2x^3 + 3x^2 - 13x + 6)$$

العامل الثالث له $\frac{3}{2}$ كجذر ومن ثم يكون

$$p(x) = (x+1)(x+1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^2 + 6x - 4)$$

الجذران الباقيان لـ $P(x)$ هما جذرا $2x^2 + 6x - 4$ ، ويمكن إيجادهما بسهولة بالصيغة التربيعية . وهما $(-3 + \sqrt{17})/2$ و $(-3 - \sqrt{17})/2$. لو كانت المعادلة ليس لها جذور كسرية ، فربما لم يكن فى استطاعتنا حلها .

نتيجة للنظرية ١ ـ ٢٢ هى أنه إذا كانت $a_n = 1$ ، فان أى جذر كسرى يجب أن يكون عددا صحيحا يقسم a_0 .

الجذور الكسرية لكثيرة الحدود التى معاملاتها أعداد كسرية يمكن ايجادها أيضا بنظرية الجذر الكسرى . اضرب كثيرة الحدود فى مضاعف مشترك لمقامات المعاملات . كثيرة الحدود الناتجة ستكون معاملاتها أعداداً صحيحة وسيكون لها نفس الجذور .

مسائل

تحقق أن كل كثيرة حدود لها العدد المعطى كصفر وأوجد أصفارها الأخرى :

١ ـ $u^4 - u^2 - u + 1, -1$

٢ ـ $3x^4 - 7x^2 + 4, 1$

٣ ـ $y^4 - 9y^3 + 30y^2 - 44y + 24, 2, 3$

٤ ـ $x^3 + 5x^2 - 3x - 15, \sqrt{3}$

٥ ـ $3t^4 - t^2 - t - 4, \frac{4}{3}$

٦ ـ $x^4 - 3x^2 - 28, 2i$

٧ ـ $2x^4 + (9 - 2i)x^2 - (5 + 9i)x + 5i, i$

حل المعادلات الآتية :

٨ - $x^2 + 2x + 6 = 0$

٩ - $z^3 - 6z^2 - 9z + 14 = 0$

١٠ - $x^3 + 9x^2 + 24x = -16$

١١ - $2s^3 - s^2 + 2s = 1$

١٢ - $x^4 - 4x^3 + 16x - 16 = 0$

١٣ - $-x^3 + 2x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{3}{4} = 0$

١٤ - $w^4 + \frac{11}{10}w^3 - \frac{13}{5}w^2 - \frac{11}{5}w + \frac{6}{5} = 0$

عبر عن كثيرات الحدود الآتية كحاصل ضرب عوامل خطية معاملاتها أعداد مركبة :

١٥ - $x^2 + 4x - 5$

١٦ - $t^3 + 6t^2 - 7t - 42$

١٧ - $2y^3 - 3y^2 + 1$

١٨ - $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

١٩ - $t^4 + 2t^3 - 16t^2 - 32t$

٢٠ - $x^2 + 3$

٢١ - $x^4 - x^3 - 2x - 4$

٢٢ - $y^2 + 4y - 1$

٢٣ - $x^3 + x^2 - 3x + 1$

٢٤ - $x^2 - 6x + 13$

٢٥ - $u^3 - 1$

٢٦ - $z^4 - 5z^3 + 9z^2 - 8z + 4$

حل المتباينات الآتية (ارشاد : حلل كثيرة الحدود) :

٢٧ - $x^4 + 10 < 0$

٢٨ - $y^2 + y + 4 > 0$

٢٩ - $x^3 + 5x^2 + 5x + 4 \leqslant 0$

٣٠ - $z^4 - 9 \geqslant 0$

٣١ - $x^3 - x^2 - 5x - 3 < 0$

٣٢ - $2x^3 - x^2 - 5x < 2$

٣٣ - أثبت أن المعادلة $2x^3 - 6x^2 + 12x - 16 = 0$ لايمكن أن يكون لها أكثر من جذر واحد حقيقى .

٣٤ - أثبت أن المعادلة $x^3 - a = 0$ لها جذر حقيقى واحد فقط اذا كانت a حقيقية .

٣٥ - اثبت أن $y^3 + 5by^2 + (4b^2 + 6)y + 6b$ تقبل القسمة على $y + b$.

٣٦ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة أصفارها هى $1 - \frac{3}{2}$ و 4 .

٣٧ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثانية صفراها هما $8 - 2\sqrt{3}$ و $8 + 2\sqrt{3}$.

٣٨ - أوجد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة معاملاتها حقيقية وجذران من جذورها هما $2i$ و3 .

٣٩ - ماهى الأعداد الصحيحة الموجبة n التى تجعل كثيرة الحدود $x^n + a^n$ تقبل القسمة على $x + a$ ؟

٤٠ - التعبير $5(x-1)^2 + 2(x-1) - 6$ كثيرة حدود فى $x - 1$. عبر عنه ككثيرة حدود فى x .

٤١ - عبر عن كثيرة الحدود $2x^2 + 4x + 1$ ككثيرة حدود فى (أ) $x - 1$ ، (ب) $x + 2$.

٤٢ - عبر عن كثيرة الحدود $x^3 + x^2 - 2x + 4$ ككثيرة حدود فى $x + 1$.

٤٣ - أثبت الجزء من النظرية ١ - ١٨ الخاص بوجود الأعداد $r_1, r_2, \ldots, r_n$ وتحليل $p(x)$ كحاصل ضرب

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

(إرشاد : بالنظرية الأساسية فى الجبر ، $p(x)$ لها على الأقل جذر واحد . بتسميته r_1 ، يكون بنظرية العامل ، $P(x) = (x - r_1)\, q_1(x)$ حيث $q_1(x)$ كثيرة حدود معاملاتها أعداد مركبة . أعمل الآن مع $q_1(x)$) .

٤٤ ـ أثبت النظرية ١ ـ ١٩ (إرشاد : دع c أى جذر لكثيرة الحدود $p(x)$. عوض بـ c عن x فى (7) ، فتحصل على

$$p(c) = a_n(c - r_1)(c - r_2) \cdot \cdot \cdot (c - r_n) = 0$$

٤٥ ـ لتكن $q(x)$ و $p(x)$ كثيرتى حدود فى x درجة كل منهما أقل من أو تساوى n . أثبت أنه اذا كانت $p(r) = q(r)$ لأكثر من n من الأعداد المختلفة r ، فان كثيرتى الحدود تكونان متطابقتين . (ارشاد : خذ فى الاعتبار كثيرة الحدود $(p(x) - q(x))$.

الفصل الثانى

الدوال والنهايات

٢ - ١
الدوال *

حساب التفاضل يرتكز على مفهومين أساسيين للدالة والنهاية . فى هذا الفصل سنلتقى بكليهما .

لتكن X هى فئة الأعداد { $1, -3, 0, 2, \sqrt{3}$ } . لكل من هذه الأعداد نخصص عددا آخر كما هو موضح فى جدول ٠١ هذا التناظر ، الذى يخصص عددا لكل فى X . هو مثال لدالة .

الأعداد المختارة لتكون المناظرة للاعداد فى X اختيارية تماما ، وكان بالامكان استخدام أى أعداد أخرى . فمثلا ، لكل من الاعداد فى X كان بالامكان تخصيص عدد كما هو موضح فى جدول ٠٢ هذا التناظر هو أيضا دالة . تناظر آخر موضح فى جدول ٠٣ مع أن الفئة Y من الاعداد المناظرة فى جدول ٣ هى نفس الفئة فى جدول ١ ، الا أن التناظر ليس نفس التناظر ، والدالة تعتبر مختلفة عن الدالة الأولى .

٢ - ١ تعريف . الدالة هى تناظر يخصص لكل عدد x فى فئة معطاة X، من الأعداد ، عددا واحدا وواحدا فقط .

الشرط أن كل عدد فى X يناظره عدد واحد وواحد فقط ، هو شرط أساسى . التناظر فى جدول ٤ ليس دالة لأن كلا العددين 1 و 3 يناظران 5 . لكن من المسموح أن نفس العدد يناظر أكثر من عدد واحد فى X . التناظر فى جدول ٥ هو دالة حيث العدد 9 هو المناظر للاعداد $\sqrt{2}$ و 7 و 4 .

جدول ١

X	Y
1	4
-3	2
0	$\frac{1}{2}$
2	0
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

جدول ٢

X	Y
1	$-\frac{7}{3}$
-3	π
0	$\frac{1}{2}$
2	586
$\sqrt{3}$	$4+\sqrt{10}$

جدول ٣

X	Y
1	2
-3	$\sqrt{3}$
0	$\frac{1}{2}$
2	0
$\sqrt{3}$	4

جدول ٤

X	Y
4	2
5	3
$-\frac{1}{4}$	-8
5	1

جدول ٥

X	Y
4	9
-6	4
7	9
$\sqrt{2}$	9
0	-2

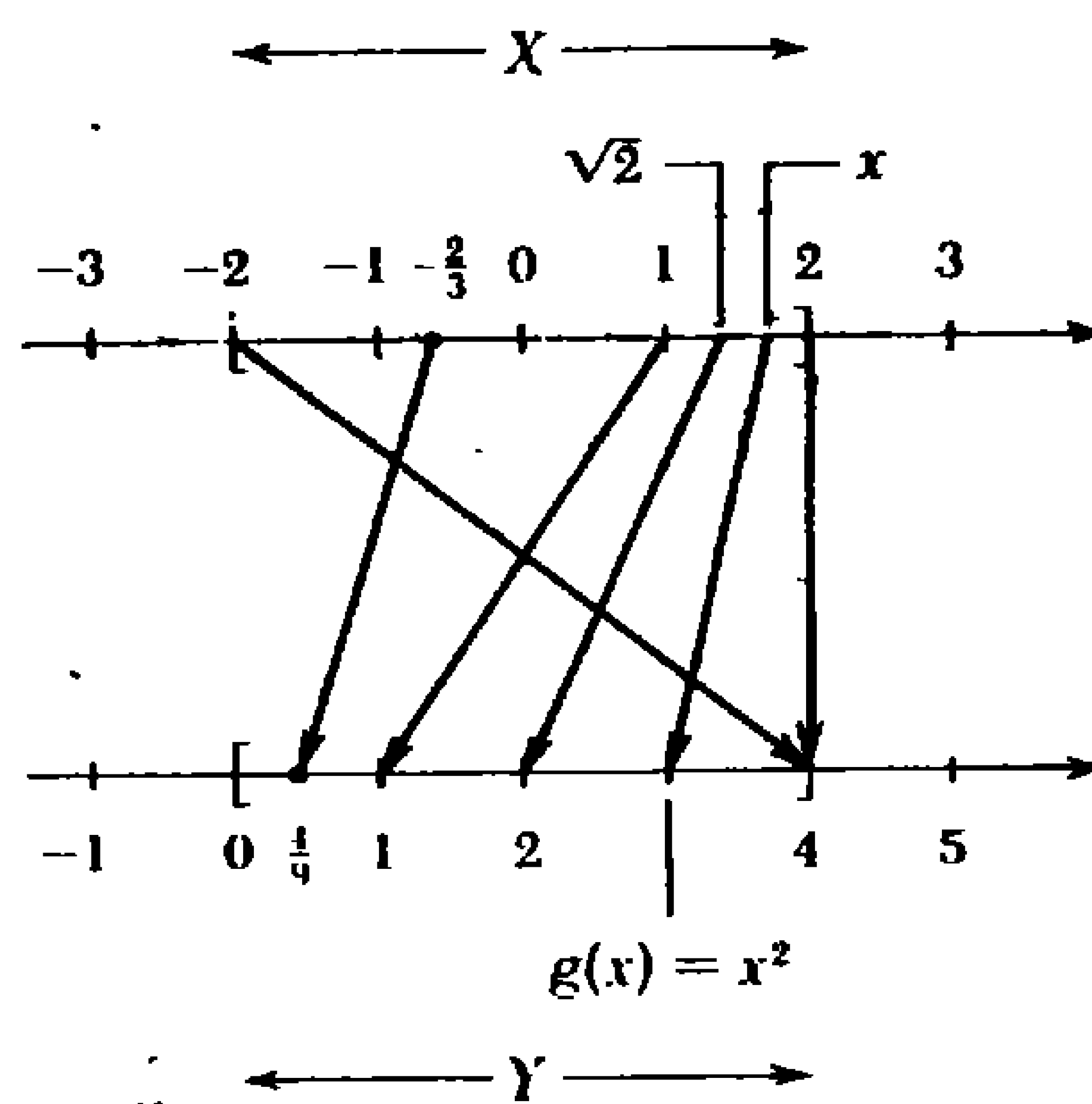
الفئتان Y و Xقد يكون فيهما عناصر مشتركة وفى الواقع كثيرا مايكونان نفس الفئة .

---

* القارىء يجب أن يعرف المادة عن الهندسة التحليلية فى البنود من ١ إلى ٧ بالتذييل ، قبل الشروع فى دراسة هذا الفصل .

أيضا عدد قد يناظر نفسه . عادة Y و X يكونان لانهائيتين لأن الدوال الأكثر أهمية تكون تناظرات بين الفئات اللانهائية لابين الفئات المنتهية .

مثال ١ . لتكن الفترة المقفلة $[-2, 2]$. لكل x فى X ، ندع المناظر هو مربع x . أى $-\frac{2}{3}$ فى X يناظرها $\frac{4}{9}$ ، والعدد 1 فى X يناظره ١. هذا التناظر يحقق تعريف الدالة ، وهو موضح تخطيطياً فى شكل ٢ -١. الفئة X يمكن تمثيلها كفئة جزئية من الخط الأعلى والفئة Y للاعداد المناظرة كفئة جزئية من الخط الأسفل . يرسم سهم من كل عدد فى X الى مناظرة .



شكل ٢ - ١
كل عدد فى $X = [-2, 2]$
يناظر x^2 .

الحروف هى وسائل مناسبة للدلالة عن الدوال . الدالة فى جدول ١ ، مثلا ، يمكن الاشارة اليها بالحرف f . وعند استخدامها بهذا المعنى فان الحرف f لايمثل عددا لكن يمثل التناظر الموصوف فى جدول ١ . اذا أردنا أن نعتبر دالة أخرى فى نفس الوقت ، مثل تلك التى فى مثال ١ ، فانه يجب أن نستخدم حرفا آخر وليكن g ، منعا للبس .

لوصف الدالة تماما ، ليس فقط يجب اعطاء التناظر بل أيضا الفئة . الدالة g فى مثال ١ لم توصف تماما بالنص « الدالة g هى التى تخصص لكل عدد حقيقى مربعه » حيث أن هذا لايعين الفئة X . اذا قلنا g هى الدالة التى تخصص لكل عدد حقيقى فى الفترة $[-2, 2]$ مربعه X تكون معينة والدالة g موصوفة تماما . الدالة v المعرفة بـ « لكل x فى $[-1.3, 7]$ يناظرها x^2 » هى دالة مختلفة عن g ، رغم أن طبيعة التناظر هى نفسها كما فى حالة الدالة g .

اذا كانت f هى دالة ، فإن العدد الذى يناظر x محددة فى X يرمز له بالرمز $f(x)$ (يقرأ « f لـ x ») ويسمى قيمة f عند x . فمثلا اذا كانت f هى الدالة فى جدول ١ ، فإن ، $f(\sqrt{3}) = 3$ و $f(-3) = 2$ و $f(0) = \frac{1}{2}$ أى أن ، قيمة f عند 0 هى $\frac{1}{2}$ ، وقيمة f عند -3 هى 2 ، وهكذا . إذا كانت g هى الدالة الموصوفة فى مثال ١ ، فان $g(\frac{5}{3}) = \frac{25}{9}$, $g(0) = 0$, $g(-2) = 4$ وبوجه اعم $g(x) = x^2$ لكل x فى $[-2,2]$. لاحظ أن $g(-3)$

ليست معرفة إذ أن 3 ليست فى الفئة $[-2,2]$ ، أى أنه لاتوجد قيمة لـ g عند 3 . من المهم التمييز بين الدالة f ، التى هى تناظر ، وقيمتها $f(x)$ التى هى عدد .

الفئة X تسمى نطاق الدالة ، والفئة Y للمناظرات تسمى مدى الدالة . اذا كانت الدالة يرمز لها بـ f ، فان المدى هو فئة جميع $f(x)$ لـ x لـ x فى X . نطاق الدالة فى جدول ١ هى الفئة $X = \{1,-3,0,2,\sqrt{3}\}$ ، والمدى هو الفئة $Y = \{4,2,\frac{1}{2},0,\sqrt{3}\}$. الدالة فى جدول ٣ لها نفس النطاق والمدى . فى جدول ٥ النطاق هو $\{4,-6,7,\sqrt{2},0\}$ والمدى هو $\{9, 4, -2\}$. نطاق الدالة g فى مثال ١ هو الفترة المقفلة $[-2, 2]$ ، ومداها هو فئة جميع $g(x)$ ، أى الفترة المقفلة $[0,4]$.

توجد طرق كثيرة لوصف الدوال . إذا كانت X فئة محدودة ، التناظر يمكن أن يبين بجدول ، كما فى الجداول ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ . أحيانا التناظر يوصف بالكلام ، كما فى مثال ١. كثيرا ماتستخدم الرموز والمعادلات . الدالة فى مثال ١ يمكن أيضا وصفها بالنص « لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = x^2$ ، لكل x فى $[-2,2]$ » أو بايجاز أكثر « لتكن g الدالة المعرفة بـ $g(x) = x^2, -2 \leqslant x \leqslant 2$ » . معظم الدوال الخاصة التى تدرس فى حساب التفاضل يمكن وصفها بهذه الطريقة .

مثال ٢. لتكن h الدالة المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x-7, & x > 2. \end{cases} \tag{1}$$

أسلوب الكتابة فى (١) يفسر كالآتى ، اذا كانت x أى عدد فى الفترة $[-2,2]$ فان العدد الذى يناظر x هو x^2 ، اذا كانت x أكبر من 2 ، فان العدد الذى يناظر x هو $x-7$. لايجاد $h(-1)$ ، يجب أولا أن تحدد فى أى نوع تقع -1 حيث أن -1 تقع فى $[-2, 2]$ فان $h(-1) = (-1)^2 = 1$. وحيث $5 > 2$ فان $h(5) = 5-7 = -2$. نطاق h هو الفترة $[-2, \infty)$ ، والمدى هو الفترة $(-5, \infty)$. لاتوجد قيمة لـ $h(-\frac{5}{2})$ لأن $-\frac{5}{2}$ ليست فى النطاق .

اذا كان النطاق لدالة f غير موصوف ، سيفهم بأنه يحتوى كل الاعداد الحقيقية حيث يكون التعبير المعرف للدالة له معنى والقيم $f(x)$ تكون حقيقية . مثال ذلك ، نطاق الدالة f المعرفة بـ $f(x) = 5/(x-2)$ سيفهم بأنه فئة كل الاعداد الحقيقية ماعدا 2 اذ ان x ليست مقيدة بغير ذلك . الدالة F المعرفة بـ $F(x) = \sqrt{9-x^2}$ سيفهم أنها معرفة فقط عند x فى الفترة $[-3,3]$ اذ أن $F(x)$ لاتكون حقيقية لجميع الأعداد x الأخرى .

كثيرا ماتستخدم حروف أخرى غير x عند وصف الدوال . الدالة F المعرفة بـ $-3 < x \leqslant 7$ و $f(x) = x^2 - 3x + 5$ يمكن بالمثل تعريفها بـ $-3 < t \leqslant 7$ و $f(t) = t^2 - 3t + 5$. الـ x فى التعبير المعرف $f(x) = x^2 - 3x + 5$ تسمى المتغير المستقل ، والعددان 5 و -3 يسميان ثابتين . عند ظهور أكثر من حرف واحد فى التعبير المعرَّف ، كما فى $g(x) = 3/(2x + a)$ يمكن فعلا ، أن

نتبين أن x وليست a هى المتغير المستقل بالاشارة الى g كدالة فى x . العدد a هو ثابت اذ أن قيمته تعتبر ثابتة أثناء النقاش .

مثال ٣ . لتكن f الدالة المعرفة بـ $f(t) = 3t^2 - 2$.

$$f(-4) = 46, \qquad f(5-2) = f(3) = 25,$$
$$f(a) = 3a^2 - 2, \qquad f(5) - f(2) = 73 - 10 = 63,$$
$$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 2 = 3h^2 + 12h + 10,$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[3(x+h)^2 - 2] - (3x^2 - 2)}{h}$$
$$= \frac{6xh + 3h^2}{h} = 6x + 3h, \qquad h \neq 0.$$

مثال ٤ . لتكن h الدالة المعرفة بـ $h(x) = -6$. فيكون

$$h(2) = -6, \qquad h(-6) = -6, \qquad h(3\sqrt{2} + 1) = -6, \qquad h(c^2) = -6$$

الدالة مثل h فى مثال ٤ التى قيمها هى نفس القيمة لجميع x تسمى دالة ثابتة .

مثال ٥ . خذ فى الاعتبار جميع الأسطوانات الدائرية التى ارتفاعها $10\ in$. الحجم V لأى من هذه هو $10\pi r^2$ ، حيث r هى نصف قطر القاعدة . هذا التعبير يعرف دالة f هى $f(r) = 10\pi r^2$, $r>0$ ، أى أن $f(r)$ هى حجم الاسطوانة . نطاق الدالة f هو الفترة $(0,\infty)$. نقول إن المعادلة $V = 10\pi r^2$ تعبر عن حجم الاسطوانة كدالة فى r أو بدلالة r .

الدالة يمكن أن توصف بأكثر من طريقة واحدة ، مثال ذلك ، لتكن u هى الدالة المعرفة بـ

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1, \end{cases}$$

ولتكن v الدالة المعرفة بـ

$$v(x) = x + 1$$

كلتا الدالتين لهما النطاق فئة جميع الأعداد الحقيقية . إذا كانت $x \neq 1$ فان

$$u(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 = v(x)$$

والعدد 1 لدينا $v(1) = 2 = u(1)$. أى أن $V(x) = u(x)$ لكل x والتناظر u هو نفس التناظر v . فنقول إن $u = v$ ، بمعنى أن v و u تكونان مجرد رمزين مختلفين لنفس الدالة .

بوجه عام ، الدالتان g و f تكونان نفس الدالة . اذا كانتا تعملان نفس الشيء . هذا يعنى أنه يجب أن يكون لهما نفس النطاق X وأن العدد المناظر لكل x بتعريف f يجب أن يكون نفس العدد المناظر الى x بتعريف g .

٢ ـ ٢ تعريف . الدالتان g و f تكونان نفس الدالة ، ويشار الى ذلك بكتابة $f = g$ ، اذا كان لهما نفس النطاق X واذا كانت $f(x) = g(x)$ لكل x فى X. *

تبعا لهذا التعريف ، g و f تمثلان دالتين مختلفتين اذا وجدت ولو x واحدة حيث $f(x) \neq g(x)$ ، رغم أن لهما نفس القيم x الأخرى .

فى مناقشة الدوال ، العبارة مثل « الدال f المعرفة بـ $f(x) = 3x^2 - 2$ » ستختصر عادة الى « الدالة $f(x) = 3x^2 - 2$ » . لكن يجب أن يتذكر القارىء ، أن $f(x)$ هى عدد ، وفى الواقع أن f وليست $f(x)$ هى الدالة .

إذا كانت f دالة ، فان أى قيمة لـ x حيث $f(x) = 0$ تسمى صفراً أو جذراً للدالة . مثال ذلك ، اذا كانت $f(x) = 3x - 2$ فان $\frac{2}{3}$ هو صفر للدالة f لأن $f(\frac{2}{3}) = 0$. كل من $0, -2$ صفر للدالة $r(x) = x(x+2)$.

مسائل

١ ـ خذ فى الاعتبار الدالة فى مثال ١ . (أ) ما هو العدد الذي يناظر $\frac{1}{4}$ فى X ؟ (ب) أوجد عددين فى X مناظراهما هما $\frac{1}{16}$. (ج) ما هو العدد الذى يناظر $1,732$ فى X ؟ أى عدد موجب فى X تكون 3 المناظر له ؟ (د) ما هو العدد الذى يناظر -5 فى X ؟

٢ ـ لتكن X هى فئة جميع الاعداد الحقيقية ولتكن f الدالة التى تخصص لكل x فى X العدد المتكون بضرب x فى 3 ثم طرح 2 من حاصل الضرب هذا . (أ) أوجد $f(x)$ و $f(a)$ و $f(-8)$ و $f(0)$ و $f(2)$. (ب) ماهى الأعداد فى X التى تناظرها 10 ؟ (ج) ما هما النطاق والمدى لـ f ؟ (د) أوجد x بحيث يكون $f(x) = -1$ ، (هـ) . أوجد x بحيث يكون $F(x) = x$. (و) ارسم شكلا تخطيطيا لـ f مماثلا لشكل ٢ ـ١ .

٣ ـ اذا كانت h هى الدالة المعرفة بـ $h(z) = 5 - z/2, z \geq o$ فأوجد $h(1), h(0), h(-a)$ حيث $a \leqslant 0$. هل توجد قيمة لـ h عند -6 ؟ ما هما النطاق والمدى لـ h ؟

٤ ـ لتكن u هى الدالة المعرفة بـ $u(x) = x^2 + 4x - 12$. أوجد $u(0), u(2), u(-5),$ $u(-\frac{1}{2}), u(c), u(1/x)$. أوجد x ، اذا وجدت ، حيث $u(x) = 9$. أوجد أصفار u ، اذا وجدت . ارسم شكلا تخطيطيا لـ u مماثلا لشكل ٢ ـ ١ .

٥ ـ اذا كانت $f(x) = 2$ فأوجد $f(a+b)$ و $f(-\sqrt{3})$ و $f(0)$, $f(2)$, $f(1)$. ما هما النطاق والمدى لـ f ؟

٦ ـ اذا كانت f هى الدالة بحيث أن كل $x \geqslant 0$ يناظرها $\sqrt{x}$ ، فأوجد $f(a-b)$ و $f(-2)$ و $f(3)$ و $f(2 + \sqrt[3]{5})$ و $f(1)$. ما هما نطاق ومدى f ؟ ارسم شكلا تخطيطيا لـ f مماثلا لشكل ٢ ـ ١ .

---

* من المألوف فى الأسلوب الرياضى أنه عند استعمال كلمة اذا فى تعريف ما يكون لها قوة اذا واذا فقط .

٧ - إذا كانت f هى الدالة المعرفة بـ $f(t) = 3/(t^2 - 1),\ t \neq \pm 1$ فاوجد $f(y+2)$ و $f(-5)$ و $f(0)$ و $f(2)$. هل f لها جذر؟ ما هو نطاق f؟

٨ - لتكن u هى الدالة المعرفة بـ $u(x) = (7x + b)/2$ ، حيث b ثابت . أوجد $u(b)$ و $u(0)$ و$u(-q)$. أوجد أصفار u .

٩ - لتكن F هى الدالة المعرفة بـ

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

(أ) أوجد $F(\frac{1}{2})$ و $F(3)$ و $F(0)$ و $F(-6)$. (ب) ما هما النطاق والمدى لـ F ؟
(ج) أوجد وصفا مختصرا للدالة F .

١٠ - لتكن f هى الدولة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -3 \leqslant x < 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

(أ) أوجد $f(-5)$ و $f(-3)$ و $f(2)$ و $f(0)$ و $f(6)$ (ب) ما هو نطاق f؟

١١ - لتكن g هى الدالة المعرفة بـ

$$g(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ \frac{3}{2}, & t = -2 \end{cases}$$

(أ) أوجد $g(-1)$ و $g(0)$ و $g(2)$ و $g(\frac{1}{3})$ و $g(-2)$ و $g(1)$. (ب) لأى t تتكون $g(t) = 2?\ \ -7?\ \ \frac{3}{2}$ ؟ (ج) ما هما نطاق ومدى g ؟ (د) ارسم شكلا تخطيطيا لـ g مماثلا لشكل ٢ - ١ .

١٢ - لتكن f هى الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

(أ) أوجد $f(0)$ و $f(-\frac{1}{2})$، و $f(\frac{1}{2})$ و $f(-3)$ و $f(3)$ (ب) وضح أن $f(x) \geqslant 0$ لكل x .
(ج) ماهما نطاق ومدى الدالة f؟ (د) أوجد جميع x حيث $f(x) = 6$. ، (هـ) أوجد وصفا مختصرا للدالة f .

١٣ - اذا كانت $F(x) = x^2$ ، حيث x كسرية فى الفترة نصف المفتوحة $[-2,2)$ ، فاوجد $F(-4)$ و $F(2)$ و $F(-2)$ و $F(-1)$ و $F(\sqrt{3})$ و $F(\frac{1}{2})$. ما هو نطاق F ؟

١٤ - لتكن g هى الدالة بحيث أن كل عدد حقيقى x يناظره أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x .
فمثلا $g(\frac{5}{2}) = 2,\ g(5) = 5,\ g(-\frac{4}{3}) = -2$. (أ) أوجد $g(-\frac{29}{4})$ و$g(\pi)$ و $g(\sqrt{2})$ و $g(-4)$ و $g(0)$ و $g(\frac{3}{2})$. (ب) ما هما نطاق ومدى g ؟ (ج) أوجد كل x حيث : $g(x) = 4$.

١٥ - لتكن p هى الدالة المعرفة بـ $p(x) = 2x^2 - 5x + 2$. (أ) أوجد $p(1/x)$ و$p(-4)$ و $-p(4)$ و $p(1+6)$ و $p(1) + p(6)$ و $p(a)$ و $p(6)$ و $p(0)$. (ب) اشرح الفرق بين الرمزين $p(a+b)$ و $p(a) + p(b)$. (ج) هل $p(4+3) = p(4) + p(3)$ ؟ (د) اشرح

الفرق بين الرمزين $2p(a)$ و $p(2a)$. هل $p(2a) = 2p(a)$ لكل a ؟ (هـ) أوجد أصفار p .

(و) لأى أعداد x يكون $p(x) = p(3x)$ ؟

١٦ - (أ) هل من الصحيح أن $f(-3) = -f(3)$ لجميع الدوال f ؟ (ب) أوجد دالة g . بحيث يكون $g(-x) + -g(x)$ لجميع الاعداد x .

١٧ - إذا كانت $f(x) = mx$ ، حيث m ثابت ، أثبت أن $f(a+b) = f(a) + f(b)$ لكل a,b . هل هذا صحيح لكل الدوال ؟

١٨ - إذا كانت $f(x) = 2^x$ ، فأوجد $f(-2)$ و $f(0)$ و $f(4)$. اثبت $f(u)f(v) = f(u = v)$ لكل v و u .

١٩ - إذا كانت $f(x) = 3x^2 - x + 2$ ، فأوجد :

(أ) $f(0), f(\sqrt{2}), f(r), f(m/n), f(x) - f(a), f(x-a)$

(ب) $f(2+h), f(-3+h), f(0+h), f(a+h)$

(ج) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ (د) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (هـ) $\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

٢٠ - إذا كانت $g(x) = \frac{x}{x-1}$ فأوجد :

(أ) $g(-4), g(2), g(1), g(a), g(u) - g(x)$ (ب) $g(1+h), g(-4+h), g(x+h),$

(ج) $\frac{g(-4+h)-g(-4)}{h}$ (د) $\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ (هـ) $\frac{g(u)-g(-4)}{u+4}$

إذا كانت $f(x) = -x^2 + 2x$ ، فأوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بكل زوج من النقط الآتية :

٢١ - $(2, f(2))$ و $(1, f(1))$

٢٢ - $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ و $(-2, f(-2))$

٢٣ - $(4+h, f(4+h)), h \neq 0$ و $(4, f(4))$

٢٤ - $(-1+h, f(-1+h)), h \neq 0$ و $(-1, f(-1))$

٢٥ - $(a_2, f(a_2)), a_1 \neq a_2$ و $(a_1, f(a_1))$

٢٦ - $(a+h, f(a+h)), h \neq 0$ و $(a, f(a))$

أوجد نطاق كل من الدوال الاتية :

٢٧ - $G(x) = x\sqrt{x^2-16}$ ٢٨ - $f(u) = \sqrt{-u^2+9u-18}$ ٢٩ - $u(x) = (x^2-x)^{1/3}$

٣٠ - أوجد الدالة التى قيمتها عند كل عدد r هى مساحة دائرة نصف قطرها r .

٣١ - أوجد دالة تعبر عن المساحة السطحية لمكعب (أ) بدلالة طول الحرف ، (ب) بدلالة حجم المكعب .

٣٢ - صندوق مكعب جوانبه وقاعدته من الخشب يتكلف 4 Cents لكل قدم مربع وسقفه معدنى يتكلف 9 cents لكل قدم مربع . أوجد تكاليف الصندوق بدلالة طول حرفه وعبر عن هذه العلاقة كدالة .

٣٣ ـ أوجد بدلالة x المسافة بين النقطة $(1,2)$ ونقطة اختيارية (x,y) على القطع المكافىء $y = \frac{1}{4}x^2$. عبر عن هذه العلاقة كدالة .

٣٤ ـ أوجد المساحة الجانبية لاسطوانة حجمها 10 كدالة (أ) لنصف القطر ، (ب) للارتفاع

٣٥ ـ مستطيل تقع رؤوسه على محيط دائرة . أوجد مساحة المستطيل كدالة لطول نصف القاعدة .

كل عضو من أزواج التعبيرات الآتية يعرف دالة . حدد ما إذا كان العضوان يعرفان نفس الدالة .

٣٦ ـ $f(x) = 2x - 1;\ g(x) = (x^2 + x) + (x - x^2 - 1)$

٣٧ ـ $h(u) = 2u;\ H(u) = \begin{cases} 2u, & u \neq 0 \\ 1, & u = 0 \end{cases}$

٣٨ ـ $f(x) = 3x;\ g(x) = 3x^2/x$

٣٩ ـ $f(x) = 3x;\ G(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

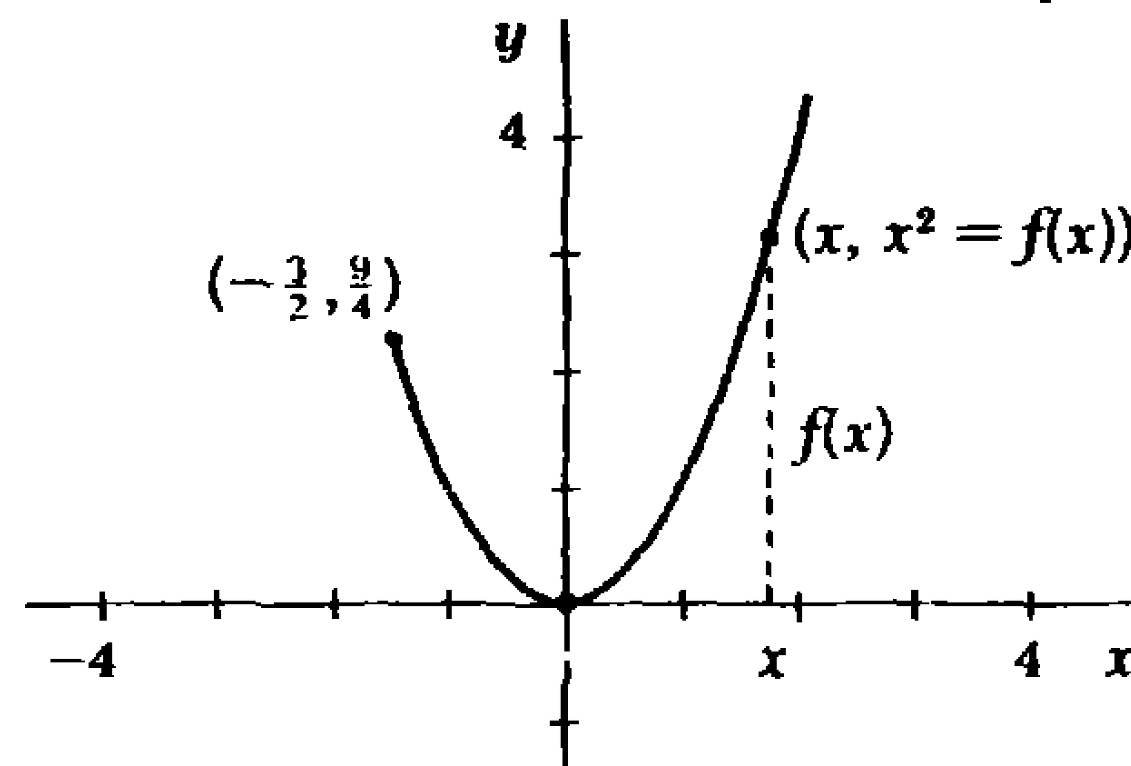
٤٠ ـ $f(x) = x + 5;\ g(t) = \begin{cases} t + 5, & t \neq 0, \\ 5, & t = 0. \end{cases}$

٤١ ـ $f(z) = z - 1;\ g(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2 - 1}{z + 1}, & z \neq -1, \\ -2, & z = -1. \end{cases}$

٤٢ ـ $u(s) = s^2, -5 \leqslant s \leqslant 0;\ v(s) = s^2, -4 \leqslant s \leqslant 1$

الأشكال البيانية للدوال

كل دالة f يناظرها معادلة $y = f(x)$. مثال ذلك إذا كانت f هى الدالة المعرفة : $f(x) = x^2, x \geqslant -\frac{3}{2}$ فان المعادلة المناظرة هى $y = x^2$ ، $x \geqslant -\frac{3}{2}$ إحدى طرق تصوير الدالة هى رسم تخطيطى مماثل لذلك فى شكل ٢ ـ ١ ، لكن طريقة أخرى ، عادة أكثر فائدة ، هى تخطيط الشكل البيانى للمعادلة المرتبطة . هذا الشكل البيانى يسمى الشكل البيانى للدالة .



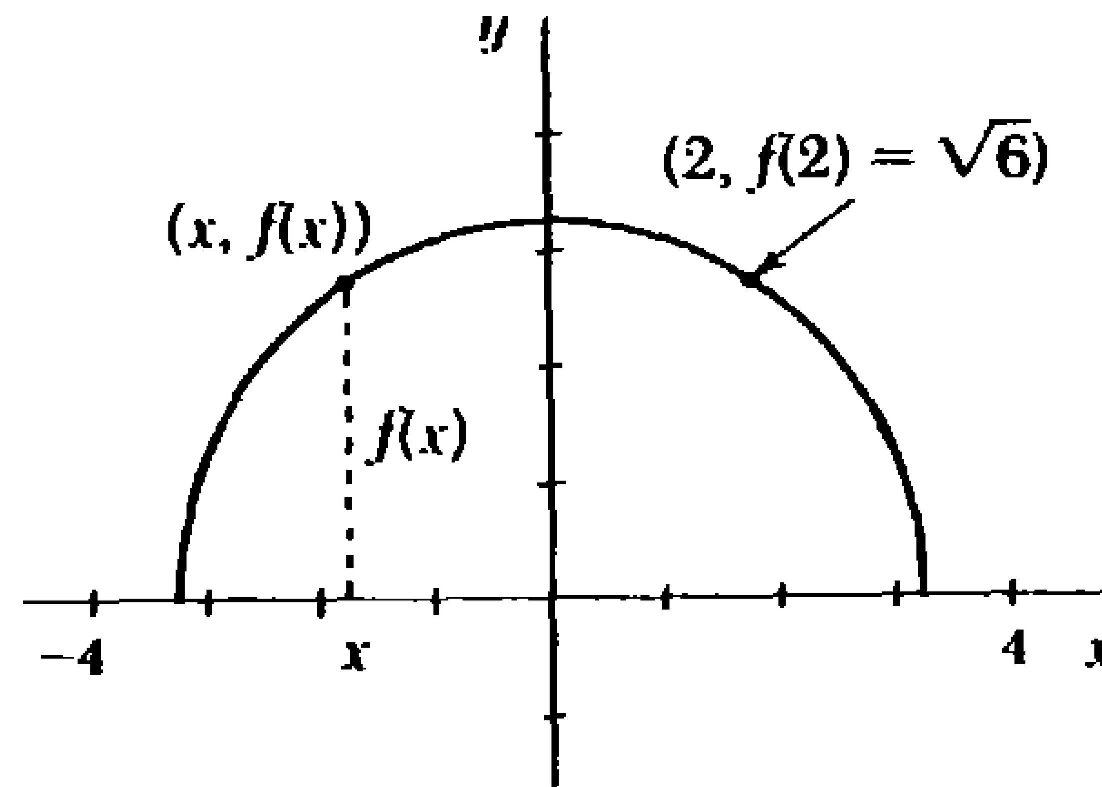
شكل ٢ ـ ٢ الشكل البيانى للدالة $f(x) = x^2, x \geqslant -\frac{3}{2}$.

٢ ـ ٣ **تعريف** . الشكل البيانى للدالة f هو الشكل البيانى للمعادلة $g = f(x)$ لجميع x فى نطاق f : فهو اذن فئة جميع النقط $(x, f(x))$.

الشكل البيانى للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2, x > -\frac{3}{2}$ ، موضح فى شكل ٢ ـ٢ . هو ذلك الجزء من القطع المكافىء $y = x^2$ الواقع على يمين النقطة $(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$.

مثال ١ . خطط الشكل البيانى للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$. نطاق الدالة f هو الفترة المقفلة

$[-\sqrt{10} \ , \ \sqrt{10}]$ وعلينا أن نخطط الشكل البيانى للمعادلة



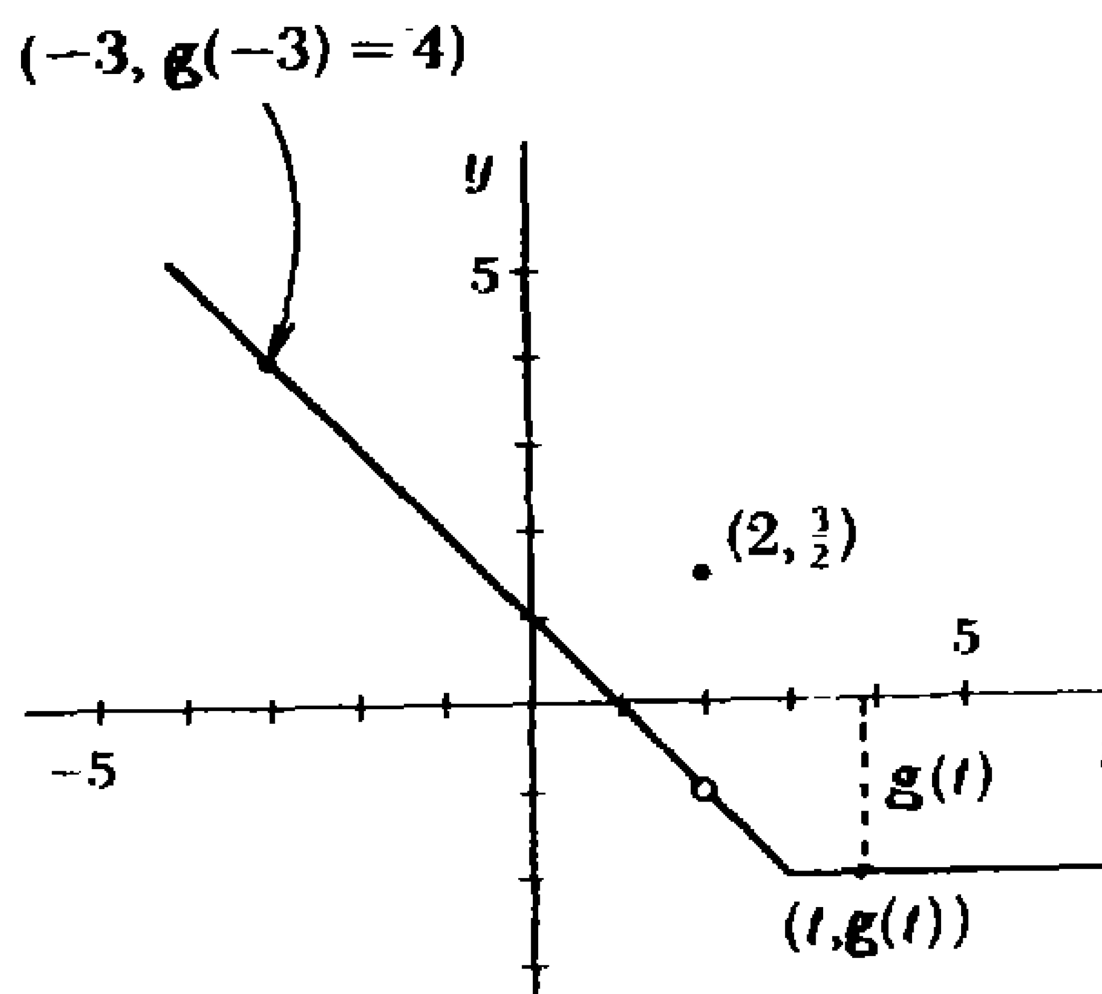
شكل ٢ ـ٣ الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$.

$$y^2 = 10 - x^2 \qquad (1)$$

لجميع x فى النطاق . أى نقطة (a,b) تحقق هذه المعادلة تستلزم أن $b \geqslant 0$ وتحقق المعادلة

$$y^2 = 10 - x^2 \qquad (2)$$

وبالعكس ، أى نقطة (a,b) ، حيث $b \geqslant 0$ ، وتحقق (2) ، ستحقق أيضا(1) . واذن الشكل البيانى لـ (1) هو النصف الأعلى من الدائرة التى معادلتها (2) لكن (شكل ٢ ـ ٣) .



شكل ٢ ـ ٤ الشكل البيانى للمعادلة .

$$g(t) = \begin{cases} -t + 1, & t \leqslant 3. \text{ لكن } t \neq 2, \\ \frac{3}{2}, & t = 2, \\ -2, & t > 3. \end{cases}$$

مثال ٢ . خطط الشكل البيانى للدالة *g* حيث

$$g(t) = \begin{cases} -t+1, & t \leqslant 3, \quad t \neq 2, \\ \frac{3}{2}, & t = 2, \\ -2, & t > 3. \end{cases}$$

عند $t \leqslant 3$ باستثناء 2 ، الشكل البيانى *g* ينطبق على الشكل البيانى لـ $y = -t + 1$ واذن هو جزء من خط مستقيم (شكل ٢ ـ ٤) . قد وضعنا دائرة صغيرة عند النقطة $(2, -1)$ لنشير الى أن هذه النقطة ، بينما هى على الخط المستقيم ، فهى ليست على الشكل البيانى لـ *g* . عند $t > 3$ ، الشكل ينطبق على الشكل البيانى لـ $y = -2$ ، الخط الأفقى على بعد وحدتين تحت المحور *t* . النقطة $(2, \frac{3}{2})$ هى أيضا جزء من الشكل البيانى .

مثال ٣ . خطط الشكل البيانى للدالة *F* ، حيث $F(x)$ هى المسافة بين *x* وأقرب عدد صحيح .

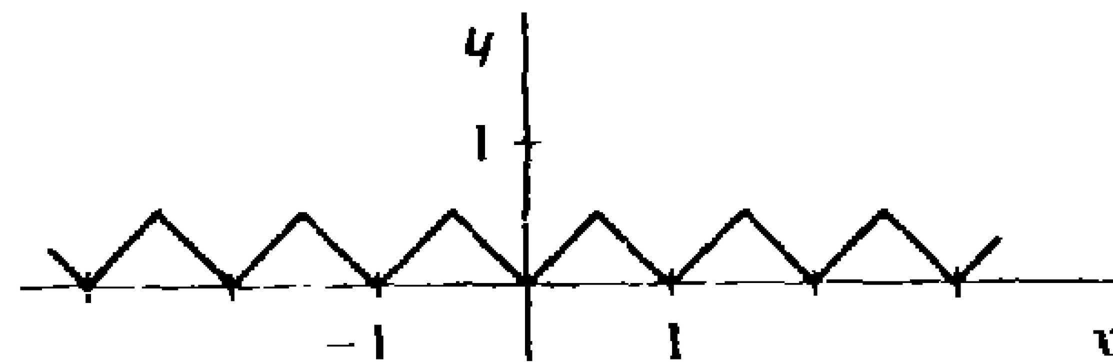
دع $y = F(x)$. فيكون

$$y = F(x) = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ |x-0| & \text{if } -\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ |x-1| & \text{if } \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ |x-2| & \text{if } \frac{3}{2} < x \leqslant \frac{5}{2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

أوعند ما تكتب بدون علامات القيم المطلقة

$$y = F(x) = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -x & \text{if } -\frac{1}{2} < x \leqslant 0, \\ x & \text{if } 0 < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1-x & \text{if } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \\ x-1 & \text{if } 1 < x \leqslant \frac{3}{2}, \\ 2-x & \text{if } \frac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ x-2 & \text{if } 2 < x \leqslant \frac{5}{2}. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

الشكل البيانى هو منحنى سن المنشار فى شكل ٢ ـ ٥ .



شكل ٢ ـ ٥ الشكل البيانى للدالة *F* حيث $F(x)$ هى المسافة بين *x* وأقرب عدد صحيح .

الشكل البيانى للدالة *f* المعرفة بـ $f(x) = 1 / x$ هو الشكل البيانى للمعادلة $y = 1/x$. هذا سيناقش فى الجزء الاضافى فى مثال ٣ ببند ٢ ، وسيخطط فى شكل بند ١٣ . وهو قطع زائد بمحور

x ومحور y كخطين تقاربيين . هذه الدالة تظهر كثيرا فى الأمثلة التوضيحية ، وعلى القارىء أن يتذكر شكلهما البيانى .

فى الشكل البيانى للمعادلة $y = f(x)$ لاحظ أن $f(x)$ هى المسافة الموجهة من المحور x الى المنحنى .

مسائل

خطط الشكل البيانى لكل من الدوال المعرفة أدناه .

١ - $f(x) = x + 4$

٢ - $f(x) = 3 - 2x$

٣ - $g(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & x \neq -1, \\ 2, & x = -1. \end{cases}$

٤ - $g(s) = \frac{s}{4}, s \geqslant 0$

٥ - $g(x) = 3, x \neq 1$

٦ - $H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

٧ - $f(x) = \begin{cases} 3, & x < -2, \\ 1, & -2 \leqslant x < 2, \\ -3, & x \geqslant 2. \end{cases}$

٨ - $f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

٩ - $F(u) = \begin{cases} u + 1, & u \leqslant 1, \\ -u + 1, & u > 1. \end{cases}$

١٠ - $g(x) = 4 - x^2$

١١ - $G(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2, \\ \frac{1}{2}, & x = 4. \end{cases}$

١٢ - $g(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2, & t < 0, \\ \frac{1}{2}t^2, & t \geqslant 0. \end{cases}$

١٣ - $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x \leqslant 0, \\ 0, & 0 < x < 3, \\ -x + 3, & x \geqslant 3. \end{cases}$

١٤ - $f(x) = x^{-1}$

١٥ - $f(r) = -\frac{4}{r}$

١٦ - $g(t) = -\sqrt{t}$

١٧ - $h(t) = \begin{cases} \frac{4}{t^2}, & t \neq 0, \\ 3, & t = 0. \end{cases}$

١٨ - $u(x) = \sqrt{2 - x}$

١٩ - أوجد نطاق الدالة $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ وأثبت أن الشكل البيانى هو نصف دائرة .

٢٠ - خطط الشكل البيانى للدالة A ، حيث $A(r)$ هى مساحة الدائرة التى نصف قطرها r .

٢١ - مزارع لدية 600 yd من سياج ويرغب فى عمل سور بها حول حقل مستطيل . عبر عن مساحة الحقل كدالة لطول ضلع واحد وخطط الشكل البيانى للدالة .

٢٢ - خطط الشكلين البيانيين للدالتين اللتين تعبران عن المساحة الجانبية لاسطوانة حجمها 10 كدالة (أ) لنصف القطر ، (ب) للارتفاع .

٢٣ ـ ارسال الخطاب بالبريد درجة أولى يتكلف 6 cents للخطابات التى تزن أقل من 1 oz، 12 cents للتى وزنها 1 oz أو يزيد لكن أقل من 2 oz ، 18 cents للتى وزنها 2 oz أو أكثر لكن أقل من 3 oz ، وهكذا . إذا كانت $p(x)$ هى التكاليف بال cents لارسال خطاب وزنه x ، فان p هى دالة . أعط نطاق ومدى الدالة p وخطط شكلها البيانى .

٢٤ ـ شركة اضاءة كهربية لها قائمة الأسعار الآتية :

8 cents لكل كيلو وات ساعة ل 30 كيلو وات ساعة الأولى ،

4 cents لكل كيلو وات ساعة ل 50 كيلو وات ساعة التالية ،

2 cents لكل كيلو وات ساعة لكل كيلو وات ساعة زيادة عما سبق .

يوجد حد أدنى للحساب هو 2 $.

عبر عن التكاليف الكلية كدالة لعدد الكيلو وات ساعة وخطط الشكل البيانى للدالة .

٢٥ ـ المسافة s miles من Boston لقطار مسافر من هذه المدينة إلى New York هى دالة f للزمن t hr , $s = f(t)$. والشكل البيانى للدالة موضح فى شكل ٢ ـ ٦ . ماذا يفعل القطار أثناء الفترتين الزمنيتين $2 \leqslant t \leqslant 2.5,\ 3 < t < 3.25$ ؟ متى يكون سائرا أسرع؟ ما هى سرعته المتوسطة أثناء الساعتين الأوليين ؟

٢٦ ـ إذا كانت f دالة وكانت g هى الدالة المعرفة بـ $g(x) = f(-x)$ ، اثبت أن الشكل البيانى للدالة g هو الانعكاس فى المحور y للشكل البيانى للدالة f . ما هى معادلة الانعكاس للدالة f فى المحور x؟ فى نقطة الأصل؟ وضح بالدالة $f(x) = 2x + 2$.

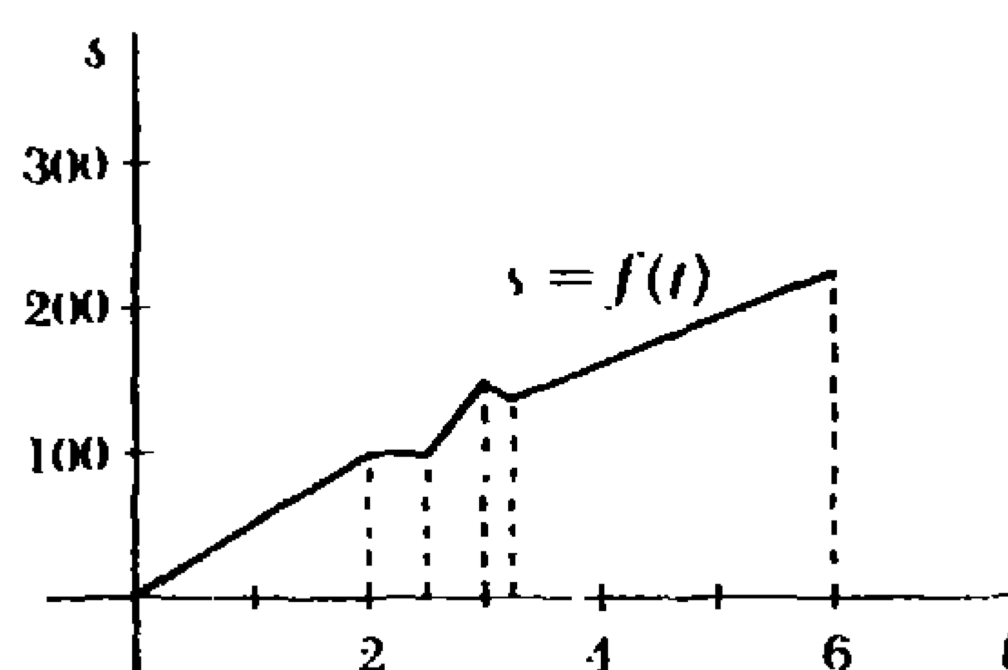
٢ ـ ٣

أنواع الدوال والدوال الخاصة

الدالة f التى تعرف بكثيرة حدود ذات معاملات حقيقية ،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

تسمى دالة كثيرة حدود . الدالة g المعرفة بـ $g(x) = -x^3 + \sqrt{5}x + 3$ هى دالة كثيرة حدود .



شكل ٢ ـ ٦

دالة كثيرة الحدود f المعرفة بـ $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقى ، تسمى عامة دالة ثابتة . هى تخصص لكل x نفس العدد c . الدالة f المعرفة بـ $f(x) = -\frac{3}{2}$ دالة ثابتة .

الدالة المعرفة بخارج قسمة كثيرتى حدود ، مثل

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + \sqrt{6}}{2x + 10}$$

تسمى دالة كسرية . اذا لم يحدد نطاقها ، فانه يصطلح عن أنه فئة جميع الأعداد الحقيقية التى تجعل المقام يختلف عن الصفر . أى كثيرة حدود يمكن كتابتها هى نفسها مقسومة على الواحد ، مثال ذلك

$$3x^2 - 5x + 6 = \frac{3x^2 - 5x + 6}{1}$$

اذن كل دالة كثيرة حدود هى أيضا دالة كسرية .

الدالة المعرفة بتعبير مركب من كثيرات حدود بعمليات متكررة من جمع وطرح وضرب وقسمة وبأخذ الجذور ، مثل $\sqrt{3x - 7} + x^2$ أو

$$13x^8 + (x^2 + 5)^{3/2} - \left[\frac{x^4 - \sqrt{7}x - 1}{(2x + 1)\sqrt{8 - x}}\right]^{1/5}$$

هى دالة جبرية . كل كثيرة حدود وكل دالة كسرية هى أيضا دالة جبرية . طائفة الدوال الجبرية تحتوى أيضا على دوال لايمكن تعريفها بهذه الطريقة ، لكن سوف لانتعرض لها .

الدوال غير الجبرية تسمى دوال متسامية أو دوال مسترسلة . على سبيل الأمثلة $\sin x, \log x, 2^x$.

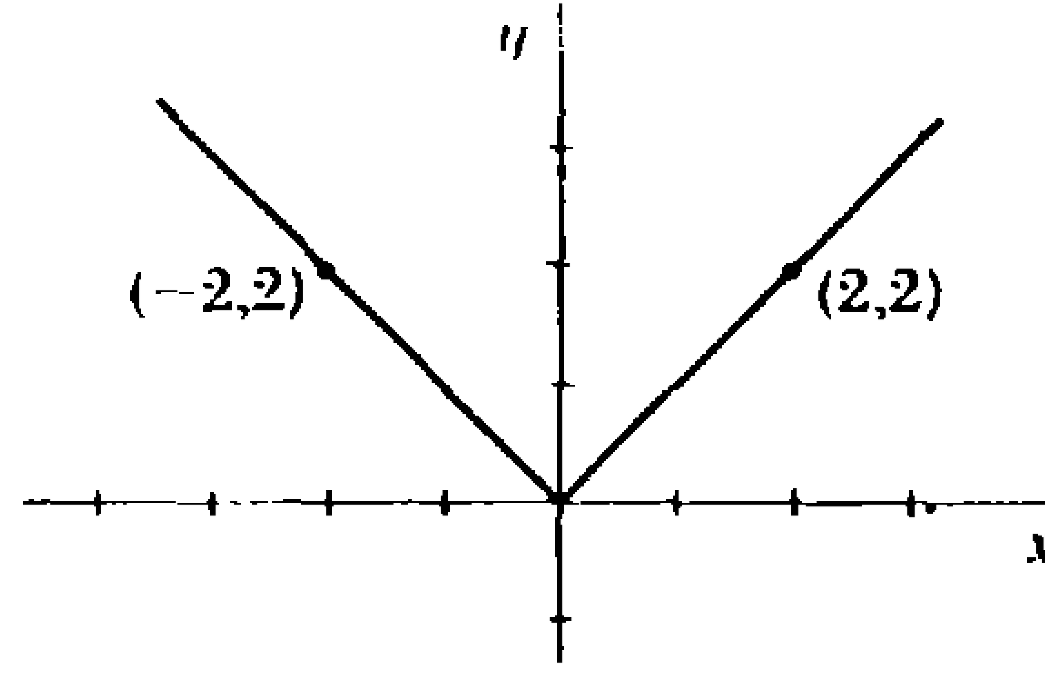
هذه ستناقش فى الفصلين السادس والسابع .

التناظر الذى يخصص لكل عدد x قيمته المطلقة هو دالة :

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0. \\ -x, & x > 0. \end{cases}$$

الشكل البيانى لدالة القيمة المطلقة هو الشكل البيانى للمعادلة $y = |x|$ ، الموضح فى شكل ٢ - ٧ . الشكل يتكون من ذلك الجزء للخط المستقيم $y = x$ الواقع على يمين محور y وذلك الجزء للخط المستقيم $y = -x$ الواقع على يسار محور y .

دالة مفيدة أخرى هى تلك التى تدع كل x يناظرها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x . هذه الدالة تسمى دالة أكبر عدد صحيح ، والرمز لها هو $[x]$ (يقرأ « قوس x ») ، أى أن ، $[x]$ = أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى x .

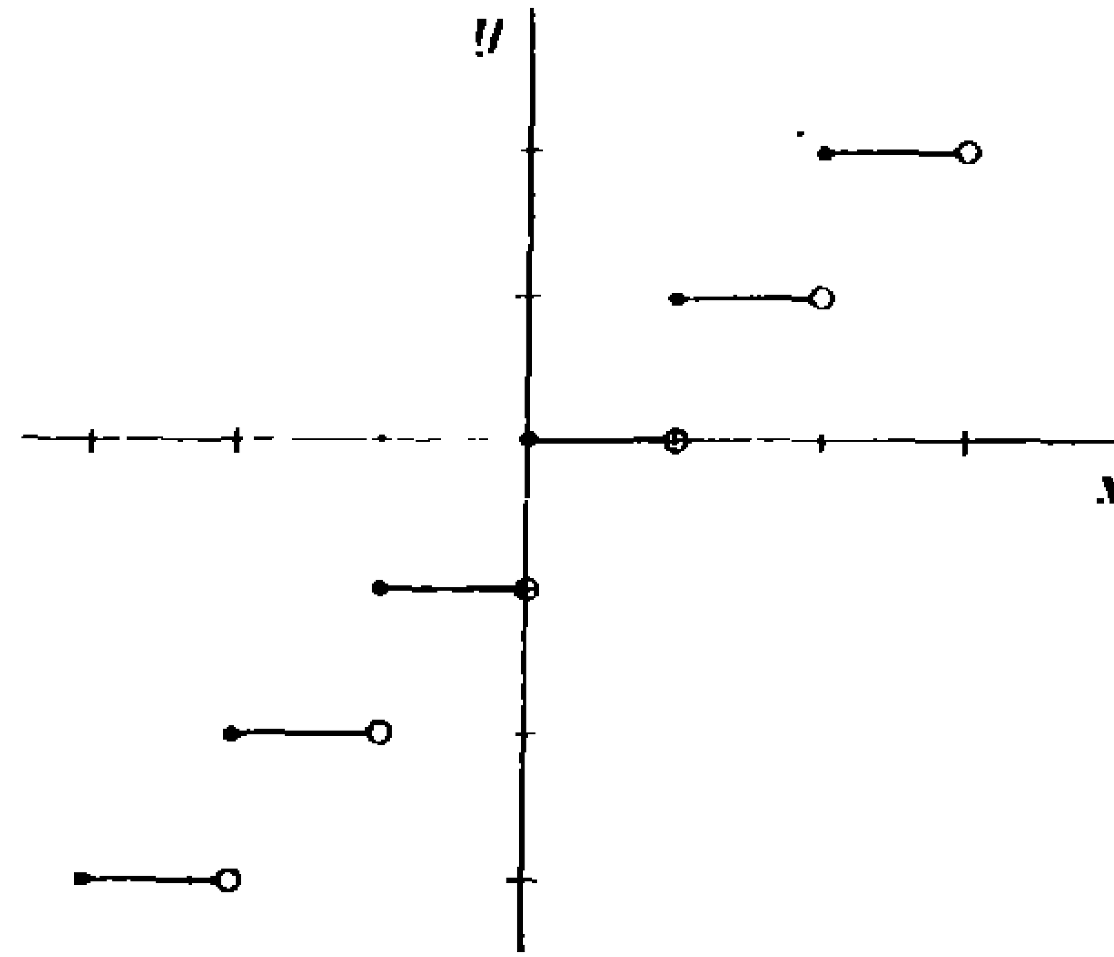


شكل ٢ـ٧ الشكل البيانى للمعادلة $y = |x|$

فمثلا ، $[7.4] = 7, [11] = 11, [-\pi] = -4$. لتخطيط الشكل البيانى لـ $y = [x]$ ، نرى أن

$$y = [x] = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -1 & \text{if } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{if } \ 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{if } \ 1 \leq x < 2, \\ 2 & \text{if } \ 2 \leq x < 3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}.$$

الشكل البيانى هو متسلسلة من قطع مستقيمة أفقية مرتبة كسلالم (شكل ٢ ـ ٨) . النقط والدوائر تشير الى أن النقطة الطرفية اليسرى لكل قطعة هى جزء من الشكل البيانى لكن النقطة الطرفية اليمنى لاتكون جزءا من الشكل .



شكل ٢ ـ٨ الشكل البيانى لـ $y = [x]$

مسائل

١ ـ أثبت أن الشكل البيانى لدالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى هى خط مستقيم .

٢ ـ ماهو الشكل البيانى لدالة ثابتة ؟ لدالة من الدرجة الثانية ؟

خطط الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية :

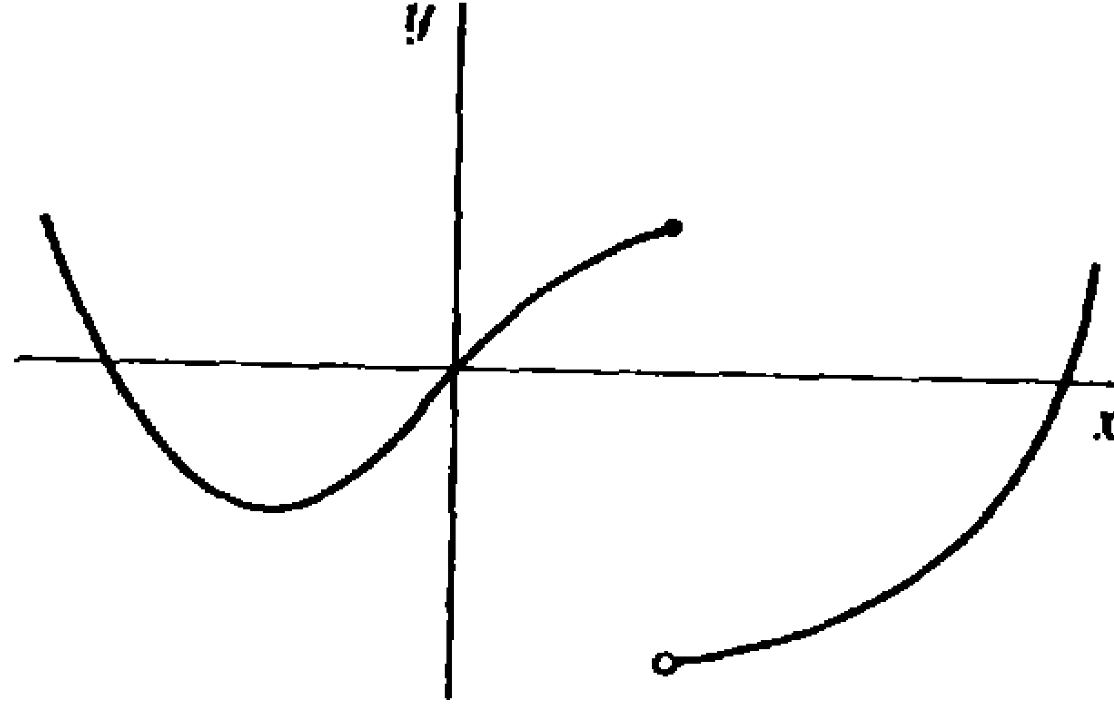
٣ـ $f(x) = |-x/2|$ ٤ ـ $f(x) = |x - 3|$ ٥ ـ $u(x) = |x + 4| + 2$ ٦ ـ $p(x) = |1/x|$

٧ـ $G(t) = t/|t|$ ٨ ـ $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ ٩ ـ $f(x) = x - |x|$ ١٠ ـ $h(x) = x|x|$

١١ ـ إذا كانت $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)$ ، خطط الشكل البيانى لكل من $y = f(x)$, $y = |f(x)|$.

١٢ ـ إذا كانت $f(x) = x^2 - 3$ ، خطط الشكل البيانى لكل من $y = f(x)$, $y = |f(x)|$.

١٣ ـ إذا كانت f هى الدالة التى شكلها البيانى هو المرسوم فى شكل ٢ ـ ٩ ، فارسم المنحنى $y = |f(x)|$.



شكل ٢ ـ ٩

١٤ ـ أوجد دالة f حيث العلاقة $|f(x)| = f(|x|)$ لاتكون صحيحة لكل x .

١٥ ـ أوجد دالة f حيث $f(|x|) = |f(x)|$ لكل x .

١٦ ـ خطط الشكل البيانىّ لـ $|y| = x^2$. إذا كانت $f(x) = x^2$ أو كانت $f(x) = -x^2$ ، فإن $|f(x)| = x^2$. أوجد دالة أخرى f بحيث أن $|f(x)| = x^2$.

١٧ ـ حل المعادلة $[x] = 6$.

١٨ ـ حل المعادلة $x - [x] = \frac{1}{4}$.

١٩ ـ أثبت أن $0 \leqslant x - [x] < 1$ لكل x .

خطط الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية :

٢٠ ـ $g(x) = [2x]$ ٢١ ـ $g(x) = 2[x]$ ٢٢ ـ $f(x) = x - [x]$

٢٣ ـ $g(t) = t + [t]$ ٢٤ ـ $g(x) = [x]^{-1}$

٢٥ ـ إذا كانت $p(x)$ هى أجرة البريد المطلوبة لارسال خطاب وزنه x oz (أنظر مسألة ٢٣ ، بند ٢ـ٢) ، أوجد صيغة لـ $p(x)$ بدلالة x .

٢٦ ـ دالة الاشارة يرمز لقيمتها عند x بالرمز $\operatorname{sgn} x$ وتعرف بـ

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

خطط الشكل البيانى للدالة ووضح أن $|x| = x \operatorname{sgn} x$. (إرشاد : اعتبر الحالات $x > 0,\ x = 0,\ x < 0$) .

٢٧ ـ العدد الصحيح a يقال إنه عامل قسمة للعدد الصحيح b إذا كان يوجد عدد صحيح c بحيث أن $b = ac$. فمثلا عوامل القسمة للعدد 6 ، هى $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ لكل عدد صحيح موجب

x ، دع $d(x)$ عدد عوامل القسمة الموجبة لـ x . مثال ذلك ، $d(6) = 4, d(7) = 2$. ما هو نطاق الدالة d ؟ خطط الشكل البيانى لـ d عند $1 \leqslant x \leqslant 16$.

٢٨ ـ أى عدد صحيح p لايساوى صفرا يختلف عن ± 1 وعوامل القسمة له هى فقط $\pm 1, \pm p$ يسمى عددا أوليا . لكل عدد حقيقى $x \geqslant 0$ ، دع $\pi(x)$ ترمز إلى عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى x . مثال ذلك $\pi(5) = 3$ $\pi(12.7) = 5$. خطط الشكل البيانى للدالة π عند $0 \leqslant x \leqslant 25$.

٢ ـ ٤

تركيبات الدوال

لتكن f,g الدالتين المعرفتين بـ

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = 3x + 1$$

العبارة $x^2 + 3x + 1$ المكونة من حاصل جمع $f(x), g(x)$ تعرف دالة ثالثة F .

$$F(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 1$$

ولدينا

$$F(2) = f(2) + g(2) = 4 + (6+1) = 11,$$
$$F(-1) = 1 + (-3+1) = -1,$$
$$F(a) = f(a) + g(a) = a^2 + 3a + 1.$$

الدالة F تسمى حاصل جمع الدالتين f, g ويرمز لها بالرمز $f + g$

بنفس الطريقة يمكن تعريف حاصل جمع أى دالتين f, g . الفرق والضرب والقسمة للدالتين f,g تعرف كالدوال G,P,Q حيث

$$G(x) = f(x) - g(x),$$
$$P(x) = f(x)g(x),$$
$$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

أيضا نكتب $G = f\text{-}g,\ P = fg,\ Q = f/g$. فى كل حالة نطاق الدالة المكونة هو تقاطع نطاقى f,g اذ أن كلا من الدالتين f,g يجب أن تكون معرفة . وعلاوة على ذلك ، دالة خارج القسمة لاتكون معرفة لأى x حيث المقام $g(x)$ يساوى صفرا . عندما $f(x) = x^2, g(x) = 3x + 1$ ، قيم هذه الدوال عند x هى

$$F(x) = (f+g)(x) = x^2 + (3x+1),$$
$$G(x) = (f-g)(x) = x^2 - (3x+1),$$
$$P(x) = (fg)(x) = x^2(3x+1),$$
$$Q(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{3x+1}, \qquad x \neq -\tfrac{1}{3}.$$

اعتبر ثانية الدالتين $f(x) = x^2,\ g(x) = 3x+1$. بما أن $g(2) = 7$ فان

$$f(g(2)) = f(7) = 49$$

بالمثل ،

$$f(g(-1)) = f(-2) = 4,$$

و

$$f(g(a)) = f(3a+1) = (3a+1)^2.$$

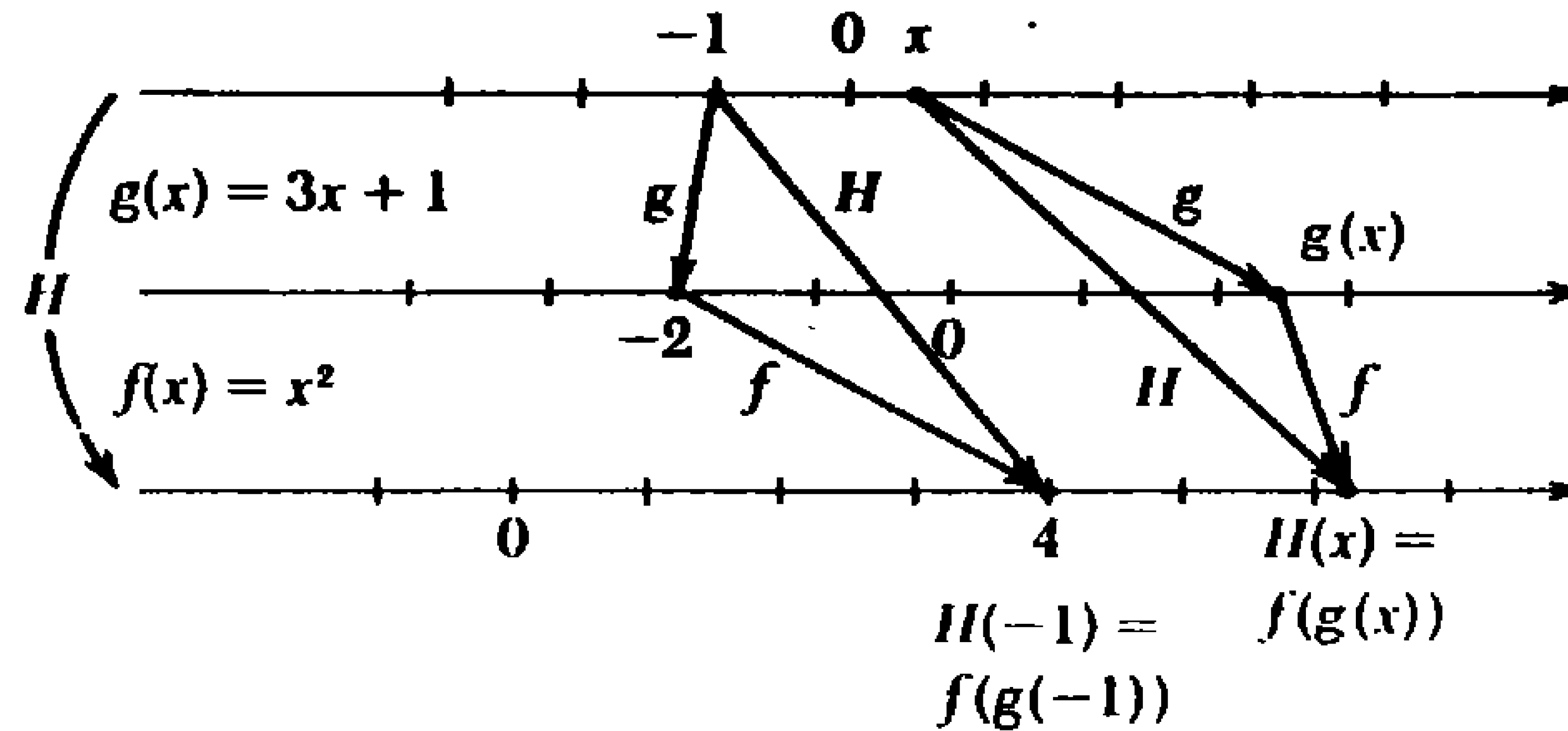
ويكون من المعقول أن نتحدث عن الدالة H المعرفة بـ

$$H(x) = f(g(x)) = f(3x+1) = (3x+1)^2$$

هذه الدالة تسمى مزيج الدالة f بالدالة g . مزيج الدالة g بالدالة f هو الدالة K المعرفة بـ

$$K(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$$

الشكلان للدالتين g وf المماثلان لشكل ٢ ـ ١ يمكن الجمع بينهما للحصول على شكل لدالة المزيج H . الخطان الأول والثانى فى شكل ٢ ـ ١٠ يكونان الرسم البيانى لـ g ، والثانى والثالث الرسم البيانى لـ f . الخطان الأول والثالث يكونان الرسم البيانى للمزيج $H(x) = f(g(x))$.



شكل ٢ ـ ١٠

الرسمان البيانيان لـ f و g يركبان لتكوين الرسم البيانى لـ $H: H(x) = f(9(x))$

بوجه عام ، يمكن تكوين المزيج H لـ f بـ g لأى دالتين g وf أى $H(x) = f(g(x))$. لكن H ستكون معرفة فقط لقيم x حيث العبارة $f(g(x))$ يكون لها معنى تلك . هى الـ x's فى نطاق g التى تجعل $g(x)$ بدورها تقع فى نطاق f . مثال ذلك ، اذا كانت

و $g(x) = x - 3$ و $f(x) = \sqrt{3}$ ، فإن $H(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x-3}$ ويكون نطاق H هو فئة جميع $x \geqslant 3$.

لقد ناقشنا خمس طرق هامة لتكوين دوال جديدة من دوال قديمة . وبتكرار استخدامها يمكن بناء دوال معقدة من عدد قليل من الدوال البسيطة . مثال ذلك ، العبارة

$$\left[\frac{x(6x-1)}{3} + 5\right](x^2 + \sqrt{2}x)$$

يمكن اعتبارها مكونة من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب والقسمة . لكن الاستخدام الرئيسى لهذه العمليات هو العكس تماما . يمكننا اعتبار دالة معقدة كأنها مركبة من دوال أبسط . فيما بعد سنرى فى هذا الفصل كيف تبسط وجهة النظر هذه عملنا .

مسائل

١ ـ إذا كانت $g(x) = x^2 + 1$ و $f(x) = 3 - 2x$ فأوجد

$$(f+g)(2),\ (f-g)(2),\ (fg)(2),\ \frac{f}{g}(2), f(g(2)),\ g(f(2))$$

٢ ـ إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 1$ و $f(x) = 4x - 3$ فأوجد :

(أ) $f + g$ ، (ب) $f - g$ ، (ج) fg ، (د) f/g (هـ) مزيج f بـ g ، (و) مزيج g ، f .

٣ـ كرر مسألة ٢ حيث $g(x) = x^2 - 2$ و $f(x) = \sqrt{x}$

٤ ـ كرر مسألة ٢ حيث $g(x) = (1-x)/x$ و $f(x) = 1/(x+1)$

٥ ـ كرر مسألة ٢ حيث $g(x) = 1/x^2$ و $f(x) = x/(3x+2)$

٦ ـ إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x$ ، فأوجد كلا من الدوال الآتية واعط نطاقها

(أ) $G(x) = \sqrt{f(x)}$ (ب) $F(u) = \dfrac{f(u) - f(6)}{u - 6}$ (جـ) $g(x) = f(f(x))$

٧ـ دع $g(x) = x^2 - 1$ و $f(x) = \sqrt{1+x}$. أثبت أن $g(f(x)) = x$ لكل x فى نطاق f . هل $f(g(x)) = x$ لكل x فى نطاق g ؟

٨ ـ إذا كانت $f(x) = x^3$ ، فاوجد دالة g . بحيث أن $f(g(x))$ لجميع x .

٩ ـ إذا كانت $f(z) = (z+1)/(z-3)$ ، فأوجد دالة g بحيث أن $f(g(z)) = z$ لما يكاد يكون جميع قيمz . ما قيم z التى يجب استبعادها ؟

لكل مما يأتى ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كحاصل جمع g و f . هل يمكن اجراء ذلك بأكثر من طريقة واحدة ؟

١٠ ـ $F(x) = x^3 + 3x$ ١١ ـ $F(x) = x^4 + 1/x - 3x^2 + 5$

١٢ ـ $F(t) = t^2 + 6$ ١٣ ـ $F(x) = x$

لكل ممايأتى ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كحاصل ضرب أو خارج قسمة g و f. هل يمكن اجراء ذلك بأكثر من طريقة واحدة ؟

١٤ - $F(x) = x\sqrt{x^2+1}$ ١٥ - $F(t) = (t-1)/t$ ١٦ - $F(x) = 1/\sqrt{2x^3-1}$

١٧ - $F(x) = x^3 + 5x^2$ ١٨ - $F(u) = u^2 + 8u + 15$ ١٩ - $F(x) = x + 1/x$

٢٠ - $F(x) = 6.$

لكل مما يأتى ، أوجد دالتين g و f بحيث أن F يمكن التعبير عنها كمزيج f بـ g .

٢١ - $F(x) = \sqrt{2x+8}$ ٢٢ - $F(z) = \left(\frac{z}{9-z^2}\right)^5$

٢٣ - $F(x) = 2(x+1)^2 - 3(x+1) + 5$ ٢٤ - $F(x) = \frac{3}{x^3} + \frac{\sqrt{2}}{x^2} - \frac{7}{x}$

٢٥ - إذا كانت

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

فخطط الشكل البيانى للدالة G المعرفة بـ $G(t) = H(t) - H(t-1)$ أثبت أن : $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn } x)$ (أنظر المسألة ٢٦ ، بند ٢ - ٣) .

٢٦ - اثبت أن $x^3 + 3x^2 - 7x + 5$ يمكن تكوينها من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب .

٢٧ - اثبت أن $\left(x + \frac{x^2 - \sqrt{2}}{x+1}\right)^2 + 6x$ يمكن تكوينها من ثوابت و x بتكرار الجمع والطرح والضرب والقسمة .

٢٨ - إذا كانت $f(x+y) = f(x) + f(y)$ و $f(x) = bx + c$ لكل y و x ، هل يمكن أن تكون c و b اختياريتين ؟

٢ - ٥
مقدمة للنهايات

خذ فى الاعتبار الدالة $f(x) = 2x + 1$ نسأل سؤالين :

١ - ما قيمة f عندما $x = 1$ ؟

٢ - هل يوجد عدد تكون $f(x)$ قريبة منه لكل x قريبة من ، ولكن لاتساوى ، 1 ؟

الإجابة عن السؤال الأول سهلة . هى $f(1) = 3$. للحصول على اجابة للسؤال الثانى ، سنحسب $f(x)$ لقيم متعددة لـ x قريبة من ، ولكن لاتساوى ، 1 ثم نحاول تخمين العدد . الجدول يوحى بأنه عندما تكون قريبة من , 1 سواء أكانت أقل قليلا أو أكبر قليلا من 1 ، فان $f(x)$ تكون قرب 3 ، وأن كلما كانت x أقرب الى 1 ، فان $f(x)$ تكون أقرب إلى 3 . وفى الواقع إذا كانت x قريبة من 1 فإن

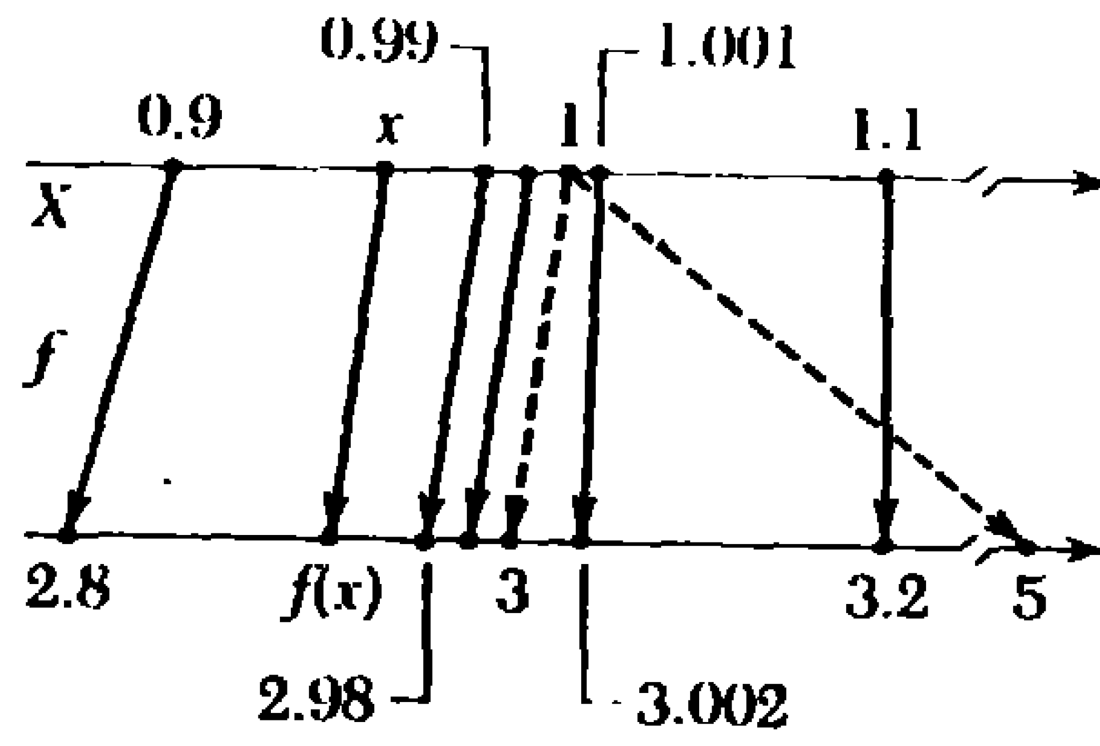
x 2 يجب أن تكون قريبة من 2 ، 1 + $2x$ قريبة من 3 . علاوة على ذلك ، نشعر بديهيا أن باختيار x قريبة قربا كافيا من 1 ، يمكننا أن نجعل $f(x)$ قريبة من 3 كيفما نشاء ، وليكن الى واحد من مليون أو واحد من بليون أو حتى أقرب من ذلك .

x	$f(x)$
0.5	2
0.9	2.8
0.99	2.98
0.999	2.998
1.5	4
1.1	3.2
1.001	3.002
1.00001	3.00002

بسبب هذه الملاحظات الثلاثة ، وربما بالأكثر بسبب الملاحظة الأخيرة ، سنكون متأكدين تماما أن 3 هو العدد الذى نتطلع اليه . لنشير الى ذلك نكتب $\lim_{x\to1} f(x) = 3$ (تقرأ نهاية f عند 1 هى 3 أو نهاية f عندما x تقترب من 1 هى 3) . أيضا عادة نكتب "$\lim_{x\to1} (2x + 1) = 3$" كطريقة مختصرة للقول $\lim_{x\to a} f(x) = 3$ ، حيث f هى الدالة المعرفة بـ $f(x) = 2x + 1$.

x	x^2
2.6	6.76
2.9	8.41
2.99	8.9401
2.997	8.982009
3.3	10.89
3.05	9.3025
3.01	9.0601
3.0001	9.00060001

كمثال آخر ، دعنا نوجد $\lim_{x\to3} x^2$. هذا يعنى أننا نوجد العدد ، إذا وجد ، الذى تكون x^2 قريبة منه عندما تكون x قريبة من ، لكن لاتساوى ، 3 ، بصرف النظر عما إذا كانت x أقل قليلا من 3 أو أكبر قليلا من 3 . من الطبيعى ، عندما $x = 3$ تكون $x^2 = 9$ ، وقد تكون 9 هى أيضا الجواب لسؤالنا ، لكن بما أنه ليس صحيحا أن لكل دالة تكون النتيجتان هما نفس النتيجة ، فاننا نعود ونعمل جدولا ، حاسبين x^2 لقيم x القريبة من ، ولكن لاتساوى ، 3 . نرى أن عندما x تكون قريبة من 3 ، سواء كانت أقل قليلا أو أكبر قليلا من 3 ، فان x^2 تكون قرب 9 وأنه طالما كانت x أقرب الى 3 ، فان x^2 تكون اقرب الى 9 . أيضا يبدو من العقول أنه باختيار x قريبا قربا كافيا من 3 ، يمكننا أن نجعل x^2 قريبة من 9 كيفما نشاء . رغم أن الشواهد تشير بشدة إلى أن $\lim_{x\to3} x^2 = 9$ الا أنه لايمكننا التأكيد المطلق بذلك . لقد حسبنا x^2 لقيم قليلة فقط لـ x ، واذا واصلنا حساباتنا ، فاننا ندرك ، رغم أنه من الصعب التخيل ، أن قيم x^2 قد لاتأتى مطلقا قرب 9 الى أكثر من واحد من مليون . بهذا التحفظ فى الذاكرة ، دعنا نقل أن $\lim_{x\to3} x^2 = 9$. نفس التحفظ ينطبق أيضا على استنتاجنا السابق $\lim_{x\to1} (2x + 1) = 3$.



شكل ٢ ـ ١١

عندما تكون x قريبة من 1 تكون f(x) قريبة من 3

فى شكل ٢ ـ ١١ رسمنا الشكل التخطيطى للدالة $f(x) = 2x + 1$ فى القرب من $x = 1$ (أهمل حاليا الخط المنقط من 1 الى 5) . لاحظ كيف تتجمع أطراف الأسهم التى تبدأ من النقط القريبة من $x = 1$ حول النقطة 3 . هذا يوضح بالصورة أن $\lim_{x\to 1} (2x + 1) = 3$.

دعنا ننظر إلى بعض الأمثلة الأخرى عن النهايات .

مثال ١ . إذا كانت g هى الدالة المعرفة بـ

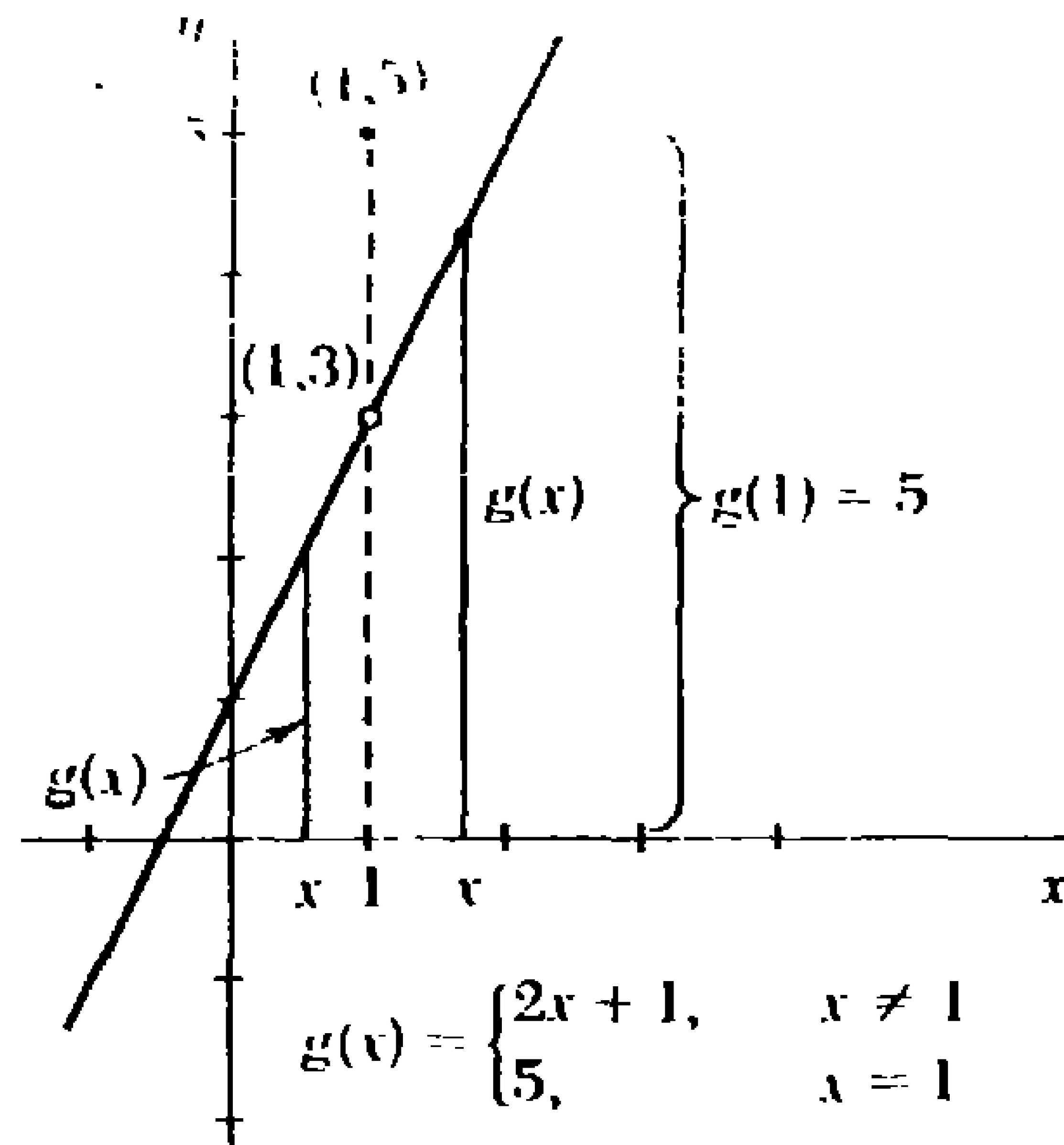
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \neq 1, \\ 5, & x = 1, \end{cases}$$

فاوجد $\lim_{x\to 1} g(x)$

نلاحظ أن $g(1) = 5$ ، لكن نتذكر أن هذا لايعنى شيئا بالنسبة إلى إيجاد $\lim_{x\to 1} g(x)$. لايجاد $\lim_{x\to 1} g(x)$. يجب أن نحسب $g(x)$ لقيم x القريبة من ، لكن لاتساوى ، 1 . لقيم $x \neq 1$ ، $g(x)$ لها نفس القيم مثل $f(x) = 2x + 1$ ، ولذلك فالجدول الذى حسبناه لـ $f(x)$ يستخدم على حد سواء لـ $g(x)$.

أيضا ، كما سبق ، يمكننا الاستدلال على أنه عندما تكون x قرب 1 ، تكون $2x$ قرب 2 وتكون $2x + 1$ قرب 3 . علاوة على ذلك ، نشعر بالبداهة أنه باختيار x قريبة قربا كافيا من 1 ، يمكننا أن نجعل $g(x)$ قريبة من 3 كيفما نشاء . واذن ، لكن مع التحفظات الخاصة بتأكيدنا المطلق للنتيجة يمكننا أن نقول أن $\lim_{x\to 1} g(x) = 3$. من الطبيعى أنه اذا كانت $g(x)$ قريبة من 3 فهى أيضا قريبة من 3,00001 . لكن نشعر أن $g(x)$ ستأتى أخيرا أكثر قربا الى 3 عن 3,00001 أو أى عدد آخر . هذه المرة $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ والسؤالان ١ و ٢ بالنسبة للدالة g لهما جوابان مختلفان . الشكل التخطيطى لـ g يكون مثل الشكل لـ f (شكل ٢ ـ ١١) مع الاختلاف فى أن السهم من 1 الى 3 يستبدل من 1 الى 5 . تحرك هذا السهم الواحد لايؤثر على تجمع الأسهم قرب 3 . وهذا يوضح أن نهاية الدالة لاتعتمد على قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال .

الشكل البيانى لـ $g(x)$ مرسوم فى شكل ٢ ـ ١٢ . لاحظ أن لقيم x القريبة من 1 ، تكون أطوال الخطوط الرأسية ، التى تمثل قيم $g(x)$ ، قريبة من 3 وهذا يكون صحيحا سواء أكانت x أقل أو أكبر



شكل ٢ - ١٢

عندما تكون x قريبة من 1 تكون $g(x)$ قريبة من 3 ، ولو أن $g(1) = 5$

من 1 . طول الخط الرأسى الى $(1,5)$ ، الذى هو $g(1)$ ، ليس له تأثير على ذلك . هذا يوضح هندسيا أن نهاية الدالة لاتعتمد على قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال .

مثال ٢ . إذا كانت $h(x) = 2x + 1, x \neq 1$ فأوجد $\lim_{x \to 1} h(x)$.

حيث أننا فى ايجاد $\lim_{x \to 1} h(x)$ تهمنا قيم $h(x)$ عند x القريبة من ، لكن لاتساوى ، 1 ، فان حقيقة أن $h(x)$ غير معرفة عند 1 لاتقلقنا . مرة أخرى يمكن استعمال جدول g ونستدل كما سبق أنه عندما تكون x قريبة من تكون $2x, 2x$ قريبة من2 وتكون $2x + 1$ قريبة من 3 ، ونستنتج أن $\lim_{x \to 1} h(x) = 3$. الشكل البيانى لـ h يكون مثل الشكل البيانى لـ g فى شكل ٢ - ١٢ لكن بدون النقطة عند $(1,5)$. واضح أن تحريك هذه النقطة الى أعلى أو أسفل أو حتى ازالتها كلية كما فعلنا هنا ، لايؤثر على أطوال الخطوط الرأسية لـ x القريبة من1 . النهاية تكون مستقلة عن قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال وقد توجد حتى إذا كانت الدالة ليس لها قيمة هنالك .

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x \to -2} 3x^2/(1 - 2x)$

عندما تكون x قريبة من $2-$ ، تكون x^2 قريبة من 4 وتكون $3x^2$ قريبة من 12 . أيضا تكون $2x$ قريبة من $4-$. واذن تكون $3x^2 / (1 - 2x)$ قريبة من $\frac{12}{5} = [(-4) - 1] / 12$ علاوة على ذلك ، نشعر أن باختيار x قريبة قربا كافيا من $2-$ يمكننا جعل $3x^2 / (1 - 2x)$ قريبة من $\frac{12}{5}$ كيفما نشاء ، مثلا الى واحد من مليون أو حتى أكثر قربا ، رغم أننا نواجه مشكلة تحديد الى أى قرب من $2-$ يجب أن تكون x لانجاز ذلك . إذن

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2}{1 - 2x} = \frac{12}{5}$$

الشكل البيانى للدالة u ، حيث

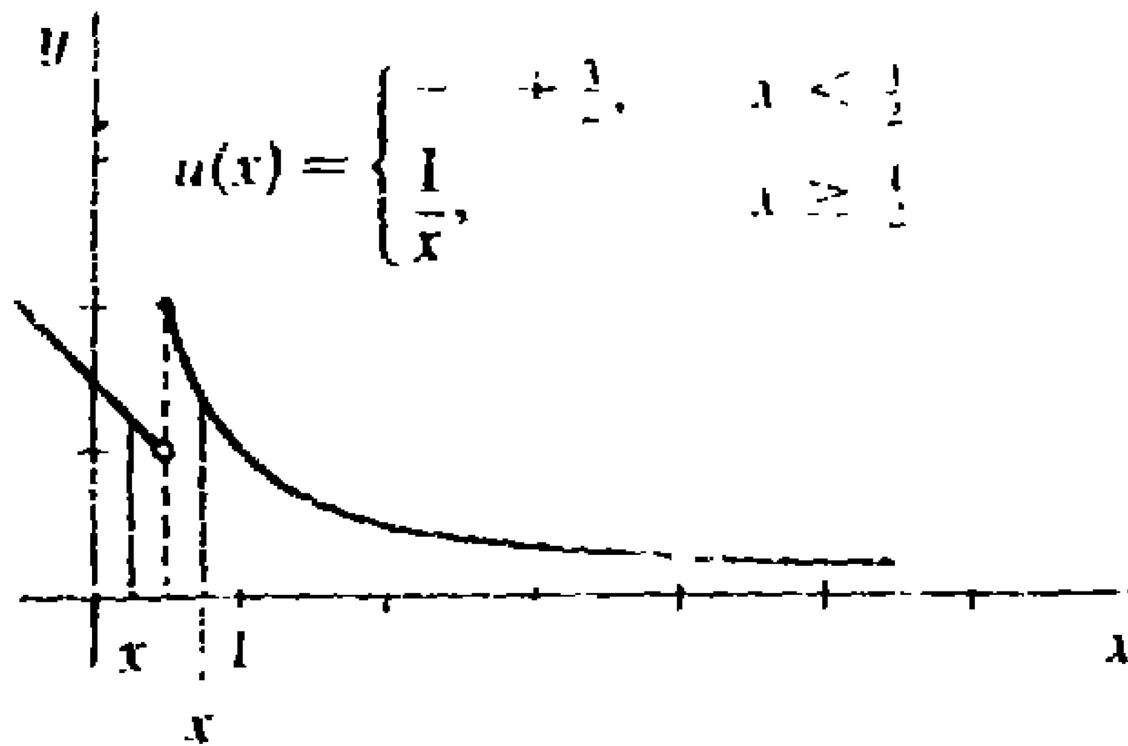
$$u(x) = \begin{cases} -x + \frac{3}{2}, & x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{x}, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

موضح فى شكل ٢ ـ ١٣ ، وقيم $u(x)$ لـ x فى المنطقة المجاورة لـ $\frac{1}{2}$ معطاة فى الهامش . عندما تكون x قريبة وأقل من $\frac{1}{2}$ فان $u(x) = -x + \frac{3}{2}$ وتكون قريبة من $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$. لكن عندما تكون x قريبة وأكبر من $\frac{1}{2}$ فإن $u(x) = 1/x$ وتكون قريبة من $1/\frac{1}{2} = 2$. الشكل البيانى أيضا يوضح سلوك الدالة . لكى تكون u لها نهاية ، يجب أن يوجد عدد واحد بحيث أن $u(x)$ تكون قريبة منه لكل x قرب $\frac{1}{2}$. حيث أن هذه ليست الحالة فان u ليس لها نهاية عندما تقترب x من $\frac{1}{2}$ ، أى أن $\lim\limits_{x\to 1/2} u(x)$ لاتوجد . لجميع الاعداد الأخرى a, $\lim\limits_{x\to a} u(x)$ توجد (أنظرشكل ٢ ـ ١٣) .

x	$u(x)$
0.4	1.1
0.49	1.01
0.4999	1.0001
0.6	1.667
0.51	1.961
0.5001	1.9996

اذا كانت x مقيدة بالقيم التى هى أقل من $\frac{1}{2}$ ، فان u سيكون لها 1كنهاية . هذه معلومات مفيدة ، ونقول « نهاية u عندما xتقترب من $\frac{1}{2}$ من أسفل (أومن اليسار) هى 1 » أو « النهاية اليسرى لـ u عند $\frac{1}{2}$ هى 1 » ونكتب $\lim\limits_{x\to 1/2^-} u(x) = 1$ لنشير الى هذا . بالمثل ، إذا كانت xمقيدة بالقيم التى هى أكبر من $\frac{1}{2}$ ، فان uسيكون لها العدد 2كنهاية . ونكتب $\lim\limits_{x\to 1/2^+} u(x) = 2$ لنشير الى أن النهاية اليمنى لـ u عند $\frac{1}{2}$ هى 2 ، أو « النهاية لـ u عندما x تقترب من $\frac{1}{2}$ من أعلى (أو من اليمين) هى 2 » . مثالنا يوضح أن الدالة يمكن أن يكون لها نهاية يمنى ونهاية يسرى لكن ليس لها نهاية . بالرجوع الى الأمثلة السابقة فى هذا البند ، نرى أن

$$\lim_{x\to 3^+} x^2 = 9, \qquad \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9,$$
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 3, \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = 3.$$



شكل ٢ ـ ١٣

$\lim\limits_{x\to 1/2^+} u(x) = 2$ و $\lim\limits_{x\to 1/2^-} u(x) = 1$

لكن $\lim\limits_{x\to 1/2} u(x)$ لاتوجد .

لأى دالة f ، اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة ، فانه بالمثل أيضا تكون النهاية اليمنى والنهاية اليسرى وكلاهما يساويان $\lim_{x\to a} f(x)$. بالعكس ، اذا كانت $\lim_{x\to a^-} f(x)$ و $\lim_{x\to a^+} f(x)$ كلاهما موجودتين ومتساويتين فان $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة ولها نفس القيمة . عمليا نثبت عادة وجود النهايات بهذه الطريقة .

مثال ٤ أوجد $\lim_{s\to 0} F(s)$ ، حيث

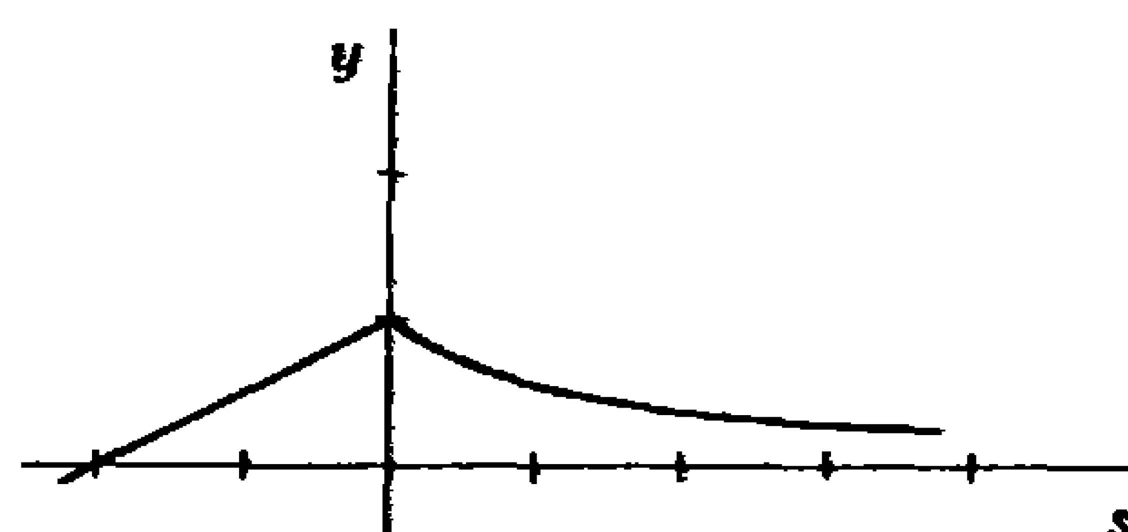
$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s + 1, & s < 0, \\ \dfrac{1}{s+1}, & s \geqslant 0. \end{cases}$$

حيث أن وصف F يتغير عند العدد حيث النهاية مطلوب ايجادها ، فاننا سنحدد ما اذا كانت F لها نهاية بايجاد نهايتها اليمنى واليسرى . لدينا

$$\lim_{s\to 0^-} F(s) = \lim_{s\to 0^-} (\tfrac{1}{2}s + 1) = 1,$$

$$\lim_{s\to 0^+} F(s) = \lim_{s\to 0^+} \frac{1}{s+1} = 1.$$

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى متساويتان ، وعليه فالنهاية موجودة وتساوى 1 . الشكل البيانى لـ F مرسوم فى شكل ٢ ـ ١٤ .

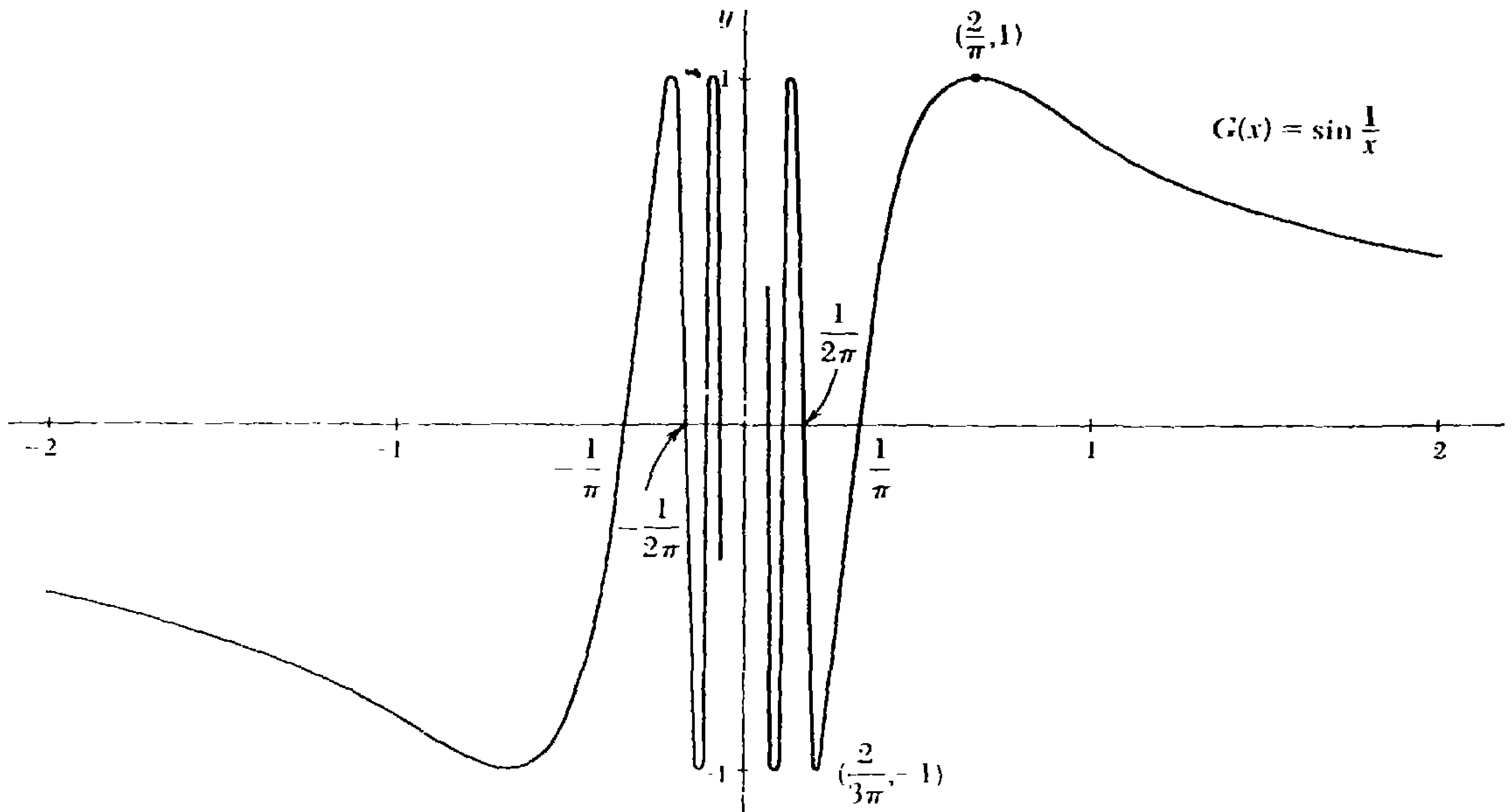


$$F(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s + 1, & s < 0 \\ \dfrac{1}{s+1}, & s \geq 0 \end{cases}$$

شكل ٢ ـ ١٤

$$\lim_{s\to 0^-} F(s) = 1 = \lim_{s\to 0^+} F(s) \qquad \text{وإذن} \qquad \lim_{s\to 0} F(s) = 1$$

توجد كيفيات عديدة لفشل الدالة أن يكون لها نهاية عند عدد ما . الشكل البيانى للدالة G المعرفة بـ $G(x) = \sin(1/x)$ مخطط فى شكل ٢ ـ ١٥ . الشكل البيانى يتذبذب بسرعة أكثر فأكثر بين 1 و $1-$ عندما تقترب x من 0 . حتى للشخص غير الملم بحساب المثلثات واضح من الشكل البيانى أن G ليس لها نهاية عند 0 . فى أى فترة مفتوحة تحتوى نقطة الأصل ، مهما كانت صغيرة ، توجد x's يكون عندها $\sin(1/x)$ أى عدد بين 1 و $1-$؛ اذن لايوجد عدد واحد حيث $\sin(-1/x)$ تكون دائما قريبة منه . الدالة ليس لها حتى نهاية يمنى أو نهاية يسرى عند 0 .



شكل ٢ ـ ١٥

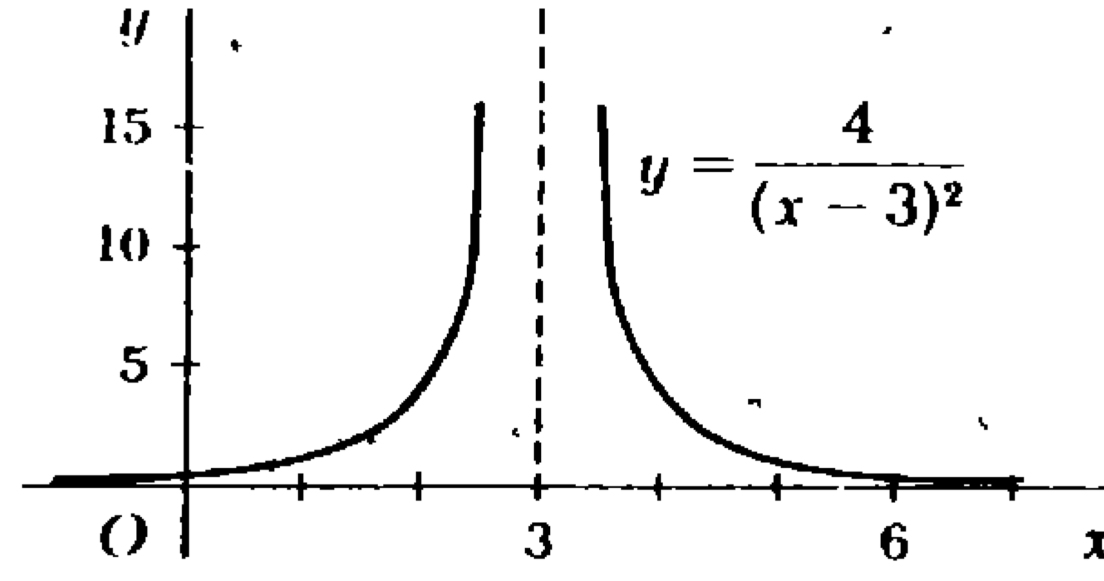
$\sin(1/x)$ ليس لها لا نهاية يمنى ولا نهاية يسرى عند نقطة الأصل

عندما تكون x قريبة من 3 ، فان $4/(x-3)^2$ تكون كسرا مقامه قريب من O لكن بسطه ليس كذلك . هذه الكسور تكون موجبة وكبيرة ، فمثلا $4/(3.01-3)^2 = 40,000$. عندما تقترب x من 3 فان $4/(x-3)^2$ تصبح أكبر فأكبر . علاوة على ذلك ، بأخذ أى عدد $N>O$ ، يمكننا باختيار x قريبة قربا كافيا من 3 أن نجعل $4/(x-3)^2 > N$ أى أنه لايوجد عدد حيث $4/(x-3)^2$ تكون دائما قريبة منه عندما تكون x قريبة من 3 ، وإذن $\lim_{x\to 3} 4/(x-3)^2$ لاتوجد . للدلالة على أن $4/(x-3)^2$ تصير أكبر من أى عدد معطى عندما تقترب x من 3 نقول « نهاية $4/(x-3)^2$ عندما تقترب x من 3 لانهاية » ونكتب $\lim_{x\to 3} 4/(x-3)^2 = \infty$. بالرغم من وجود رمز النهاية ، فان الدالة المعرفة بـ $4/(x-3)^2$ ليس لها نهاية عند 3 . رمز اللانهائية ∞ لايمكن اعتباره كعدد متميز . استخدامه فى التعبير لايعنى أكثر مما ذكرنا ، وهو أن $4/(x-3)^2$ تصبح كبيرة عندما تقترب x من 3 . بالمثل $\lim_{x\to 0} (-1/x^2) = -\infty$ تعنى أن $-1/x^2$ تكون سالبة وكبيرة لقيم x القريبة من O . الشكل البيانى $4/(x-3)^2$ مخطط فى شكل ٢ ـ ١٦ . المنحنى له خطان تقاربيان ، هما المحور السينى والخط المستقيم $x = 3$.

مثال ٥ . أوجد $\lim_{z\to 4} [(1/z - \frac{1}{4})/(z-4)]$.

دع

$$v(z) = \frac{1/z - \frac{1}{4}}{z-4}$$



شكل ٢ - ١٦

$$\lim_{x\to 3} \frac{4}{(x-3)^2} = \infty$$

عندما تكون z قريبة من 4 ، المقام يكون قريبا من صفر ، لكن الحال هنا ليس كما هو مع $4/(x-3)^2$ اذ أن $v(z)$ لايمكن أن يقال إنها كبيرة لهذه الـ z's ، لأن هذه المرة البسط هو أيضا قريب من الصفر . عدد صغير ما مقسوم على عدد صغير آخر يمكن أن يكون صغيرا (فمثلا ، $0.0001 / 0.1 = 0.001$) أو كبيرا (فمثلا ، $0.1 / 0.0001 = 1000$) أو عددا معتدلا (فمثلا ، $0.05 / 0.005 = 10$) . من غير الممكن أن البسط والمقام كلاهما صغير . لايجاد $\lim_{z\to 4} v(z)$ نعبر عن $v(z)$ بصورة تتجنب هذه الصعوبة . لدينا

$$v(z) = \frac{1/z - \frac{1}{4}}{z-4} = \frac{(4-z)/4z}{z-4} = \frac{-(z-4)}{4z(z-4)}$$

وحيث أننا نهتم بقيم $v(z)$ عندما تكون z قريبة من ولكن لاتساوى ، 4 . فالعامل $z - 4$ يمكن شطبه ، ويكون $v(z) = -1/4z$ حيث $z \neq 4$. من السهل ايجاد النهاية لـ $v(z)$ فى هذه الصورة ، لانه عندما تكون z قريبة من 4 ، تكون $4z$ قريبة من 16 وتكون $-1/4z$ قريبة من $-\frac{1}{16}$. اذن

$$\lim_{z\to 4} \frac{1/z - \frac{1}{4}}{z-4} = \lim_{z\to 4}\left(-\frac{1}{4z}\right) = -\frac{1}{16}$$

نهايات الكسور حيث البسط والمقام كلاهما يقتربان من الصفر تظهر كثيرا فى حساب التفاضل .

مثال ٦ إذا كان $f(y) = (\sqrt{y} - 3)/(y-9)$ فأوجد $\lim_{y\to 9} f(y)$

مرة أخرى كل من البسط والمقام يقترب من الصفر ، لكن حيلة تستحق الاستذكار تبسط التعبير بحيث يمكن إيجاد النهاية . نذيل الجذر فى البسط بضرب البسط والمقام فى $\sqrt{y} + 3$:

$$f(y) = \frac{\sqrt{y}-3}{y-9} = \frac{\sqrt{y}-3}{y-9}\,\frac{\sqrt{y}+3}{\sqrt{y}+3}$$

$$= \frac{y-9}{(y-9)(\sqrt{y}+3)} = \frac{1}{\sqrt{y}+3}$$ إذا كانت $y \neq 9$ ،

عندما تكون y قريبة من 9 ، $\sqrt{y}$ تكون قريبة من 3 ويكون

$$\lim_{y\to 9} f(y) = \lim_{y\to 9} \frac{\sqrt{y}-3}{y-9} = \lim_{y\to 9} \frac{1}{\sqrt{y}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

بسبب أن المسألة تستلزم أن $y \neq 9$ أمكننا ايجاد $\lim_{y\to 9} f(y)$ من العبارة $1/(\sqrt{y}+3)$

فى هذا المثال ، كما فى مسائل كثيرة على النهايات من الصواب أنه يمكننا التعويض بـ 9 عن y فى $1/(\sqrt{y}+3)$ أو نحصل على نفس النتيجة $\frac{1}{6}$. الا أننا نحذر القارىء أن موضوع ايجاد النهاية أكبر من أن نعوض بـ a عن x لايجاد $\lim_{x\to a} f(x)$. إن إدراك المفارقة بين $f(a)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ أمر ضرورى لتفهم حساب التفاضل .

لبعض الدوال لايكون واضحا مطلقا وجود النهاية ، وقد نحتاج إلى براعة فائقة لتحديد الموقف . إحدى هذه النهايات هى $\lim_{x\to 0^+} x \log x$ عندما تكون x قريبة من الصفر ، فان $\log x$ تكون كبيرة وسالبة ، ومن الصعب تقدير مقدار $x \log x$ بدون دراسة أعمق (مسألة ٦٩) . احدى أكثر النهايات أهمية فى الرياضيات هى $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$ مرة أخرى ، ليس من الواضح مباشرة ما اذا كانت توجد نهاية . جدول لقيم x قرب 0 معطى فى الهامش . الشواهد تشير الى وجود نهاية قيمتها تقع بين 2.717 و 2.720 ، هذا التخمين صحيح ، لكن البرهان ليس سهلا . سنعطى برهانا فى الفصل السابع وفى الفصل السادس عشر سنثبت أن القيمة التقريبية للنهاية 2.71828.

x	$(1+x)^{1/x}$
-0.1	2.868
-0.01	2.732
-0.001	2.720
0.1	2.594
0.01	2.705
0.001	2.717

مسائل :

١ ـ بدون أن تبسط جبريا عبارة $v(x)$ فى مثال ٥ ، كون جدولا لقيم $v(z)$ عند $z = 3.9, 3.99, 4.1, 4.01$ لتحقيق استدلالنا العقلانى أن $\lim_{z\to 4} v(z) = -\frac{1}{16}$

أوجد النهايات الآتية بعمل جدول للقيم (جدول الجذور والمقلوبات يمكن استخدامها لتبسيط الحسابات) .

٢ ـ $\lim_{x\to 4} (1-3x)$

٣ ـ $\lim_{x\to 2} x^3$

٤ ـ $\lim_{t\to \sqrt{2}} (t^2-2)$

٥ ـ $\lim_{x\to -2} \frac{2x-3}{x+4}$

٦ ـ $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

٧ ـ $\lim_{u\to 4^+} \sqrt{u+2}$

٨ ـ اذا كانت $f(x) = 6$ ، فاوجد $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to 3} f(x)$

أوجد النهايات الآتية

٩ - $\lim_{x\to 2^-} (-5)$

١٠ - $\lim_{x\to 3} (1+4x-\frac{1}{2}x^2)$

١١ - $\lim_{y\to 2} (y^3-10y-8)$

١٢ - $\lim_{s\to -7} (s-1)(s+7)$

١٣ - $\lim_{x\to c} (3x+1)$

١٤ - $\lim_{x\to 0} (x^2+4)(x-\frac{1}{2})$

١٥ - $\lim_{x\to a} (x^2-a^2)$

١٦ - $\lim_{x\to a} (ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$

١٧ - $\lim_{z\to 0} \dfrac{3z+2}{z^2-2z-5}$

١٨ - $\lim_{t\to 1/2^-} \dfrac{6-4t}{t+1}$

١٩ - $\lim_{x\to b} \left(\dfrac{x}{x-4}+b\right)$

٢٠ - $\lim_{x\to 13} \sqrt{x-10}$

٢١ - $\lim_{u\to x} \sqrt{u^2+4u}$

٢٢ - $\lim_{y\to 1} \sqrt{5-3y-y^2}$

٢٣ - $\lim_{x\to -1} (3x+\frac{2}{3})\sqrt{x+10}$

٢٤ - $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x\sqrt{x+1}}$

٢٥ - $\lim_{x\to 5} \left[x^3\dfrac{\sqrt{2x-6}}{2(x+3)}+(x-1)\right]$

٢٦ - $\lim_{u\to x} \dfrac{u-1}{u^3-xu+b}$

أوجد كلا من النهايات الآتية ، اذا كانت موجودة ، وخطط الشكل البيانى للدالة المناظرة . اذا لم تكن النهاية موجودة ، فأوجد النهاية اليسرى والنهاية اليمنى إذا وجدتا . هل النهاية تساوى قيمة الدالة عند العدد موضع السؤال ؟

٢٧ - $\lim_{x\to 3} f(x),\ \lim_{x\to 1} f(x)$ ؛ $f(x)=\begin{cases}-x+6, & x\leq 3,\\ x, & x>3;\end{cases}$

٢٨ - $\lim_{x\to -1} f(x),\ \lim_{x\to 0} f(x)$ ؛ $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x<-1,\\ x^2, & x\geq -1;\end{cases}$

٢٩ - $\lim_{t\to 1} g(t),\ \lim_{t\to 0} g(t)$ ؛ $g(t)=\begin{cases}t^2, & t<1,\\ -2t, & t\geq 1;\end{cases}$

٣٠ - $\lim_{x\to 2} h(x),\ \lim_{x\to 4} h(x)$ ؛ $h(x)=\begin{cases}x^3, & x<2,\\ 8, & x>2;\end{cases}$

٣١ - $\lim_{x\to 2} F(x)$ ؛ $F(x)=\begin{cases}x^3, & x<2.\\ 0, & x>2;\end{cases}$

٣٢ - $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؛ $f(x)=\begin{cases}-x+6, & x<3,\\ -1, & x=3,\\ x, & x>3;\end{cases}$

٣٣ - $\lim_{x\to 0} u(x)$ ؛ $u(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$

٣٤ - $\lim_{t\to 0} |t|$

٣٥ - $\lim_{x\to 0} (x/|x|)$

٣٦ - $\lim_{x\to 1} [x]$ و $\lim_{x\to 3/2} [x]$ ، حيث $[x]$ هى دالة أكبر الأعداد الصحيحة .

٣٧ - $\lim_{x\to 2} (x-[x])$

أوجد النهايات الآتية :

٣٨ - $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ ٣٩ - $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x+2}$ ٤٠ - $\lim_{t\to -3} \frac{t^2+1}{(t+3)^2}$

٤١ - $\lim_{y\to -3} \frac{y+3}{y^2-9}$ ٤٢ - $\lim_{y\to 3} \frac{y+3}{y^2-9}$ ٤٣ - $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x+8)^2}$

٤٤ - $\lim_{x\to 1} \frac{m}{x-1}$ ٤٥ - $\lim_{s\to 2} \frac{1}{(s+1)(s-2)}$ ٤٦ - $\lim_{x\to -5} \frac{1/x+\frac{1}{5}}{x+5}$

٤٧ - $\lim_{y\to c} \frac{\sqrt{y}-\sqrt{c}}{y-c}, c>0$ ٤٨ - $\lim_{u\to x} \frac{u^2-3u-x^2+3x}{u-x}$ ٤٩ - $\lim_{z\to 4^-} \frac{z^2+3z-4}{z-4}$

٥٠ - $\lim_{x\to -3} \frac{(2x-1)(x+3)^2}{(x^2-9)(x^2+4x+3)}$ ٥١ - $\lim_{t\to -3} \frac{1/(t+2)+1}{t+3}$ ٥٢ - $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{x-7}$

٥٣ - $\lim_{x\to a} \frac{1}{x^2-a^2}$ ٥٤ - $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$ ٥٥ - $\lim_{x\to a} \frac{x}{x^3-a^3}$

٥٦ - إذا كانت $f(x)=5+3x-x^2$ فأوجد $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ ، $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$

٥٧ - إذا كانت $h(x)=\frac{x}{x+2}$ فأوجد $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x}$

٥٨ - إذا كانت $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ فأوجد $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

٥٩ - إذا كانت $f(x)=x^2-3x$ فأوجد :

(أ) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ (ب) $\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

(ج) $\lim_{u\to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ (د) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦٠ - إذا كانت $f(x)=1/x$ فأوجد

(أ) $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$ (ب) $\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

(ج) $\lim_{u\to x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x}$ (د) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦١ - إذا كانت $g(x)=\sqrt{x}$ ، فأوجد

(أ) $\lim_{x\to 6} \frac{g(x)-g(6)}{x-6}$ (ب) $\lim_{h\to 0} \frac{g(6+h)-g(6)}{h}$

(ج) $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}, a>0$ (د) $\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}, a>0$

٦٢ - أوجد فترة مفتوحة I تحتوى العدد 3 بحيث أنه لكل x فى الفترة I تكون $3x+2$ داخل حدود (أ) $\frac{1}{2}$ من 11 ، (ب) $\frac{1}{4}$ من 11 ، (ج) ϵ من 11 ، حيث ϵ عدد موجب .

٦٣ ـ أوجد فترة مفتوحة I تحتوى العدد 5 بحيث عندما تكون x فى I ، تكون x^2 داخل حدود (أ) $\frac{1}{2}$ من 25 ، (ب) 0.1 من 25 ، (ج) ϵ من 25 ، حيث $0 < \epsilon$.

٦٤ ـ أوجد فترة I تحتوى العدد 2 بحيث أن عندما تكون z فى I ، تكون $\frac{1}{z}$ داخل حدود (أ) 0.1 من $\frac{1}{2}$ ، (ب) 0.01 من $\frac{1}{2}$ ، (ج) ϵ من $\frac{1}{2}$ ، حيث $o < \epsilon$.

٦٥ ـ أوجد فترة I تحتوى العدد 3 بحيث أنه لكل x فى I يكون

(أ) $\frac{4}{(x-3)^2} > 100$ ، (ب) $\frac{4}{(x-3)^2} > 10,000$ ، (ج) $\frac{4}{(x-3)^2} > N$ ، حيث $N > o$.

٦٦ ـ أعط مثالا لدالة أو أرسم الشكل البيانى لدالة ممكنة بحيث أن قيمها تصبح أكبر فأكبر عندما تقترب x من 2 ولكن لاتصبح كبيرة جدا .

٦٧ ـ أعط مثالا لدالة لها نهاية يمنى لكن ليس نهاية يسرى عند نقطة الأصل .

٦٨ ـ (أ) استخدم جدولا للـ sines لايجاد $\lim_{x\to 0} \sin x$ (الجداول المثلثية موجودة فى التذييل B) . الآن احسب قيم $\sin x / x$ عند x القريبة من 0 ، حيث x مقيسه بالزاوية نصف القطرية . هل تظن أن $\lim_{x\to 0}[(\sin x)/x]$ موجودة ؟ (ب) استخدم جدولا للـ cosines لايجاد $\lim_{x\to 0} \cos x$ الآن احسب قيم $(1 - \cos x) / x$ عند x القريبة من 0 ، حيث x مقيسة بالزاوية نصف القطرية . هل تظن أن $\lim_{x\to 0}[(1-\cos x)/x]$ موجودة ؟ (ج) إستخدم جدولا للـ cotangents و tangents لتعين ما اذا كانت $\lim_{x\to 90^\circ} \cot x$ و $\lim_{x\to 90^\circ} \tan x$ موجودتان . اذا لم توجدا ، هل نهاياتهما لجانب واحد موجودة ؟

٦٩ ـ أوجد قيم $x \log x$ عند $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 10^{-4}, 10^{-10}$ (ربما أن $\log 10^m = m$ فان جدول اللوغاريتمات ليس لازما) هل تظن أن $\lim_{x\to 0} x \log x$ موجودة ؟ أوجد شواهد أخرى لتخمينك بايجاد قيم $x \log x$ عند $x = 10^{-n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . عندما تصبح n كبيرة ماذا يحدث لـ x و $x \log x$ ؟

٧٠ ـ خطط الشكل البيانى لدالة غير ثابتة قيمتها تساوى نهايتها عددا لانهائيا من المرات عندما تقترب x من a .

٢ ـ ٦

الاتصال

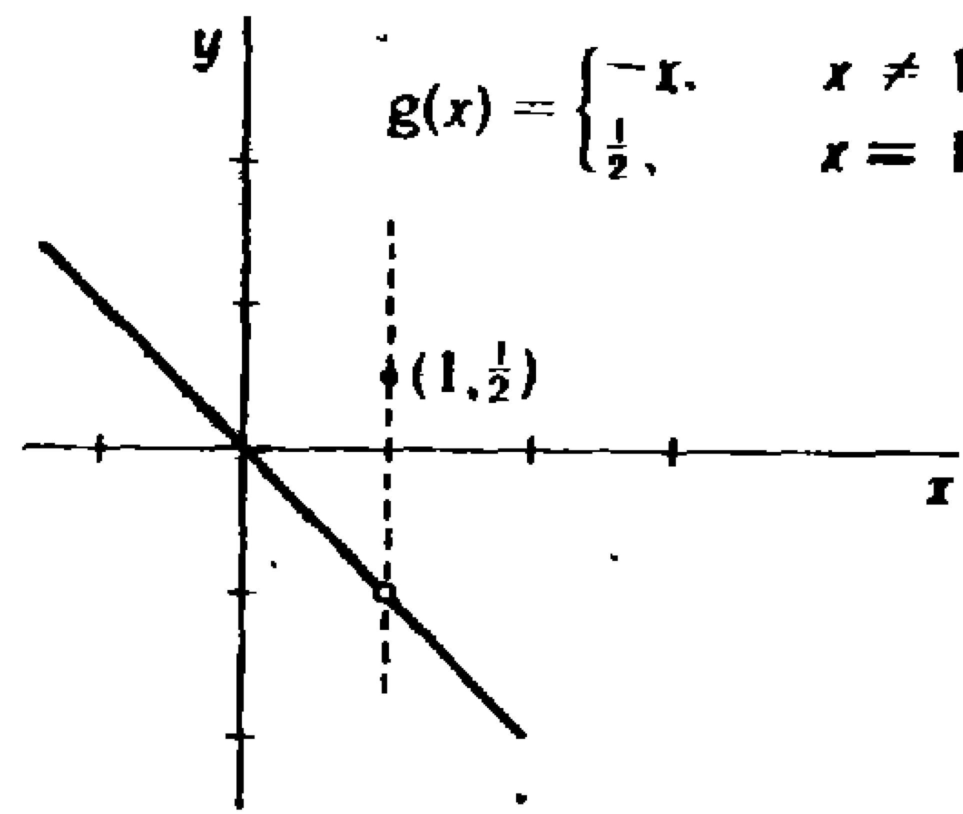
قد أكدنا أن النهاية وقيمة الدالة هما مفهومان مختلفان ، وقد رأينا أن هذين العددين ، $f(a)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ ليسا بالضرورة متساويين . عندما يكونان متساويين ، كما يحدث غالبا ، فانه يكون لدينا حالة جديرة بالاهتمام من الناحية الرياضية . خذ فى الاعتبار الدالة g المعرفة بـ

$$g(x) = \begin{cases} -x, & x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \end{cases} \qquad (1)$$

والتى شكلها البيانى مخطط فى شكل ٢ ـ ١٧ . لدينا $\lim_{x\to 1} g(x) = -1$ و $g(1) = \frac{1}{2}$ ، وعليه فان $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ الشكل البيانى به ثقب عند $(1, -1)$. لأن $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ فاننا نقول أن الدالة g ليست متصلة عند 1 . الدالة h المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} -x, & x \neq 1, \\ -1, & x = 1, \end{cases}$$

لها شكل بيانى مثل الشكل البيانى لـ g فيما عدا أن النقطة عند $(1,\frac{1}{2})$ قد تحركت الى تحت وملأت الثقب عند $(1,-1)$. بسبب أن $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$ نقول أن الدالة h متصلة عند 1 . تعريف أبسط لـ h هو $h(x) = -x$ لكل x .



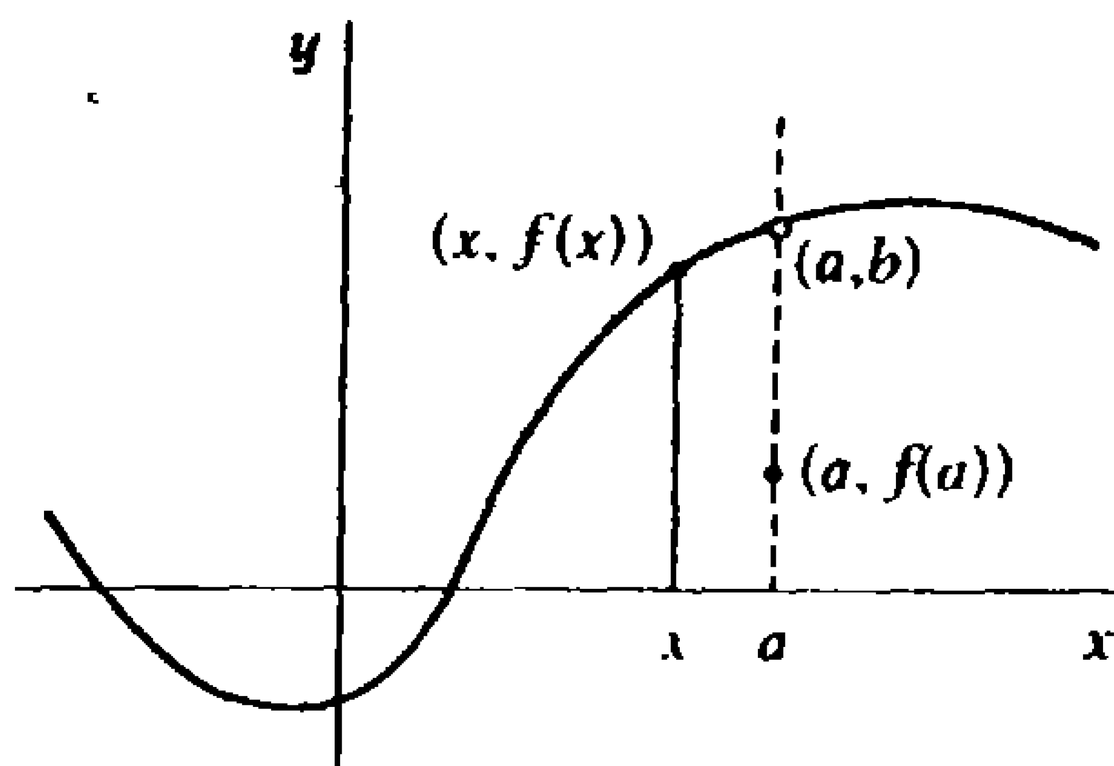
شكل ٢ ـ ١٧

g ليست متصلة عند 1

٢ ـ ٤ تعريف . الدالة f تكون متصلة عند a إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ومنفصلة عند a اذا كانت معرفة عند a وغير متصلة هناك .

الشرط $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ فى هذا التعريف يشمل ضمنيا ثلاثة شروط ، يجب أن تتحقق جميعها لكى تكون f متصلة عند a : (١) $f(a)$ موجودة ، (٢) $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة ، (٣) : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. اذا لم يتحقق أى واحد من هذه الشروط ، فان f لاتكون متصلة عند a . مثال ذلك ، الدالة u المعرفة بـ $u(x) = -x - 1, x \neq 1$ ليست متصلة عند 1 لأن $u(1)$ لاتوجد .

خذ فى الاعتبار الدالة f التى شكلها البيانى مخطط فى شكل ٢ ـ ١٨ . لتكن (a, b) احداثى النقطة الممثلة بدائرة صغيرة . فيكون $\lim_{x\to a} f(x) = b$. اذا كانت $f(a) \neq b$ ، فان f لاتكون متصلة



شكل ٢ ـ ١٨

f متصلة عند a فقط

اذا كان $f(a) = b$

عند a والشكل البيانى يكون به ثقب عند (a,b) . الطريقة الوحيدة التى يمكن بها ملء الثقب هى أن $f(a) = b$ ، أى أن f يجب أن تكون متصلة عند a بمعني التعريف . بالحديث الدارج ، الدالة تكون متصلة عند عدد ما اذا كان شكلها البيانى ليس به ثقب أو له قفزة عند النقطة المناظرة ، من الممكن تتبع الشكل بالقرب من هذه النقطة من أحد جانبى النقطة الى الجانب الآخر بدون رفع القلم من الورقة . الدالة قد لاتكون متصلة عند عدد ما ومتصلة عند عدد آخر . الدالة g فى شكل ٢ ـ ١٧ متصلة عند كل عدد ماعدا 1.

يوجد فارق بين غير متصلة ومنفصلة . الدالة $1/x$ غير متصلة عند 0 لكن غير منفصلة هناك لأنها غير معرفة عند 0 . الدالة g فى (1) ليست فقط غير متصلة عند 1 بل أيضا منفصلة هناك .

مثال ١ . اثبت أن $f(x) = 3x^2 - x + 1$ متصلةعند -1 .

طبقا لتعريف الاتصال ، يجب أن نتحقق من أن $\lim_{x\to -1} f(x)$ و$f(-1)$ موجودتان ومتساويتان . لدينا $\lim_{x\to -1} f(x) = 5$,$f(-1) = 5$ اذن f متصلة عند -1 .

مثال ٢ . اثبت أن الدالة

$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant -1, \\ x^2, & x > -1, \end{cases}$$

غير متصلة عند -1 .

واضح الشكل البيانى لـ F فى شكل ٢ ـ ١٩ أن

$$\lim_{x\to -1^-} F(x) = \lim_{x\to -1^-} (x+1) = 0,$$
$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2 = 1.$$

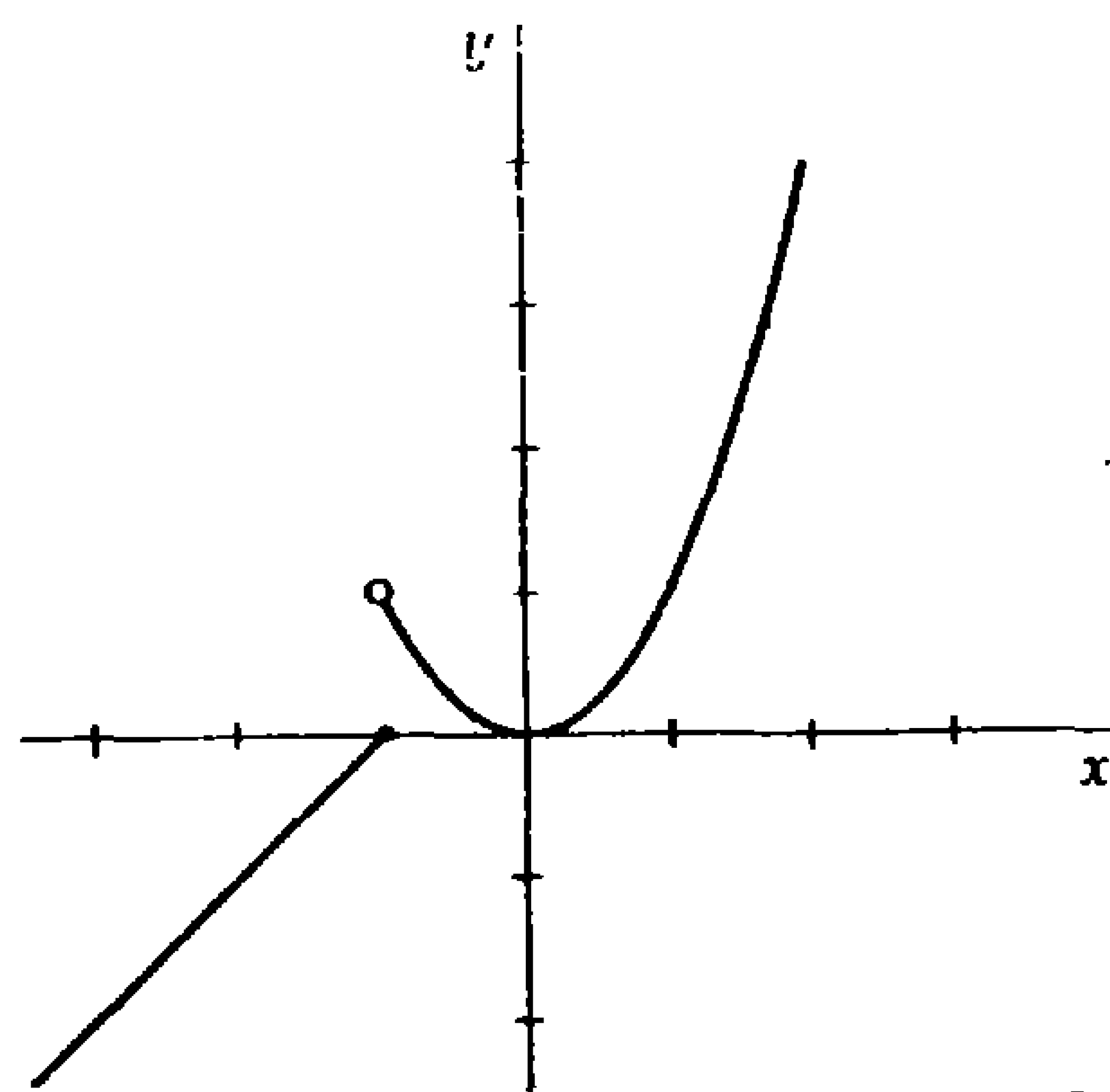
بما أن هذين ليسا متساويين ، فان $\lim_{x\to -1} F(x)$ لاتوجد ، F غير متصلة عند -1 بسبب أن الدالة معرفة عند -1 ، فهى أيضا منفصلة هناك . الدالة متصلة عند كل عدد آخر . لاحظ أن الشكل البيانى له قفزة عند -1 .

هذا المثال الأخير يوحى بأن فكرة الاتصال اليمينى واليسارى عند نقطة قد تكون مفيدة .

٢ ـ ٥ تعريف . الدالة f متصلة على اليسار عند a (أو متصلة يسارا عند a) اذا كان $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ومتصلة على اليمين عند a (أو متصلة يمينا عند a) اذا كان

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

الدالة F فى مثال ٢ (شكل ٢ ـ ١٩) متصلة على اليسار لكن غير متصلة على اليمين عند -1 الدالة تكون متصلة عند عدد ما اذا واذا فقط كانت متصلة يمينا ويسارا هناك .



$$F(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$$

شكل ٢ ـ ١٩ F منفصلة عند -1

مثال ٣ . هل الدالة المعرفة بـ

$$w(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0, \\ -x^2+2, & x > 0, \end{cases}$$

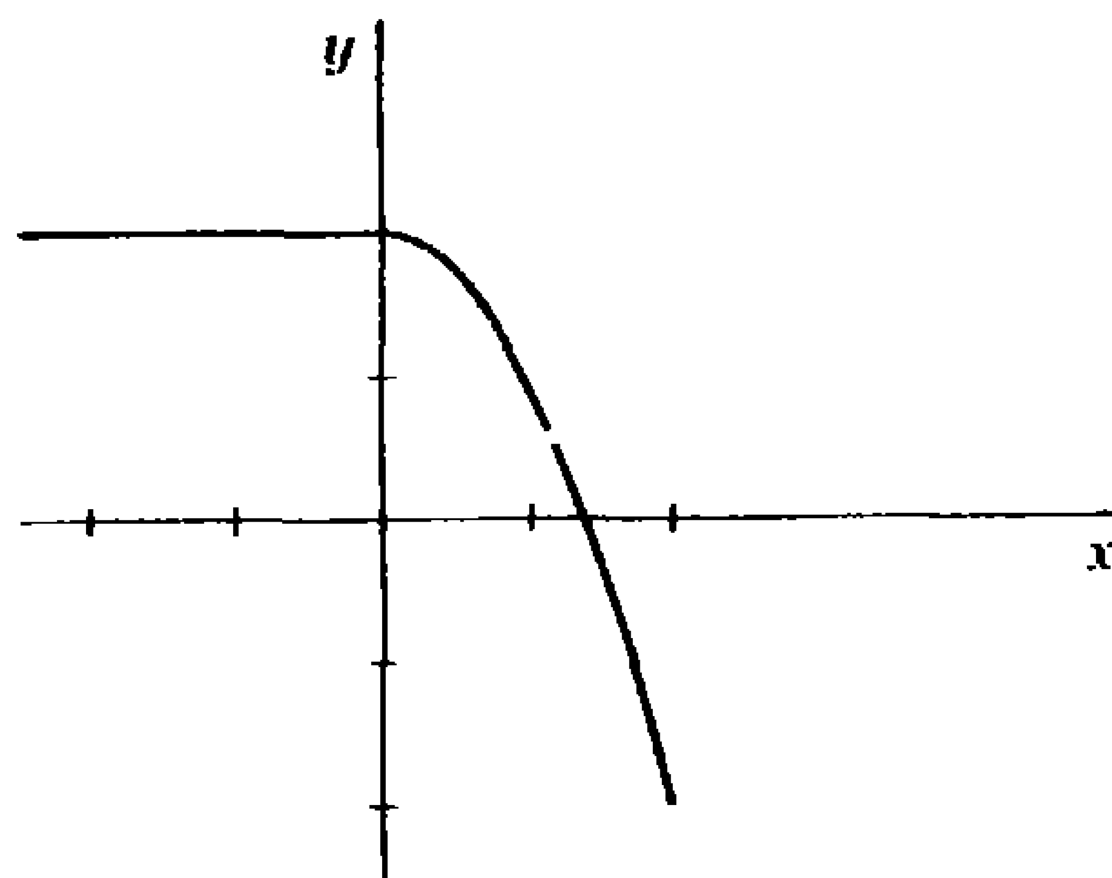
منفصلة عند 0 ؟

من الشكل البيانى لـ w المخطط فى شكل ٢ ـ ٢٠ يبدو أن الجواب نعم ، لكن للتأكد نستخدم التعريف . لدينا

$$\lim_{x\to 0^-} w(x) = \lim_{x\to 0^-} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} w(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2+2) = 2$$

واذن $\lim_{x\to 0} w(x) = 2$. بما أن $w(0) = 2 = \lim_{x\to 0} w(x)$ ، w تكون متصلة عند 0 . هى أيضا متصلة يمينا ويسارا هناك .



$$w(x) = \begin{cases} 2, & x \le 0 \\ -x^2+2, & x > 0 \end{cases}$$

شكل ٢ ـ ٢٠ . w متصلة عند 0 .

يقال أن الدالة متصلة فى فترة مفتوحة اذا كانت متصلة عند كل نقطة بالفترة . الدالة تكون متصلة فى فترة مقفلة اذا كانت متصلة عند كل نقطة داخل الفترة ، ومتصلة يمينا عند النقطة الطرفية اليسرى ، ومتصلة يسارا عند النقطة الطرفية اليمنى . بتعديلات واضحة ، يمكن الحديث عن الاتصال فى فترة مقفلة عند طرف واحد ومفتوحة عند الآخر . الدالة F فى مثال ٢ (شكل ٢ ـ ١٩) متصلة فى الفترات $[1$ ، $-\frac{1}{2}]$ ، $[-2, -1]$ ، $(-1,0)$ لكن هى غير متصلة فى الفترة $[-1,0]$.

الدالتان w و f فى مثالى ١ ،٣ متصلتان عند كل عدد ومن ثم فى كل فترة . بالحديث الدارج ، الدالة تكون متصلة فى فترة اذا أمكننا تتبع شكلها البيانى خلال الفترة بدون رفع القلم من الورقة . الدالة المتصلة فى كل مكان يقال عنها عادة مجرد متصلة .

سنبرهن فى بند ٢ ـ ٨ أن دالة كثيرة الحدود تكون متصلة عند كل عدد وأن الدوال الكسرية والدوال الجبرية تكون متصلة أينما كانت معرفة . حيث أن هذه هى الدوال العامة ، فليس غريبا أن الدوال المألوفة لنا متصلة وأن توضيحاتنا للدوال غير المتصلة تبدو أنها مدبرة .

مسائل

حدد ما اذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند العدد المعطى أو الأعداد المعطاة . واذا لم تكن كذلك فحدد ما اذا كانت متصلة يمينا أو يسارا هناك . خطط الشكل البيانى للدالة .

١ ـ $f(x) = 3x + 2;\ 1, 0$

٢ ـ $h(x) = 1;\ \frac{1}{2}$

٣ ـ $g(z) = z^2;\ -2$

٤ ـ $f(x) = 9 - x^2;\ 3$

٥ ـ $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0;\ 0. \end{cases}$

٦ ـ $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x < 2, \\ 8, & x = 2, \\ -2x + 12, & x > 2;\ 2 \end{cases}$

٧ ـ $f(t) = \frac{1}{t};\ 2$

٨ ـ $f(x) = \frac{1}{x - 6};\ 0, 6$

٩ ـ $g(x) = \sqrt{x};\ 8$

١٠ ـ $u(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2};\ -2$

١١ ـ $f(x) = |x - 3|;\ 3$

عند أى اعداد تكون كل من الدوال الآتية غير متصلة ؟ هل هى متصلة يمينا أو يسارا هناك ؟ ليس ضروريا أن تبرهن اجابتك

١٢ ـ $g(x) = 5x - 10$

١٣ ـ $g(x) = mx + b$

١٤ ـ $f(u) = 1 + \frac{1}{2}u - 4u^2$

١٥ ـ $g(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 1, \\ 3, & x > 1. \end{cases}$

١٦ ـ $g(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & t \neq 0, \\ -1, & t = 0. \end{cases}$

١٧ ـ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5, \\ 0, & x = 5. \end{cases}$

١٨ـ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5, \\ 10, & x = 5. \end{cases}$

١٩ـ $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$

٢٠ـ $g(x) = \frac{x}{x-5}$

٢١ـ $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-5}, & x \neq 5, \\ 3, & x = 5. \end{cases}$

٢٢ـ $h(z) = \frac{z+2}{z^2-5z+4}$

٢٣ـ $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x-a}, \; a > 0$

٢٤ـ $F(s) = |s|$

٢٥ـ $v(x) = \frac{|x|}{x}$

٢٦ـ $F(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$

٢٧ـ $s(x) = [x]$ حيث $[x]$ دالة أكبر الأعداد الصحيحة

٢٨ـ $h(x) = [x+1] - [x]$

٢٩ـ 29. $f(x) = \frac{|x|}{x}(x^2 - 1)$

٣٠ـ اختر b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \neq -1, \\ b, & x = -1, \end{cases}$$

متصلة عند -1 .

٣١ـ اختر b بحيث تكون الدالة u المعرفة بـ

$$u(t) = \begin{cases} \frac{2t^2}{t} - 4, & t \neq 0, \\ b, & t = 0, \end{cases}$$

متصلة عند O .

٣٢ـ هل من الممكن اختيار c بحيث تكون الدالة g المعرفة بـ

$$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0, \end{cases}$$

متصلة عند 0؟ متصلة يمينا عند 0 ؟ متصلة يسارا عند 0 ؟

٣٣ـ اذا كانت $G(x) = x^2 / |x|, \; x \neq 0$ فعرف $G(0)$ بحيث تكون G متصلة عند 0 .

٣٤ـ (أ) هل $\cos x$ و $\sin x$ متصلتان عند 30° ؟ عند 0 ؟ ليس ضروريا اثبات اجابتك . (ارشاد : استخدم الجداول المثلثية فى التذييل ب)

(ب) هل من الممكن اختيار b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ b, & x = 0, \end{cases}$$

حيث x مقيسة بالزاوية نصف القطرية ، متصلة عند 0؟ (ارشاد : استخدم جدولا للـ sines)

٣٥ ـ خطط وناقش الشكل البيانى للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{عدد كسرى } x \\ 1, & \text{عدد غير كسرى } x \end{cases}$$

إين تكون f غير متصلة ؟

٣٦ ـ خطط وناقش الشكل البيانى للدالة

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{عدد كسرى } x \\ x, & \text{عدد غير كسرى } x \end{cases}$$

هل g متصلة عند 0؟ هل g متصلة عند أى عدد آخر .

٣٧ ـ اذا كانت $\pi(x)$ ترمز الى عدد الأعداد الأولية الموجبة التى هى أقل من أو تساوى x حيث $x \geqslant 0$ ، ناقش اتصال الدالة π (أنظر المسألة ٢٨ ببند ٢ ـ ٣) .

٢ ـ ٧
تعريف النهاية

فى بند ٢ ـ٥ ناقشنا النهايات من وجهة النظر العقلانية . رغم أن هذا يكفى لتطبيقات كثيرة لحساب التفاضل الا أنه يلزمنا تعريف أدق اذا كنا نستخدم النهايات بفاعلية وثقة . سنقدم التعريف بمثال .

نقول أن $\lim_{x\to 3} (2x + 1) = 7$ بمعنى أن $2x + 1$ تكون قريبة من 7 لجميع x القريبة من ، لكن لاتساوى ، 3 لكن كيف يمكننا أن نكون متأكدين من هذا عندما لانملك معيارا نقدر به ما يقصد « بقريب من » . الأشخاص المختلفون لهم مفاهيم مختلفة عن القرب ، والقريب عند شخص يعتبره شخص آخر بعيدا جدا . الرياضى لايحاول تعريف قريب من لكن يقول لكل شخص « أنت تخبرنى ماذا تقصد بالقرب من وأنا سأوضح لك أن $2x + 1$ تكون أقرب من 7 عن ذلك ، وليس فقط لبعض لكن لكل x قريبة من 3 قربا كافيا » .

لكى نوضح هذا عمليا من المناسب أن نأخذ فكرة عن الجوار . **الجوار لعدد a** هو فترة مفتوحة تحتوى a . الفترات $(1,4)$, $(1.99,2.1)$, $(-533,76)$ هى جوارات للعدد 2 . الفترة الأولى هى أيضا جوار لـ $2.5,3$ **الجوار المنقوص لـ a** هو جوار لـ a مستبعد منه العددa . الفئة $(1,2) \cup (2,4)$ التى تتكون من اتحاد الفترتين $(2,4)$ و $(1,2)$ هى جوار منقوص لـ 2 . مع أننا نفكر عادة أن الجوار يكون صغيرا لكن ذلك ليس ضروريا . اذا كانت U جوار لـ a ، سنشير الى الجوار المنقوص المناظر لـ a بالرمز $\bar{U}$.

الآن نرجع الى مسألة اثبات أن $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$ دع $F(x)=2x+1$. نفرض أن Mr. White يعتبر أن $2x+1$ تكون قريبة من 7 اذا كانت على مسافة أقل من *0.1* من ذلك العدد . سنقول أن *0.1* هو تفاوته المسموح به . الشكل التخطيطى لـF بالقرب من $x=3$ موضح فى شكل ٢ ـ ٢١ . على الخط الأسفل توجد علامة على الجوار $(6.9, 7.1)$ V_1 لـ 7 . يجب أن نوضح لـ Mr. White أنه لكل x قريبة قربا كافيا من ، لكن لاتساوى 3, $2x+1$. تكون على مسافة أقل من *0.1* من 7 نفعل ذلك بتوضيح أنه يوجد جوار منقوص $\bar{U}_1$ لـ 3 بحيث أن لكل x فى $\bar{U}_1$ ، $F(x)$ (أى $2x+1$) تكون فى V_1 . [الجوار $\bar{U}_1$ منقوص لأن قيمة $F(3)$ ليس لها تأثير على المسألة] . نتطلب أن $\bar{U}_1$ المناسب يكون الفترة المفتوحة $(2.95, 3.05)$ بدون 3 . بدون اعتبار كيف أوجدنا $\bar{U}_1$ ، دعنا نحقق مطلبنا أنه عندما تكون x فى $\bar{U}_1$ فإن $F(x)$ تكون فى V_1 . الآن x تكون فى $\bar{U}_1$ اذا كان

$$3-0.05<x<3+0.05, \qquad x\neq 3 \tag{1}$$

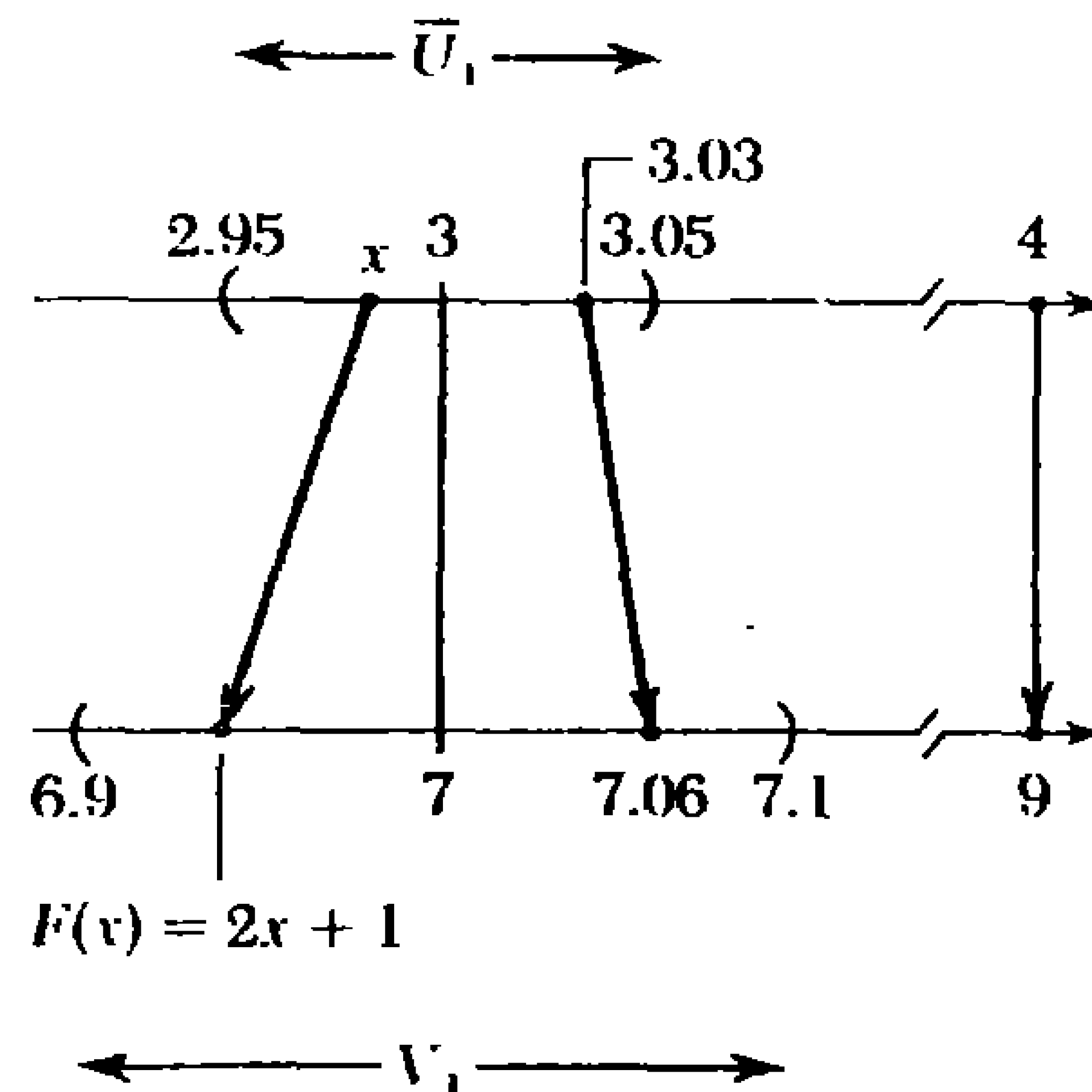
$F(x)$, تكون فى V_1 اذا كان

$$7-0.1<2x+1<7+0.1 \tag{2}$$

يجب علينا توضيح أن *(1)* تتضمن *(2)* . اذا كانت x تحقق *(1)* ، فإنه بضرب الأجزاء الثلاثة لـ *(1)* فى 2 ، نرى أن x تحقق

$$6-0.1<2x<6+0.1 \tag{3}$$

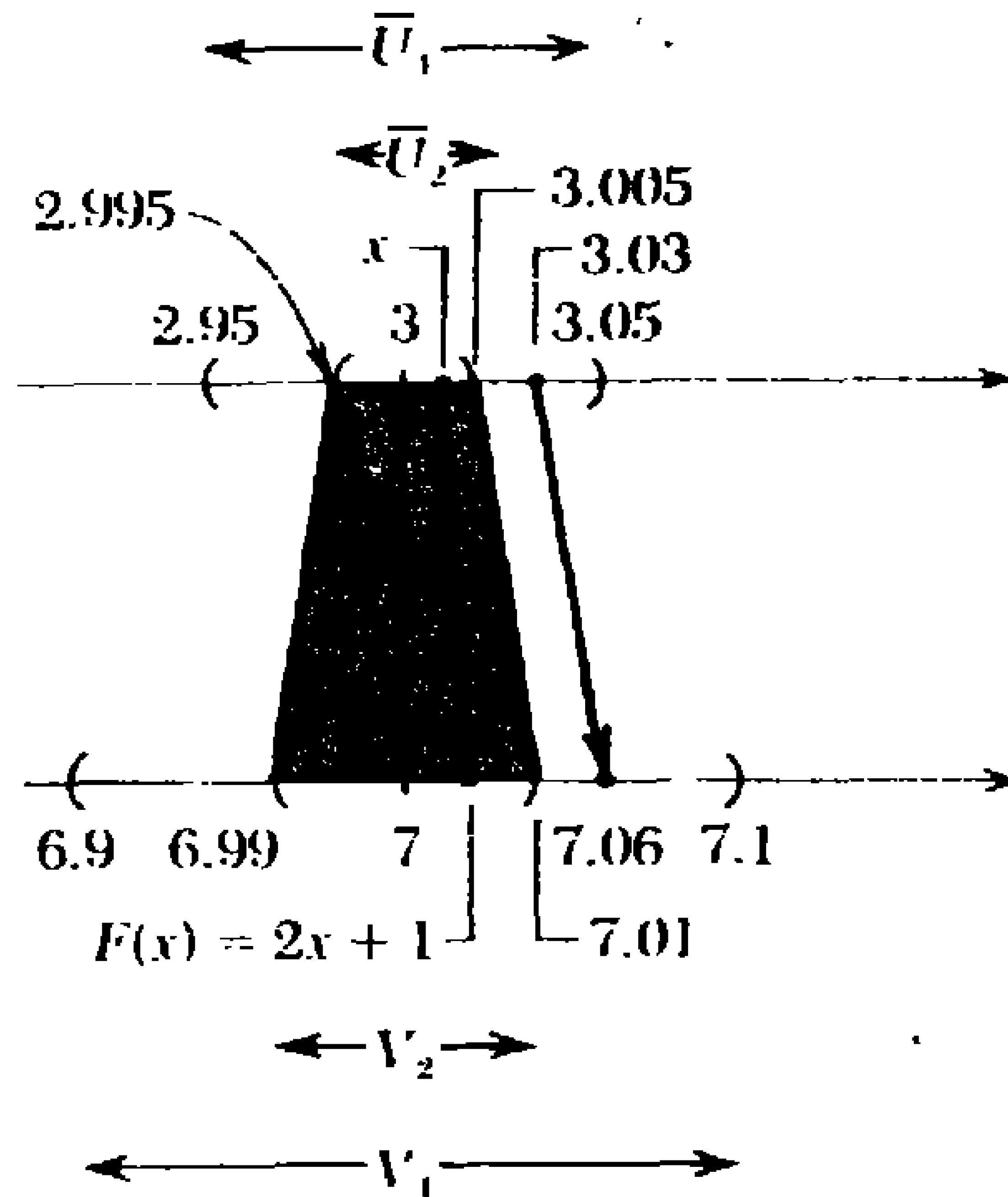
وباضافة *1* الى ذلك ، نرى أن x تحقق *(2)* . لقد أثبتنا أن لكل x فى $\bar{U}_1$ ، $F(x)$, تكون فى V_1 . بالطبع ، صحيح أيضا أن عندما $x=3$ ، $F(x)$, تكون فى V_1 ، لكن هذا لا يناقض النص الذى ذكرناه . لذلك معنى العبارة « لكل x قريبة من 3 قربا كافيا ، لكن لاتساوى 3 » يكون مضبوطا بالقول « لكل x فى $\bar{U}_1$ » .



شكل ٢ ـ ٢١

$F(x)$ هى فى V_1 لكل x فى U_1 (ليست بمقياس)

كيف أوجدنا $\bar{U}_1$ ؟ بدأنا ببساطة بالنتيجة المطلوبة (٢) وأوجدنا حل المتباينة بالنسبة الى x . الخطوات هى (١) و (٣) و (٢) ، بهذا الترتيب . من الواضح أن أى جوار منقوص لـ 3 ، أصغر من الجوار السابق مثل $\bar{U}'_1 = (2.97, 3.04)$ يكون أيضا مقبولاً لأنه اذا كانت x فى $\bar{U}'_1$ ، فهى ايضا تكون فى $\bar{U}_1$ ومن ثم $F(x)$ تكون فى V_1 $\bar{U}_1$ هى أكبر جوار منقوص لـ 3 نعمل به .



شكل ٢ ـ ٢٢
$F(x)$ تكون فى V_2 لكل x فى $\bar{U}_2$

نفرض الآن أن Mr. Brown يتخذ معايير أضيق ويعتبر أن $2x + 1$ تكون قريبة من 7 فقط اذا كانت تختلف عن 7 بأقل من 0.01 . تفاوته المسموح به يكون عندئذ 0.01 . يجب أن نثبت له أن لكل x قريبة من 3 قربا كافيا ، لكن لاتساوى 3 ، $2x + 1$ تختلف عن 7 بأقل من 0.01 . كما سبق ، نفعل ذلك باثبات أنه يوجد جوار منقوص $\bar{U}_2$ لـ 3 بحيث أن لكل x فى $\bar{U}_2$ ، تكون $F(x)$ فى الفترة :

$V_2 = (6.99, 7.01)$ (شكل ٢ ـ ٢٢) . نتوقع الآن أن الـ $x's$ يجب أن تكون أكثر قربا من 3 عما قبل ، وفى الواقع أن الجوار المنقوص القديم $\bar{U}_1$ لايمكن استخدامه اذ أن 3.03 تكون فى $\bar{U}_1$ لكن :

$F(3.03) = 7.06$ لاتكون فى V_2 . توجد بعض الـ $x's$ فى $\bar{U}_1$ حيث $F(x)$ تكون فى V_2 ، لكن يجب ايجاد جوار منقوص بحيث يكون لجميع الـ $x's$ التى فيه تكون $F(x)$ فى V_2 . $F(x)$ تكون فى V_2 اذا كان

$$7 - 0.01 < 2x + 1 < 7 + 0.01 \qquad (4)$$

احدى الطرق لايجاد جوار منقوص مناسب $\bar{U}_2$ هى أن نحل هذه المتباينة بالنسبة الى x بطرح ١ من (٤) نرى أن (٤) تكون صحيحة اذا واذا فقط كان

$$6 - 0.01 < 2x < 6 + 0.01$$

التى بدورها ، بقسمتها على 2 ، تكون صحيحة اذا واذا فقط كان

$$3 - 0.005 < x < 3 + 0.005 \qquad (5)$$

لذلك يمكن اختيار $\bar{U}_2$ لتكون الفترة *(2.995, 3.005)* بدون *3* ، وأى جوار منقوص أصغر من هذا الجوار سيحقق ايضا متطلبات Mr. Brown .

اذا واجهنا شخص ثالث بتفاوت مسموح به *0.004* فاننا يمكننا ايجاد جوار منقوص $\bar{U}_3$ لـ *3* بحيث أن لكل *x* فى $\bar{U}_3$ تكون *f(x)* فى الفترة *(6.996, 7.004)* بطريقة مماثلة ، لأى تفاوت مسموح به $\epsilon > 0$ ، يمكننا ايجاد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ *3* بحيث أن لكل *x* فى $\bar{U}$ ، *F(x)* تكون على مسافة أقل من ϵ من *7* أى أن ، *F (x)* تكون فى الفترة $V = (7-\epsilon, 7+\epsilon)$ (شكل ٢ ـ ٢٣) . نوجد $\bar{U}$ كما أوجدنا $\bar{U}_1, \bar{U}_2$. *F (x)* تكون فى $(7-\epsilon, 7+\epsilon)$ اذا كان

$$7-\epsilon < 2x+1 < 7+\epsilon. \tag{6}$$

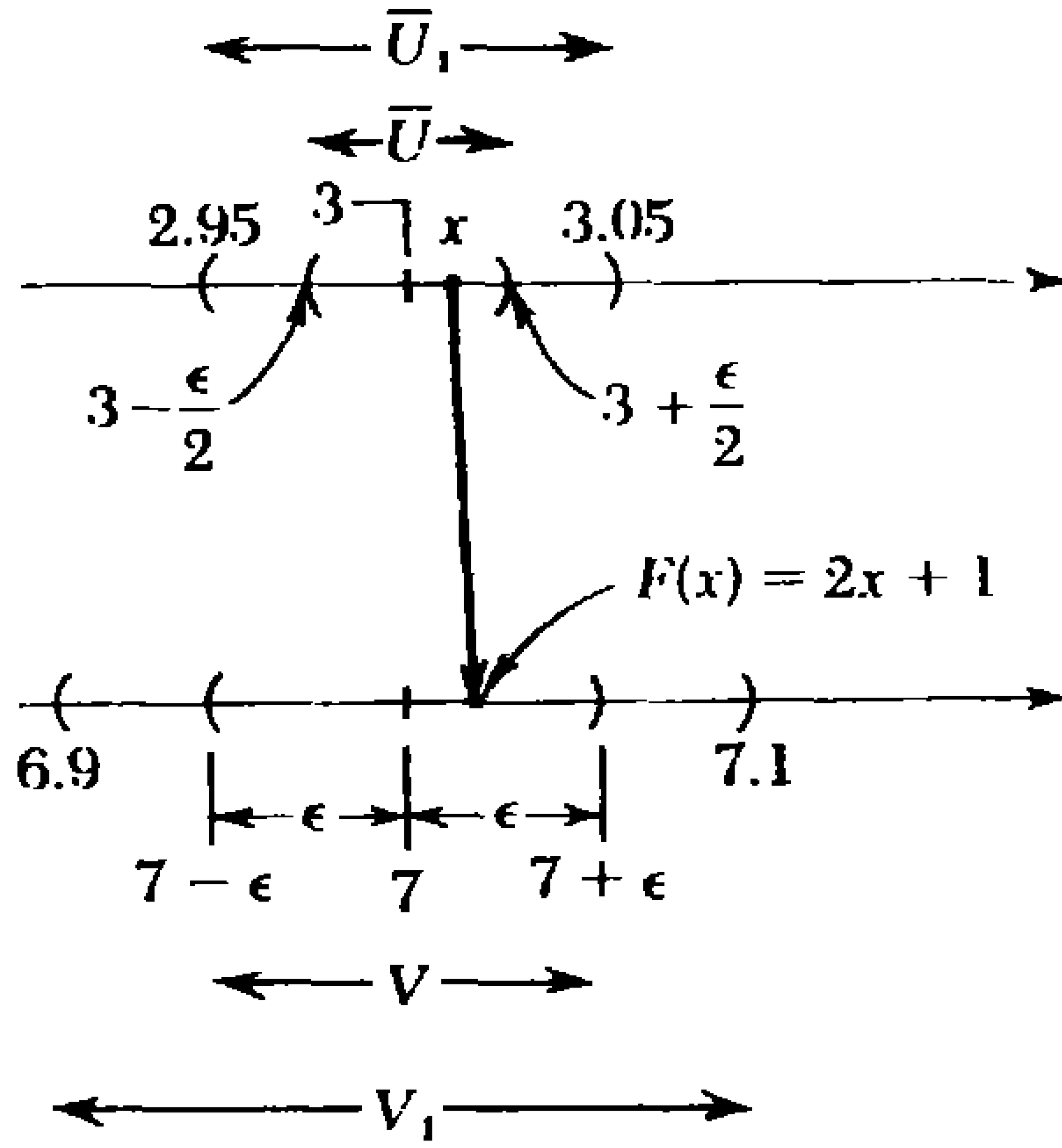
وهذا يكون صحيحا اذا واذا فقط كان $6-\epsilon<2x<6+\epsilon$ أى اذا واذا فقط كان

$$3-\frac{\epsilon}{2} < x < 3+\frac{\epsilon}{2} \tag{7}$$

يمكننا اختيار $\bar{U}$ الفترة

(8) 3 بدون $\left(3-\frac{\epsilon}{2}, 3+\frac{\epsilon}{2}\right)$

ونكون متأكدين أن لكل *x* فى $\bar{U}$, *F (x)* تكون فى *V* .



شكل ٢ ـ ٢٣

F(x) تكون فى *V* عندما تكون *x* فى *U*

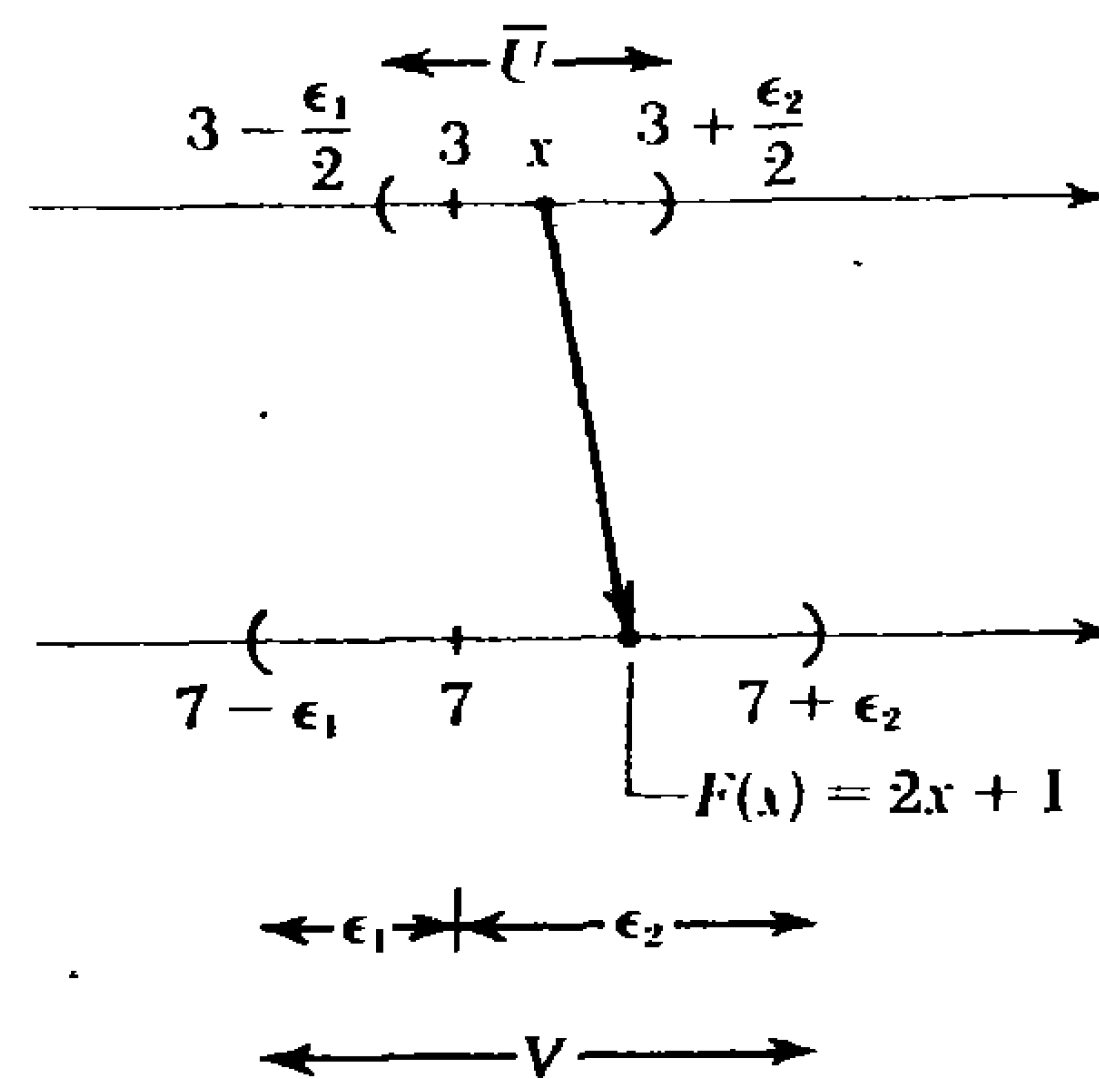
هذه الحالة الأخيرة هى كل مانحتاج اليه اذ أنها تشمل جميع الحالات الأخرى . فى حالة Mr. White $\epsilon = 0.1$، (٦)، (٧) تعطيان (١) و (٢). فى حالة *Mr. Brown* $\epsilon = 0.01$ ، (٦) و (٧) تعطيان (٤) و (٥) . اذا كان لدينا مطالب كثيرة لتحقيقها فيكفى أن نعمل فقط الحالة العامة . حينئذ لكل تفاوت مسموح به ϵ يقدم لنا ، يمكننا من (٨) ايجاد الجوار المنقوص $\bar{U}$ بسرعة . فى الواقع ، اذا كنا سنتناول كل التفاوتات الممكنة ، وقد زعمنا أنه فى امكاننا ذلك فاننا يجب أن نعمل الحالة العامة لنثبت صدق زعمنا .

هذا هو جوهر مفهوم النهاية الدالة F عند 3 . لكل تفاوت مسموح به $\epsilon > 0$ ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ 3 بحيث لكل x فى $\bar{U}$ ، تكون $F(x)$ على بعد أقل من ϵ من 7 بسبب ذلك نشعر الآن بالتأكيد أن $2x + 1$ تأتى قريبا جدا من 7 ويسوغ لنا أن نكتب $\lim_{x\to 3}(2x+1)=7$.

ليس من الضرورى أن يكون التفاوت المسموح به نفس المقدار على كلا الجانبين لـ 7 . فقد يكون ϵ_1 على اليسار ويكون ϵ_2 على اليمين ، وبذلك تكون الفترة V هى $(7-\epsilon_1, 7+\epsilon_2)$ (شكل ٢ - ٢٤) . $F(x)$ تكوّن فى V اذا كان

$$7-\epsilon_1 < 2x+1 < 7+\epsilon_2$$

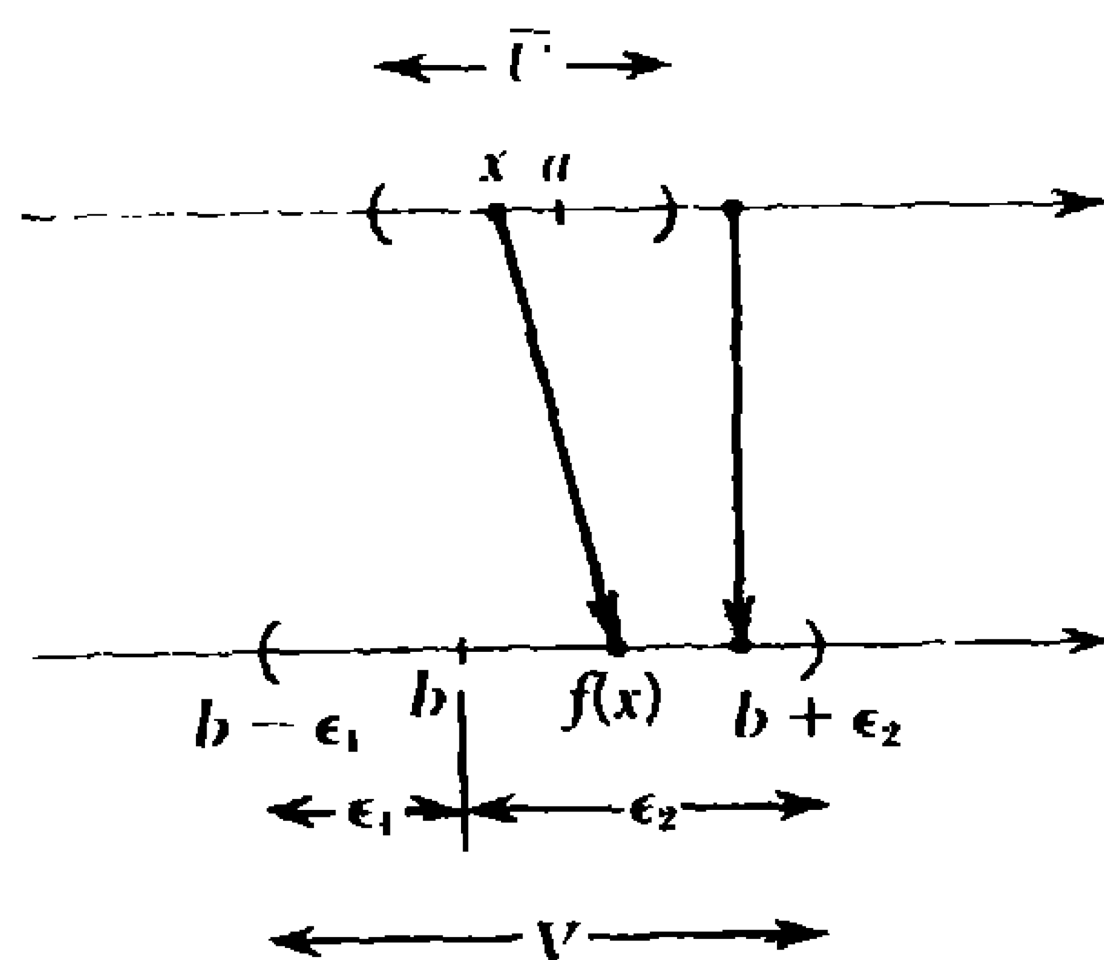
نفس التعليل المستخدم سابقا لايجاد $\bar{U}$ يوضح أن جوارا منقوصا مناسبا $\bar{U}$ هو الفترة $(3-\epsilon_1/2, 3+\epsilon_2/2)$ بدون 3 كل زوج ϵ_1, ϵ_2 من التفاوتات المسموح بها يسارا ويمينا يحدد جوارا $(7-\epsilon_1, 7+\epsilon_2)$ لـ 7 . وبالعكس ، كل جوارا لـ 7 يحدد عددين موجبين ϵ_2 و ϵ_1 ، هما المسافتان بين 7 والنقطتين الطرفيتين . واذن يلزمنا تغيير طفيف لاعادة صياغة الجملة الثانية فى الفقرة السابقة حتى تقرأ « لكل جوار V لـ 7 ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ 3 بحيث أن $F(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$ » .



شكل ٢ - ٢٤
الجوار V لا يلزم أن يكون متماثلا حول 7

المبادىء الأساسية التى نوقشت هنا تطبق على نهاية أى دالة . نقول أن الدالة f لها نهاية عند a اذا واذا فقط كان يوجد عدد b بحيث أن $f(x)$ تكون قريبة منه لكل x قريبة قربا كافيا من ، لكن لاتساوى ، a . هذا يفسر بأنه يعنى أن لكل جوار V لـ b ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$ (شكل ٢ - ٢٥) . نعطى ذلك رسميا فى تعريف .

٢ - ٦ تعريف. الدالة f يكون لها نهاية عند a اذا كان يوجد عدد b يتحقق له ما يأتى : لكل جوار V لـ b ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$. اذا وجدت النهاية ، فاننا نكتب $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

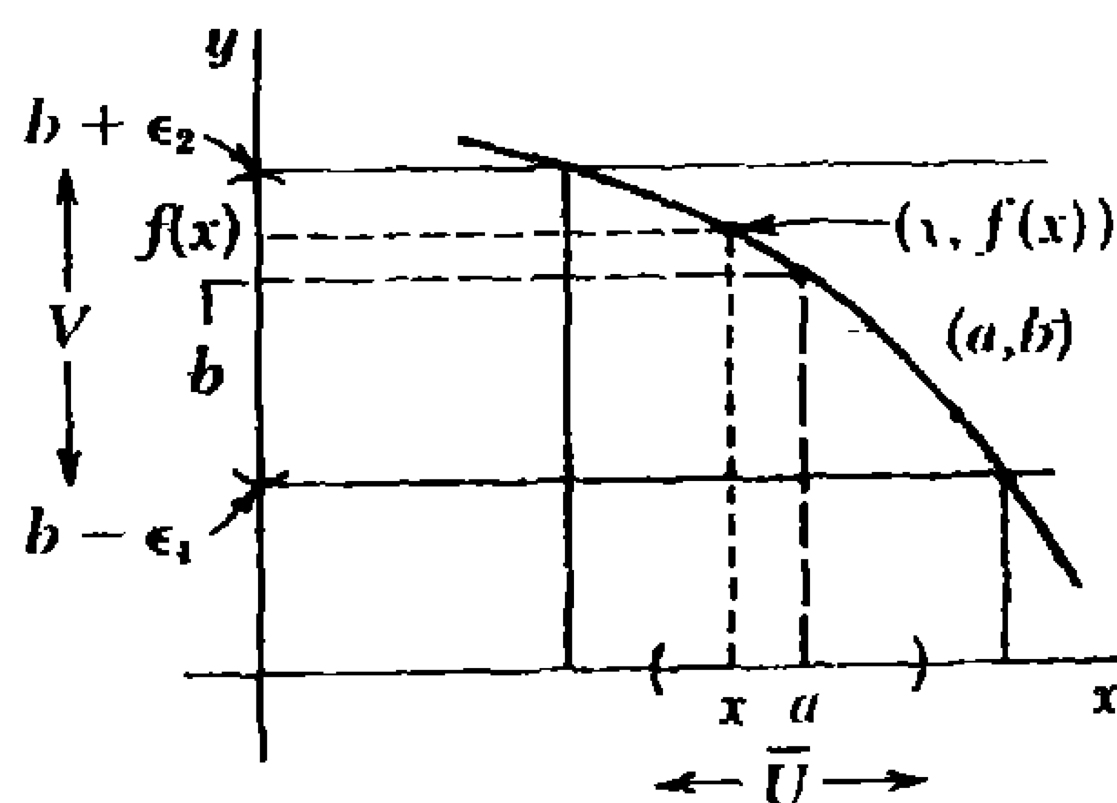


شكل ٢ ـ ٢٥ $F(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$

حيث أن V يمكن تعيينه بالمسافتين ϵ_2 و ϵ_1 بين b والنقطتين الطرفيتين ، فإن اختيار V يكون مكافئا للتفاوتين المسموح بهما يسارا ويمينا $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$ المعطيين . أحيانا يكون من المناسب التعبير عن V فى الصورة (c,d) أفضل من الصورة $(b - \epsilon_1, b + \epsilon_2)$.

الجوار المنقوص $\bar{U}$ يعتمد على V . لانتوقع أن جوارا واحدا $\bar{U}$ يصلح لجميع الجوارات $\bar{U}.V$ يختار بعد أن يعطى الجوار V . اذا أعطينا فيما بعد جوارا آخر V ، فلنا الحق فى اختيار جوار جديد $\bar{U}$ ، قد يكون من الضرورى أصغر . لأجل وجود النهاية ، يجب أن يوجد $\bar{U}$ يساير كل V ، ولو أن من المسموح استخدام نفس الجوار $\bar{U}$ لعدة أو حتى لجميع V . اذا فشل أى V فى أن يكون له $\bar{U}$ مناظر ، فان النهاية لاتوجد . لاحظ أن $\bar{U}$ لايلزم أن يكون متماثلا حول a . فى مناقشتنا لـ $\lim_{x\to 3} (2x+1)$ الجوارات المختارة $\bar{U}'s$ كانت متماثلة ، لكن لدوال كثيرة ، الجوارات المنقوصة غير المتماثلة تكون أكثر ملاءمة . التعريف لايتطلب U أن تكون كبيرة ما أمكن ذلك . أى جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a يحقق شروط التعريف يكون مقبولا ، حتى ولو كان هناك $x's$ ليست فى $\bar{U}$ حيث $f(x)$ تكون بالرغم من ذلك فى V . شكل ٢ ـ ٢٥ يوضح هذا الاحتمال .

نهاية الدالة يمكن تمثيلها تصويريا على شكلها البيانى . افرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$. الشكل البيانى لـ f مخطط فى شكل ٢ ـ ٢٦ . الجوار V موضح كفترة على المحور y تحتوى $\bar{U}.b$ مناسب هو الجوار المنقوص لـ a الموضح على المحور x . لكل x فى $\bar{U}$ ، تكون $f(x)$ فى V . هذا يعنى هندسيا أنه لكل x فى $\bar{U}$ ، النقطة المناظرة على المنحنى تقع بين الخطين الأفقيين اللذين تحددهما



شكل ٢ ـ ٢٦ لكل x فى $\bar{U}$ ، $f(x)$ تكون فى V

النقطتان الطرفيتان لـ V . أى جوار منقوص آخر لـ a محتوى فى $\bar{U}$ يؤدى نفس الغرض . الجوار $\bar{U}$ الموضح ليس هو أكبر جوار كان بمكن اختياره .

مثال ١ . أثبت أن $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$.

دع $f(x) = x^3$. من تعريف ٢ ـ ٦ ، يجب أن نثبت أن لكل جوار V لـ 8 ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ 2 بحيث تكون $f(x)$ فى V لكل x فى $\bar{U}$. نفرض أن V هى الفترة $(8-\epsilon_1, 8+\epsilon_2)$ حيث $\epsilon_1>0,\ \epsilon_2>0$. الشكل البيانى لـ f موضح فى شكل ٢ ـ ٢٧ حيث الفترة V مشار إليها على المحور

y. $f(x)$ تكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$8-\epsilon_1 < x^3 < 8+\epsilon_2 \qquad (9)$$

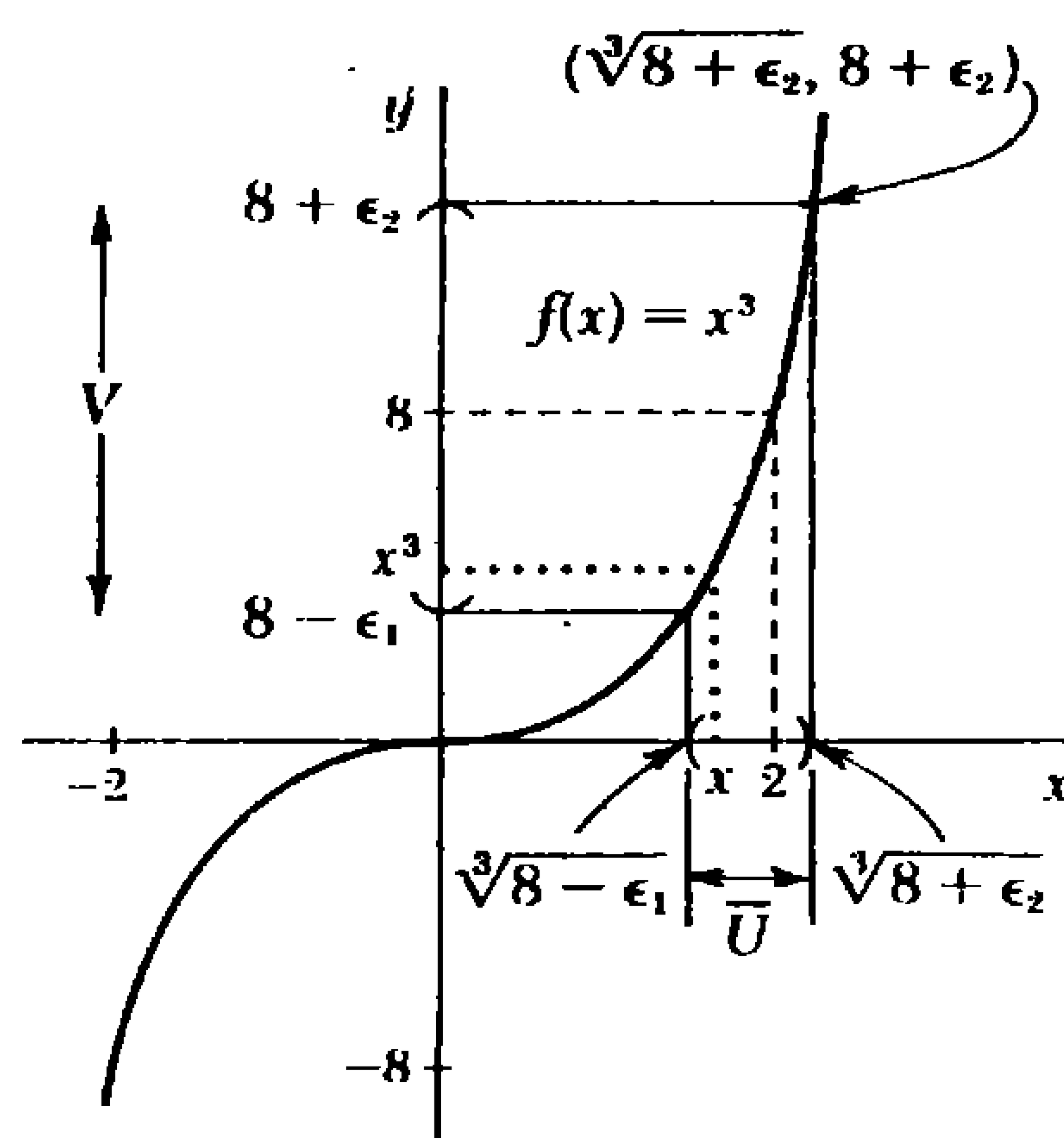
بحل هذه المتباينة لـ x ، نرى أن $f(x)$ تكون فى V إذا وإذا فقط

$$\sqrt[3]{8-\epsilon_1} < x < \sqrt[3]{8+\epsilon_2}$$

لذلك يمكننا اختيار $\bar{U}$ لتكون الفترة $(\sqrt[3]{8-\epsilon_1}, \sqrt[3]{8+\epsilon_2})$ بدون 2 . واضح أن U جوار لـ 2 لأن $\sqrt[3]{8+\epsilon_2}$ $\sqrt[3]{8-\epsilon_1}$ وهذه تتضمن

$$\sqrt[3]{8-\epsilon_1} < 2 < \sqrt[3]{8+\epsilon_2}$$

لقد حققنا شروط التعريف ويمكننا أن نقول أن $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$ حل المتباينة (9) يناظر هندسيا رسم خطين أفقيين من $8-\epsilon_1 , 8+\epsilon_2$ الى المنحنى ثم خطين رأسيين من نقطتى التقاطع إلى المحور x . الخطان الرأسيان يقطعان محور x عند النقطتين $(\sqrt[3]{8-\epsilon_1}, \sqrt[3]{8+\epsilon_2})$ اللتين تحددان الفترة $U = (\sqrt[3]{8-\epsilon}, \sqrt[3]{8+\epsilon_2})$.



شكل ٢ ـ ٢٧

لجميع x فى $\bar{U}$ ، x^3 تكون فى V

مثال ٢ . أثبت أن $\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$ حيث m,b ثابتان .

سنبرهن فقط الحالة $m>0$ ونترك الحالات الأخرى للقارىء (مسألة ٢٢) . ليكن V أى جوار لـ $ma+b$

$$V=((ma+b)-\epsilon_1,\ (ma+b)+\epsilon_2)$$

العدد $mx+b$ يكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$(ma+b)-\epsilon_1 < mx+b < (ma+b)+\epsilon_2$$

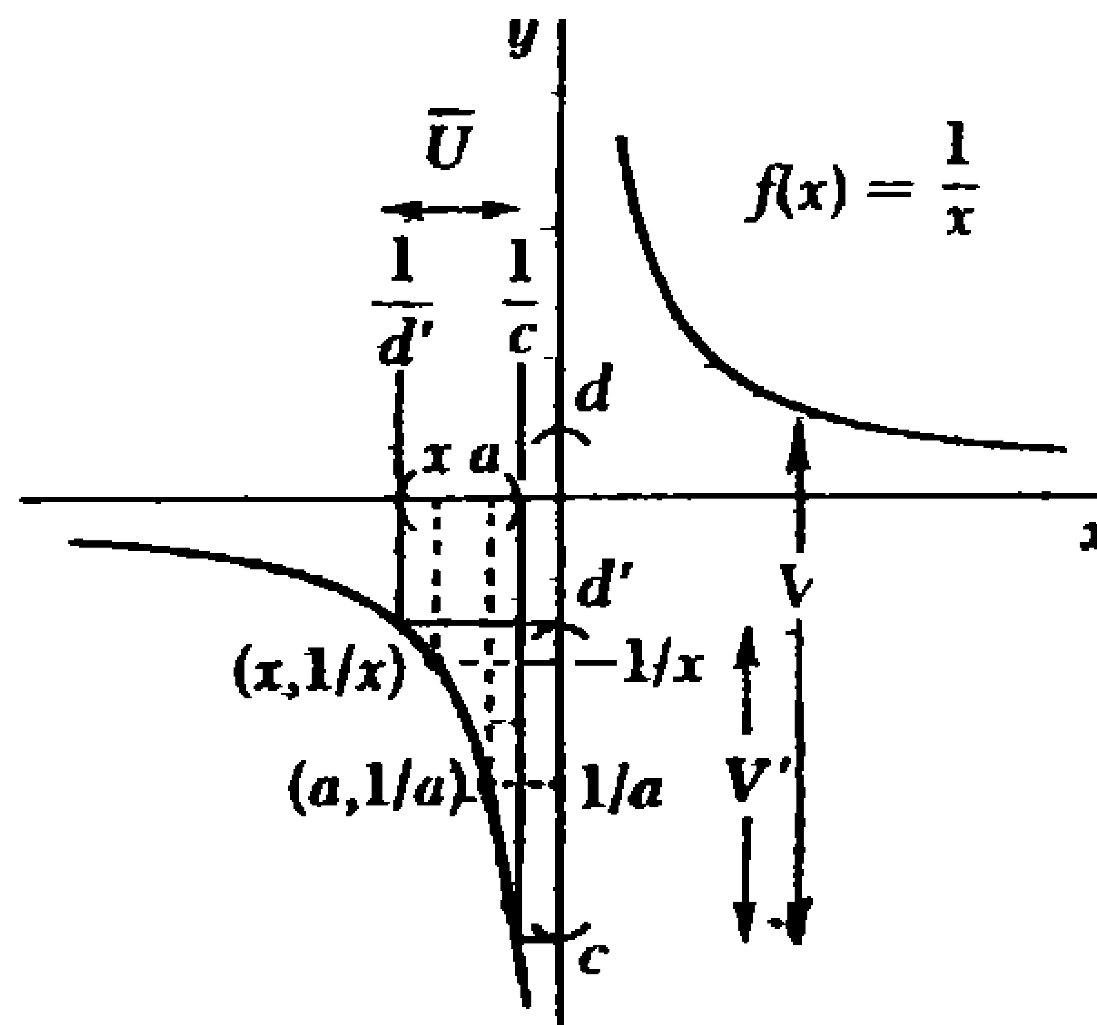
بحل هذه المتباينة لـ x ، نرى أن $mx+b$ يكون فى V إذا وإذا فقط كان

$$a-\frac{\epsilon_1}{m} < x < a+\frac{\epsilon_2}{m}$$

أى إذا وإذا فقط كانت x فى الفترة $(a-\epsilon_1/m,\ a+\epsilon_2/m)$ وبناء على ذلك يمكننا أن نأخذ : $\bar{U}=(a-\epsilon_1/m\ ,\ a+\epsilon_2/m)$ بدون a .

مثال ٣ . اثبت أن $\lim_{x\to a}(1/x)$ موجودة لكل $a\neq 0$.

نخمن أن $\lim_{x\to a}(1/x)=1/a$ وسنحاول برهنتها . الحالتان $a<0$ و $a>0$ يجب معالجتهما كل على حدة . سنعالج الأخيرة ، تاركين الأولى للقارىء (مسألة ٢٣) . نفرض أن $a<0$. ليكن V أى جوار لـ $1/a$. من المناسب أن نشير الى نقطتيه الطرفيتين بـ d و c أفضل من $1/a-\epsilon_1\ ,\ 1/a+\epsilon_2$ ، وإذن $V=(c,d)$ (شكل ٢ ـ ٢٨) . اذا كانت $d>0$ ، نختار جوارا جديدا $V'=(c,d')$ لـ $1/a$ بحيث أن $d'>0$ ، $V'\subseteq V$. إذا كانت $d\leq 0$ ، فان V' يمكن اختياره ليكون V ذاته . سنوجد جوارا $\bar{U}$ بحيث أن $f(x)$ تكون فى V' طالما كانت x فى $\bar{U}$. عندئذ بالتأكيد ستكون $f(x)$ فى V . الان $1/x$ تكون فى V' . وبالتالى تكون فى V ، اذا واذا فقط كان $c<1/x<d'$ ، أى اذا واذا فقط كان (بخاصية ١ ـ ١٠)



شكل ٢ ـ ٢٨
لكل x فى $\bar{U}$ ، $1/x$ تكون فى V

$$\frac{1}{c} > x > \frac{1}{d'}$$

يمكننا حينئذ أن نأخذ $\bar{U} = (1/d', 1/c)$ بدون a ، بشرط أن نتأكد أن U تحتوى a . لكن هذا بالفعل ، لأن $c< 1/a<d'$ تتضمن $1/c> a> 1/d'$.

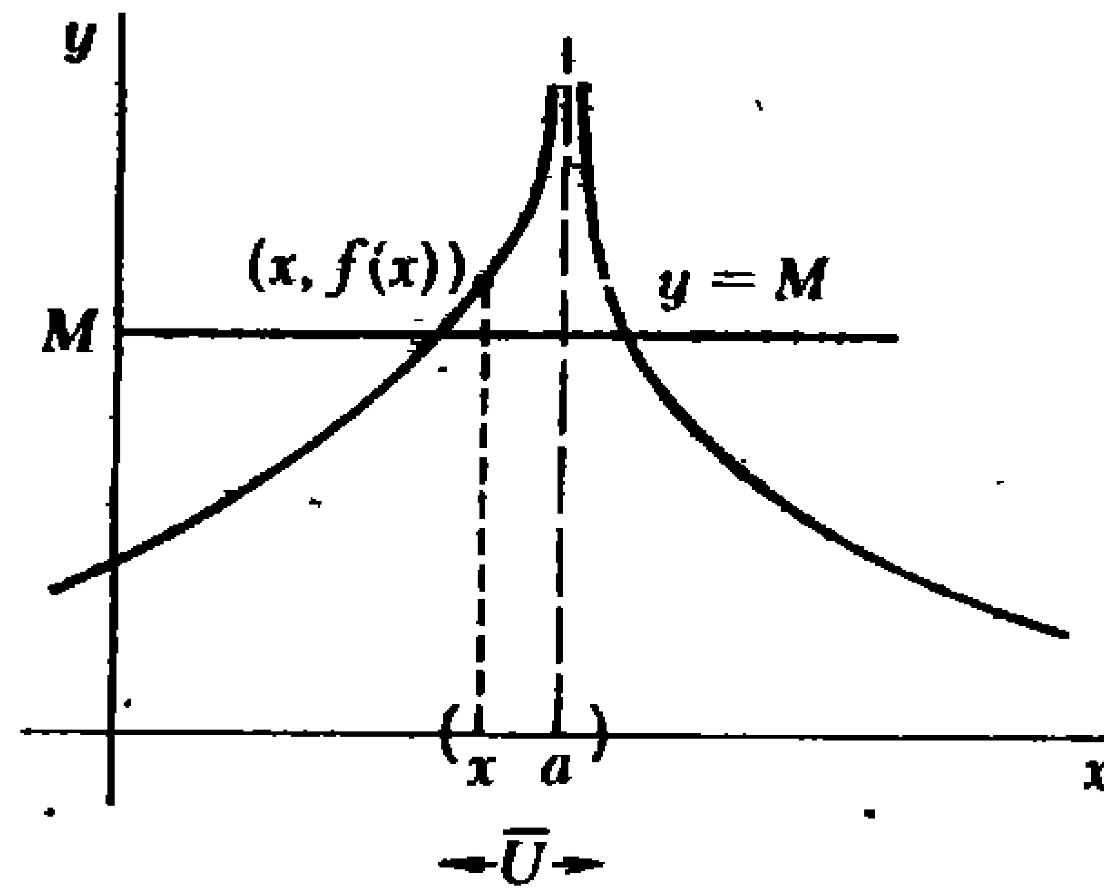
بإرشاد المناقشة السابقة عن النهاية ، يمكننا بسهولة نقل أفكارنا العقلانية عن النهايات من جهة واحدة الى تعريف رسمى . هو مثل تعريف النهاية ، لكن نحتاج الآن أن نأخذ فى الاعتبار ، فقط أعدادا عن يمين أو يسار a .

٢ - ٧ تعريف . الدالة f لها نهاية يمنى عند a إذا كان يوجد عدد b يحقق ما يأتى : لكل جوار V لـ b ، توجد فترة مفتوحة $I = (a,c)$ ممتدة الى يمين a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V لكل x فى I .

التعريف للنهاية اليسرى يكون مشابها ، لكن يأخذ فترة مفتوحة (c,a) ممتدة الى يسار a . نعطى تعريفا رسميا للنهاية اللانهائية . وهو يطابق أفكارنا العقلانية عن ضرورة $f(x)$ كبيرة عندما تكون x قريبة من a .

٢ - ٨ تعريف . $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ اذا كان لكل عدد M يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x) > M$ لكل x فى $\bar{U}$.

التعريف موضح فى شكل ٢ - ٢٩ . لكل عدد معطى M مهما كان كبيرا ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن لكل x فى $\bar{U}$ ، النقطة المناظرة على المنحنى تقع فوق الخط المستقيم $y = M$. نترك تعريف $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ للقارىء .



شكل ٢ - ٢٩

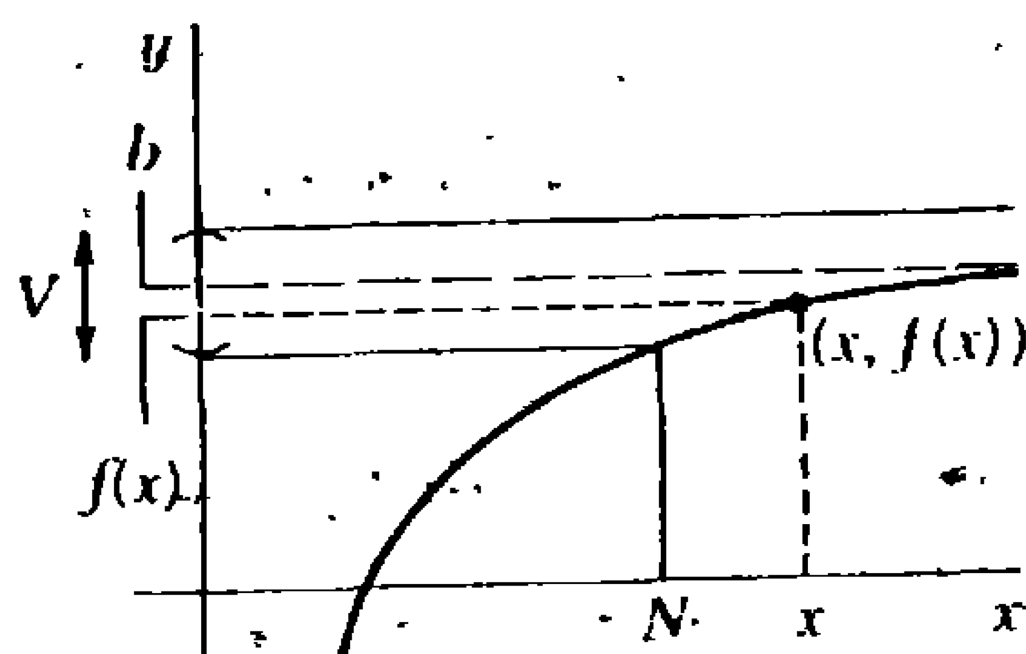
اذا كانت x فى $\bar{U}$ ، فان $f(x) > M$.

يقابل النهايات اللانهائية ، مفهوم الدالة التى لها قيم قريبة من العدد b عندما تكون x كبيرة جدا . مثال ذلك $2 + 1/(x + 1)$ تكون قريبة من 2 لقيم x الكبيرة ، ونكتب

$$\lim_{x\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x+1}\right) = 2$$

٢ - ٩ تعريف . $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ اذا كان لكل جوار V لـ b ، يوجد عدد N بحيث أن $f(x)$ تكون فى V لجميع $x>N$.

التعريف موضح فى شكل ٢ - ٣٠ . المنحنى يقترب أكثر فأكثر الى الخط المستقيم $y = b$ ، موضحا أن الخط المستقيم هو خط تقاربى أفقى لـ $f(x)$. تعريف $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ مشابه لذلك .



شكل ٢ - ٣٠ اذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ، $x > N$ ، فان $f(x)$ تكون فى V

مسائل

١ - أوجد جوارا منقوصا $\bar{U}$ لـ -4 بحيث أن لكل x فى $\bar{U}$ تكون $\frac{1}{2}x + 1$ داخل (أ) $\frac{1}{2}$ من -1 (ب) $\frac{1}{4}$ من -1 ، (ج) ϵ من -1 حيث $\epsilon>0$. ارسم الشكل البيانى للدالة $y = \frac{1}{2}x + 1$ ، وفى كل حالة وضح على المحور y الجوار V لـ -1 المحدد بالتفاوت المسموح به وموضحا على المحور x الجوار المناظر $\bar{U}$.

٢ - أوجد جوارا منقوصا $\bar{U}$ لـ 2 بحيث أن لكل x فى $\bar{U}$ ، تكون $-x + 6$ فى الجوار V لـ 4 ، حيث (أ) $V = (3.4, 4.6)$ ، (ب) $V = (3.8, 4.2)$ ، (ج) $V = (3.99, 4.01)$ ، (د) $V = (4-\epsilon, 4+\epsilon)$ ، $\epsilon >0$. ارسم الشكل البيانى للدالة $y = -x + 6$ ووضح $\bar{U}$ و V على المحورين x و y ، على الترتيب ، فى الحالتين (أ) ، (ب) .

٣ - أوجد جوارين منقوصين لـ 5 بحيث أنه عندما تكون x فى أى منهما ، تكون $\frac{1}{2}x - 4$ فى الفترة $(-1.8, -1.2)$. ما هو أكبر جوار منقوص لـ 5 يحقق الشرط ؟

٤ - أوجد جوارين منقوصين لـ 9 بحيث أنه عندما تكون x فى أى منهما ، تكون $\sqrt{x}$ فى الفترة $(2.7, 3.4)$. ما هو أكبر جوار منقوص لـ 9 يحقق الشرط ؟ .

مستخدما التعريف ، أثبت النهايات الآتية . خطط الشكل البيانى للدالة المناظرة ووضح الجوارين $\bar{U}$ و V على المحورين x و y ، على الترتيب

٥ - $\lim_{x\to2} (3x-2) = 4$ ٦ - $\lim_{x\to2} (-2x+1) = -3$ ٧ - $\lim_{x\to5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$

٨ - $\lim_{x\to3} (2x^2-6) = 12$ ٩ - $\lim_{x\to-2} x^3 = -8$ ١٠ - $\lim_{x\to2} (x^3+3) = 11$

١١ - برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x\to0} (6x+4) = 4$

١٢ - برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x\to a} x = a$

١٣ - برهن مباشرة بدون استخدام مثال ٢ أن $\lim_{x\to a} k = k$ لأى ثابت k . لأى جوار معطى V لـ k ، أوجد أكبر $\bar{U}$ ممكن .

١٤ ـ أثبت أن $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

١٥ ـ أثبت أن $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

١٦ ـ أثبت أن $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ ، حيث $a>0$.

١٧ ـ إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \leq 0, \\ -x + 1, & x > 0, \end{cases}$$

فأوجد $\lim_{x \to 0} f(x)$ و $\lim_{x \to 0} f(x)$ ويرهن إجابتك. للنهاية اليمنى ، وضح على المحور y الجوار $V = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$ ، لـ 1 ، وعلى المحور x الفترة المناظرة $(0,c)$ المشار اليها فى تعريف ٢ ـ ٧ . للنهاية اليسرى ، وضح على المحور y الجوار $V_1 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ، لـ 0 ، وعلى المحور x الفترة المناظرة $(c_1, 0)$.

١٨ ـ إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 3, \\ 2x - 5, & x > 3, \end{cases}$$

فأوجد $\lim_{x \to 3} g(x)$ و $\lim_{x \to 3} g(x)$ ويرهن اجابتك .

١٩ ـ أثبت أن $\lim_{x \to a} (1/x^2)$ موجودة اذا كانت $a \neq 0$.

٢٠ ـ أثبت أن $\lim_{x \to a} \sqrt{x+6}$ موجودة إذا كانت $a > -6$.

٢١ ـ لماذا فى مثال ٣ من الضرورى اختيار جوار جديد' V إذا كانت $d>0$ ؟

٢٢ ـ (أ) أين فى برهان $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b, m > 0$ ، فى مثال ٢ ، يستخدم الشرط $m>0$ ؟ (ب) أكمل برهان $\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$ فى مثال ٢ ، فى الحالتين $m = 0$ و $m<0$.

٢٣ ـ أكمل البرهان لـ $\lim_{x \to a} (1/x) = 1/a$ فى مثال ٣ فى حالة $a>0$.

٢٤ ـ أوجد جوارا منقوصا $\bar{U}$ لـ 0 بحيث أن $1/x^2 > 100$ لجميع x فى $\bar{U}$. أوجد جوارا منقوصا $\bar{U}_1$ لـ 0 بحيث أن $1/x^2 > 1000$ لجميع x فى $\bar{U}_1$. أثبت أن $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$

٢٥ ـ أثبت أن $\lim_{x \to \infty} (3 + 1/x) = 3$

٢٦ ـ أكتب تعريفى $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ و $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

٢٧ ـ عرف $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ وفسرها هندسيا .

٢٨ ـ اثبت أن التقاطع والاتحاد لجوارين لـ a هما جوار لـ a

٢٩ ـ وضح أن التعريف الآتى للاتصال يكافىء تعريف ٢ ـ ٤ : الدالة f تكون متصلة عند a إذا كان لكل جوار V لـ $f(a)$ يوجد جوار U لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V لجميع x فى U .

٣٠ ـ لتكن f دالة لانهاية عند a . دع $\lim_{x \to a} f(x) = b$. هل تعتقد أن لكل فترة متماثلة مفتوحة I حول b ، أى فترة منتصفها b ، من الممكن ايجاد جوار منقوص متماثل $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى I لكل x فى $\bar{U}$ ؟ . أعط أسبابا لرأيك ووضح على تخطيط للشكل البيانى لـ f . .

٢ ـ ٨

نظريات النهاية :

الآن وقد عرفنا ما يقصد بالنهاية ، يمكننا بدقة استخدام المناقشة الدارجة ببند ٢ ـ٥ ، لايجاد النهايات . ايجاد النهايات مباشرة من التعريف ، كما فعلنا فى الأمثلة بالبند السابق ، أمر صعب لجميع الدوال ما عدا البسيطة منها . فى هذا البند سنعطى بعض النظريات العامة التى تمكننا من تجنب الاستخدام المباشر لتعريف النهاية . المادة فى هذا البند وفى البند التالى نظرية وأحيانا صعبة ، لكن توفير المجهود مستقبلا بالمامنا بهذه النتائج سيكون أكثر من معوض عن الوقت الذى نصرفه فى الحصول عليها .

نبدأ بنهايتين هما حالتان خاصتان من $\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$ ، التى أثبتت فى مثال ٢ ببند ٢ ـ ٧ . الأولى نحصل عليها بوضع $b=0$ و $m=1$ والثانية بوضع $b=k$ و $m=0$.

٢ ـ ١٠ $$\lim_{x\to a} x=a$$

٢ ـ ١١ $\lim_{x\to a} k=k$ لأى ثابت k .

عند ايجاد نهاية مثل $\lim_{x\to 4}[3x+x(x-2)]$ كنا نفكر كما يلى . عندما تكون x قريبة من 4 ، لكن لاتساوى 4 ، فان $3x$ تكون قريبة من $3\ (4)=12$ ، $x\ (x-2)$ تكون قريبة من $4\ (2)=8$. لذلك $3x+x\ (x-2)$ تكون قريبة من $12+8=20$. عمليا ، أننا نقول إن $\lim_{x\to 4} x(x-2)=8$ و $\lim_{x\to 4} 3x=12$ وأن

$$\lim_{x\to 4}[3x+x(x-2)]=\lim_{x\to 4}3x+\lim_{x\to 4}x(x-2)$$

هذه المعادلة الأخيرة هى تطبيق للنظرية التى تقول اذا كانت g و f دالتين ، فان

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x) \qquad (1)$$

فى مثالنا $f\ (x)=3x,\ g\ (x)=x\ (x-2),\ a=4$. بالكلمات ، نهاية حاصل جمع دالتين تساوى حاصل جمع نهايتى الدالتين .

عندما ذكرنا الآن أن $x\ (x-2)$ تكون قريبة من $4\ (2)$ عمليا قلنا إن

$$\lim_{x\to 4}x(x-2)=(\lim_{x\to 4}x)[\lim_{x\to 4}(x-2)]$$

هذا هو تطبيق للنظرية

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=[\lim_{x\to a}f(x)][\lim_{x\to a}g(x)] \qquad (2)$$

بالكلمات ، نهاية حاصل ضرب دالتين تساوى حاصل ضرب نهايتى الدالتين . هنا $f\ (x)=x$ و $g\ (x)=x-2$ بالفحص الدقيق للمناقشة التى استخدمت لايجاد النهايات فى الأمثلة بالبندين ٢ ـ ٥ ، ٢ ـ ٦ يبين أن (١) و (٢) قد تكرر استخدامها ، مع نظريات مماثلة سنناقشها الآن .

٢ ـ ١٢ نظرية . اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودتين ، فهكذا توجد أيضا النهايات التى بالطرف الايسر أدناه ويكون

(أولا) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$ *

(ثانيا) $\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$ حيث k ثابت .

(ثالثا) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]$

(رابعا) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, بفرض أن $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

توجد نظريات مماثلة للنهايات اليمنى واليسرى . برهان هذه النظرية سيعطى فى بند ٢ ـ ١٠ . نظرية ٢ ـ ١٢ (أولاً) يمكن امتدادها الى حواصل جمع والى فروق أكثر من دالتين . فمثلا ، بكتابة $f(x) - g(x) + h(x)$ كحاصل جمع دالتين بادخال أقواس واستخدام نظرية ٢ ـ ١٢ (أولا) مرتين ، يكون لدينا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)+h(x)] &= \lim_{x\to a}([f(x)-g(x)]+h(x))\\ &= \lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] + \lim_{x\to a} h(x)\\ &= \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) + \lim_{x\to a} h(x)\end{aligned}$$

بالمثل ، نظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) يمكن امتدادها لحاصل ضرب ثلاث دوال أو أكثر . لاحظ أن نظرية ٢ ـ ١٢ (ثانيا) هى حالة خاصة لنظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) نحصل عليها بوضع $g(x) = k$ واستخدام ٢ ـ ١١ .

لتجنب المزيد من الأقواس ، سنرمز لـ $(g(x))^n$ بـ $g^n(x)$ ** . إذا كانت n عددا صحيحا غير سالب ، فلدينا بامتداد نظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) لحواصل ضرب دوال متعددة

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} g^n(x) &= \lim_{x\to a}[g(x)g(x)\cdots g(x)]\\ &= [\lim_{x\to a} g(x)][\lim_{x\to a} g(x)]\cdots[\lim_{x\to a} g(x)]\\ &= [\lim_{x\to a} g(x)]^n. \qquad (3)\end{aligned}$$

إذا كانت n عدداً صحيحاً سالباً ، فبنظرية ٢ ـ ١٢ (رابعاً) ، يكون

$$\lim_{x\to a} g^n(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{g^{-n}(x)} = \frac{\lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} g^{-n}(x)}$$

---

* فى المعادلات التى تحتوى ± أكثر من مرة تقرأ اما الاشارة العليا واما الاشارة السفلى فى كل المعادلة .

** القارىء قابل طريقة الكتابة هذه فى حساب المثلثات ، حيث $(\sin x)^2$ تكتب عادة $\sin^2 x$.

بما أن $-n>0$ ، يمكن تطبيق (٣) على مقام الكسر الأخير ، ويكون لدينا

$$\frac{\lim_{x\to a} 1}{\lim_{x\to a} g^{-n}(x)} = \frac{1}{[\lim_{x\to a} g(x)]^{-n}} = [\lim_{x\to a} g(x)]^n$$

لقد أثبتنا النظرية الآتية ،

٢ ـ ١٣ نظرية . $\lim_{x\to a} g^n(x) = [\lim_{x\to a} g(x)]^n$ لكل الاعداد الصحيحة n ، بفرض أن $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة .

هنا ولاحقاً نصوص النظريات بقصد أن تكون سارية المفعول فقط لقيم الحروف التي تجعل المقادير ذات معنى . فمثلا ، نظرية ٢ ـ ١٣ لا يكون لها معنى إذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0,\ n = -3$.

بالاستعانة بنظريات هذا البند يمكننا ايجاد نهايات دوال كثيرة بأكثر سهولة عن استخدام التعريف مباشرة ، كما فعلنا في الأمثلة في البند ٢ ـ ٧ . نعطى توضيحين لاستخدامها .

مثال ١ . أوجد $\lim_{x\to 3} (x^2 - 2x + 5)$

لديناً

$$\lim_{x\to 3} (x^2 - 2x + 5) = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 2x + \lim_{x\to 3} 5$$ من ٢ ـ ١٢ (أولاً)

$$= (\lim_{x\to 3} x)(\lim_{x\to 3} x) - 2\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5$$ من ٢ ـ ١٢ (ثالثاً) ، (ثانياً)

من ٢ ـ ١٠ مكررة ثلاث مرات

$$= 3(3) - 2(3) + 5 = 8$$ من ٢ ـ ١١

مثال ٢ . أثبت أن الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{(x^7 - 5x)(x+2)^2}{x^3 - 10}$$

متصلة عند 1 .

لدينا $f(1) = 4$ ويجب اثبات أن $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$ لدينا

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^7 - 5x)(x+2)^2}{x^3 - 10} = \frac{\lim_{x\to 1} (x^7 - 5x)(x+2)^2}{\lim_{x\to 1} (x^3 - 10)}$$ من ٢ ـ ١٢ (رابعاً)

$$= \frac{[\lim_{x\to 1} (x^7 - 5x)][\lim_{x\to 1} (x+2)^2]}{\lim_{x\to 1} (x^3 - 10)}$$ من ٢ ـ ١٢ (ثالثاً)

$$= \frac{[\lim_{x\to 1} x^7 - \lim_{x\to 1} 5x][\lim_{x\to 1} (x+2)]^2}{\lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 10}$$ من ٢ - ١٢ (أولاً) مرتين ، ٢ - ١٣

$$= \frac{[(\lim_{x\to 1} x)^7 - 5\lim_{x\to 1} x][\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 2]^2}{(\lim_{x\to 1} x)^3 - \lim_{x\to 1} 10}$$ من ٢ - ١٣ مرتين ، ٢ - ١٢ (ثانيا) ، (أولا)

$$= \frac{[1^7 - 5(1)][1+2]^2}{1^3 - 10} = 4$$ من ٢ - ١٠ أربع مرات ، ٢ - ١١ مرتين

كما توضح هذه الأمثلة ، مسألة إيجاد النهاية يمكن لدوال كثيرة اختزالها بالاستخدام المتكرر لنظرية ٢ - ١٢ إلى ايجاد $\lim_{x\to a} k$ و $\lim_{x\to a} x$ رغم أن نظريات النّهاية تستخدم صراحة تعريف النهاية غير اللازم فى مسائل كثيرة ، إلا أن التعريف يكون دائما فى الخلفية ، إذ أن كل نظرية نهاية تعتمد عليه .

الشرط فى نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) بان $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ هام . هذا لايعنى أن $f(x) / g(x)$ حتما ليس لها نهاية اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ، بل إن النظرية لا استخدام لها فى إيجاد النهاية .

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x\to -2} [(2x+4)/(x^2+5x+6)]$

بما أن $\lim_{x\to -2} (x^2+5x+6) = 0$ فان نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) لايمكن استخدامها . اذا كانت نهاية البسط ليست صفرا ، فالكسر سيصبح كبيرا موجبا أو سالبا لـ x القريبة من -2 والنهاية لاتوجد . هنا ، اذ أن نهاية البسط هى أيضا صفر ، من المحتمل أن يكون الكسر له نهاية . لدينا

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \lim_{x\to -2} \frac{2}{x+3}$$

فى الكسر الأخير نهاية المقام لاتساوى صفرا ، واذن يمكن تطبيق نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) عليه ويكون

$$\lim_{x\to -2} \frac{2x+4}{x^2+5x+6} = \frac{\lim_{x\to -2} 2}{\lim_{x\to -2} (x+3)} = \frac{2}{1} = 2$$

نظرية ٢ - ١٢ (أولا) تقول أنه اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين ، فهكذا توجد نهاية دالة حاصل الجمع $f(x) + g(x)$. العكس ليس صحيحا . لايمكننا أن نستنتج من وجود $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ وجود $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$. فمثلا ، اذا كانت $f(x) = x - 1/x + 3$ وكانت $g(x) = 1/x$ فان $f(x) + g(x) = x + 3$ والنهاية $\lim_{x\to 0} [f(x) + g(x)]$ توجد ، بينما لا f ولا g لها نهاية عند 0 . توجد ملاحظات مماثلة بالنسبة الى نهايات حواصل الضرب وخوارج القسمة .

٢ ـ ١٤ نظرية . $\lim_{x\to a} x^r = a^r$ لكل r كسرية ولكل a حيث a^r يكون معرفا . الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^r$ تكون اذن متصلة عند كل a هكذا .

هذا يعنى أن الشكل البيانى لـ $y = x^{5/3}$ ، مثلا ، ليس به ثقوب أو له قفزات فى أى مكان . للعدد الصحيح r ، النظرية تنتج مباشرة من نظرية ٢ ـ ١٣ . البرهان للعدد غير الصحيح r سيعطى فى بند ٢ ـ ١٠ . الدالة $f(x) = x^\alpha$ حيث α عدد حقيقى ، تسمى دالة قوى . فى الفصل السابع سنثبت ما هو أعم وهو أن f تكون متصلة لجميع قيم α الحقيقية .

رغم أن النظريات التى درسناها الى الآن تمكننا من ايجاد النهايات لدوال كثيرة ، الا أنها ليست كافية لمعالجة كل ما سوف نقابله . حتى النهاية البسيطة مثل $\lim_{x\to 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8}$ لايمكن حسابها بها . ما نحتاج اليه لهذه النهاية هو التعميم للأسس الكسرية لنظرية ٢ ـ ١٣ ، التى نصت على أن $\lim_{x\to a} g^n(x) = [\lim_{x\to a} g(x)]^n$ اذا كانت n عددا صحيحا . بدلا من اثبات تعميم نظرية ٢ ـ ١٣ الى الأسس الكسرية سنعطى نتيجة أعم التى منها يستنتج التعميم بسهولة والتى سيكون لها أهميتها فيما بعد . استعدادا لها يجب على القارىء أن يراجع المادة عن الدوال التركيبية فى البند ٢ ـ ٤ .

٢ ـ ١٥ نظرية . اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = b$ وكانت الدالة f متصلة عند b فان

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

بتعبير آخر ، f , lim يمكن تبادلهما . البرهان سيعطى فى بند ٢ ـ ١٠ . يمكننا الآن تعميم نظرية ٢ ـ ١٣ الى الأسس الكسرية .

٢ ـ ١٦ نظرية . $\lim_{x\to a} g^r(x) = [\lim_{x\to a} g(x)]^r$ لجميع r الكسرية وبشرط أن $\lim_{x\to a} g(x)$ تكون موجودة .

البرهان ضع $f(z) = z^r$ ، فيكون $g^r(x) = f(g(x))$ ويكون $g^r(x)$ قد عبر عنها بتركيب f مع g . أيضا f متصلة فى كل مكان بنظرية ٢ ـ ١٤ . واذن بنظرية ٢ ـ ١٥ يكون

$$\lim_{x\to a} g^r(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = [\lim_{x\to a} g(x)]^r$$

مثال ٤ . أوجد $\lim_{x\to 6} \sqrt{x^2 - 3x - 8}$

من نظرية ٢ ـ ١٦ حيث $n = \frac{1}{2}$ و $g(x) = x^2 - 3x - 8$

$$\lim_{x\to 6} (x^2 - 3x - 8)^{1/2} = [\lim_{x\to 6} (x^2 - 3x - 8)]^{1/2} = \sqrt{10}$$

فى حساب $\lim_{x\to 6} (x^2 - 3x - 8)$ من الطبيعى أننا استخدمنا نظرية ٢ ـ ١٢ والنظريات الأخرى عن النهايات .

مثال ٥ . أوجد

$$\lim_{x\to 2}\left[x^2+\frac{(x^3+1)^{-2/3}}{x\sqrt{x+1}}\right]$$

من نظرية ٢ ـ ١٢ ، لدينا

$$\lim_{x\to 2}\left[x^2+\frac{(x^3+1)^{-2/3}}{x\sqrt{x+1}}\right]=\lim_{x\to 2}x^2+\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)^{-2/3}}{(\lim\limits_{x\to 2}x)(\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+1})}$$

باستخدام نظرية ٢ ـ ١٦ مرتين ، المدار الأخير يمكن كتابته

$$\lim_{x\to 2}x^2+\frac{[\lim\limits_{x\to 2}(x^3+1)]^{-2/3}}{(\lim\limits_{x\to 2}x)\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}}=4+\frac{9^{-2/3}}{2\sqrt{3}}$$

مسائل :

أوجد النهايات الآتية ، مشيرا عند كل خطوة الى نظريات النهاية التى تستخدمها :

١ ـ $\lim\limits_{z\to -1}5z^3$

٢ ـ $\lim\limits_{x\to 5}4x^2$

٣ ـ $\lim\limits_{x\to 0}(9x^4-7)$

٤ ـ $\lim\limits_{u\to 1/2}(4u^3-\frac{5}{2}u)$

٥ ـ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)(x-3)^2$

٦ ـ $\lim\limits_{t\to -1}\frac{\pi(4-2t^2)}{3}$

٧ ـ $\lim\limits_{x\to 5}\frac{1+x}{1-x}$

٨ ـ $\lim\limits_{x\to 64}\sqrt[3]{x}$

٩ ـ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x(x+1)}{x^2-1}+2}$

١٠ ـ $\lim\limits_{u\to 6}u\sqrt{u+1}$

أوجد النهايات الآتية ، ملاحظا عقليا نظريات النهاية التى تستخدمها :

١١ ـ $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-x^2+3x+1)$

١٢ ـ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+\sqrt{6})(x-3)^3$

١٣ ـ $\lim\limits_{t\to -2}(5-3t^3)^{17}$

١٤ ـ $\lim\limits_{x\to a}\frac{3(9x-8)}{4}$

١٥ ـ $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t+1}{3t-2}$

١٦ ـ $\lim\limits_{h\to 1}\frac{h+1}{h-1}$

١٧ ـ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^2}{2+x}$

١٨ ـ $\lim\limits_{y\to 8}(7\sqrt[3]{y}+1)$

١٩ ـ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{2}\sqrt[3]{5-4h}$

٢٠ ـ $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3x^2}{x^2-3x-4}$

٢١ ـ $\lim\limits_{x\to t}(x^2+1)\frac{x}{x-1}$

٢٢ ـ $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)\sqrt{x^2-5}$

٢٣ ـ $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2x}$

٢٤ ـ $\lim\limits_{x\to -1}\left[x+\frac{(7x+4/x)(x+3)}{2x(5-x^2)}\right]$

٢٥ ـ $\lim\limits_{u\to 3}\frac{u^2-8u+15}{u-3}$

٢٦ ـ $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x+9}$

٢٧ ـ $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2x^2-7x+3}{2x^2+3x-2}$

٢٨ ـ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-5x^2+8x-4}$

حدد ما اذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند العدد المشار اليه ، واذا لم تكن كذلك ، فحدد ما اذا كانت متصلة يسارا أو يمينا عند ذلك العدد :

٢٩ - $f(x) = 2x^4 - \frac{1}{3}x^2 + 7x + 1;\ 2$

٣٠ - $f(r) = \pi r^2;\ \frac{1}{2}$

٣١ - $G(x) = (-\frac{1}{2}x + 1)^7;\ a$

٣٢ - $g(t) = \dfrac{t+1}{t};\ -1$

٣٣ - $u(x) = \dfrac{1}{x-1};\ 1$

٣٤ - $g(x) = \sqrt{x};\ 0$

٣٥ - $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+5}{\sqrt{x-1}};\ 4$

٣٦ - $f(t) = \begin{cases} 2t, & t \leq 0, \\ t^2 - 1, & t > 0;\ 0 \end{cases}$

٣٧ - $f(y) = \dfrac{y^3 + y + 1}{(2y^2+1)(y-2)};\ c$

٣٨ - $f(x) = \dfrac{x}{|x|};\ 0$

٣٩ - $f(x) = \dfrac{x}{[x]};\ 3$ حيث $[x]$ هى دالة أكبر الأعداد الصحيحة .

٤٠ - بافتراض نظرية ٢ - ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب دالتين ، أذكر واثبت تعميمها لحاصل ضرب ثلاث دوال .

٤١ - اثبت أن الدالة الثابتة $f(x) = c$ متصلة عند أى مكان .

٤٢ - برهن مباشرة بدون استخدام نظرية ٢ - ١٣ أن $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ لعدد صحيح n . ما هى القيود التى يجب وضعها على a ؟

٤٣ - لقد أشرنا الى أن وجود $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)$ لايعنى وجود $\lim_{x\to a} f(x)$ أو $\lim_{x\to a} g(x)$. اثبت ، مع ذلك ، أنه اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ موجودتين ، فان $\lim_{x\to a} g(x)$ تكون موجودة [ارشاد : عبر عن $g(x)$ بدلالة $f(x)$] و $f(x) + g(x)$.

٢ - ٩
الدوال المتصلة

نبرهن هنا بعض حقائق مفيدة عن الدوال المتصلة .

٢ - ١٧ نظرية . دالة كثيرة الحدود متصلة عند كل مكان

البرهان لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود

$$p(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

ولتكن a أى عدد . لدينا

$$\lim_{x\to a} p(x) = b_n \lim_{x\to a} x^n + b_{n-1} \lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + b_1 \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \cdots + b_1 a + b_0 = p(a)$$

هذا يوضح أن p متصلة عند a . لكن a هى أى عدد . لذلك pتكون متصلة عند أى مكان .

٢ ـ ١٨ نظرية . اذا كانت الدالتان g و f متصلتين عند a ، فهكذا أيضا تكون الدوال المعرفة بـ

(أولا) $f(x) \pm g(x)$

(ثانيا) $f(x)g(x)$

(ثالثا) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ بفرض أن $g(a) \neq 0$ ،

(رابعا) $f^r(x)$ حيث r كسرية .

جزءا (أولا) و (ثانيا) يمكن تعميمهما لحواصل جمع وحواصل ضرب أكثر من دالتين . برهانا نظرية ٢ ـ ١٨ ورفيقتها نظرية ٢ ـ ١٩ تتركان للقارىء (المسائل من ١٤ الى ١٧) .

٢ ـ ١٩ نظرية . اذا كانت الدالة g متصلة عند a والدالة f متصلة عند $g(a)$ ، فإن الدالة التركيبية F المعرفة بـ $F(x) = f(g(x))$ تكون متصلة عند a .

اننا نحدد ما اذا كانت دالة متكونة بتكرار حواصل جمع وفروق وحواصل ضرب وخوارج قسمة وجذور لدوال أخرى متصلة بفحص أجزائها . اذا كانت هذه متصلة ، فالدالة الأصلية تكون متصلة ، ماعدا عند تلك الأعداد التى تجعل المقامات صفرا أو التى تؤدى الى أعداد تخيلية . المثال الآتى يوضح ذلك .

مثال ١ . عند أى أعداد تكون

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x+4}}{(x^2+1)(x^2-5)}$$

متصلة ؟

كثيرات الحدود $3, x+4, x^2+1, x^2-5$ متصلة عند أى مكان . بنظرية ٢ ـ ١٨ (رابعا) $\sqrt{x+4}$ تكون متصلة لكل $x \geqslant -4$. بالجزء (ثانيا) لنفس النظرية ، حاصل الضرب للدوال المتصلة يكون متصلا ، لذلك فان البسط والمقام لـ $f(x)$ يكونان متصلين لكل $x \geqslant -4$. بالجزء (ثالثا) ، خارج القسمة يكون متصلا لكل $x \geqslant -4$ عدا الأعداد x التى تجعل المقام صفرا . لذلك f تكون متصلة لكل $x \geqslant -4$ عدا $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$.

برهان مماثل لذلك المستخدم فى مثال ١ يثبت النظرية الآتية .

٢ ـ ٢٠ نظرية . الدوال الكسرية والجبرية تكون متصلة أينما كانت معرفة .

هذا يتضمن أن نهايات هذه الدوال تكون مساوية لقيمها .

النظريات فى هذا البند ستمكننا من ايجاد نهايات معظم الدوال البسيطة بسهولة . من الآن

فصاعدا سوف نحتاج لاستخدام تعريف النهاية أحيانا فقط . نختتم هذا البند بثلاث تمهيديات ونظرية سوف نحتاجها فيما بعد*

بما أن $\lim_{x\to3} x^2 = 9$ ، فاننا نتوقع أن $\lim_{x\to3} (x^2 - 9) = 0$ وبالعكس . هذا يوضح الأولى من تمهيدياتنا .

٢ - ٢١ تمهيدية . $\lim_{x\to a} f(x) = b$ اذا واذا فقط كان $\lim_{x\to a} [f(x) - b] = 0$

لاحظ أن النص يعنى أن وجود احدى النهايتين يتضمن وجود الأخرى . من الناحية العملية عادة تكون أبسط طريقة لاثبات أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$ هى اثبات أن $\lim_{x\to a} [f(x) - b] = 0$ التمهيدية تؤكد صحة هذه الطريقة .

البرهان . التمهيدية هى نص « اذا واذا فقط » ، ونبرهن كل جزء على حدة . للجزء « اذا كان فقط » ، نفترض أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ويجب أن نثبت أن $\lim_{x\to a} [f(x) - b] = 0$. بنظرية ٢ - ١٢ (أولا) والنهاية $\lim_{x\to a} [f(x) - b]$ تكون موجودة ويكون

$$\lim_{x\to a} [f(x) - b] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} b = b - b = 0$$

لبرهنة الجزء « اذا كان » ، نفترض أن $\lim_{x\to a} [f(x) - b] = 0$. نكتب $f(x)$ على الصورة $f(x) = [f(x) - b] + b$ بنظرية ٢ - ١٢ (أولا) حيث $f(x) - b$ تلعب دور $f(x)$ فى منطوق تلك النظرية ، النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة ويكون

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} [(f(x) - b) + b]$$
$$= \lim_{x\to a} [f(x) - b] + \lim_{x\to a} b = 0 + b = b$$

الحيلة المستخدمة هنا باضافة وطرح نفس العدد أمر عادى والغرض هو التعبير عن كمية ، هنا $f(x)$ ، فى صورة أكثر نفعا .

٢ - ٢٢ تمهيدية

(أولا) اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ ، فانه يوجد جوار $\bar{U}$ منقوص لـ c . بحيث أن $g(x) > 0$ لكل x فى $\bar{U}$.

(ثانيا) اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ ، فانه يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $g(x) < 0$ لكل x فى $\bar{U}$.

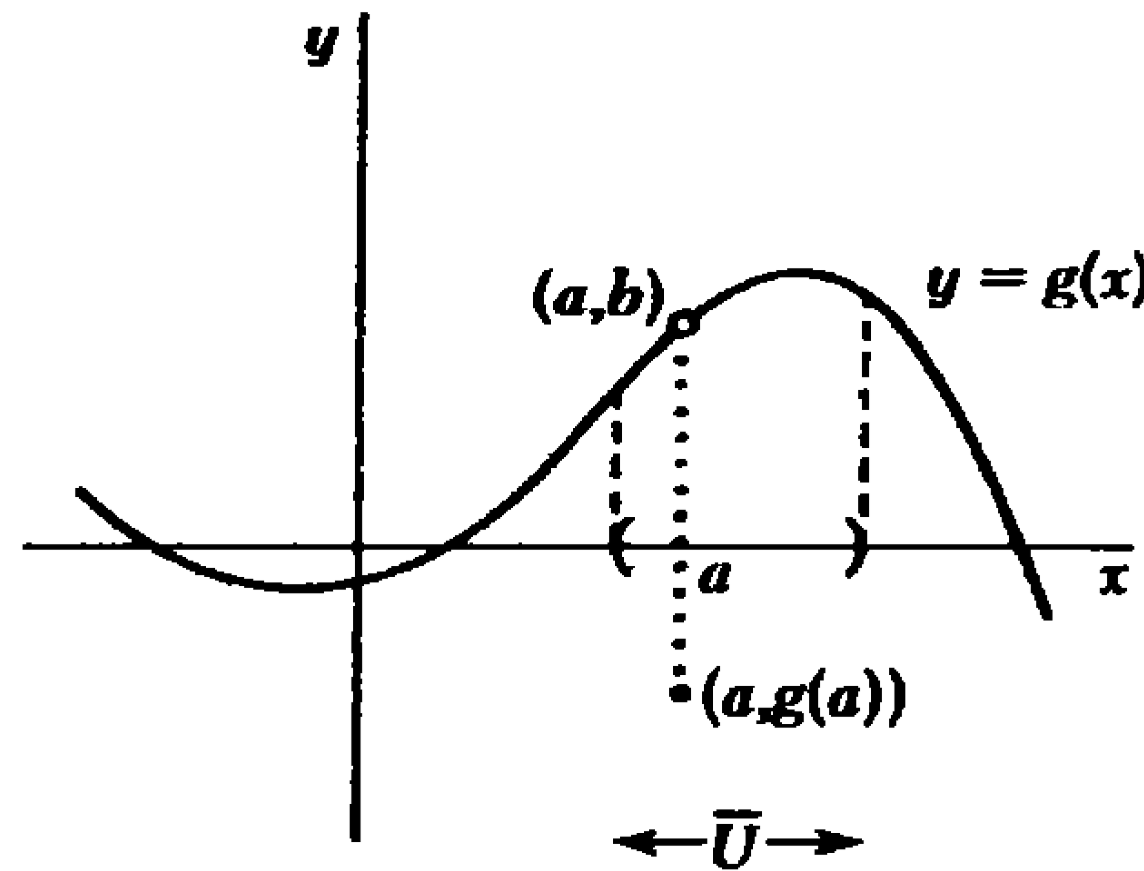
---

* التمهيدية هى نتيجة عادة لها أهمية قليلة بالنسبة الى ذاتها لكنها مفيدة فى برهنة النظريات .

الجزء الأول من التمهيدية موضح فى شكل ٢ ـ ٣١ . هو يقول أن لقيم x القريبة قربا كافيا من a ، الشكل البيانى يجب أن يقع فوق المحور x ، رغم أن $g(x)$ نفسها قد تكون سالبة أو غير موجودة .

البرهان (أولا) لتكن $\lim_{x\to a} g(x) = b > 0$ ، وليكن V الجوار $(b/2 , 3b/2)$ لـ b . بتعريف النهاية يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن لكل x فى $\bar{U}$ ، $g(x)$ تكون فى V . لكن عندما تكون $g(x)$ فى V ، فان $g(x) > b/2 > 0$. برهان (ثانيا) يكون مشابها .

التمهيدية الآتية هى جزء عكسى لهذه . وهى أيضا موضحة بشكل ٢ ـ ٣١ .



شكل ٢ ـ ٣١
اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = b > 0$ فان الشكل البيانى يقع فوق المحور x بالقرب من (a, b) .

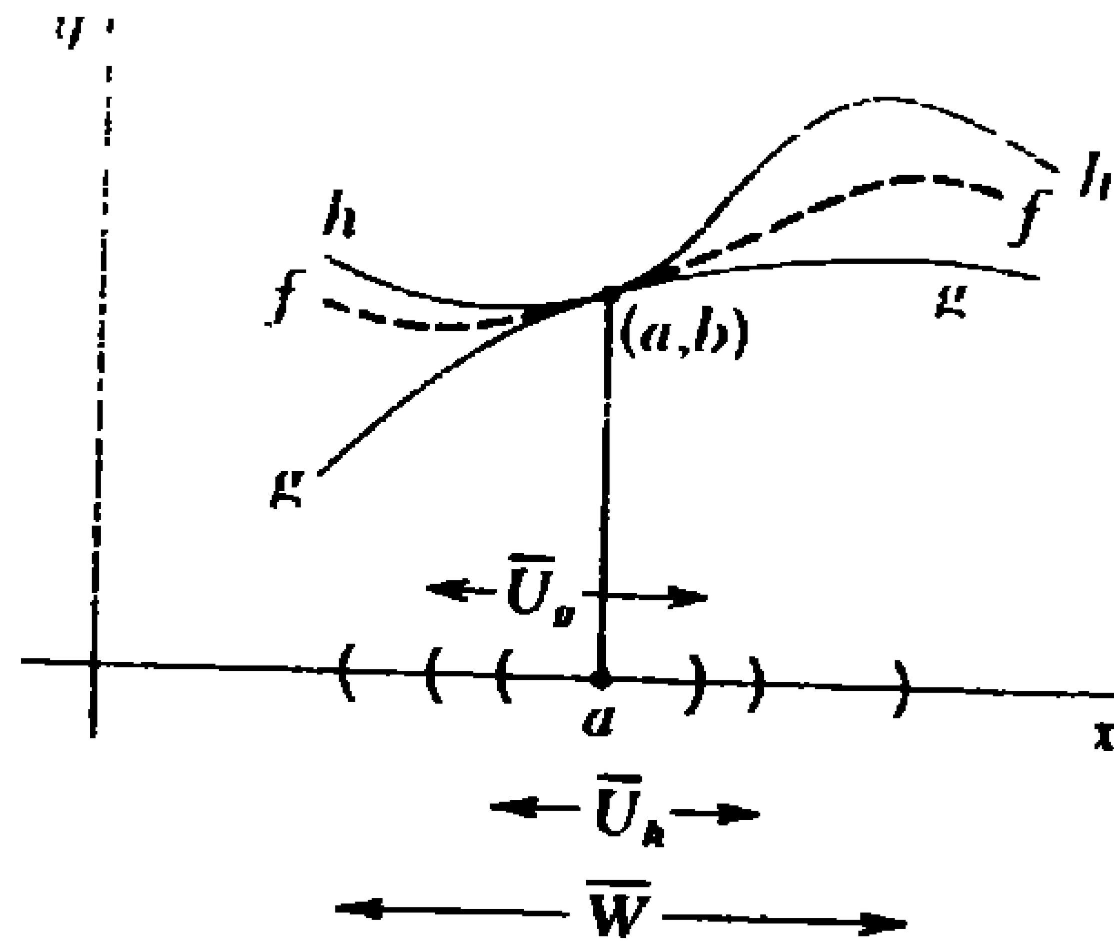
٢ ـ ٢٣ تمهيدية

(أولا) اذا كانت $g(x) \geqslant 0$ لكل x فى جوار منقوص ما $\bar{U}$ لـ a وكانت $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة ، فان $\lim_{x\to a} g(x) \geqslant 0$.

(ثانيا) اذا كانت $g(x) \leqslant 0$ لكل x فى جوار منقوص ما $\bar{U}$ لـ a وكانت $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة ، فان $\lim_{x\to a} g(x) \leqslant 0$.

البرهان (أولا) بالفرض ، $g(x) \geqslant 0$ لكل x فى $\bar{U}$. نفرض أن $\lim_{x\to a} g(x) < 0$. بتمهيدية ٢ ـ ٢٢ (ثانيا) يكون لدينا $g(x) < 0$ لكل x فى جوار منقوص ما $\bar{U}_1$ لـ a . بما أن $\bar{U}_1$ و $\bar{U}$ يجب أن يتداخلا فهذا يؤدى الى تناقض . ومن ثم $\lim_{x\to a} g(x) \geqslant 0$ برهان (ثانيا) يكون مشابها .

نفرض أننا نريد اثبات أن $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة . قد يكون من الممكن ايجاد دالتين h و g بحيث أن $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ لكل x قريبة قربا كافيا من a وبحيث أن $\lim_{x\to a} h(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ تكونان موجودتين ومتساويتين (شكل ٢ ـ ٣٢) . بما أن $h(x)$ و $g(x)$ قريبتان من نفس العدد لـ x قريبة من a ، فهذا يفسر $f(x)$ أن تكون قريبة من نفس هذا العدد ومن ثم يكون لها نهاية . هذا هو محتوى النظرية الآتية .



شكل ٢ - ٣٢

اذا كانت $\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ فان $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة ومساوية لـ $\lim_{x\to a} g(x)$

٢ - ٢٤ نظرية الحصر . إذا كانت $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ لكل x فى جوار منقوص ما $\bar{W}$ لـ a ، وكانت $\lim_{x\to a} h(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودتين ومتساويتين ، فان $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة ويكون $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

البرهان . $b = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ ، ودع $V = (c,d)$ أى جوار لـ b . يوجد جواران منقوصان $\bar{U}_h$ و $\bar{U}_g$ لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}_g$, $h(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}_h$. من ثم اذا كانت x فى التقاطع $\bar{U}_g \cap \bar{U}_h$ ، فان كلا من $h(x)$ و $g(x)$ تكون فى V ، ويكون $h(x) < d$ و $c < g(x)$. بالاضافة الى ذلك ، اذا كانت x فى $\bar{W} \cap (\bar{U}_g \cap \bar{U}_h)$ فان $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ وأيضا

$$c < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < d$$

لقد أثبتنا أنه يوجد جوار منقوص لـ a ، هو $\bar{W}\cap\bar{U}_g\cap\bar{U}_h$ بحيث أن لكل x فيه ، $f(x)$ تكون فى V . ومن ثم $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة وتساوى b .

مسائل :

اوجد اين تكون كل دالة مما يأتى متصلة :

١ - $z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{4}$ ٢ - $x^2\sqrt{x-1}$ ٣ - $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ ٤ - $\frac{(t+1)^{1/3}+1}{t(t+2)^2}$

٥ - $\frac{y}{y-m}, m \neq 0$ ٦ - $u^2 + \frac{u-1}{\sqrt{2u^2+7}}$ ٧ - $\frac{a}{x^2(x^2-8)}, a \neq 0$ ٨ - $\frac{1}{x^2+a^2}, a \neq 0$

٩ - $1 + x - \frac{1}{x^3-1}$ ١٠ - $\frac{3}{2x^3-x-1}$

١١ ـ استخدم نظرية ٢ ـ ١٨ لتبرهن أن دالة كثيرة الحدود تكون متصلة . ما هى نظريات النهاية الأخرى التى نحتاج اليها لكى نبرهن ذلك ؟

١٢ ـ اذا كانت f متصلة فى فترة I وكانت a و m ثابتين ، اثبت أن $f(x) - m(x-a) - f(a)$ تكون متصلة فى I .

١٣ ـ عند أى أعداد تكون الدالة الكسرية غير معرفة ومن ثم ليست متصلة ؟ ما هو أكبر عدد للاعداد التى تكون عندها دالة كسرية معطاة غير متصلة ؟ أعط مثالا لدالة كسرية ، ليست كثيره حدود ، ومتصلة فى كل مكان .

١٤ ـ اثبت نظرية ٢ ـ١٨ (أولا). (ارشاد: دع $F(x) = f(x) \pm g(x)$:
واثبت أن $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$)

١٥ ـ اثبت نظرية ٢ ـ ١٨ (ثانيا) . ١٦ ـ اثبت نظرية ٢ ـ ١٨ (رابعا) . ١٧ ـ اثبت نظرية ٢ ـ ١٩ .

١٨ ـ وضح أنه فى التمهيدية ٢ ـ ٢٢ لايمكن الحصول على نتيجة اذا كانت $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ وذلك بتخطيط الشكل البيانى لدالة g حيث $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ولكن فى كل جوار منقوص لـ a توجد اعداد x حيث $g(x) > 0$ واعداد x حيث $g(x) < 0$.

١٩ ـ اثبت التمهيدية ٢ ـ ٢٢ (ثانيا) .

٢٠* (أ) اثبت أنه اذا كانت الدالة f متصلة عند a وكانت $f(a) > 0$ ، فانه يوجد جوار U لـ a بحيث أن $f(x) > 0$ لكل x فى U . (ارشاد : استخدم التمهيدية ٢ ـ ٢٢) (ب) اذكر وبرهن النتيجة المناظرة اذا كانت $f(a) < 0$.

٢١ ـ وضح برسم تخطيطى أن التمهيدية ٢ ـ ٢٣ (أولا) قد لاتكون صحيحة اذا كانت المتباينة القاطعة (أى $<$ بدلا من $\leqslant$) تستخدم فى نصها .

٢٢ ـ اذا كانت $f(x)$ n87 $g(x)$ لكل x قريبة قربا كافيا من a وكانت $\lim_{x \to a} g(x)$ و $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودتين ، فاثبت أن $\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$ [ارشاد : خذ فى الاعتبار $g(x) - f(x)$] .

٢٣ ـ برهاننا لنظرية الحصر ٢ ـ ٢٤ سوف لايكون ساريا اذا كان $\bar{W} \cap \bar{U}_a \cap \bar{U}_b$ الفئة الخالية . اثبت أنها غير خالية .

٢٤* ـ (أ) اثبت أن $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ فإن اذا واذا فقط كان $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$.
(ب) اثبت أن $\lim_{x \to a} f(x) = b$ فإن اذا واذا فقط كان $\lim_{x \to a} |f(x) - b| = 0$.

٢٥ ـ أثبت أنه اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ، فإن $\lim_{x \to a} |f(x)| = |b|$.(ارشاد : دع $g(x) = |x|$. هل g متصلة ؟) هل العكس صحيحا ؟ أى إذا كانت $\lim_{x \to a} |f(x)| = c \geqslant 0$ ، فهل $\lim_{x \to a} f(x) = \pm c$ ؟ .

٢٦* ـ أثبت أنه إذا كانت دالة f لها نهاية عند a ، فهذه النهاية تكون وحيدة ، أى أن ، اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = c$ و $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ، فإن $b = c$ (ارشاد : أفرض أن $b \neq c$. حينئذ $f(x)$ يجب أن تكون قريبة من b وأيضا قريبة من c . وضح أن هذا مستحيل باختيار جوارين

غير متقاطعين V_c و V_b حول c و b . (هل يمكن اجراء ذلك ؟) . يناظر كل منهما جوارا منقوصا $\bar{U}_c$ و $\bar{U}_b$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V_b لكل x فى $\bar{U}_b$, $f(x)$ تكون فى V_c لكل x فى $\bar{U}_c$. (لماذا ؟) استخلص الآن تناقضا)

٢٧* - (أ) اذا كانت f دالة وكان a أى عدد ، فالعبارة $F(h) = f(a+h)$ تعرف دالة جديدة f لـ h . اثبت أنه اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ، فان $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0} F(h) = b$ ، وبالعكس . (ارشاد : افرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$. ليكن V جوار لـ b ، $\bar{W}$ جوارا منقوصا لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V طالما كانت x فى $\bar{W}$. استخدم $\bar{W}$ لايجاد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ 0 بحيث أن لكل h فى $\bar{U}$ ، $f(a+h)$ تكون فى V .) (ب) أثبت أن $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ اذا كانت f متصلة عند a . وضح أن اتصال f ضرورى بتخطيط الشكل البيانى لدالة منفصلة حيث النتيجة لاتبقى صحيحة .

٢ - ١٠

براهين نظريات النهاية .

فى هذا البند نبرهن نظريات النهاية المذكورة بدون برهان فى البند ٢ - ٨ . نبرهن أولا نظرية ٢ - ١٢ (أولا) عن نهاية حاصل جمع .

نظرية اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودتين ، فهكذا أيضا تكون

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

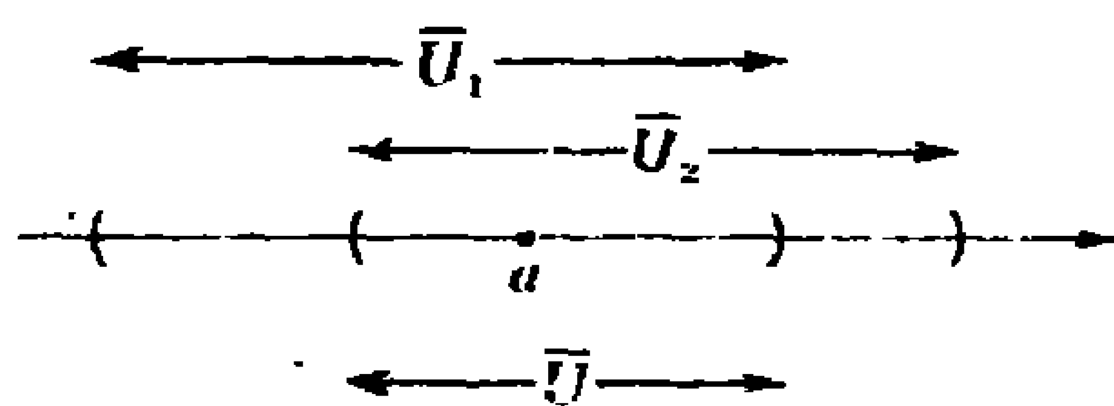
البرهان . سنبرهن فقط الحالة $f(x) + g(x)$ ونترك الحالة $f(x) - g(x)$ للقارىء . لتكن $\lim_{x\to a} g(x) = c$ و $\lim_{x\to a} f(x) = b$ علينا أن نثبت أن $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$. ليكن $V = (b + c - \epsilon_1, b + c + \epsilon_2)$ أى جوار لـ $b + c$ حيث $\epsilon_2 > 0$ و $\epsilon_1 > 0$. طبقا لتعريف النهاية يجب ايجاد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x) + g(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$ لايجاد $\bar{U}$ ، نتوقع أن نستخدم الفرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و $\lim_{x\to a} g(x) = c$. ليكن V_b الجوار $(b - \epsilon_1/2, b + \epsilon_2/2)$ لـ b ، V_c الجوار $(c - \epsilon_1/2, c + \epsilon_2/2)$ لـ c . الحقيقة أن $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة وتساوى b تتضمن من تعريف النهاية أنه يوجد جوار منقوص $\bar{U}_1$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V_b لكل x فى $\bar{U}_1$ ، أى أن ،

$$b - \frac{\epsilon_1}{2} < f(x) < b + \frac{\epsilon_2}{2} \qquad \text{لكل } x \text{ فى } \bar{U}_1 \qquad (1)$$

بالمثل ، بسبب أن $\lim_{x\to a} g(x) = c$ ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}_2$ لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون فى V_c لكل x فى $\bar{U}_2$ ، أى أن ،

$$c - \frac{\epsilon_1}{2} < g(x) < c + \frac{\epsilon_2}{2} \qquad \text{لكل } x \text{ فى } \bar{U}_2 \qquad (2)$$

بما أن $\bar{U}_2$ و $\bar{U}_1$ كلاهما يمتدان على جانبى a ، هكذا يكون تقاطعهما $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ الذى هو اذن جوار منقوص لـ a (شكل ٢ ـ ٣٣) . سمّه $\bar{U}$. سنوضح أن $\bar{U}$ هو الجوار المنقوص الذى نبحث عنه المتباينة (1) صحيحة لكل x فى $\bar{U}_1$ ، والمتباينة(2) صحيحة لكل x فى $\bar{U}_2$. عندما تكون x



شكل ٢ ـ ٣٣

التقاطع $\bar{U}$ لجوارين و $\bar{U}_2$ و $\bar{U}_1$ لـ a هو جوار منقوص لـ a.

مقيدة بـ $\bar{U} = \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$ ، فهى تكون فى $\bar{U}_2$ و $\bar{U}_1$ ولمثل هذه الـ x's ، تكون كل من (1) و (2) صحيحة ويمكن جمعهما ، وبذلك يكون

$$(b+c)-\epsilon_1 < f(x)+g(x) < (b+c)+\epsilon_2$$

لكل x فى $\bar{U}$. لكن هذا يعنى أن $f(x) + g(x)$ تكون فى V . لقد حققنا شروط تعريف النهاية وأثبتنا وجود $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$ وأن

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = b+c = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

نبرهن الآن النظرية ٢ ـ ١٢ (ثانيا) عن نهاية حاصل ضرب ثابت فى دالة .

نظرية . اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة فهكذا أيضا تكون $\lim_{x\to a} kf(x)$ لأى ثابت k ويكون

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$$

البرهان . لتكن $\lim_{x\to a} f(x)=b$ يجب أن نثبت أن $\lim_{x\to a} kf(x)=kb$. ليكن $V=(kb-\epsilon_1, kb+\epsilon_2)$ أى جوار لـ kb ، حيث $\epsilon_2 > 0$ و $\epsilon_1 > 0$. يجب أن نوجد جوارا منقوصا $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $kf(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$. اذا كانت k موجبة ، فان الفترة $(b-\epsilon_1/k, b+\epsilon_2/k)$ تكون جوارا لـ b نرمز اليه بـ V' . بما أن $\lim_{x\to a} f(x) = b$ ، اذن يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $f(x)$ تكون فى V' لكل x فى $\bar{U}$ ، أى أن

$$b-\frac{\epsilon_1}{k} < f(x) < b+\frac{\epsilon_2}{k}$$

من ثم

$$kb-\epsilon_1 < kf(x) < kb+\epsilon_2$$

وهذا يوضح أن $kf(x)$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$. البرهان مماثل اذا كانت $k < 0$ وتافه اذا كانت $k = 0$.

للاعداد للبرهنة على نظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب نبرهن حالة خاصة منها .

٢ ـ ٢٥ تمهيدية . اذا كانت $\lim_{x\to a} v(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ فان $\lim_{x\to a} u(x)v(x) = 0$.

البرهان . ليكن $V = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$ أى جوار لـ 0 حيث $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ اذا كانت ϵ هى الصغرى بين ϵ_2 و ϵ_1 فان $V' = (-\epsilon, \epsilon)$ هو جوار لـ 0 محتوى فى V . الفترة $W = (-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon})$ هى أيضا جوار لـ 0 . بسبب أن $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}_1$ لـ a بحيث أن $u(x)$ تكون فى W لكل x فى $\bar{U}_1$. أى أن $-\sqrt{\epsilon} < u(x) < \sqrt{\epsilon}$ وهذا يكافىء

$$|u(x)| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{لكل } x \text{ فى } \bar{U}_1 \qquad (3)$$

بالمثل ، لأن $\lim_{x\to a} v(x) = 0$ ، يوجد جوار منقوص $\bar{U}_2$ لـ 0 بحيث أن

$$|v(x)| < \sqrt{\epsilon} \quad \text{لكل } x \text{ فى } \bar{U}_2 \qquad (4)$$

دع $\bar{U} = \bar{U}_1 \cap \bar{U}_2$. فيكون $\bar{U}$ جوارا منقوصا لـ 0 . عندما تكون x فى $\bar{U}$ ، كل من (٣) و (٤) تكون صحيحة ويمكن ضربهما ، وباستخدام نظرية ١ ـ ١٥ يكون

$$|u(x)v(x)| = |u(x)||v(x)| < \epsilon$$

هذا يعنى أن $-\epsilon < u(x)\, v(x) < \epsilon$ ومن ثم فان $u(x)\, v(x)$ تكون فى $V' \subseteq V$ لكل x فى $\bar{U}$

يمكننا الآن اثبات نظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) .

نظرية اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودتين فهكذا أيضا تكون $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ ويكون

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]$$

البرهان . دع $\lim_{x\to a} g(x) = c$ و $\lim_{x\to a} f(x) = b$ فيكون $\lim_{x\to a} [g(x) - c] = 0$ و : $\lim_{x\to a} [f(x) - b] = 0$ باستخدام التمهيدية ٢ ـ ٢١ أكتب $f(x)\, g(x)$ هكذا

$$f(x)g(x) = [f(x) - b][g(x) - c] + bg(x) + cf(x) - bc$$

فيكون

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} [f(x) - b][g(x) - c] + b \lim_{x\to a} g(x)$$

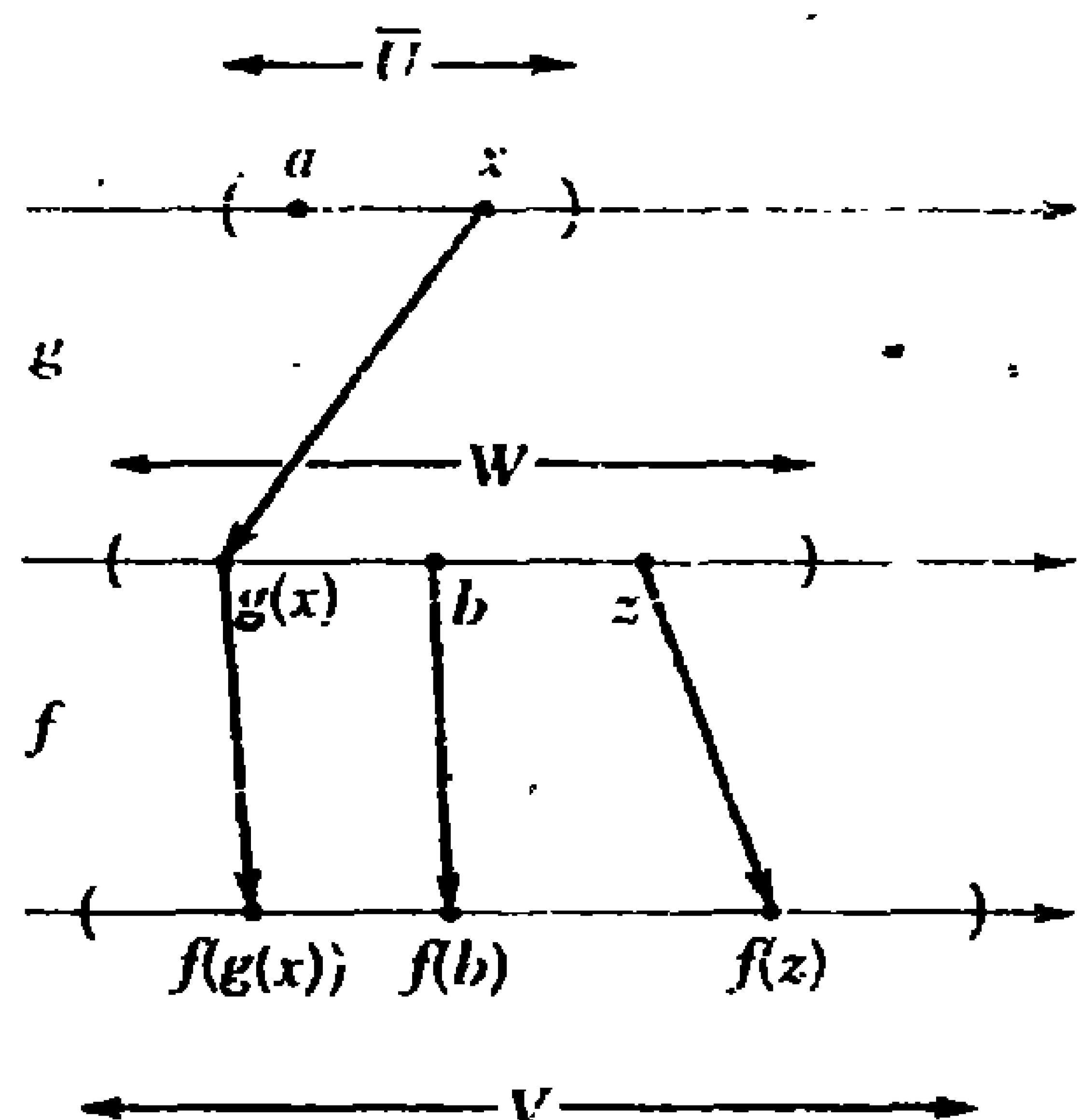
$$+ c \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} bc \qquad \text{من ٢ ـ ١٢ (أولا) و (ثانيا)}$$

$$= 0 + bc + cb - bc = bc \qquad \text{من ٢ ـ ٢٥ ، ٢ ـ ١١}$$

يوجد برهان مباشر لنظرية ٢ ـ ١٢ (رابعا) عن نهاية خارج قسمة ، لكن يمكننا اعطاء برهان أقصر اذا أثبتنا أولا نظرية ٢ ـ ١٥ .

نظرية . اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = b$ وكانت الدالة f متصلة عند b ، فان

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$



شكل ٢ - ٣٤

لكل x فى $\bar{U}$ ، $g(x)$ تكون فى W ومن ثم $f(g(x))$ تكون فى V

البرهان . الرسوم التخطيطية لـ g و f موضحة فى شكل ٢ - ٣٤ . علينا أن نثبت أن : $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. ليكن V أى جوار لـ $f(b)$. يجب أن نثبت أنه يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن :

$f(g(x))$ تكون فى V لكل x فى $\bar{U}$. بما أن f متصلة عند b ، اذن $\lim_{z\to b} f(z) = f(b)$ واذن يوجد جوار منقوص $\bar{W}$ لـ b بحيث أن $f(z)$ تكون فى V لكل z فى $\bar{W}$. بما أن $f(b)$ أيضا فى V ، يمكننا أن نقول بعبارة أعم أن $f(z)$ تكون فى V لكل z فى W . بما أن $\lim_{x\to a} g(x) = b$ و W جوار لـ b ، فانه يوجد جوار منقوص $\bar{U}$ لـ a بحيث أن $g(x)$ تكون فى W لكل x فى $\bar{U}$. وإذن إذا كانت x فى $\bar{U}$ فان $g(x)$ تكون فى W و $f(f(x))$ بدورها تكون فى V .

نثبت الآن نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) .

نظرية . اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودتين وكانت $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$، ، فان $\lim_{x\to a} [f(x) / g(x)]$ تكون موجودة ويكون

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

البرهان . نثبت أولا الحالة الخاصة

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

التى نحصل عليها بأخذ $f(x) = 1$. فى مثال ٣ ببند ٢ ـ ٧ ، أثبتنا أن $\lim (1/z) = 1/b$. بفرض أن $b \neq 0$. اذن الدالة $h(z) = 1/z$ تكون متصلة عند كل عدد عدا الصفر . الدالة $1/g(x)$ يمكن اعتبارها الدالة التركيبية لـ h مع g ، أى $1/g(x) = h(g(x))$. بنظرية ٢ ـ ١٥

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to a} h(g(x)) = h(\lim_{x\to a} g(x)) = \frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

هذا يبرهن الحالة الخاصة . للحالة العامة ، باستخدام نظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل ضرب ، ويكون

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \left[f(x)\, \frac{1}{g(x)}\right] = [\lim_{x\to a} f(x)]\left[\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= [\lim_{x\to a} f(x)]\left[\frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

البرهان الأخير هو لنظرية ٢ ـ ١٤ .

نظرية . $\lim_{x\to a} x^r = a^r$ لكل عدد كسرى r ولكل a حيث تكون a^r معرفة .

البرهان . النظرية تافهة اذا كانت $a = 0$. من ثم نفرض أن $a \neq 0$. نبدأ باثبات الحالة الخاصة $r = 1/m$ ، حيث m عدد صحيح موجب . (اذا كانت m زوجية ، فيجب أن نقيد a بالشرط أن $a > 0$ لتستبعد الاعداد التخيلية مثل $\sqrt[4]{-16}$) . علينا أن نثبت أن $\lim_{x\to a} x^{1/m} = a^{1/m}$. ليكن $V = (c,d)$ أى جوار لـ $a^{1/m}$. البرهان ينفصل الى حالتين .

الحالة الأولى m فردية . المتباينتان

$$c < x^{1/m} < d \tag{5}$$

$$c^m < x < d^m \tag{6}$$

متكافئتان . دع $U = (c^m,d^m)$. بما أن $c < a^{1/m} < d$ فان (٥) و (٦) توضحان أن a تكون فى الفترة U ، واذن U يكون جوار لـ a . المتباينتان أيضا توضحان أن $x^{1/m}$ تكون فى V لكل x فى U .

الحالة الثانية m زوجية . المتباينة (٥) لاتتضمن (٦) اذا كانت $c < 0$ ، لكن لايلزم سوى تعديل طفيف للبرهان المستخدم فى الحالة الاولى . اذا كانت $c < 0$. فاننا نختار c' بحيث أن

$$c < 0 \leq c' < a^{1/m} < d$$

(بما أن a تكون بالضرورة موجبة اذا كانت m زوجية ، كذلك تكون $a^{1/m}$ ، ومثل هذا الاختيار لـ c' يكون دائما ممكنا) . اذا كانت $c \geqslant 0$ فاننا نختار $c' = c$. ليكن V' هو الجوار (c',d) لـ $a^{1/m}$. كل من الحالتين يكون $V' \subseteq V$. البرهان الآن يكون كما فى الحالة الاولى حيث c' تأخذ مكان c .

الآن وقد أثبتنا أن $\lim_{x \to a} x^{1/m} = a^{1/m}$ ، الباقى يكون سهلا . أى عدد كسرى r يمكن كتابته على الصورة $r = n / m$ ، حيث n,m عددان صحيحان وحيث $m > 0$. العدد $x^{n/m}$ يعرف بأنه $(x^{1/m})^n$. (نفترض هنا وفى المواقف المشابهة أن m و n و x هى أعداد حيث $x^{n/m}$ تكون عددا حقيقيا .) والآن باستخدام نظرية ٢ - ١٣ يكون

$$\lim_{x \to a} x^r = \lim_{x \to a} x^{n/m} = \lim_{x \to a} (x^{1/m})^n$$

$$= (\lim_{x \to a} x^{1/m})^n = (a^{1/m})^n = a^{n/m} = a^r$$

هذا يكمل البرهان .

الفصل الثالث

المشتقات

٣ - ١
تعريف المشتقة

أول استعمالنا للنهايات هو فى تعريف المشتقة ، وهى أهم الأفكار المفيدة فى الرياضيات وتطبيقاتها .

لتكن f دالة ، a أى عدد داخل نطاقها . كون المقدار $[f(u)-f(a)]/(u-a)$ نعتبر a ثابتة ، لذلك المقدار يعتمد فقط على u . فهو إذن دالة فى u . سمها F :

$$F(u)=\frac{f(u)-f(a)}{u-a}$$

F تكون معرفة لكل الاعداد حيث f تكون معرفة ماعدا a . مثال ذلك ، إذا كانت $f(x)=x^2$ وكانت $a=2$ ، فان

$$F(u)=\frac{u^2-4}{u-2}$$

الآن نسأل ما اذا كانت F لها نهاية عند a ، أى هل

$$\lim_{u\to a}\frac{f(u)-f(a)}{u-a} \qquad (١)$$

موجودة . للدالة $f(x)=x^2$ ، $a=2$ ، يصبح السؤال «هل $\lim\limits_{u\to a}[(u^2-4)/(u-2)]$ موجودة » . بما أن النهاية للمقام هى صفر فان نظرية ٢ - ١٢ (رابعا) عن نهاية خارج القسمة لايمكن أن تستخدم لاجابة السؤال ونتابع كما فعلنا فى المواقف المشابهة :

$$\lim_{u\to 2}\frac{u^2-4}{u-2}=\lim_{u\to 2}\frac{(u+2)(u-2)}{u-2}=\lim_{u\to 2}(u+2)=4$$

النهاية موجودة .

لدوال أخرى f واعداد أخرى a ، النهاية فى (١) قد توجد وقد لاتوجد . عندما تكون النهاية موجودة ، يكون لدينا موقف ذو أهمية بالغة ومن المناسب كتابة رمز بسيط لها .

نكتب $f'(a)$ للنهاية فى (١) ونسمى هذا العدد مشتقة f عند a .

٣ - ١ تعريف . لتكن f دالة ، a عدد فى نطاقها . مشتقة الدالة f عند a هى العدد .

$$f'(a) = \lim_{u \to a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a}$$

بشرط وجود النهاية . اذا كانت النهاية موجودة ، f يقال إنها قابلة للتفاضل عند a .
فى حالة الدالة $f(x) = x^2$ ، أثبتنا أن $f'(2) = 4$. قبل توضيحنا كيف تستخدم المشتقة ، نعطى عنها أمثلة أكثر .

مثال ١ . إذا كانت $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ، فأوجد $f'(-1)$ إذا كانت موجودة . طبقا للتعريف ، يجب ايجاد قيمة

$$\lim_{u \to -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)}$$

لدينا

$$\lim_{u \to -1} \frac{f(u) - f(-1)}{u - (-1)} = \lim_{u \to -1} \frac{(u^2 + 3u - 5) - (-7)}{u + 1}$$

$$= \lim_{u \to -1} \frac{u^2 + 3u + 2}{u + 1} = \lim_{u \to -1} \frac{(u + 1)(u + 2)}{u + 1}$$

$$= \lim_{u \to -1} (u + 2) = 1$$

لذلك $f'(-1)$ موجودة وتساوى 1 .

مثال ٢ . إذا كانت $f(x) = x^2$ ، فأوجد $f'(a)$ لأى a . لدينا

$$f'(a) = \lim_{u \to a} \frac{f(u) - f(a)}{u - a} = \lim_{u \to a} \frac{u^2 - a^2}{u - a}$$

$$= \lim_{u \to a} \frac{(u + a)(u - a)}{u - a} = \lim_{u \to a} (u + a) = 2a$$

بما أن a يمكن أن تكون أى عدد فان $f'(x) = 2x$، $f'(3) = 2(3) = 6, f'(0) = 0, f'(-1) = -2$
هذه هى المشتقات عند x و $3, 0, -1$ على الترتيب .

مثال ٣ . إذا كانت $f(x) = 1/x$ ، فأوجد $f'(x)$.
لايوجد تأكيد بأن المشتقة موجودة لمجرد أن سئلنا عن ايجادها بالتعريف ،

$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{1/u - 1/x}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{x - u}{ux(u - x)} = \lim_{u\to x} \frac{-1}{ux} = \frac{-1}{\lim\limits_{u\to x} ux} = -\frac{1}{x^2}.$$

المشتقة موجودة ، والدالة f قابلة للتفاضل لكل $x \neq 0$.

طريقة أخرى لكتابة مشتقة الدالة f عند x هى $Df(x)$. فى مثال ٣ أثبتنا أن فى حالة الدالة . $f(x) = 1/x, Df(x) = -1/x^2$. أيضا نكتب $D(1/x) = -1/x^2$ ونتحدث عن مشتقة الدالة $1/x$ بدلا من مشتقة f . وبالقول الحازم ، أن كلا من الكتابتين $D(1/x)$ و $Df(x)$ ليست صحيحة ؛ $1/x$ و $f(x)$ عددان ، والدوال وليست الاعداد التى لها مشتقات ، لكن الممارسة العملية أصبحت عامة .

اذا استخدمنا الكتابة $y = f(x)$ فان رموزا أخرى عامة لمشتقة الدالة f عند x هى

$$Dy, \quad D_x y, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y'$$

مثال ٤ . أوجد Dx^3
دع $g(x) = x^3$. فيكون

$$Dx^3 = g'(x) = \lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{u^3 - x^3}{u - x} \qquad (٢)$$

بما أن x هى جذر للمقدار $u^3 - x^3$ ، معتبرة ككثيرة حدود فى u ، فاننا نعرف من نظرية العامل ١ ـ ٢١ أن $u - x$ هو عامل لـ $u^3 - x^3$. العامل الآخر يمكن ايجاده بطريقة المحاولة والخطأ أو بطريقة القسمة المطولة :

$$u^3 - x^3 = (u - x)(u^2 + ux + x^2)$$

بتعويض ذلك فى (٢) واختزال $u - x$ ، يكون لدينا

$$Dx = \lim_{u\to x}\frac{u^3 - x^3}{u - x} = \lim_{u\to x}(u^2 + ux + x^2) = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

إذا اعتبرنا المعادلة $y = x^3$ ، فانه يمكننا أن نكتب $dy / dx = 3\,x^2$ أو $y' = 3\,x^2$.

مثال ٥ . إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 4 + x - \frac{1}{2}x^2, & x \leqslant 0, \\ 4 - x - \frac{1}{2}x^2, & x > 0, \end{cases}$$

هل f لها مشتقة عند 0 ؟

يجب أن نحدد ما إذا كانت

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad (٣)$$

موجودة . حيث ان وصف f يتغير عند 0 ، يمكننا الاجابة عن السؤال فقط بإيجاد النهايتين اليسرى واليمنى عند 0 . عند $x < 0$ يكون $f(x) = 4 + x - \frac{1}{2}x^2$ ، ويكون

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(4 + x - \frac{1}{2}x^2) - 4}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 1$$

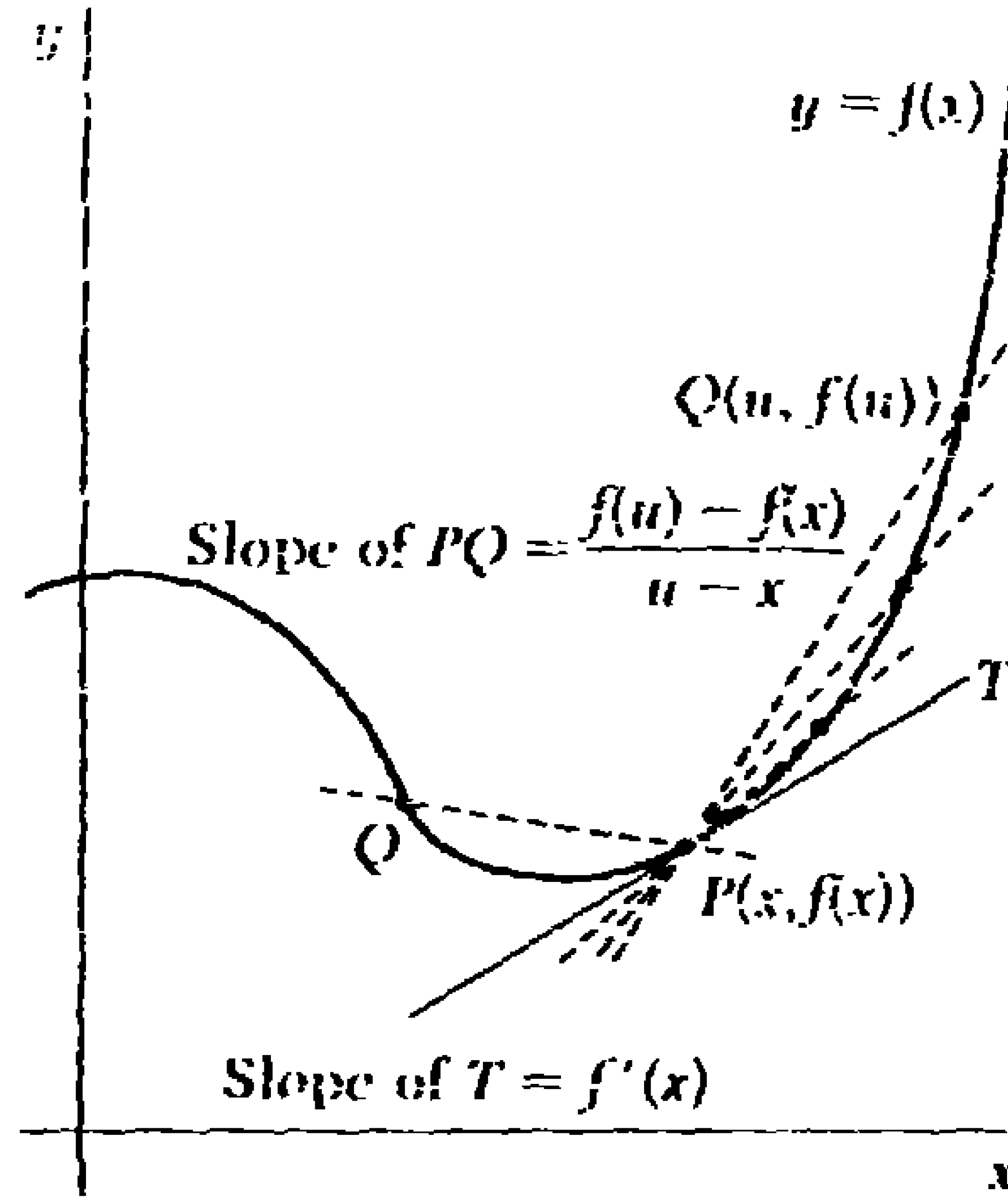
عند $x > 0$ يكون $f(x) = 4 + x - \frac{1}{2}x^2$ ، ويكون

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(4 - x - \frac{1}{2}x^2) - 4}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(-1 - \frac{x}{2}\right) = -1$$

لأن النهايتين اليمنى واليسرى ليستا نفس المقدار ، فإن النهاية فى (٣) لاتوجد والدالة f ليس لها مشتقة عند 0 . لكن الدالة لها مشتقة عند الأعداد الأخرى .

نحن نؤكد أن فى حالة المشتقة لانوجد $\lim_{x\to 0} f(x)$ لكن نهاية الدالة المرتبطة بها . فى $[f(u) - f(a)]/(u - a)$ مثال ٥ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4 = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ لذلك $\lim_{x\to a} f(x)$ تكون موجودة .

المشتقة لها تفسير هندسى هام . الشكل البيانى لدالة نمطية f مخطط فى شكل ٣ ـ ١ . لتكن $P\,(x\,,f\,(x))$ و $Q\,(u, f\,(u))$ نقطتين على المنحنى . ميل الخط PQ المار بالنقطتين Q و P ، المستنتج من احداثيات هاتين النقطتين ، هو $[f(u) - f(x)]/(u - x)$. اذا كانت f متصلة عند x ، فانه عندما تقترب u من x ، تتحرك Q على المنحنى ناحية P ، والخط المستقيم PQ يدور حول P ويقترب من المماس للمنحنى عند P . من المعقول أن نفترض أنه فى نفس الوقت يقترب ميل PQ من ميل المماس ويمكن جعله يقترب منه كما نريد باختيار u قريبة قربا كافيا من x . لكن ذلك مجرد عملية نهائية ، ويمكن أن نقول .



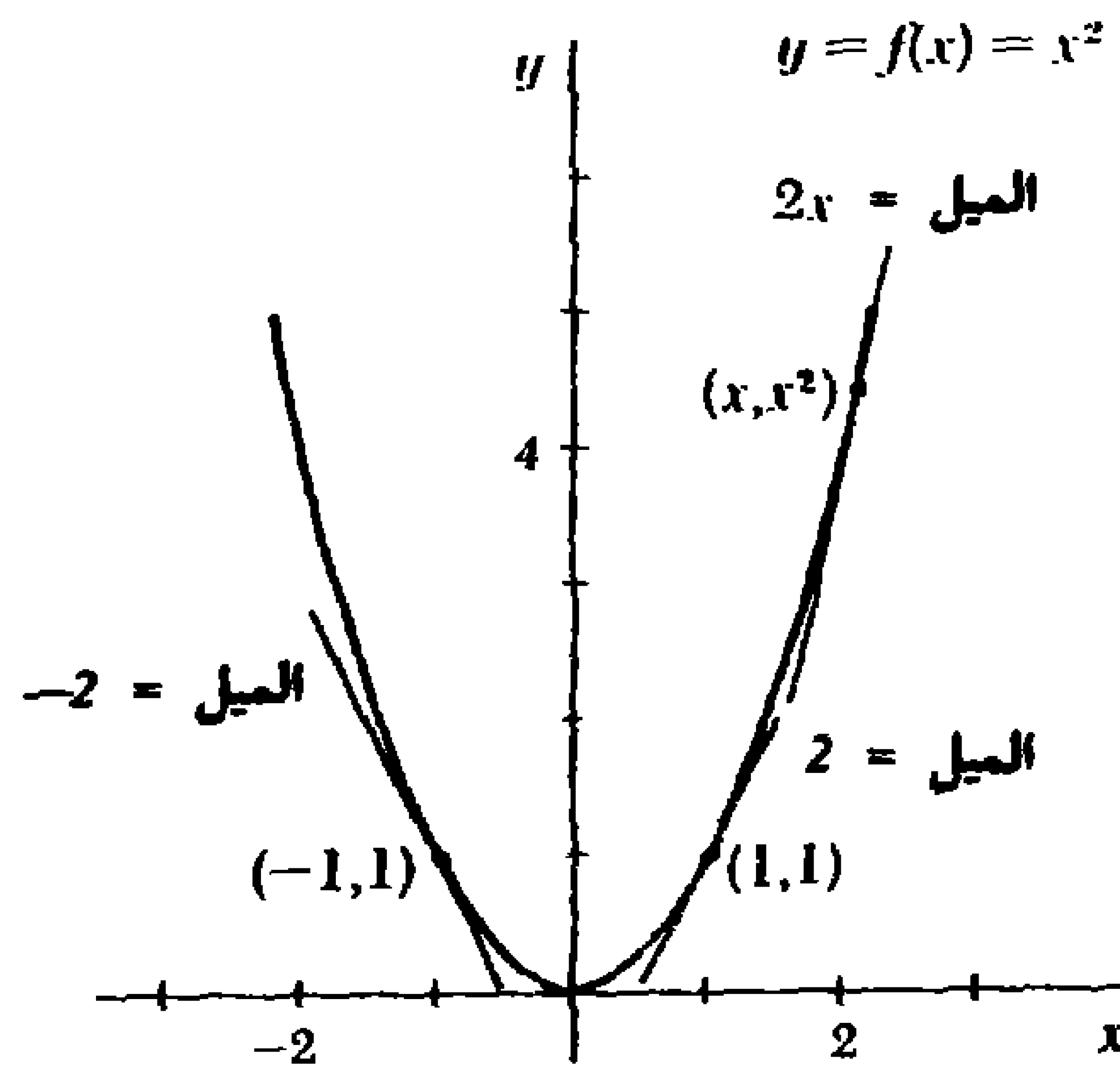
شكل ٣ ـ ١

كلما تقترب u من x ، يقترب الوتر PQ من المماس عند P

$$\text{ميل المماس عند } P = \lim_{u \to x} (PQ \text{ ميل})$$
$$= \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = f'(x)$$

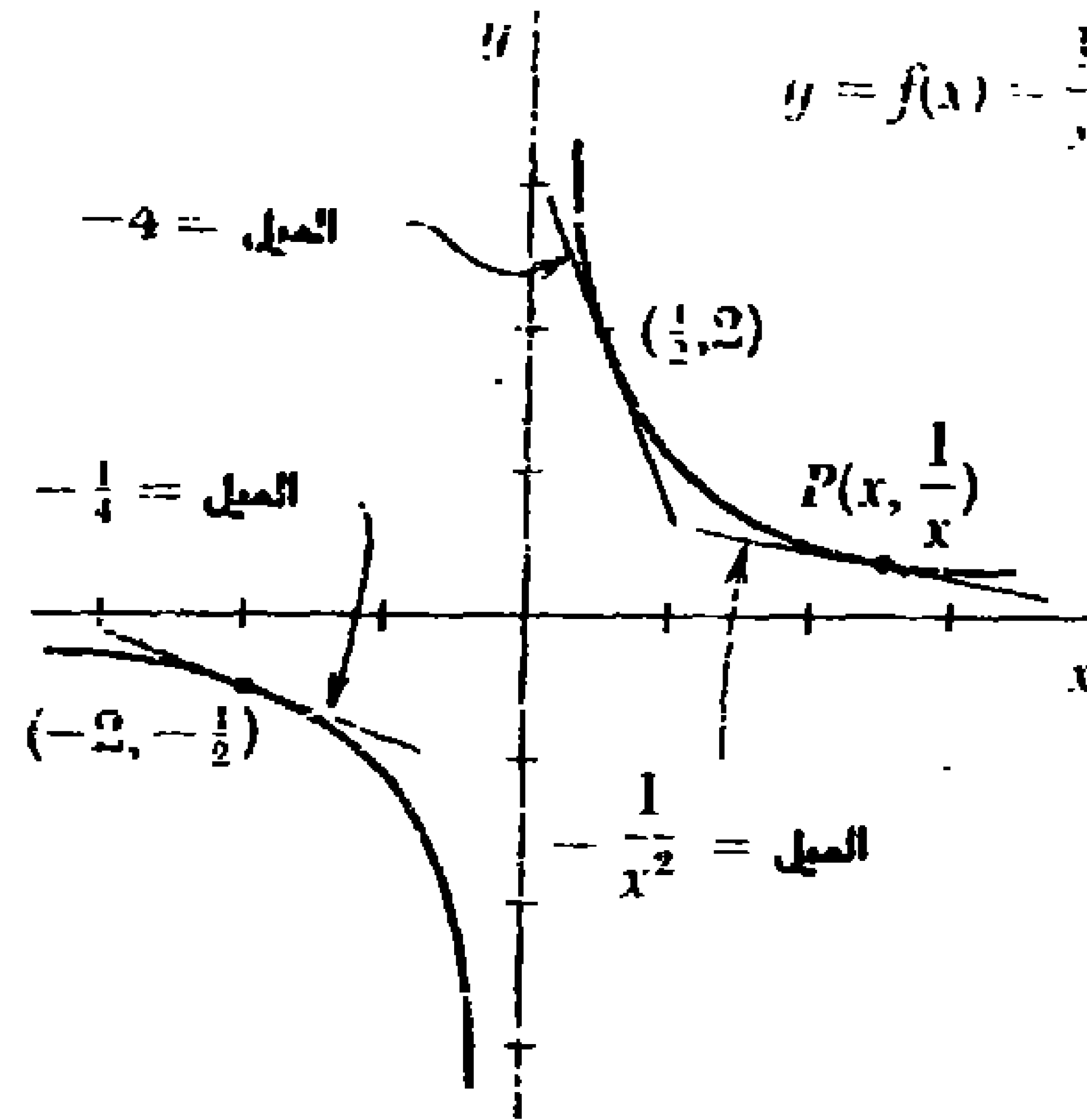
بشرط وجود هذه النهاية (كما فى حالة أى نهاية ، يجب أن نأخذ فى الاعتبار قيم u الأقل من وأيضا الأكبر من x) . كلاميا ، مشتقة f عند x هى ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(x, f(x))$. قبل اعتبار ذلك بتدقيق أكثر ، دعنا ننظر ثانية فى بعض أمثلتنا .

فى مثال ٢ أثبتنا أن الدالة $f(x) = x^2$ لها المشتقة $f'(x) = 2x$. هذا هو ميل المماس للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة (x, x^2) . المنحنى موضح فى شكل ٣ ـ ٢ . ميل المماس عند النقطة $(1,1)$ هو $f'(1) = 2$



شكل ٣ ـ ٢

المماس عند (x, x^2) ميله $f'(x) = 2x$



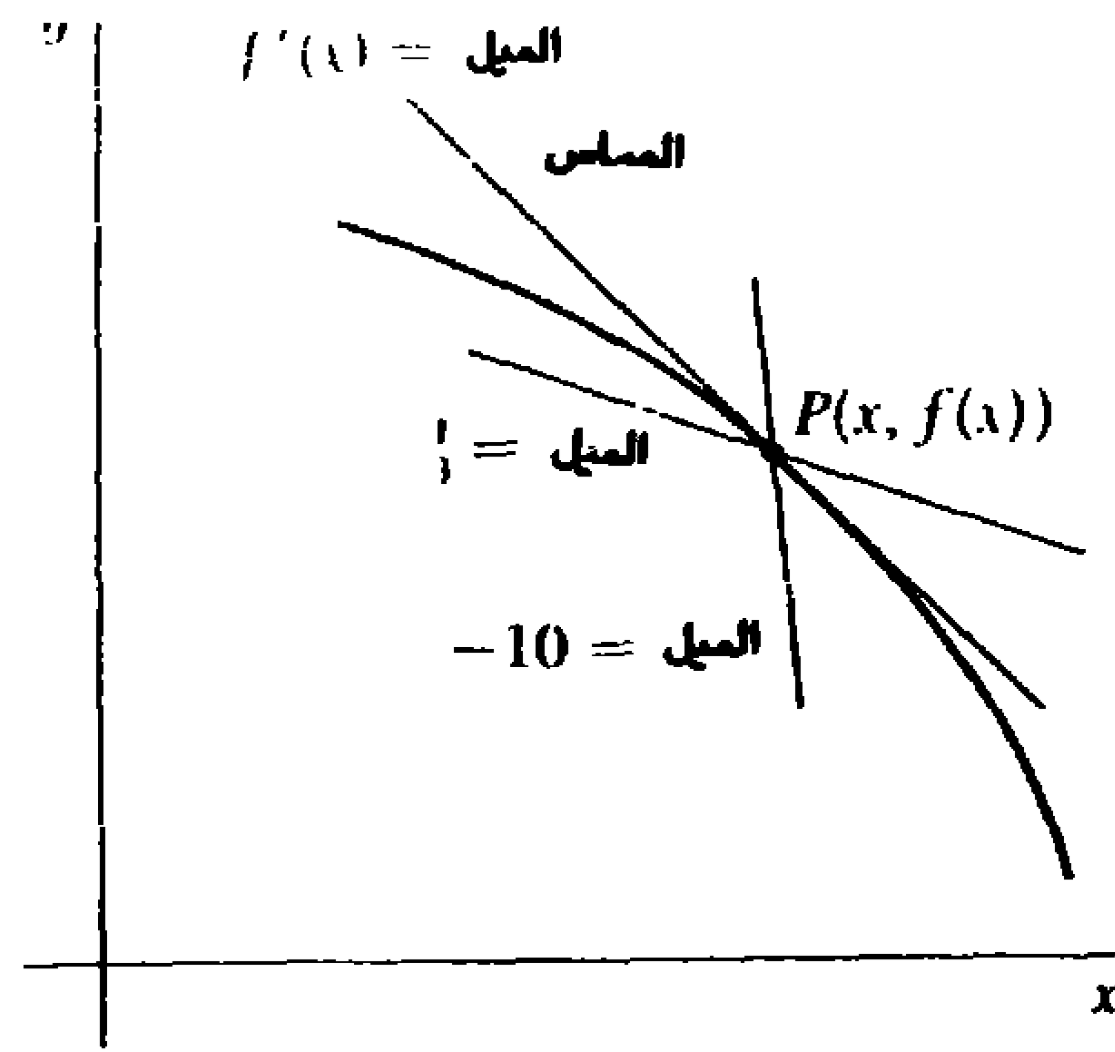
شكل ٣ - ٣
الميل عند $(x, 1/x)$ هو $-1/x^2$

ميل المماس عند النقطة $(2,4)$ هو $4 = f'(2)$. عندما تزداد x ، النقطة (x, x^2) تتحرك لأعلى على طول النصف الأيمن للمنحنى والميل $2x$ للمماس يزداد . عند نقطة الأصل تكون $f'(0) = 0$ و $x = 0$ ميل المماس عند النقطة $(-1,1)$ هو $f'(-1) = 2(-1) = -2$. للنقط على النصف الأيسر للمنحنى تكون $x < 0$ وميل المماس عند كل نقطة يكون سالب .

من الطبيعى أن نعرف ميل المنحنى عند نقطة بأنه ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة . وإذن ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(x. f(x))$ يعطى بـ $f'(x)$ ويكون مقياسا لانحدار المنحنى عند النقطة .

الشكل البيانى لـ $f(x) = 1/x$ موضح فى شكل ٣ - ٣ . فى مثال ٣ ، رأينا أن : $f'(x) = -1/x^2$. هذا هو ميل المنحنى $y = 1/x$ عند النقطة $P(x, 1/x)$. دعنا نرى ما اذا كان هذا معقولا هندسيا . بما أن $-1/x^2 < 0$ لكل $x \neq 0$ ، الميل يكون دائما سالبا . لقيم x الكبيرة ، P تكون بعيدة على الفرع الأيمن للمنحنى ، والميل $f'(x)$ يكون سالبا وقريبا من الصفر . عندما تكون x قريبة من الصفر ، P تكون قريبة من المحور y , $f'(x)$ تكون عددا كبيرا سالبا . فمثلا عند $(\frac{1}{10},10)$ ، الميل يكون -100 ، والمماس يكاد يكون رأسيا .

عندما كنا نناقش المماسات للمنحنيات ، كنا على أرض هشة ، لأننا لم نكن قد عرفنا بعد ما هو المماس للمنحنى . لدينا جميعا فكرة بديهية عما يقصد بالمماس للمنحنى ، لكن عندما نحاول أن نجعل أفكارنا دقيقة ، نجد أن فكرة المماس أكثر مراوغة عما نود فقط فى حالة الدوائر ، حيث المماس يعرف بالعمودى على نصف القطر عند نهايته ، يكون لدينا شىء محدد . للمنحنيات العامة ، التعريفات للمماس مثل « خط مستقيم يلمس فقط المنحنى » أو « خط مستقيم له فقط نقطة واحدة مشتركة مع المنحنى ولايقطع المنحنى » تكون إما مبهمة أو مقيدة جدا . تعريف عام يعرف



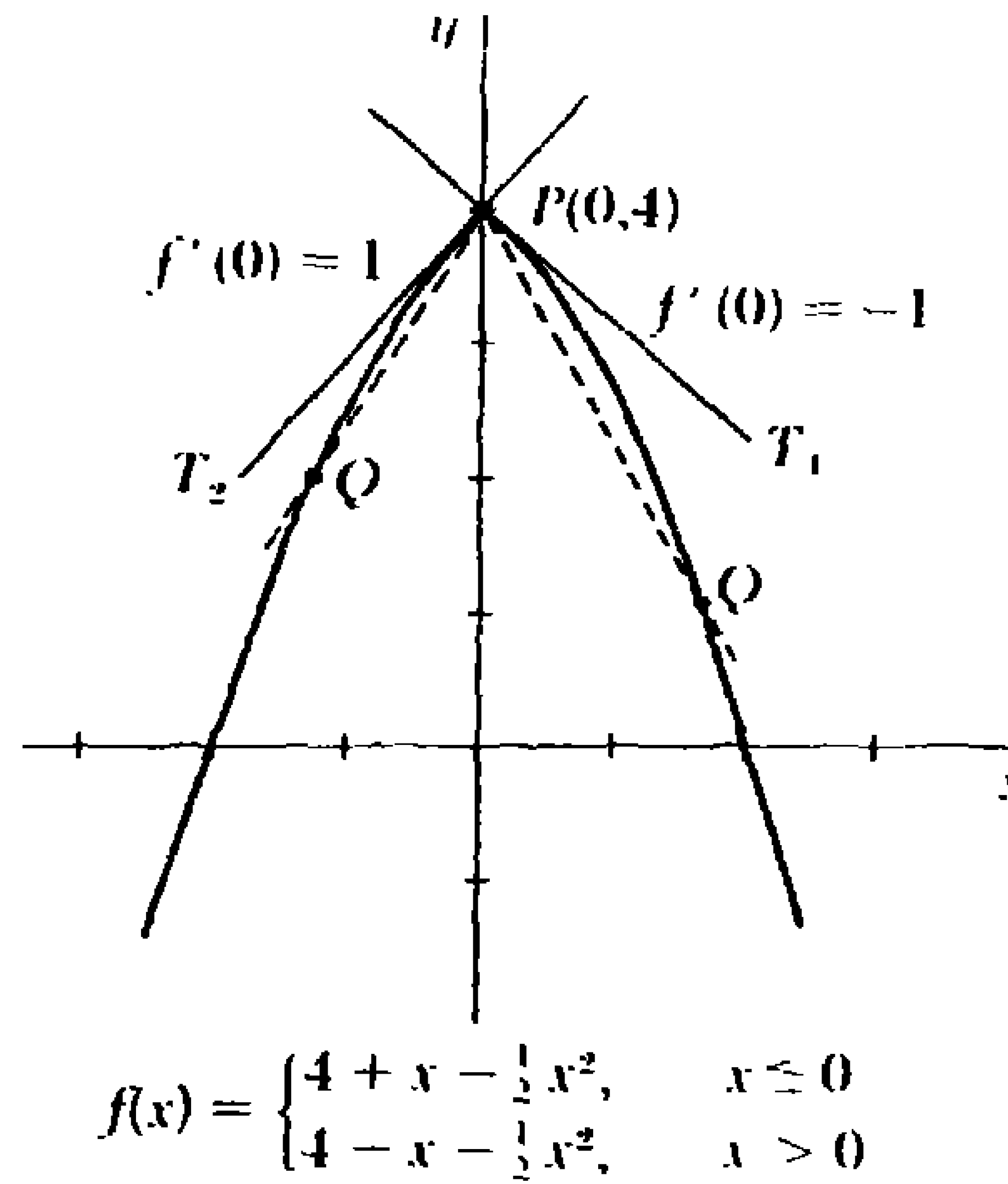
شكل ٣ - ٤
المماس عند P يعرف بأنه الخط المستقيم المار بالنقطة P وميله $f'(x)$

المماس عند P (شكل ٣ - ١) بأنه ذلك الخط الذى يقترب اليه الخط المار بـ P , Q عندما تقترب Q من P . لبعض الأغراض هذا يكون كافيا ، لكن لأجل غرضنا ليس كذلك ، لأننا حينئذ يجب أن نبرهن أن ميل المماس هو نهاية ميل الوتر الواصل بين Q و P ، وهذا ليس ممكنا بدون دراسة لفروض الهندسة التحليلية أكثر تفصيلا عما يمكن الالتزام به هنا . ليس لمجرد السبب أن الوتر ، الذى هو مفهوم هندسى ، يكون قريبا من المماس يكون ميل الوتر ، الذى هو عدد ، قريبا من ميل المماس . حل مقنع ، وان كان مصطنعا ، هو تعريف المماس عند $P(x, f(x))$ بأنه الخط المستقيم المار بالنقطة P وميله $f'(x)$ (شكل ٣ - ٤) . على الأقل نشعر بداهة أن هذا التعريف يعطى الخط الصحيح ، وأن له ميزة الوضوح والبساطة .

٣ - ٢ تعريف . المماس للمنحنى $y = (x)$ عند النقطة $P(x, f(x))$ هو الخط المستقيم المار بالنقطة P وميله $f'(x)$. باستثناء المماس الرأسى ، الذى سيدرس فى البند ٤ - ٨ ، لايوجد مماس عند P اذا كانت $f'(x)$ غير موجودة .

بما أن المشتقة هى مقياس لانحدار الشكل البيانى للدالة $y = f(x)$ ، فهى تعطى التغير التقريبى فى الاحداثى y لنقطة على المنحنى لكل وحدة تغير فى الاحداثى x عندما تتحرك النقطة مسافة صغيرة على المنحنى . التغير فى الاحداثى y بالنسبة الى التغير فى الاحداثى x يكون أكبر عندما يكون المنحنى أشد انحدارا ويكون أقل عندما يكون المنحنى أقل انحدارا . لهذا السبب يقال أن المشتقة مقياس لمعدل تغير y بالنسبة الى x .

الشكل البيانى للدالة f فى مثال ٥ مخطط فى شكل ٣ - ٥ . توجد نقطه حادة عند $P(0,4)$ ، حيث f ليس لها مشتقة . عندما تقترب Q من P على النصف الأيمن للمنحنى ، الخط المستقيم PQ يقترب من الخط T_1 ، الذى ميله -1 . عندما تقترب Q من P على النصف الأيسر للمنحنى ،



شكل ٣ ـ ٥

يوجد مماس أيمن ومماس أيسر عند النقطة P لكن لا يوجد مماس هناك

الخط PQ يقترب من الخط T_2 ، الذى ميله 1 . نسمى T_1, T_2 المماس الأيمن والمماس الأيسر عند P ، لكن لأن $f'(0)$ غير موجودة ، فلا يوجد مماس عند P حسب التعريف . مفهوم مرتبط لكن الأكثر أهمية هو مفهوم المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى عند عدد . التعريف يشبه تعريف المشتقة لكن بنهايات من جانب واحد .

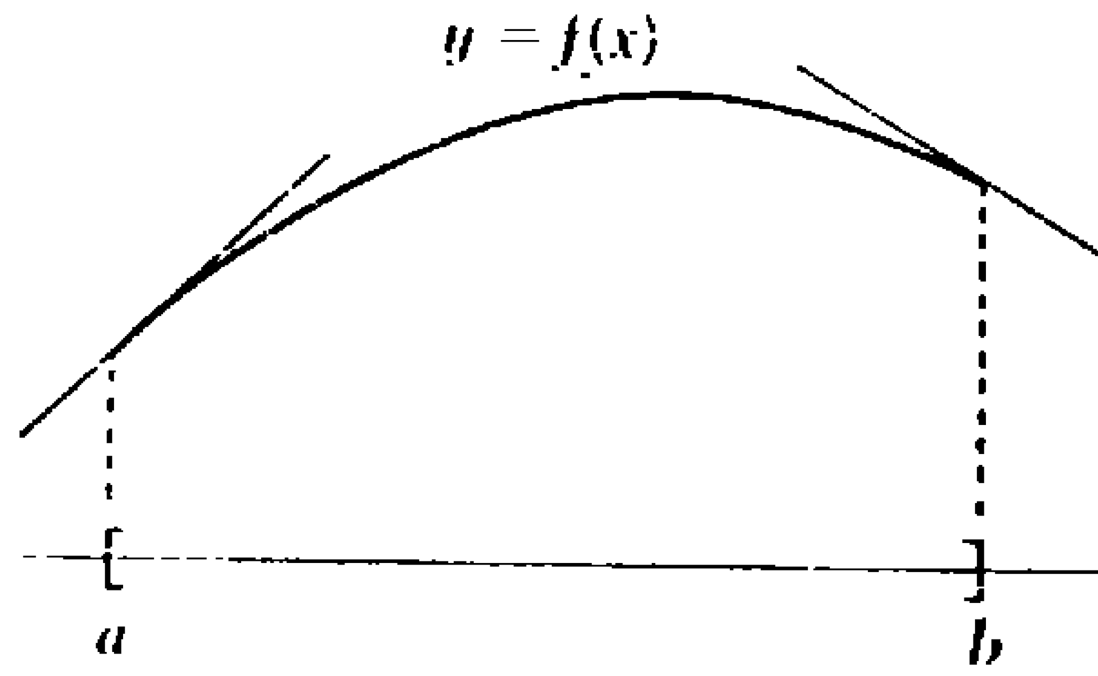
٣ ـ ٣ تعريف . لتكن f دالة ، a عددا . المشتقة اليمنى للدالة عند a هى العدد

$$f'_+(a) = \lim_{u \to a^+} \frac{f(u) - f(a)}{u - a},$$

بشرط وجود هذه النهاية اليمنى . المشتقة اليسرى $f'_-(a)$ تعرف بالمثل .

يجب أن يكون واضحا أن الدالة لها مشتقة عند عدد a إذا وإذا فقط كان لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى هناك وكانت هاتان النهايتان متساويتين . الدالة f فى مثال ٥ (شكل ٣ ـ ٥) لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند 0 وهما $f'_-(0) = 1$ و $f'_+(0) = -1$ ، لكن ليس لها مشتقة هناك .

مفهوم النهاية يستلزم أن تكون الدالة معرفة على كلا الجانبين لعدد لكى ما يكون لها مشتقة هناك . تبعا لذلك ، الدالة لايمكن أن يكون لها مشتقة عند نقطة طرفية لنطاق تعريفها . لكن ، مع ذلك ، قد يكون لها مشتقة يمنى عند النقطة الطرفية اليسرى للنطاق ومشتقة يسرى عند النقطة الطرفية اليمنى (شكل ٣ ـ ٦) .



شكل ٣-٦
الدالة معرفة فى $[a, b]$ ولها مشتقة يمنى عند a ومشتقة يسرى عند b .

الدالة لها مشتقة (أو تكون قابلة للتفاضل أو مشتقتها موجودة) فى فترة مفتوحة إذا كان لها مشتقة عند كل نقطة بالفترة . الدالة لها مشتقة (أو تكون قابلة للتفاضل أو مشتقتها موجودة) فى فترة مغلقة إذا كان لها مشتقة عند كل نقطة داخل الفترة ولها مشتقة يمنى عند النقطة الطرفية اليسرى ومشتقة يسرى عند النقطة الطرفية اليمنى .

الدالة فى مثال ٥ (شكل ٣ - ٥) قابلة للتفاضل فى الفترتين $[0,2]$ و $(1,3)$. لكنها غير قابلة للتفاضل فى الفترة $(-1,2)$.

العمودى للمنحنى عند نقطة P على المنحنى هو الخط المستقيم المار بالنقطة P وعمودى على المماس عند P. بالاستعانة بالمشتقة يكون من السهل إيجاد معادلات المماسات والأعمدة .

مثال ٦ . أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $(3,9)$.

إذا كتبنا $f(x) = x^2$ ، فمن مثال ٢ يكون $f'(x) = 2x$ ، ويكون ميل المماس عند $(3,9)$ هو $f'(3) = 6$. من ثم ، بصيغة النقطة والميل معادلة المماس هى :
$y - 9 = 6(x - 3)$ أى $6x - y - 9 = 0$ العمودى ميله $-\frac{1}{6}$.
معادلته هى $y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3)$ أى $x + 6y - 57 = 0$.

مثال ٧ . الخط المستقيم العام الذى ميله m معادلته هى :
$y = mx + b$. الدالة المناظرة هى $f(x) = mx + b$ حقق أن الميل $f'(x)$ للخط المستقيم عند النقطة (x,y) ، كما يعطى من تعريف المشتقة ، هو أيضا m . إذا لم يكن كذلك ، فإن تعريفنا للمماس لمنحنى يكون غير مقنع .

لدينا

$$f'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \lim_{u \to x} \frac{(mu + b) - (mx + b)}{u - x}$$

$$= \lim_{u \to x} \frac{m(u - x)}{u - x} = \lim_{u \to x} m = m,$$

فالكل صحيح .

مشتقة f عند x تعرف بأنها

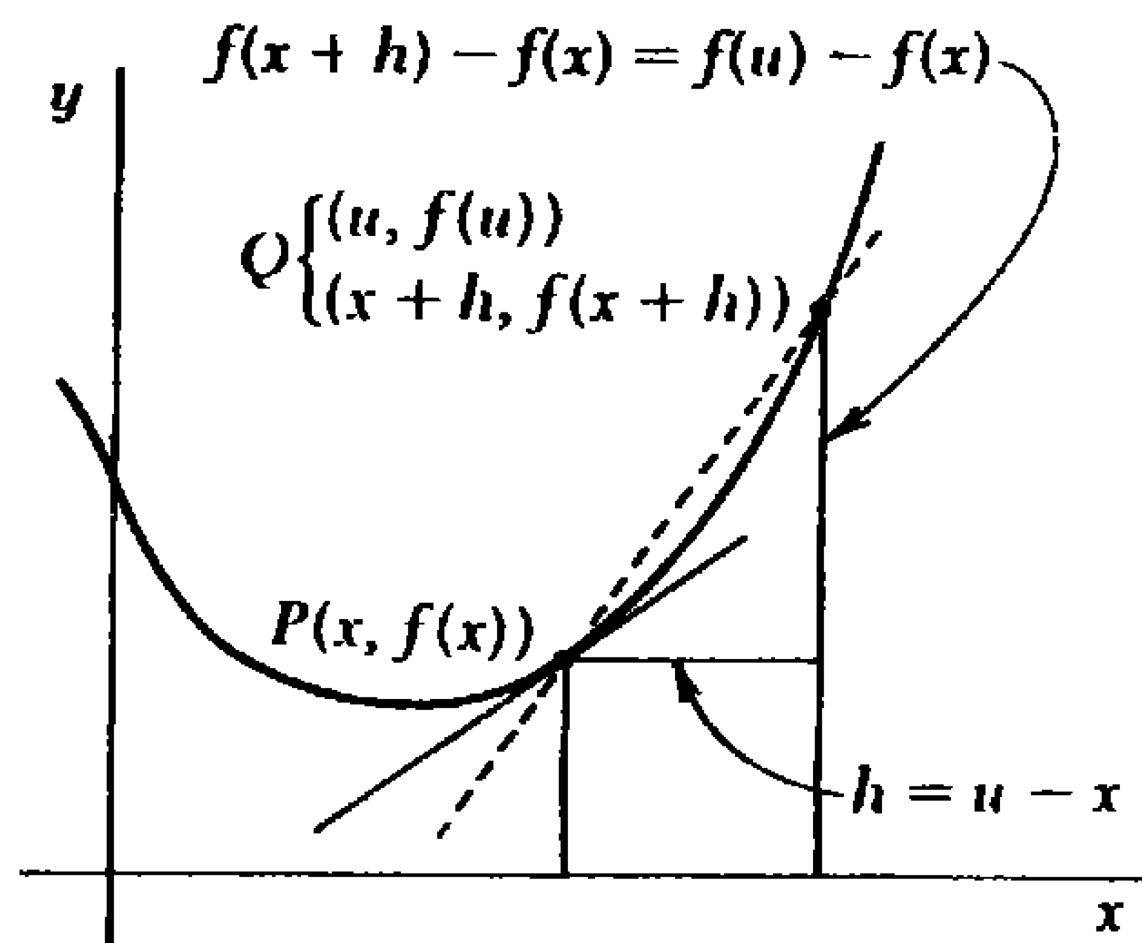
$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad (٤)$$

المقدار $[f(u) - f(x)]/(u - x)$ يسمى خارج قسمة فروق f ، وكما رأينا ، هو ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $Q(u,f(u))$ و $P(x,f(x))$. الاحداثى x للنقطة Q يمكن كتابته $x + h$ ، حيث h هى المسافة الأفقية المتجهة من P إلى Q (شكل ٣ - ٧) . الاحداثى y للنقطة Q يكون عندئذ $f(x+h)$ ، وتكون $h = u - x$. إذا كانت Q تقع على يسار P ، فان h تكون سالبة . بما أن u تكون قريبة من x إذا فقط كانت h قريبة من الصفر ، فإن تعبيرا خر للمشتقة عند x ، كثيرا مايستخدم ، هو

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \quad (٥)$$

العددان فى البسطين لخارج قسمة الفروق فى (٤) و (٥) هما نفس العدد أيضا العددان فى المقامين هما نفس العدد . فقط طريقة التعبير هى التى تختلف . فى (٤) التأكيد هو على الاحداثى السينى u للنقطة Q ، وفى (٥) هو على الفرق h بين الاحداثى السينى للنقطتين P و Q .
فى مثال ١ ، إذا استخدمنا التعبير (٥) للمشتقة عند ١ - للدالة $f(x) = x^2 + 3x - 5$ ، فإن الخطوات تكون هكذا .

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(-1 + h)^2 + 3(-1 + h) - 5] - (-7)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(h^2 + h - 7) - (-7)}{h} = \lim_{h\to 0} (h + 1) = 1. \end{aligned}$$



شكل ٣ - ٧

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

الدالة فى مثال ٥ (شكل ٣ ـ ٥) ليس لها مشتقة عند 0 رغم أنها متصلة هناك . دوال كثيرة تكون مثل هذه ، تكون متصلة عند عدد لكن ليس لها مشتقة هناك . النظرية التالية توضح أن الموقف العكسى لايحدث أبدا .

٣ ـ ٤ نظرية . إذا كانت دالة لها مشتقة عند عدد ، فهى تكون متصلة هناك .

البرهان سهل . لتكن f هى الدالة ولتكن a العدد . أكتب $f(x) - f(a)$ على الصورة

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a), \qquad x \neq a. \tag{٦}$$

بنظرية ٢ ـ ١٢ (ثالثا) عن نهاية حاصل الضرب ، يكون

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\lim_{x\to a}(x - a)\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

بما أن $f(a)$ ثابتة ، فإن $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ بتمهيدية ٢ ـ ٢١ . لكن هذا هو الشرط لكى تكون f متصلة عند a .

الشرط أن f تكون لها مشتقة عند a ، أى أن

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

تكون موجودة ، هام فى هذا البرهان . وإلالايمكننا التأكد ماإذا كانت نهاية حاصل ضرب الدالتين فى (6) هى حاصل ضرب النهايتين . حقيقة أن $\lim_{x\to a}(x - a) = 0$ ليست كافية لأنه اذ قد يحدث أن $[f(x) - f(a)]/(x-a)$ تصبح أكبر فأكبر كلما تقترب x من a .

الاتصال عند عدد يؤكد أن الشكل البيانى ليس به ثقب أو له قفزة عند النقطة المناظرة . لكن الشكل البيانى قد يكون له زاويه كما فى شكل ٣ ـ ٥ . الدالة التى شكلها البيانى له زاوية لها مشتقان يمنى ويسرى غير متساويتين هناك ولايمكن أن تكون لها مشتقة . ومن ثم إذا كانت الدالة لها مشتقة ، لايمكن ان توجد زاوية . القابلية للتفاضل عند عدد تؤكد أن المنحنى يكون منسقا بالقرب من النقطة المناظرة . فهى شرط أقوى من الاتصال .

مسائل

١ ـ اذا كانت $g(x) = 3x - 5$ ، أوجد $g(x+h)$ عند (أ) $h = \frac{1}{4}$ و $x = 4$ ، (ب) $h = -\frac{1}{4}$ و $x = 4$. أوجد $g'(x)$.

أوجد المشتقات المشار اليها للدوال الاتية :

٢ - $f(x) = x^2 + 3, f'(2), f'(-1)$ ٣ - $f(x) = -2x^2 + 5; f'(0), f'(a)$

٤ - $g(x) = x^2 + 5x + 1; g'(2), g'(x)$ ٥ - $g(x) = \frac{2}{x+1}; g'(-4), g'(c)$

٦ - $f(t) = t^2/(t-2); f'(1)$ ٧ - $F(r) = 6/r^2; F'(-2)$ حاول ايجاب $F'(0)$

٨ - (أ) $u(x) = \sqrt{x}; u'(4)$. (ارشاد : ازل الجذر من بسط خارج قسمة الفروق)
حاول ايجاد $u'_+(0)$.

استخدم التعبير (5) لايجاد المشتقات المشار اليها للدوال الاتية :

٩ - $f(x) = -10x - 3; f'(3)$ ١٠ - $f(x) = x^2; f'(x)$

١١ - $f(x) = -2x^2 - 4x + 1; f'(0), f'(x)$ ١٢ - $g(x) = x^3; g'(1), g'(x)$

١٣ - $g(t) = 1/t; g'(-3)$

أوجد المشتقات الاتية

١٤ - $D(-2x-3)$ ١٥ - $D(u^2 + \frac{1}{2})$ ١٦ - $\frac{d}{dx}(3x^2 - 3x + 2)$

١٧ - $\frac{d}{dx}\frac{1}{x-4}$ ١٨ - $D\left(at + \frac{b}{t}\right)$ و a و b ثابتان   ١٩ - $D\frac{5}{x^2}$

٢٠ - $D\sqrt{z+1}$ ٢١ - $\frac{d}{dt}(t^3 + t^2 - 1)$ ٢٢ - $D(x^4 + x - 2)$

٢٣ - $Dx^{1/3}$ ٢٤ - $\frac{d}{dx}x\sqrt{x}$ ٢٥ - $D_x(2x^3 + x + z^2)$, z const.

٢٦ - لماذا لاتوجد المشتقة اليسرى للدارة $f(z) = \sqrt{z-1}$ ؟

٢٧ - خطط الشكل البيانى للمعادلة $y = x^2 - 4$. أوجد ميل المنحنى عند أى نقطة (x,y) . عند أية نقطة يكون الميل صفر؟ 3؟ و -2؟

٢٨ - الشكل البيانى للدالة $y = 4 + 3x - x^2$ هو قطع مكافىء . أوجد أجزاءه المقطوعة واستخدامها فى تخطيط الشكل البيانى . أوجد ميل المنحنى عند أية (x,y) ، واستخدمه لايجاد أعلى نقطة على المنحنى .

٢٩ - أوجد الأجزاء المقطوعة للمنحنى $y = x^3 - x$. أوجد ميل المنحنى عند أى نقطة . عند أى النقط يكون الميل صفرا ؟ استخدم هذه المعلومات لتخطيط المنحنى

٣٠ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = 1/x$ عند النقطة $(3, \frac{1}{3})$.

٣١ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = -x^2 + x + 1$ عند النقطة $(2, -1)$

٣٢ - هل الدالة g المعرفة بأنها

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

لها مشتقة يمنى عند 0 ؟ مشتقة يسرى عند 0؟ مشتقة عند 0؟ خطط الشكل البيانى للدالة g وحقق اجابتك هندسيا .

٣٣ ـ هل الدالة f المعرفة بأنها

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq 0, \\ -x^2 - 2, & x < 0, \end{cases}$$

لها مشتقة يمنى عند 0 ؟ مشتقة يسرى عند 0 ؟ مشتقة عند 0 ؟ خطط الشكل البيانى للدالة f وحقق اجابتك هندسيا . إذا كانت P هى النقطة $(0, 2)$ والنقطة $Q(u, f(u))$ على الشكل البيانى ، ما هو الخط المستقيم الذى يقترب منه الوتر PQ عندما تقترب u من الصفر من اليمين ؟ من اليسار ؟

٣٤ ـ لتكن f هى دالة حيث $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودت وتساوى b ، مثلا لكن $b \neq f(a)$. فالشكل البيانى للدالة f به ثقب عند (a , b) . لتكن P النقطة $(a , f(a))$ ولتكن $Q(u, f(u))$ نقطه على الشكل البيانى . ما هو الخط المستقيم الذى تقترب منه الوتر PQ عندما تقترب u من a ؟ هل الشكل البيانى له مماس عند P ؟

٣٥ ـ اثبت أن الدالة f المعرفة بأنها $f(x) = |x|$ ليس لها مشتقة عند 0 . هل الدالة f لها مشتقتان يمنى ويسرى هناك ؟ خطط الشكل البيانى للدالة f وحقق اجابتك هندسيا .

٣٦ ـ لتكن h هى الدالة المعربة بـ

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + [1/x]}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

حيث $[1/x]$ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى $1/x$. أوجد $h'(0)$ أو أثبت أنها لاتوجد .

٣ ـ ٢

قاعدتا القوة وحاصل الجمع

المشتقات لها تطبيقات كثيرة ، لكن قبل دراسة التطبيقات يتحتم إيجاد طرق أكثر فعالية للحصول على المشتقات عن طريق الاستخدام المباشر للتعريف . طريقتنا ستكون مشابهة لتلك التى للنهايات . معظم الدوال الشائعة يمكن اعتبارها مكونة من عدد قليل من الدوال البسيطة بتكرار اجراء عمليات جمع وضرب وتركيب . . الخ . سنوجد مشتقات الدوال الأساسية من التعريف ونضع قواعد مناظرة لنظريات النهاية لنستخدمها سويا للحصول على مشتقة الدالة الأصلية

نبدأ بدالتين بسيطتين $f(x) = k$ ، حيث k ثابت $g(x) = x$. فى مثال ٧ ببند ٣ ـ ١ قد أثبتنا أن $D(mx + b) = m$. إذا وضعنا فى هذه $m = 0$ ، $b = K$ ، فاننا نحصل على $DK = 0$. إذا وضعنا $b = 0$ و $m = 1$ فإننا نحصل على $Dx = 1$. لقد أثبتنا ما يأتى :

٣ ـ ٥ $Dk = 0$ لأى ثابت k .

٣ ـ ٦ $Dx = 1$

حيث أن الشكلين البيانيين لـ $f(x) = k$ ، $g(x) = x$ هما خطان مستقيمان ميلاهما 1 و 0 ، فهاتان النتيجتان كانتا متوقعتين .

نعتبر ثانيا دالة القوى $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب . لقد أوجدنا حالا المشتقة عند $n = 1$ ، وهى يمكن كتابتها $Dx = 1 = 1x^0$ ، وفى مثالى ٢ ، ٤ ببد ٣ ـ ١ وجدنا أن $Dx^2 = 2x$ $Dx^3 = 3x^2$ من هذه يمكننا التخمين بأن $Dx^7 = 7x^6$, $Dx^4 = 4x^3$ ويوجه عام $Dx^n = nx^{n-1}$. بالطبع ، هذا مجرد تخمين ومثل كثير من التخمينات الرياضية قد يكون خطأ . بالرغم من ذلك فهو صحيح . نؤجل الرهان الى البد القادم ، لكن نجد برهانا بديلا مجملا فى المسألة ٦٠ .

٣ ـ ٧ قاعدة القوة . $Dn^n = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب .

نتحول الان من الدوال الخاصة الى مشتقات تركيبات الدوال . الدالة $5x^3$ هى على الصورة $kf(x)$ ، حيث $f(x) = x^3$, $k = 5$. مشتقة أى دالة معبر عنها بحاصل ضرب ثابت فى دالة f يمكن ايجادها بالقاعدة الاتية :

٣ ـ ٨ . اذا كانت الدالة f لها مشتقة عند x ، فان الدالة kf لأى مقدار ثابت k يكون لها مشتقة ويكون $DKf(x) = kDf(x)$.

البرهان . لتكن $F(x) = Kf(x)$. باستخدام تعريف المشتقة ، يكون لدينا

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{kf(u) - kf(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} k\frac{f(u) - f(x)}{u - x} = k\lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$ من ٢ ـ ١٢ (ثانيا)

النهاية الأخيرة هى بالتعريف $f'(x)$ ، وهى موجودة بالفرض . وإذا $F'(x) = kf'(x)$.

يمكننا إيجاد مشتقة $5x^3$ باستخدام القاعدة ٣ ـ ٨ ثم قاعدة القوة :

$$D5x^3 = 5Dx^3$$ من ٣ ـ ٨

$$= 5(3x^2)$$ بقاعدة القوة

$$= 15x^2.$$

لتكن دالة هى حاصل جمع دالتين لهما مشتقتان عند x . هل يمكننا استخدام المشتقتين لايجاد مشتقة حاصل الجمع ، أكثر سهولة عن الاستخدام المباشر للتعريف . سنجد أننا مجرد أن نجمع المشتقتين أى أن ، مشتقة حاصل الجمع هى حاصل جمع المشتقتين .

٣ ـ ٩ قاعدة الجمع . اذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فهكذا يكون حاصل جمعهما وفرقهما ويكون

$$D[f(x) \pm g(x)] = Df(x) \pm Dg(x)$$

فمثلا ، إذا كانت $g(x) = x^5$ و $f(x)\ x^3$ ، فإن

$$D(x^3 + x^5) = Dx^3 + Dx^5 = 3x^2 + 5x^4$$

البرهان . نبرهن القاعدة لحاصل جمع دالتين . البرهان للفرق يكون مشابها . دع $F(x) = f(x) + g(x)$. . علينا أن نثبت أن $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. من تعريف المشتقة ، يكون

$$(1) \qquad F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x}$$

$$(2) \qquad = \lim_{u \to x} \frac{[f(u) + g(u)] - [f(x) + g(x)]}{u - x}$$

$$(3) \qquad = \lim_{u \to x} \left[\frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right].$$

الفرض أن $g'(x)$ و $f'(x)$ موجودتان هو مجرد طريقة أخرى للقول أن النهاية لكل حد فى (3) موجودة . إذن يمكننا استخدام نظرية ٢ ـ ١٢ (أولاً) عن نهاية حاصل الجمع لنكتب (3) على الصورة

$$(4) \qquad F'(x) = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} + \lim_{u \to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

$$= f'(x) + g'(x).$$

دعنا نحلل برهان النظرية السابقة ونبرز نقطه هامة . غرضنا هنا كان التعبير عن مشتقة F بدلالة مشتقتى g و f ، لذلك كان طبيعيا التعبير عن (1) بدلالة g و f ثم كتابة (2) فى الصورة (3) لكى ندخل خارجى قسمة الفرق $[g(u) - g(x)]/(u - x)$ و $[f(u) - f(x)]/(u - x)$ اللذين يتقدمان $g'(x)$ و $f'(x)$.

القاعدة ٣ ـ ٩ يمكن تعميمها بسهولة الى حاصل الجمع لأكثر من دالتين .

٣ ـ ١٠ .

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = Df_1(x) + Df_2(x) + \cdots + Df_n(x)$$

بفرض أن الدوال $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ لها مشتقات عند x . توجد قواعد مماثلة لخليط من حواصل الجمع والفروق .

مثال ١ . أوجد $D(x^3 - 6x^2 + 8)$.

لدينا

$$D(x^3 - 6x^2 + 8) = Dx^3 - D(6x^2) + D8 \quad \text{من ٣ ـ ٨}$$
$$= Dx^3 - 6Dx^2 + D8 \quad \text{من ٣ ـ ١٠}$$
$$= 3x^2 - 6(2x) + 0 \quad \text{من ٣ ـ ٧ مرتين ، ٣ ـ ٥}$$
$$= 3x^2 - 12x.$$

مثال ٢ أوجد $\frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7)$.

لدينا

$$\frac{d}{dt}(4t^5 + \sqrt{2}t^4 - t^3 - t + 7) = \frac{d}{dt}4t^5 + \frac{d}{dt}\sqrt{2}t^4 - \frac{d}{dt}t^3 - \frac{d}{dt}t + \frac{d}{dt}7$$
$$= 4\frac{d}{dt}t^5 + \sqrt{2}\frac{d}{dt}t^4 - \frac{d}{dt}t^3 - \frac{d}{dt}t + \frac{d}{dt}7$$
$$= 4(5t^4) + \sqrt{2}(4t^3) - 3t^2 - 1 + 0$$
$$= 20t^4 + 4\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 1.$$

مثال ٣ . أوجد $D[\frac{7}{4}(z^3 + bz^2 + c)]$.

من المعروف فى نصوص حساب التفاضل أن ، ما لم يشر إلى خلاف ذلك ، الحروف الأبجدية الأولى تكون ثوابت . واذن التعبير الذى نجرى تفاضله هنا يعتبر دالة فى z حيث c و b ثابتان . بما أن التعبير هو على الصورة ثابت مضروباً فى دالة ، نبدأ بالقاعدة ٣ ـ ٨ ونحصل على

$$D[\tfrac{7}{4}(z^3 + bz^2 + c)] = \tfrac{7}{4}D(z^3 + bz^2 + c) = \tfrac{7}{4}(3z^2 + b2z + 0)$$
$$= \tfrac{7}{4}(3z^2 + 2bz).$$

مثال ٤ . أوجد dz/dy إذا كانت $z = y^2(x^2 + 2xy^3)$ ، حيث x ثابت .

نبدأ بضرب المقدار الجبرى للتعبير عنه كحاصل جمع ، ومع تذكر أن x ثابتة ، نحصل على

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}(x^2y^2 + 2xy^5) = x^2 2y + 2x5y^4 = 2x^2y + 10xy^4$$

المشتقة التى أوجدناها تسمى أحيانا مشتقة $y^2(x^2 + 2xy^3)$ بالنسبة الى y للاشارة الى أن المقدار الجبرى يعتبر كدالة فى y . المشتقة بالنسبة الى x ، اذا كانت y ثابتة ، هى

$$\frac{d}{dx}[y^2(x^2 + 2xy^3)] = y^2\frac{d}{dx}(x^2 + 2xy^3) = y^2(2x + 2y^3)$$

مثال ٥ . أوجد $g'(x)$ إذا كانت

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x < 1, \\ -x^2 + x, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

عند $x < 1,\ g(x) = x^2 - 3x + 2,$ يمكننا استخدام القواعد لمشتقات حواصل الجمع والقوى للحصول على $g'(x) = 2x - 3$ لكل $x < 1$. عند $g(x) = -x^2 + x$ و $x > 1$. وإذن $g'(x) = -2x + 1$ لكل $x > 1$. لاتوجد صيغة مفردة لوصف g داخل أي جوار للواحد الصحيح . لذلك لايمكننا استخدام القواعد لايجاد $g'(1)$ ، ويجب أن نلجأ الى تعريف المشتقة ، ويكون

$$g'_-(1) = \lim_{u \to 1^-} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \to 1^-} \frac{(u^2 - 3u + 2) - 0}{u - 1}$$
$$= \lim_{u \to 1^-} (u - 2) = -1$$

و

$$g'_+(1) = \lim_{u \to 1^+} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \to 1^+} \frac{(-u^2 + u) - 0}{u - 1}$$
$$= \lim_{u \to 1^+} (-u) = -1.$$

وحيث أن $g'_-(1) = g'_+(1)$ ، فتعرف أن $g'(1)$ موجودة وتساوي -1

مسائل

أوجد مشتقات الدوال الآتية :

١ - $5x - 1$ ٢ - $ax + b$ ٣ - z^6 ٤ - $3t^2 - 3t + 2$

٥ - $\sqrt{3}x^4 + 5x^2 - 2x - 11$ ٦ - $4u^6 - 3u^5 + u^3 - 2u^2 - 6u - 1$

٧ - $3(6z^7 + 4z^5 + 6)$ ٨ - $-(y^3 - \sqrt[5]{2}y + y^2) + 8y^2$

٩ - $\frac{a}{2}(x^8 - x)$ ١٠ - $bu^5 - 5au^3$

١١ - $\frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^3}{3} - t + 10$ ١٢ - $k(y^2 - a^2)$, ثابت k

١٣ - $m(y^2 + by + c)$, ثابت m ١٤ - $\frac{6x^3 - \sqrt{2}x^2 + 4x}{7}$

١٥ - $t^5(-t^{12} + 2t^3)$ ١٦ - $(2x - 1)(3x + 5)$

١٧ - $(x^2 + 1)^2 - x + 1$ ١٨ - $(x^6 - 5x) + x^2(x + 3) + \frac{1}{2}.$

١٩ - $3t^2(2 + t^3)^2$ ٢٠ - $\frac{2x^2(x + 1)}{3}$

٢١ - $b(z^2 - 1)^3$ ٢٢ - $\frac{x^4 - x^2 - 6x^5}{x^2}$

٢٣ - $a\,x^n + b\,x^m$ ، حيث m و n عددان صحيحان موجبان .

٢٤ - (أ) إذا كانت $V = \pi r(h^2 - r^2)$ ، حيث r ثابت ، فأوجد $D_h\,V$. (ب) إذا كانت $V = \pi r(h^2 - r^2)$ حيث h ثابت ، فاوجد $D_r\,V$.

٢٥ - أوجد $du / d\alpha$ إذا كانت $u = (x + 2\alpha)^2 - y + \alpha$ حيث y و x ثابتان .

٢٦ - إذا كانت $f(x) = 4x^4 - x^2 + x$ فأوجد $f'(-1), f'(0), f'(a), f'(x - y)$

٢٧ - إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x + 4$ فأوجد $f'(1), f'(0), f'(t), f'(1 - t^2)$ لأى قيم لـ x تكون $f'(x)$ تساوى 2 .

٢٨ - إذا كانت ، فأوجد $g'(2)$ و $g(2)$. لأى قيم ل t تكون $g'(t)$ تساوى صفرا .

٢٩ - أوجد dy / dx عندما $x = -3$ اذا كانت $y = (x^2 - x)^3$.

٣٠ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى $y = x^2$ عند النقط $(0,0)$ و $(-1, -1)$ و $(2,8)$

٣١ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافىء $y = \frac{1}{2}(3 - x^2)$ عند y $(-2, -\frac{1}{2})$.

٣٢ - أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ عند النقصة التى احداثيها x هو 2 .

٣٣ - أوجد معادلة العمودى للقطع المكافىء $y = 2x^2 - 8x + 5$ عند النقطة حيث الميل يساوى 4 .

٣٤ - أوجد معادلات المماسات للمنحنى $y = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ عند نقط تقاطعه مع محور x .

٣٥ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^2 + 2x - 3$ عند النقطة $(-2, -3)$. عند أى نقطة يكون المماس أفقياً . ؟ أوجد نقط تقاطع المنحنى مع المحورين وخطط المنحنى دون توقيع نقط اضافية .

٣٦ - عند أى نقطة على المنحنى $y = x^2 - 3x - 3$ يكون المماس عموديا على الخط المستقيم $x + 2y + 1 = 0$ ؟

٣٧ - خطط القطعين المكافئين $y = x^2, x^2 + 3y = 3$ وأوجد نقط تقاطعهما . أثبت أن القطعين المكافئين يتقاطعان على التعامد . أى أن ، المماسين عند كل نقطة تقاطع يكونان متعامدين .

٣٨ - أثبت عن طريق الميل أن الأحداثى x لرأس القطع المكافىء $y = a\,x^2 + b\,x + c$ هو $-b / 2a$.

٣٩ - إذا كانت $y = x^2 - 2x - 8$ ، فلأى قيم لـ x تكون dy / dx موجبة ؟ سالبة ؟ اذا كانت $dy / dx > 0$ عند x ما ، ما الذى يمكنك استنتاجه عن اتجاه المنحنى عند النقطة المناظرة ؟ استخدم المعلومات عن ايجابية وسلبية المشتقة لتساعد فى تخطيط المنحنى .

٤٠ - اذا كانت $y = x^2(6 - x)$ ، لأى قيمة لـ x تكون dy / dx موجبة ؟ سالبة ؟ استخدم هذه المعلومات لتساعد فى تخطيط المنحنى .

٤١ - إذا كانت $h(x) = f(x) - m(m-a) - f(a)$ ، حيث a, m ثابتان وحيث f دالة قابلة للتفاضل ، فأوجد $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$.

أوجد دالة مشتقتها هى :

٤٢ - $4x$ ٤٣ - $6x^2$ ٤٤ - x^2 ٤٥ - $5t + 4$

٤٦ - $2x^2 - 8x$ ٤٧ - $z^3 - z^2 + z - 1$ ٤٨ - $ax^3 + b$ ٤٩ - $(1 + y)^2$

أوجد $f'(x)$ اذا كانت :

٥٠ - $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leqslant 0 \\ -x^2 + 3, & x > 0 \end{cases}$ ٥١ - $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 3 \\ 3x - 6, & x \geqslant 3 \end{cases}$

٥٢ - أثبت أن مشتقة $|x|$ عند $x \neq 0$ هى $|x| / x$.

٥٣ - أوجد $g'(-3)$ اذا كانت $g(x) = x^2 + |x|$.   ٥٤ - أوجد $D|x^2 - 9|$

٥٥ - أين تفشل دالة أكبر الأعداد الصحيحة فى أن يكون لها مشتقة ؟ ما قيمة المشتقة عند الاعداد الأخرى ؟

٥٦ - أثبت أن $D[-f(x)] = -Df(x)$

٥٧ - عمم قاعدة حاصل الجمع ٣ - ٩ لحاصل جمع ثلاثة حدود باثبات أن

$$D[f(x) + g(x) + h(x)] = Df(x) + Dg(x) + Dh(x)$$

[إرشاد : يمكن برهان النتيجة إما مباشرة باستخدام تعريف المشتقة واتباع الخطوات كما فعلنا فى برهان القاعدة ٣ - ٩ وإما بالتعبير عن $f(x) + g(x) + h(x)$ كحاصل جمع دالتين واستخدام ٣ - ٩] .

٥٨ - (أ) اعط برهانا لـ $D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$ مشابها لبرهان قاعدة حاصل الجمع ٣ - ٩ ، المعطى فى الكتاب . (ب) أثبت أن $D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$ بكتابة $-g(x)$ على الصورة $(-1)\,g(x)$. لاحظ جيدا أى صيغ للمشتقات تستخدم فى البرهان .

٥٩ - أثبت مباشرة من تعريف المشتقة أن (أ) $k, Dk = 0$ ثابت . (ب) $Dx = 1$.

٦٠ - أثبت قاعدة القوة ٣ - ٧ مباشرة من تعريف المشتقة ، بايجاد قيمة

$$\lim_{u \to x} [(u^n - x^n)/(u - x)]$$

[ارشاد : حلل البسط ؛ انظر 2 ، ببند ٣ - ٥]

٦١ - أثبت أن كثيرة الحدود قابلة للتفاضل فى أى مكان .

٣ - ٣
قاعدتا حاصل الضرب وخارج القسمة

نفرض أن دالة هى حاصل ضرب دالتين g و f لهما مشتقتان عند x . نبحث عن طريقة للتعبير عن مشتقة حاصل الضرب fg بدلالة مشتقتى g و f مناظرة للصيغة لمشتقة حاصل جمع دالتين . مسترشدين بصيغة المشتقة لحاصل الجمع والنظرية عن النهاية لحاصل الضرب ، قد نخمن أن

$D[f(x)g(x)] = Df(x)\,Dg(x)$. من السهل أن نختبر هذا للدالتين $g(x) = x^3$ و $f(x) = x^2$
لدينا $Dx^3 = 3x^2$ و $Dx^2 = 2x$ ، $Dx^5 = 5x^4$ ، ففي هذه الحالة :
$D[f(x)g(x)] = Df(x)\,Dg(x)$. تخميننا خطأ . دعنا نرى ما ينبغي أن تكون مشتقة حاصل الضرب .

نفرض أن g و f لهما مشتقتان عند x . دع $F(x) = f(x)\,g(x)$ ، بالتعريف

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{f(u)g(u) - f(x)g(x)}{u - x} \qquad (١)$$

كما في برهان قاعدة حاصل الجمع ، اننا نرغب في أن نعبر عن خارج القسمة في هذا المقدار الجبرى الأخير بدلالة خارج قسمة الفروق للدالتين g و f . هناك كان واضحا تماما كيف نواصل ، لكن هنا ليس كذلك . فكرة استخدمت من قبل تمدنا بالحيلة . نطرح ونجمع $f(u)\,g(x)$ بالبسط في (١) ، فنحصل على

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u)g(u) - f(u)g(x) + f(u)g(x) - f(x)g(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{f(u)[g(u) - g(x)] + g(x)[f(u) - f(x)]}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} \left[f(u)\,\frac{g(u) - g(x)}{u - x} + g(x)\,\frac{f(u) - f(x)}{u - x}\right]$$

$$= [\lim_{u\to x} f(u)]\left[\lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right] + [\lim_{u\to x} g(x)]\left[\lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}\right] \qquad (٢)$$

$$= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) \qquad (٣)$$

نظرية ٢ ـ ١٢ عن نهايات حواصل الجمع وحواصل الضرب قد استخدمت للحصول على (٢) من الخطوة التي تعلوها . لقد بدأنا بالفعل استخدام هذه النظرية الأساسية بكثرة . المقادير في (٣) نحصل عليها كما يلي ، بما أن مشتقة الدالة f عند x موجودة فان f دالة متصلة عند x (نظرية ٣ ـ ٤) وعليه يكون $\lim_{u\to x} f(u) = f(x)$ ، الرمز $g'(x)$ هو مجرد طريقة أخرى لكتابة

$$\lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}$$

الموجودة بالفرض ، وبالمثل بالنسبة الى $f'(x)$ ، لأن $g(x)$ ثابتة ، $\lim_{u\to x} g(x) = g(x)$ باعادة كتابة (٣) يكون لدينا القاعدة الآتية لمشتقة حاصل ضرب دالتين .

٣ ـ ١١ قاعدة حاصل الضرب . إذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فان حاصل ضربهما أيضا يكون له مشتقة ويكون

$$D[f(x)g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

قاعدة حاصل الضرب نتذكرها بسهولة أكثر باعتبار مشتقة حاصل الضرب تساوى العامل الأول مضروبا فى مشتقة العامل الثانى زائدا العامل الثانى مضروبا فى مشتقة العامل الأول . دعنا نحاول مرة أخرى أن نوجد مشتقة حاصل الضرب $x^2 x^3$ ، مستخدمين هذه المرة القاعدة ٣ ـ ١١ . لدينا

$$D(x^2x^3) = x^2Dx^3 + x^3Dx^2 = x^2 3x^2 + x^3 2x = 5x^4$$

التى هى مشتقة x^5 .

مثال ١ . أوجد $D[(x^3 - 3x)(x^2 + 1)]$

مع أننا يمكننا التعبير عن حاصل الضرب ككثيرة حدود ونستخدم قاعدة حاصل الجمع ، سنستخدم قاعدة حاصل الضرب ٣ ـ ١١ ، التى تعطى

$$\begin{aligned} D[(x^3 - 3x)(x^2 + 1)] &= (x^3 - 3x)D(x^2 + 1) + (x^2 + 1)D(x^3 - 3x) \\ &= (x^3 - 3x)(2x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 3) \\ &= 5x^4 - 6x^2 - 3. \end{aligned}$$

بوجه خاص ، المشتقة عند 2 هى $5(2^4) - 6(2^2) - 3 = 53$

يمكننا الآن برهنة قاعدة القوة

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad \text{حيث } n \text{ عدد صحيح موجب} \qquad (٤)$$

فى بند ٣ ـ ١ برهنا (٤) عندما $n = 1$ و 2 و 3 مباشرة من تعريف المشتقة . مع أن الحالة $n = 4$ يمكن البرهنة عليها بنفس الطريقة ، الا أننا سنتبع طريقة أخرى . نكتب x^4 على الصورة x^3x . عندئذ بقاعدة حاصل الضرب ٣ ـ ١١ ، يكون

$$Dx^4 = D(x^3x) = x^3Dx + xDx^3 = x^3(1) + x(3x^2) = 4x^3$$

بالمثل يمكننا إيجاد Dx^5

$$Dx^5 = D(x^4x) = x^4Dx + xDx^4$$

ولقد أثبتنا حالا أن $Dx^4 = 4x^3$. واذن

$$Dx^5 = x^4(1) + x(4x^3) = 5x^4$$

بنفس الطريقة ، بكتابة x^6 على الصورة x^5x واستخدام الحقيقة أن $Dx^5 = 5x^4$ ، يمكننا إثبات أن $Dx^6 = 6x^5$.

بالاستمرار بهذه الكيفية ، مستخدمين كل خطوة لنبرهن الخطوة التالية ، سيبدو أننا سوف نكون قادرين على اثبات (٤) لكل n تباعا وأخيرا نصل $n = 1000, 1{,}000{,}000$ أو أى عدد

صحيح ، وهذا يدعو إلى أن (٤) تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب n . لحسم الموقف ، يجب أن نثبت أنه من الممكن دائما الاستمرار من أى قيمة لـ n إلى القيمة التالية . سنعمل هذا باثبات أنه إذا كانت (٤) صحيحة لأى قيمة لـ n ، مثلا k ، فهى صحيحة للقيمة الأكبر التالية ، $k + 1$. بمعنى آخر ، نثبت أن لكل عدد صحيح موجب k إذا كان النص

$$Dx^k = kx^{k-1} \qquad (٥)$$

صحيحا ، فان النص

$$Dx^{k+1} = (k+1)x^k \qquad (٦)$$

يكون صحيحا ، هذا ليس صعبا . فلدينا

$$Dx^{k+1} = D(x^k x) = x^k Dx + xDx^k \qquad (٧)$$

بما أننا مفترضون صحة (٥) ، فيمكننا استبدال Dx^k فى (٧) بـ kx^{k-1} ونحصل على

$$Dx^{k+1} = x^k(1) + x(kx^{k-1}) = x^k + kx^k = (k+1)x^k$$

التى هى (٦) . حيث أننا قد أثبتنا أنه من الممكن دائما أن ننتقل من مرحلة الى المرحلة التى تليها ونعلم أن (٤) صحيحة عندما $n = 5$ فإننا نعرف أنها صحيحة عندما $n = 6$. يجب عندئذ بنفس الاستدلال أن تكون صحيحة عندما $n = 7$ ، بعد ذلك عندما $n = 8$ ، وهكذا . يمكننا الآن رسميا أن ندعو إلى أن (٤) تكون صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

الاستدلال المستخدم فى هذا البرهان ربما يكون جديدا لبعض القارئين . هذا الاستدلال يسمى الاستنتاج الرياضى ، وهو طريقة هامة للبرهنة . سنناقشه مناقشة أعمق فى نهاية هذا البند .

لكى نوجد المشتقة لدالة مثل $x^2 / (2x + 1)$ نحتاج الى قاعدة لمشتقة خارج القسمة .

٣ - ١٢ قاعدة خارج القسمة . إذا كانت الدالتان g و f لهما مشتقتان عند x ، فإن خارج قسمتها f/g أيضا له مشتقة ، وذلك بفرض أن $g(x) \neq 0$ ، ويكون

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

البرهان . دع $F(x) = f(x)/g(x)$ حينئذ يكون

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(u)/g(u) - f(x)/g(x)}{u - x}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{f(u)g(x) - f(x)g(u)}{g(u)g(x)(u - x)}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{f(u)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(u)}{g(u)g(x)(u - x)}$$

$$= \lim_{u\to x} \frac{1}{g(x)} \frac{1}{g(u)} \frac{g(x)[f(u) - f(x)] - f(x)[g(u) - g(x)]}{u - x}$$

$$= \frac{1}{g(x)} \left[\lim_{u\to x} \frac{1}{g(u)}\right] \left[g(x) \lim_{u\to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} - f(x) \lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right]$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)]. \quad (٨)$$

على القارىء أن يكون قادرا على شرح كل خطوة فى هذا البرهان وبخاصة لماذا : $\lim_{u\to x} [1/g(u)] = 1/g(x)$ فى (٨) . قاعدة خارج القسمة تكون أكثر تذكرا فى الصورة « مشتقة خارج القسمة هى المقام مضروبا فى مشتقة البسط ، ناقص البسط مضروبا فى مشتقة المقام ، الكل مقسوما على مربع المقام . »

مثال ٢ . أوجد $D[x^3/(2x + 1)]$.

بقاعدة خارج القسمة ٣ ـ ١٢ يكون

$$D \frac{x^3}{2x + 1} = \frac{(2x + 1)Dx^3 - x^3D(2x + 1)}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{(2x + 1)3x^2 - x^3(2)}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{x^2(4x + 3)}{(2x + 1)^2}.$$

هذا يكون صحيحا لأى $x \neq -\frac{1}{2}$.

قاعدة خارج القسمة تمكننا من تعميم قاعدة القوة ٣ ـ ٧ إلى الأسس الصحيحة السالبة . نفرض أن $n < 0$. بقاعدة خارج القسمة ، يكون

$$Dx^n = D \frac{1}{x^{-n}} = \frac{x^{-n}D1 - 1(Dx^{-n})}{(x^{-n})^2}$$

بما أن $-n > 0$ ، يمكننا إيجاد Dx^{-n} بقاعدة القوة . ومن ثم يكون

$$Dx^n = \frac{x^{-n}(0) - 1(-nx^{-n-1})}{x^{-2n}} = nx^{-n-1}x^{2n} = nx^{n-1}$$

هذا يبرهن تعميم قاعدة القوة :

٣ - ١٣ . $Dx^n = nx^{n-1}$ لكل عدد صحيح n .

فمثلا $Dx^{-3} = -3x^{-4} = -3/x^4$

مثال ٣ . أوجد $D[(x^4 - 6x^2 - 7x + 5)/x^2]$

لدينا

$$D\,\frac{x^4 - 6x^2 - 7x + 5}{x^2} = D\left(x^2 - 6 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$$

$$= Dx^2 - D6 - 7Dx^{-1} + 5Dx^{-2}$$

$$= 2x + 7x^{-2} - 10x^{-3}$$

$$= 2x + \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3}$$

$$= \frac{2x^4 + 7x - 10}{x^3}.$$

يمكن أيضا إيجاد المشتقة بقاعدة خارج القسمة:*

مثال ٤ . أوجد أصفار $f'(x)$ ، حيث $f(x) = 4/(x-1) + x$

سنوجد قيم x حيث $f'(x) = 0$. بما أن f يعبر عنها كحاصل جمع ، نوجد مشتقتها بأن نستخدم أولا قاعدة حاصل الجمع ثم قاعدة خارج القسمة مطبقة على الحد الأول :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x-1} + x\right) = \frac{d}{dx}\,\frac{4}{x-1} + \frac{d}{dx}\,x$$

$$= \frac{(x-1)(0) - 4(1)}{(x-1)^2} + 1 = \frac{-4}{(x-1)^2} + 1.$$

---

* ليس ضروريا بل ليس دائما من المرغوب فيه أن نعبر عن إجابات تحتوى على أسس سالبة ، فى صورة تكون فيها الأسس موجبة . فى مثال ٣ أى من المقادير الجبرية الثلاثة الأخيرة يكون مقبولا لأن يكون الجواب .

لايجاد أين $f'(x) = 0$ ، نعبر أولا عن $f'(x)$ ككسر فيه البسط محللا الى عوامله .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

بما أن الكسر يكون صفرا فقط اذا كان بسطه صفرا فان $f'(x) = 0$ اذا كانت $x = 3$ أو -1 — وليس لقيم أخرى .

لقد أثبتنا قاعدة القوة لاجراء التفاضل بطريقة الاستنتاج الرياضى . نختتم هذا البند بتوضيحين آخرين لاستخدام الاستنتاج .

مثال ٥ . أثبت أن حاصل جمع الاعداد الصحيحة الموجبة الأولى التى عددها n هو $n(n+1)/2$ علينا أن نثبت أن

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (٩)$$

لأى عدد صحيح $n \geqslant 1$. عندما $n = 1$ ، المعادلة (٩) تختزل الى

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

لذلك فهى صحيحة فى هذه الحالة . سنوضح الآن أنه اذا كانت (٩) صحيحة لأى عدد صحيح موجب n ، فهى أيضا صحيحة للعدد الصحيح الأكبر التالى . لذلك نفرض أن (٩) تكون صحيحة عندما $n = k$ ، أى أن ،

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (١٠)$$

تكون صحيحة . سنثبت أن (٩) تكون عندئذ صحيحة عندما $n = k + 1$ ، أى أن ،

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

تكون صحيحة . لدينا

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{by (10)} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

لقد أثبتنا أنه إذا كانت (٩) صحيحة لأى عدد صحيح موجب n ، فهى صحيحة للعدد الصحيح الاكبر التالى . لكن نعلم أن (٩) صحيحة عندما $n = 1$. لذلك هى صحيحة عندما $n = 2$. بما أن (٩) تكون صحيحة عند $n = 2$ ، فهى صحيحة عند $n = 3$. بتطبيق الاستدلال مرة أخرى ، هى صحيحة عندما $n = 4$ ، وهكذا . وإذن (٩) صحيحة لكل عدد صحيح موجب n .

مثال ٦ . باستخدام القاعدة ٣ ـ ٩ لمشتقة حاصل جمع دالتين ، أثبت تعميمها إلى القاعدة ٣ ـ ١٠ لمشتقة حاصل جمع n من الدوال .

علينا أن نثبت أن لأى عدد صحيح $n \geqslant 2$ ، يكون

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)] = Df_1(x) + Df_2(x) + \cdots + Df_n(x). \qquad (١١)$$

إذا كانت $n = 2$ ، فإن (١١) تختزل الى

$$D[f_1(x) + f_2(x)] = Df_1(x) + Df_2(x)$$

التى هى صحيحة بالقاعدة ٣ ـ ٩ . سنثبت الآن انه إذا كانت (١١) صحيحة لأى عدد صحيح موجب n ، فهى صحيحة للعدد الصحيح الأكبر التالى . لذلك نفرض أن (١١) تكون صحيحة عندما $n = k$. سنثبت أنها تكون صحيحة عندما $n = k + 1$. لدينا

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) + f_{k+1}(x)] = D[\{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)\} + f_{k+1}(x)]. \qquad (١٢)$$

الطرف الأيمن لهذه المعادلة هو مشتقة حاصل جمع دالتين وإذن بالقاعدة ٣ ـ ٩ يساوى

$$D\{f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)\} + Df_{k+1}(x) \qquad (١٣)$$

حيث أننا افترضنا أن (١١) تكون صحيحة عند $n = k$ ، فان (١٣) تساوى

$$\{Df_1(x) + Df_2(x) + \cdots + Df_k(x)\} + Df_{k+1}(x)$$

بتعويض ذلك فى الطرف الأيمن من (١٢) ، يكون لدينا

$$D[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x) + f_{k+1}(x)] = Df_1(x) + Df_2(x) + \cdots + Df_k(x) + Df_{k+1}(x)$$

ونكون قد أثبتنا أن (١١) تكون صحيحة عند $n = k + 1$ عندما تكون صحيحة عند $n = k$. بما أننا نعلم أن (١١) تكون صحيحة عند $n = 2$ ، فهى لذلك صحيحة عند $n = 3$. بالمثل ، هى صحيحة عند $n = 4$ و $n = 5$ وهكذا . وإذن (١١) تكون صحيحة لكل الاعداد الصحيحة $n \geqslant 2$.

مسائل

أوجد المشتقة للآتى بطريقتين ، أولا بقاعدة حاصل الضرب ثم بالتعبير عن حاصل الضرب كحاصل جمع واستخدام قاعدة حاصل الجمع

١ - $3x(x-2)$

٢ - $x^2(1-4x)$

٣ - $(2s+1)(3s^2-1)$

٤ - $(u^2+3u+1)(u^2-3u+1)$

أوجد المشتقة لما يأتى بقاعدة حاصل الضرب :

٥ - $y^3(6-3y-2y^2)$

٦ - $(5x^2-4)(5x^2+4)$

٧ - $(t^4-1)^2$

٨ - $(x^2-d^2)(x^2+d^2)$

٩ - $(\pi t^2+2)(t^3\sqrt{2}-2)$

١٠ - $6(x+b)(x^2-ax-6)$

١١ - $\pi(b/a)r^2(a-r)$

١٢ - $(4r^2-2r)(r^3-\frac{1}{2}r^2-r+\sqrt{10})$

١٣ - $4(2y^2-y-1)(y^3+y+\frac{1}{2})$

١٤ - $\frac{2}{3}x^3(x^5+1)(2x^2-3)$

١٥ - $(x^2+1)(x^2-2)(5x+7)$

١٦ - $(x^5+1)^3$

أوجد المشتقة لما يأتى وبسط النتيجة :

١٧ - $\dfrac{x+1}{x}$

١٨ - $\dfrac{a}{x+3}$

١٩ - $\dfrac{2z-5}{2z+5}$

٢٠ - $\dfrac{x^4}{x^2+1}$

٢١ - $5\left(t^3+\dfrac{1}{t^3}\right)$

٢٢ - $\dfrac{x^3+x^2+x-1}{x^2}$

٢٣ - $\dfrac{u^3}{2b-u}$

٢٤ - $\dfrac{x^2+3x}{4x+2}+6x$

٢٥ - $\dfrac{1}{x^2-3x-4}$

٢٦ - $\dfrac{1-4t}{t^2}+t^3(t+2)$

٢٧ - $(x^2+3)\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$

٢٨ - $a\dfrac{c+bx}{c-bx}$

٢٩ - $\left(2s+\dfrac{1}{s}\right)\dfrac{1-s}{s}$

٣٠ - $(ax+b)^{-1}$

٣١ - $\left(u+\dfrac{1}{u}\right)^2$

٣٢ - $y^2\dfrac{a+y}{a-y}$

٣٣ - $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-6x+9}$

٣٤ - $\dfrac{x^2+2}{x+2/x}$

٣٥ - $\dfrac{(x^2-2x)(1-x^2)}{3x+2}$

٣٦ - $\dfrac{(y+5)(3y^2-y-1)}{4-y^2}$

٣٧ - $\dfrac{2z}{(z^2-3)(z^3-6)}$

٣٨ - $\dfrac{3/y+1}{1/y-3}$

٣٩ - $\dfrac{1-v^{-3}}{1+v^{-3}}$

٤٠ - $(5x^2+2)\dfrac{1-\frac{1}{2}x}{1+\frac{1}{2}x}$

أوجد أصفار المشتقة لما يأتى :

٤١ - $(x^2+4)(x-4)$ ٤٢ - z^2+z^{-2} ٤٣ - $y+\frac{6}{y}$

٤٤ - $\frac{x+1}{x-2}$ ٤٥ - $\frac{x+b}{dx^2}, b \neq 0$ ٤٦ - $\frac{1}{1+u^2}$

٤٧ - $\frac{ax}{a^2+x^2}, a \neq 0$ ٤٨ - $A(r)=\frac{2b}{r}+2\pi r^2$ ٤٩ - $\frac{c^2-x^2}{c^2+x^2}, c \neq 0$

٥٠ $V(h)=\pi\left(r^2h-\frac{h^3}{4}\right)$, r const

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى y وأوجد dy / dx :

٥١ - $x^2-xy=3$ ٥٢ - $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$ ٥٣ - $x^2=\frac{x+y}{x-y}$

٥٤ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = 7 / (3x^2 + 2)$ عند النقطة $(-1, 7/5)$

٥٥ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (x^2 - a^2) / (x^2 + a^2)$ $a \neq 0$ عند النقطة $(a,0)$. عند أية نقطة يكون المماس أفقيا ؟ .

٥٦ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (x - 2) / x^2$ الذى يكون عموديا على الخط المستقيم $2x + 6y + 5 = 0$.

٥٧ - هل الدالة الكسرية قابلة للتفاضل فى كل مكان ، اذا لم تكن ، عند أى أعداد تكون قابلة للتفاضل ؟

٥٨ - اتبع الخطوات فى برهان قاعدة القوة المعممة ٣ - ١٣ للدالة الخاصة x^{-5} .

٥٩ - لماذا تكون $[1/g(u)] = 1/g(x)$ فى المعادلة (٨) فى برهان قاعدة خارج القسمة .

٦٠ - استنتج الصيغة $Dkf(x) = kDf(x)$ ، حيث k ثابت ، من قاعدة مشتقة حاصل ضرب دالتين .

٦١ - أثبت أن $D\frac{f(x)}{k}=\frac{Df(x)}{k}$ ، حيث k ثابت .

٦٢ - أثبت قاعدة حاصل الضرب ٣ - ١١ مستخدما الصورة البديلة للمشتقة المعطاة فى (٥) ، بند ٣ - ١ .

٦٣ - استنتج قاعدة مشابهة لقاعدة ٣ - ١١ لمشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال . (ارشاد : اكتب حاصل الضرب كحاصل ضرب دالتين) . حقق قاعدتك باستخدامها لايجاد مشتقة $x^2 (2x^3 + 1) (4x + 3)$.

٦٤ - أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لكل عدد صحيح موجب n يكون

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

٦٥ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى الصيغة لحاصل جمع متوالية هندسية

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

حيث n عدد صحيح موجب ، $r \neq 1$.

٦٦ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لأى عدد صحيح موجب n يكون

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

٦٧ ـ لتكن S_n حاصل جمع الأعداد الصحيحة الفردية الأولى التى عددها n . أى أن : $S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ باعتبار بعض القيم الأولى لـ n خمن صيغة لـ S_n .
أثبت الآن تخمينك بالاستنتاج الرياضى .

٦٨ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى أن $5^{2n} - 1$ تقبل القسمة على 24 لكل الأعداد الصحيحة الموجبة n
(ارشاد : إذا كانت تقبل القسمة على 24 ، فإنه يوجد عدد صحيح a بحيث أن : $(5^{2n} - 1 = 24a)$.

٦٩ ـ استخدم الاستنتاج الرياضى لتعميم نظرية ٢ ـ ١٢ (أولاً) عن نهاية حاصل جمع دالتين إلى النهاية لحاصل جمع n من الدوال .

٧٠ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى أن $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ ، حيث n عدد صحيح موجب . ماهى نظريات النهاية التى تحتاجها لاثبات ذلك ؟

٧١ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى أن اذا كانت $x \geqslant -1$ ، فان $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ لكل عدد صحيح n ليس سالبا .

٧٢ ـ أثبت بالاستنتاج الرياضى أن لأى عدد صحيح $n > 1$ ، يكون

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

٧٣ ـ (أ) أثبت بالاستنتاج الرياضى « مبدأ الصندوق » : إذا وضع $n + 1$ من الأشياء فى n أو أقل من الصناديق ، فعلى الأقل أحد الصناديق يجب أن يحتوى على أكثر من شىء واحد . (ب) أثبت أنه يوجد على الأقل كلبان فى العالم لهما نفس العدد من الشعر . (إرشاد : قدر عدد الكلاب وقدر أكبر عدد من الشعر يكون لأى كلب .)

٣ - ٤

قاعدة السلسلة

مع أننا يمكننا إيجاد مشتقة $(x^2 + 1)^7$ بفك المقدار الجبرى ، لكن المشروع ليس سارا . وأيضا لايمكننا ايجاد المشتقة بطريقة قاعدة القوة إذ أن المقدار الجبرى هو قوة الدالة فى x وليس قوة لـ x . نحتاج إلى تعميم لقاعدة القوة إلى مقدار جبرى على الصورة $g^n(x)$. سنحصل على مثل هذه القاعدة إذا ما اعتبرنا $g^n(x)$ كدالة تركيبية لدوال ، لكن نحتاج أولا إلى قاعدة مشابهة لقاعدتى حاصل الجمع وحاصل الضرب تمكننا من إيجاد مشتقة الدالة التركيبية $f(g(x))$ لدالتين بدلالة مشتقتى g و f .

٣ - ١٤ قاعدة السلسلة . دع $F(x) = f(g(x))$ وضع $z = g(x)$ إذا كانت g لها مشتقة عند x وكانت f لها مشتقة عند z ، فان F يكون لها مشتقة عند x ويكون

$$F'(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

الدليل x يظهر فى رمز المشتقة D_x ليذكرنا بأن $f(g(x))$ هى دالة فى x .

مثال ذلك ، افرض أن $F(x) = (3x + 1)^2$. إذا وضعنا $z = g(x) = 3x + 1$ و $f(z) = z^2$ ، فإن $F'(x) = f(g(x))$ وقاعدة السلسلة تعطى $F'(x) = (2z)(3) = 6(3x + 1)$.

قاعدة السلسلة ستمكننا من تعميم كثير من قواعد التفاضل الأساسية مما يوسع كثيراً مدى تطبيقها . سنؤجل برهانها حتى نهاية هذا البند ، وندرس الآن المشتقة لـ $g^n(x)$.

٣ - ١٥ $\quad Dg^n(x) = ng^{n-1}(x)Dg(x) \quad$ حيث n عدد صحيح .

من الطبيعى يجب أن تكون g قابلة للتفاضل عند x ليكون ذلك صحيحا . لاحظ أن القاعدة ٣ - ١٥ تختزل الى قاعدة القوة عندما تكون $g(x) = x$.

البرهان . اذا وضعنا $z = g(x)$ وكتبنا $f(z) = z^n$ ، فان $g^n(x)$ يمكن اعتبارها كالدالة التركيبية لـ f بـ g

$$g^n(x) = f(g(x))$$

بما أن $f'(z) = nz^{n-1}$ ، فيكون لدينا بقاعدة السلسلة

$$Dg^n(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x)$$
$$= nz^{n-1}g'(x) = ng^{n-1}(x)g'(x)$$

مثال ١ . أوجد $D\ (x^2 + 1)^7$.

المقدار الجبرى ليفاضل هو على الصورة $g^n\ (x)$ ، حيث $n = 7$ و $g\ (x) = x^2 + 1$. بقاعدة ٣ - ١٥ ، يكون

$$D(x^2+1)^7 = 7(x^2+1)^6 D(x^2+1)$$
$$= 7(x^2+1)^6 2x = 14x(x^2+1)^6.$$

مثال ٢ . أوجد $D\ [\ 1\ /\ (x^2 - 2x\ )^3\ ]$.

بدلا من استخدام قاعدة خارج القسمة ، نكتب المقدار الجبرى ليفاضل فى الصورة : $(x^2 - 2x)^{-3}$. فيكون الآن فى الصورة $g^n\ (x)$ حيث $n = -3$ و $g\ (x) = x^2 - 2x$. باستخدام قاعدة ٣ - ١٥ ، يكون

$$D\frac{1}{(x^2-2x)^3} = D(x^2-2x)^{-3} = -3(x^2-2x)^{-4} D(x^2-2x)$$
$$= -3(x^2-2x)^{-4}(2x-2) = \frac{-6(x-1)}{(x^2-2x)^4}.$$

مثال ٣ . أوجد $D\ [\ (z^2 + 2)^3 (3z + 1)^2\ ]$

المقدار الجبرى الذى سيفاضل هو حاصل ضرب . نبدأ بصيغة حاصل الضرب ثم نستخدم قاعدة ٣ - ١٥ مرتين :

$$D[(z^2+2)^3(3z+1)^2] = (z^2+2)^3 D(3z+1)^2 + (3z+1)^2 D(z^2+2)^3$$
$$= (z^2+2)^3 2(3z+1) D(3z+1)$$
$$+ (3z+1)^2 3(z^2+2)^2 D(z^2+2)$$
$$= (z^2+2)^3 2(3z+1) 3 + (3z+1)^2 3(z^2+2)^2 2z$$
$$= 6(z^2+2)^2(3z+1)[(z^2+2) + (3z+1)z]$$
$$= 6(z^2+2)^2(3z+1)(4z^2+z+2).$$

أى من الصورة الثلاث الأخيرة تكون صحيحة ، لكن الأخيرة ، التى فيها المشتقة مكتوبة فى صورة عوامل ، تكون عادة الأكثر ملاءمة .

مثال ٤ . أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2,8)$ للمنحنى $y = [x/(x-1)]^3$

نوجد أولا المشتقة عند x :

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 D\frac{x}{x-1}$$
$$= 3\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-3x^2}{(x-1)^4}.$$

عند $x = 2$ يكون $dy / dx = -12$ فتكون معادلة المماس هى

$$y - 8 = -12(x - 2)$$

أى $12x + y - 32 = 0$

إذا كانت y تعتمد على z ، وليكن $y = f(z)$ ، وكانت z بدورها تعتمد على x, $z = g(x)$ ، فان y تكون بطريق غير مباشر دالة فى x . إذا كانت الـ z فى $f(z)$ تستبدل بـ $g(x)$ فيكون لدينا

(١) $$y = f(g(x))$$

وتكون y الآن مكتوبة مباشرة كدالة فى x . فمثلا ، إذا كانت

(٢) $$z = g(x) = 2x^2 - x + 1 \quad \text{و} \quad y = f(z) = z^3$$

فان

(٣) $$y = f(g(x)) = (2x^2 - x + 1)^3$$

يمكننا إيجاد $D_x y$ بإجراء تفاضل (١) مباشرة . فى مثالنا هذا يكون من (٣)

(٤) $$D_x y = 3(2x^2 - x + 1)^2(4x - 1)$$

بطريق آخر ، يمكن ايجاد $D_x y$ فى (١) بدون إجراء التعويض ، وذلك باستخدام قاعدة السلسلة ، ويكون

(٥) $$D_x y = f'(z)g'(x)$$

بالرموز التفاضلية هنا يأخذ الصورة المقترحة

(٦) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$$

إذا أوجدنا المشتقة فى مثالنا بهذه الصيغة ، فيكون من (٢)

(٧) $$\frac{dy}{dx} = 3z^2(4x - 1)$$

يمكن ترك الجواب فى هذه الصورة ، المحتوية على كل من x و z ، أو إذا أردنا ، فإن z يمكن استبدالها بالمقدار الجبرى $2x^2 - x + 1$ ، فنحصل ، كما سبق ، على (٤) . لايجاد قيمة dy / dx من (٧) عندما $x = 1$ ، نرى أن $z = 2$ عندما $x = 1$ ومن ثم $dy / dx = 3\ (4)\ (3) = 36$.

المعادلتان $y = f(z),\ z = g(x)$ تعرفان y بدلالة x بسلسلة من الدوال . مع أن الصورة (٦) لمشتقة y بالنسبة الى x هى الأكثر سهولة فى تذكرها ، فسواء هذه الصورة أو الصورة (٥) لاتشيران إلى قيم المتغيرات . لأى قيمة لـ x ، القيمة المناظرة لـ z محسوبة من $z = g(x)$ يجب استخدامها فى $f'(z)$ فى (٥) وفى dy / dx فى (٦) . الكتابة $F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$ للمشتقة بقاعدة السلسلة لها ميزة الاشارة الى ذلك بوضوح .

برهان قاعدة السلسلة . دع $F(x) = f(g(x))$. فيكون من تعريف المشتقة

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = \lim_{u\to x} \frac{f(g(u)) - f(g(x))}{u - x} \tag{٨}$$

$$= \lim_{u\to x} \left[\frac{f(g(u)) - f(g(x))}{g(u) - g(x)} \cdot \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right]$$

ضع $z = g(x)$ و $s = g(u)$ فى المعامل الأول ، فيكون

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \left[\frac{f(s) - f(z)}{s - z} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right] \tag{٩}$$

عندما تقترب u من x ، تقترب s من z لأن g تكون بالضرورة متصلة عند x ، وتصبح (٩)

$$F'(x) = \left[\lim_{s\to z} \frac{f(s) - f(z)}{s - z}\right]\left[\lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right] = f'(z)g'(x)$$

هذا البرهان صحيح لمعظم الدوال g ، لكن بسبب الكمية $s - z$ التى فى المقام ، فان هذا البرهان ينهار كلما حدث أن كانت s تساوى z ، المتغير u يكون مباشرة تحت تحكمنا ويمكن الاحتفاظ به بعيدا عن x ، لكن s ليست كذلك و g قد تكون دالة حيث $g(u) = g(x)$ حتى ولو أن $u \neq x$. نعطى برهانا آخر يتجنب هذه الصعوبة .

كون من f دالة جديدة h كما يأتى (t هى المتغير المستقل ، z هى ثابت) . عرف

$$h(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z} \quad \text{إذا كانت} \quad t \neq z \quad \text{و} \quad h(z) = f'(z) . \tag{١٠}$$

فيكون

$$f(t) - f(z) = h(t)(t - z) \tag{١١}$$

لكل t . هنا ينتج من (١٠) إذا كانت $t \neq z$ ويكون صحيحا إذا كانت $t = z$ لأن كلا من طرفى (١١) يكون عندئذ صفرا . فى (١١) استبدل t بـ $g(u)$ واستبدل z بـ $g(x)$ ، فتحصل على

$$f(g(u)) - f(g(x)) = h(g(u))[g(u) - g(x)]$$

إذا عوضنا الطرف الأيمن لهذه المعادلة عن بسط الكسر الأخير فى (٨) ، فانه يكون

$$F'(x) = \lim_{u\to x} \frac{h(g(u))[g(u) - g(x)]}{u - x} \tag{١٢}$$

$$= [\lim_{u\to x} h(g(u))]\left[\lim_{u\to x} \frac{g(u) - g(x)}{u - x}\right]$$

الدالة h كونت بحيث تكون متصلة عند z . هذا ينتج بسبب أن

$$\lim_{t\to z} h(t) = \lim_{t\to z} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} = f'(z) = h(z)$$

أيضا $\lim_{u\to x} g(u) = g(x)$ (لماذا ؟) . وإذن من نظرية ٢ ـ ١٥ يكون

$$\lim_{u\to x} h(g(u)) = h(\lim_{u\to x} g(u)) = h(g(x)) = h(z) = f'(z)$$

وتصبح (١٢) ، $F'(x) = f'(z)\, g'(x)$ ، وهذا يكمل البرهان

مسائل

أوجد المشتقة لما يأتى وبسط النتيجة :

١ ـ $(x^2+3)^5$

٢ ـ $(x^3-3x)^4$

٣ ـ $(3x^2+5)^{17} - \frac{2}{3}x^2$

٤ ـ $(1+u^2)^{-2}$

٥ ـ $\frac{1}{x^2-3x-4}$

٦ ـ $\left(u+\frac{1}{u}\right)^2$

٧ ـ $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^3$

٨ ـ $(x+1)^3(6x-2)^4$

٩ ـ $(3-5x-x^2)^3(2+x+4x^2)^2$

١٠ ـ $(ax+b)^{-1}$

١١ ـ $\frac{1}{(3-x^2)^3}$

١٢ ـ $[(2x+1)(x^2-3x)]^2$

١٣ ـ $\left(y-\frac{1}{y}\right)^2 - y^2 - y^{-2}$

١٤ ـ $(t^2-1)\left(t-\frac{1}{t}\right)$

١٥ ـ $u^2(u-1)^{-4}$

١٦ ـ $(6y+1)^4(y-7)^{-5}$

١٧ ـ $(2x-1)^8(x^2+5x) + 17x$

١٨ ـ $(3x-1)^2(x+2) + (3x-1)(x+2)^2$

١٩ ـ $\frac{(1-x)^3}{2-3x}$

٢٠ ـ $\frac{a(2z-1)}{(4z+1)^2}$

٢١ ـ $\left(\frac{v+2}{v-2}\right)^2$

٢٢ ـ $\left(\frac{1-8x}{1+8x}\right)^4$

٢٣ ـ $\left(\frac{z}{a^2-z^2}\right)^{-3}$

٢٤ ـ $\left(\frac{a}{b+cx}\right)^n$، n عدد صحيح

٢٥ ـ $(x-2)^3(x+5)^4(x+1)^2$

٢٦ ـ أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = (1+2x^2)^3$ عند النقطة $(1, 27)$.

أوجد أصفار المشتقة لما يأتى

٢٧ ـ $(x^2-1)^2(x+1)$

٢٨ ـ $(2r+1)^2(r-3)^3$

٢٩ ـ $x^5(ax+b)^4,\ a \neq 0$

٣٠ ـ $\frac{(x+3)^2}{x}$

٣١ - $\left(\frac{1-8y}{1+8y}\right)^4$

٣٢ - R و H ثابتان $f(r) = \pi \frac{H}{R} r^2(R-r)$

٣٣ - R و H ثابتان $g(h) = \pi \frac{R^2}{H^2} (H-h)^2 h,$

فيما يأتى ، y دالة غير مباشرة فى x . أوجد dy / dx ، أولا باستخدام قاعدة السلسلة ثم بالتعبير عن y مباشرة بدلالة x وإجراء التفاضل

٣٤ - $y = z^2 + 3z - 2,\ z = 2x + 4$

٣٥ - $y = u^2 - 2u^{-1},\ u = 5x$

٣٦ - $y = \frac{t^2}{t-1},\ t = \frac{x-1}{x}$

٣٧ - $y = \frac{t}{3t+2},\ t = \frac{2x}{1-3x}$

٣٨ - استنتج قاعدة القسمة لـ $D \frac{f(x)}{g(x)}$ من قاعدة السلسلة والنتيجة $D \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2}$ التى حصلنا عليها فى مثال ٣ ، بند ٣ - ١ .

[ارشاد : ضع $h(z) = \frac{1}{z}$ ، فيكون $\frac{1}{g(x)} = h(g(x))$. أوجد $D \frac{1}{g(x)}$ بقاعدة السلسلة . أوجد الآن $D \frac{f(x)}{g(x)}$ بكتابة $\frac{f(x)}{g(x)}$ بالصورة $f(x) \frac{1}{g(x)}$

٣٩ - فى الفصل السادس سنثبت أن $D \sin x = \cos x$. باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد صيغة لـ $D \sin g(x)$. استخدم صيغتك لايجاد $D \sin (3x^2 - 2x - 2)$.

٣ - ٥
الدوال الجبرية

قاعدة القوة ، $Dx^n = nx^{n-1}$ ، التى أثبتنا أنها صحيحة عندما تكون n عددا صحيحا ، هى أيضا صحيحة عندما يكون الاس كسرا ، ولذلك يمكن استخدامها لايجاد مشتقات المقادير الجبرية مثل $x^{3/5}$.

٣ - ١٦ $Dx^r = rx^{r-1}$ لكل r كسرية .

البرهان . نبرهن أولا الحالة الخاصة $r = 1/m$ ، حيث m عدد صحيح موجب . أى سنثبت أن

$$Dx^{1/m} = \frac{1}{m} x^{1/m-1} \qquad (١)$$

لكن نعطى التفاصيل فقط عندما $m = 4$. وذلك نموذج للطريقة العامة . لاحظ أولا التحليل

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \qquad (٢)$$

حيث n عدد صحيح موجب . هذا يمكن تحقيقه بضرب الطرف الأيمن للمعادلة . جميع الحدود ماعدا الأول والأخير ستنحذف بوجه خاص ، عندما $n = 4$ ، (٢) تكون

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \tag{٣}$$

من تعريف المشتقة

$$Dx^{1/4} = \lim_{u \to x} \frac{u^{1/4} - x^{1/4}}{u - x}$$

إذا وضعنا $b = x^{1/4}$ و $a = u^{1/4}$ فى (٣) فاننا نحصل على

$$u - x = (u^{1/4} - x^{1/4})(u^{3/4} + u^{2/4}x^{1/4} + u^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4})$$

واذن

$$\begin{aligned} Dx^{1/4} &= \lim_{u \to x} \frac{u^{1/4} - x^{1/4}}{u - x} \\ &= \lim_{u \to x} \frac{1}{u^{3/4} + u^{2/4}x^{1/4} + u^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}} \\ &= \frac{1}{x^{3/4} + x^{2/4}x^{1/4} + x^{1/4}x^{2/4} + x^{3/4}} \\ &= \frac{1}{4x^{3/4}} = \frac{1}{4} x^{-3/4} \end{aligned}$$

من السهل الآن إثبات أن القاعدة ٣ ـ ١٦تكون صحيحة لكل r الكسرية . أى عدد كسرى r يمكن التعبير عنه بالصورة n/m ، حيث m و n عددان صحيحان . وحيث $m > 0$ بالقاعدة ٣ ـ ١٥ ، يكون

$$Dx^r = Dx^{n/m} = D(x^{1/m})^n = n(x^{1/m})^{n-1} Dx^{1/m}$$

يمكننا إيجاد $Dx^{1/m}$ باستخدام (١) . إذن ، بالاستمرار يكون

$$Dx^r = n(x^{1/m})^{n-1} Dx^{1/m} = n(x^{1/m})^{n-1} \frac{1}{m} x^{1/m-1} = nx^{(n-1)/m} \frac{1}{m} x^{1/m-1}$$

$$= \frac{n}{m} x^{n/m-1/m} x^{1/m-1} = \frac{n}{m} x^{n/m-1} = rx^{r-1}$$

كالمعتاد ، من المفهوم أن $x \neq 0$ إذا كانت $r < 1$.

مثالان . لاستخدام القاعدة ٣ ـ ١٦ هما

$$Dx^{3/5} = \tfrac{3}{5} x^{-2/5} = \frac{3}{5x^{2/5}}$$

و

$$D \frac{3}{2\sqrt{x}} = D(\tfrac{3}{2} x^{-1/2}) = -\tfrac{3}{4} x^{-3/2}$$

قاعدة القوة بصفة أعم صحيحة لأى أس حقيقى ، لكن برهان ذلك يجب أن يؤجل إلى أن ندرس الأسس غير الكسرية واللوغارتيمات . سيعطى ذلك فى بند ٧ ـ ٥ .

بالاستعانة بقاعدة السلسلة يمكن تعميم القاعدة ٣ ـ ١٥ للأسس الكسرية .

٣ ـ ١٧ قاعدة القوة المعممة . إذا كانت $g(x)$ لها مشتقة عند x ، فكذلك تكون $g^r(x)$ لكل r الكسرية ويكون

$$Dg^r(x) = rg^{r-1}(x)Dg(x)$$

بالطبع ، $g(x)$ يجب أن تختلف عن الصفر إذا كانت $r < 1$ لكى يكون هذا صحيحا .

البرهان . دع $f(z) = z^r$ و $z = g(x)$ ، فيكون $g^r(x) = f(g(x))$. بما أن $f'(z) = rz^{r-1}$ ، فيكون لقاعدة السلسلة ٣ ـ ١٤ ، أن

$$\begin{aligned} Dg^r(x) &= D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) \\ &= rz^{r-1}g'(x) = rg^{r-1}(x)g'(x) \end{aligned}$$

مثال ١ أوجد $D\sqrt{x^2-1}$.

عندما يشتمل المقدار الجبرى المراد اجراء تفاضله على جذر ، من الأفضل أن نكتبه مستخدمين الأسس الكسرية . بالقاعدة ٣ ـ ١٧ حيث $r = \frac{1}{2}$, و $g(x) = x^2 - 1$ ويكون

$$D\sqrt{x^2-1} = D(x^2-1)^{1/2} = \tfrac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

مثال ٢ . أوجد مشتقة $x^3/\sqrt[3]{(1-3x)^2}$

نبدأ بقاعدة خارج القسمة :

$$D\frac{x^3}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3}3x^2 - x^3D(1-3x)^{2/3}}{(1-3x)^{4/3}}$$

مشتقة $(1-3x)^{2/3}$ يمكن إيجادها بقاعدة القوة المعممة . إذن

$$D\frac{x^3}{(1-3x)^{2/3}} = \frac{(1-3x)^{2/3}3x^2 - x^3\frac{2}{3}(1-3x)^{-1/3}(-3)}{(1-3x)^{4/3}} \qquad (٤)$$

المقادير الجبرية المماثلة لذلك على اليمين فى (٤) عادية ، وتوجد طريقة معينة لتبسيطها . اكتب كل الكميات المحتوية على أسس سالبة فى صورة أسس موجبة وبسط الكسر الناتج . (٤) تصبح

$$D\,\frac{x^3}{(1-3x)^{2/3}}=\frac{(1-3x)^{2/3}3x^2+\dfrac{2x^3}{(1-3x)^{1/3}}}{(1-3x)^{4/3}}$$

$$=\frac{\dfrac{(1-3x)3x^2+2x^3}{(1-3x)^{1/3}}}{(1-3x)^{4/3}}=\frac{3x^2-7x^3}{(1-3x)^{5/3}}$$

$$=\frac{x^2(3-7x)}{(1-3x)^{5/3}}.$$

مثال ٣ . أوجد قيم z حيث مشتقة $z\sqrt{a^2-z^2},\ a\neq 0$ تساوى صفرا والقيم حيث المشتقة لاتوجد .

لايجاد مشتقة $z\sqrt{a^2-z^2}$ ، نبدأ بقاعدة حاصل الضرب ثم نستخدم قاعدة القوة المعممة .

$$\frac{d}{dz}\,(z\sqrt{a^2-z^2})=\frac{d}{dz}\,[z(a^2-z^2)^{1/2}]$$

$$=z(\tfrac{1}{2})(a^2-z^2)^{-1/2}(-2z)+(a^2-z^2)^{1/2}$$

$$=\frac{-z^2}{(a^2-z^2)^{1/2}}+(a^2-z^2)^{1/2}=\frac{-z^2+(a^2-z^2)}{(a^2-z^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{a^2-2z^2}{(a^2-z^2)^{1/2}}. \qquad (٥)$$

الكسر يكون صفراً فقط إذا كان بسطه يساوى صفراً . لذلك المشتقة تكون صفرا اذا واذا فقط كان $z=\pm a/\sqrt{2}$. المشتقة موجودة لكل z حيث الكسر فى (٥) يمثل عدداً . لكن الكسر دائما يمثل عددا مالم يكن مقامه صفراً . ومن ثم المشتقة لاتوجد إذا كانت $z=\pm a$.

قد قطعنا مرحلة كبيرة بعد بند ٣ - ١ ، حيث كانت الطريقة الوحيدة لدينا لايجاد المشتقات هى الاستخدام المباشر للتعريف . صيغ التفاضل التى حصلنا عليها تمكننا بسهولة من إيجاد مشتقة أى دالة منشأة من كثيرات حدود بعمليات متكررة من إضافة وطرح وضرب قسمة وأخذ الجذور . مع أن تعريف المشتقة لايكون واضحاً عند استخدام هذه الصيغ ، إلا أنه يكون واضحاً جلياً فى الخلفية . كل صيغنا تعود أخيراً إلى التعريف ، وكل مشتقة هى نهاية خارج قسمة فروق . نظريات النهاية مازالت الأساسيات الجوهرية ، فقد استخدمت واحدة منها أو أكثر فى اشتقاق كل صيغة من صيغ التفاضل .

مسائل

أوجد مشتقة مايأتى وبسط الناتج :

١ - $4x^{-1/2}$

٢ - $6/x^{4/3}$

٣ - $\sqrt{x^{2.66}}$

٤ - $y^{0.704} + y^{-0.704}$

٥ - $\pi r^2 + \frac{2}{3} r^{3/2}$

٦ - $4x^2 + 6x + 2 - x^{-1/3}$

٧ - $\sqrt{x^3 + 5}$

٨ - $\sqrt{9 + 6u^2}$

٩ - $\sqrt{r^2 - x^2}$, r const

١٠ - $\sqrt[3]{1 - 4x}$.

١١ - $\dfrac{x}{1 + x^{0.6}}$

١٢ - $\sqrt{(4y + 1)^3}$

١٣ - $\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$

١٤ - $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(2x^2 - 3x + 2)^4}}$

١٥ - $\left(\dfrac{80}{\pi} t\right)^{1/3}$

١٦ - $\dfrac{1}{\sqrt{36 - x^2}}$

١٧ - $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

١٨ - $(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$

١٩ - $2\sqrt{x} + \sqrt{2 - x^2}$

٢٠ - $w\sqrt{c^2 + w^2}$

٢١ - $x^2\sqrt{1 + x^3}$

٢٢ - $(t + 1)\sqrt[4]{6t^2 + 3}$

٢٣ - $\dfrac{(3x^2 + 4x)^{3/2}}{6}$

٢٤ - $x\sqrt[3]{(c + ax)^2}$

٢٥ - $(8x + 5)(4x + 1)^{3/2}$

٢٦ - $\sqrt{5u} + \sqrt{\dfrac{u}{5}}$

٢٧ - $\sqrt{7x} + \dfrac{1}{\sqrt{7x}}$

٢٨ - $(4s)^{1/3} + (4s)^{2/3}$

٢٩ - $\dfrac{\sqrt{a + bz}}{z}$

٣٠ - $\dfrac{z}{\sqrt{c^2 - z^2}}$

٣١ - $\sqrt{\dfrac{t - 1}{t + 1}}$

٣٢ - $\sqrt[3]{\dfrac{5 + 3s}{5 - 3s}}$

٣٣ - $\dfrac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt{1 - 2x}}$

٣٤ - $\left(\dfrac{ax^2 + b}{cx^2 + d}\right)^{2/3}$

٣٥ - $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x + 1}}$

٣٦ - $\dfrac{\theta^2 + 3}{\sqrt{\theta + 2}}$

٣٧ - $x + \dfrac{3x}{\sqrt{x + 1}}$

٣٨ - $(1 - z)^{1/2} - 3(2z - z^2)^{-1/2}$

٣٩ - $\left(\dfrac{x}{x^2 + a^2}\right)^{5/2}$

٤٠ - $\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x}\right)^3$

٤١ - $\dfrac{\sqrt{8x^2 + 5}}{x + 2}$

٤٢ - $\sqrt{(v^2 - 2)(v^4 + 3)}$

٤٣ - $\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2 - c^2}$

٤٤ - $\dfrac{(x + a)^{-2/3}}{(x + b)^{-1/3}}$

٤٥ - $\dfrac{(x^2 + 2)^2\sqrt{3 - x^2}}{4 + \sqrt{x}}$

٤٦ - $x + |x|$

٤٧ - $\dfrac{t}{|t|}$

حل المعادلات الآتية لـ y وأوجد dy / dx :

٤٨ - $y^3 = x^2$

٤٩ - $x^2 + y^2 = 1$ (حالتان)

٥٠ - $(2x - 5)^3 = 3y^5$

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المعطاة :

٥١ - $y = \sqrt[3]{x},\ (-8,-2)$ ٥٢ - $y = \dfrac{1}{\sqrt{4x+1}},\ (6,\frac{1}{5})$ ٥٣ - $z = x\sqrt{x^2+1},\ (0,0)$

٥٤ - $y = t^2\sqrt{t+1},\ (3,18)$ ٥٥ - $y = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+1}},\ (3,\frac{3}{2})$

٥٦ - أوجد ميل الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ عند النقطة $P(x,y)$ باستخدام المشتقة وتحقق أن المماس هناك يكون عموديا على نصف القطر عند P . هذا يوضح أن الخط العمودى على نصف القطر عند P ، الذى هو أحد تعاريف المماس للدائرة ، هو نفس المماس المعرف بدلالة المشتقات .

أوجد قيم المتغير المستقل حيث المشتقة لكل مما يأتى تساوى صفراً والقيم حيث المشتقة لاتوجد :

٥٧ - $\dfrac{t}{t^2+b^2}$ ٥٨ - $\dfrac{\sqrt{c^2+y^2}}{y}$ ٥٩ - $\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ ٦٠ - $x + \sqrt{5-x^2}$

٦١ - $2\pi r^2\sqrt{a^2-r^2}$ ٦٢ - $x^{1/3}(x-8)$ ٦٣ - $\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x+2}}$ ٦٤ - $z^3(z+b)^{4/3}$

٦٥ - $u^2\sqrt[3]{2u+5}$ ٦٦ - $x|x|$.

٦٧ - ما هى نظريات النهاية التى استخدمت فى برهان $Dx^{1/4} = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ ؟

٦٨ - أثبت أن $Dx^{1/m} = \dfrac{1}{m}x^{1/m-1}$ ، عندما (أ) $m = 3$ ، (ب) $m = 5$ (ج) أى عدد صحيح موجب m .

٣ - ٦
المشتقات الأعلى

المشتقة $f'(x)$ للدالة f هى عدد يعتمد على x . فهى إذن تعين تناظر يخصص عددا هو $f'(x)$ ، لكل عدد x حيث تكون المشتقة موجودة . هذا التناظر هو إذن دالة ، تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' . نطاق f' قد يكون أصغر من نطاق f إذ أن $f'(x)$ قد لاتوجد عند كل x حيث $f(x)$ تكون معرفة . كأى دالة ، f' قد يكون لها مشتقة عند عدد x . أو قد لايكون . إذا كان لها ، فإننا نسمى مشتقة f' عند x المشتقة الثانية لـ f عند x ونقول أن f لها مشتقة من الرتبة الثانية عند x . ويرمز لها بالرمز $f''(x)$ أو $D^2f(x)$. إذا استخدمنا أسلوب الكتابة $y = f(x)$ ، فان رموزا أخرى للمشتقة الثانية هى

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx},\qquad \frac{d^2y}{dx^2},\qquad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\qquad y''$$

مثال ١ . إذا كانت $f(x) = x^4 + 3x^2 - 6$، فأوجد $f'(2)$ $f''(2)$.
نوجد أولا $f''(x)$ و $f'(x)$:

$$f'(x) = Df(x) = D(x^4 + 3x^2 - 6) = 4x^3 + 6x,$$
$$f''(x) = D^2f(x) = Df'(x) = D(4x^3 + 6x) = 12x^2 + 6.$$

إذن $f''(2) = 54$ و $f'(2) = 44$.

عندما تكون دالة المشتقة الثانية f'' لها مشتقة عندx ، فهذه تسمى المشتقة الثالثة لـ f عند x ويرمز لها بـ $D^3 f(x), f'''(x), d^3 f(x) / d x^3$, etc. بالمثل ، قد توجد مشتقات رابعة وخامسة ومن رتبة أعلى . إذا استخدم الرمز بالشرطة ، فاننا نكتب $f^{(n)}(x)$ أو $y^{(n)}$ للمشتقة النونية عندما $n \geqslant 4$.

مثال ٢ . إذا كانت $f(x) = 4x^3 - 2/x$، فأوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة f .

لدينا

$$f(x) = 4x^3 - 2x^{-1},$$
$$f'(x) = Df(x) = 12x^2 + 2x^{-2},$$
$$f''(x) = D^2f(x) = Df'(x) = 24x - 4x^{-3},$$
$$f'''(x) = D^3f(x) = Df''(x) = 24 + 12x^{-4},$$
$$f^{(4)}(x) = D^4f(x) = Df'''(x) = -48x^{-5}.$$

مسائل

أوجد المشتقة الثانية لما يأتى :

١ - $t^4 - t^3$

٢ - $-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2 - 18$

٣ - $y^2\sqrt{y} + \frac{3}{2}y + 1$

٤ - $\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x} - 2x$

٥ - $t^3 + \sqrt{1-t}$

٦ - $\dfrac{x^2 - 2x - 4}{x^2}$

٧ - $\sqrt[3]{3u + 2}$

٨ - $\dfrac{4}{3x + b}$

٩ - $3\left(x^5 - \dfrac{5}{\sqrt{x}}\right)$.

١٠ - $\dfrac{1}{y^2 + b^2}$

١١ - $\dfrac{6}{\sqrt{4 - x^2}}$

١٢ - $\sqrt[3]{4(x^2 + 2)^2}$

١٣ - $\dfrac{x}{x^2 - a^2}$

١٤ - $z\sqrt{z^2 - c^2}$.

١٥ - $\dfrac{\sqrt{12 - u^2}}{u}$

١٦ - $(x - 2)^{3/2}(x + 1)^{1/2}$

١٧ - $x^{1/3}(x - 8)$.

أوجد أصفار المشتقتين الأولى والثانية للدوال الآتية :

١٨ - $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ ١٩ - $s(t) = t^3 - 9t^2 - 21t + 2$ ٢٠ - $g(x) = 16$

٢١ - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ ٢٢ - $F(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$ ٢٣ - $u(r) = \sqrt{10 - r^2}$

أوجد d^3y/dx^3 لما يأتي :

٢٤ - $y = x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x$ ٢٥ - $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$ ٢٦ - $y = 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

٢٧ - $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x-1}}$ ٢٨ - $y = (x - x^2)^8$

٢٩ - إذا كانت $y = x^4$ ، فاثبت أن $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 12y = 0$ لجميع قيم x .

٣٠ - إذا كانت $y = 1/x$ ، فاثبت أن $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ لجميع قيم $x \neq 0$.

٣١ - إذا كانت $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ ، فهل توجد $f^{(5)}(x)$ ؟

٣٢ - أى من المشتقة الأولى والمشتقات من رتب أعلى ، للدالة $f(x) = x^2$ تكون متصلة عند 5 ؟

أوجد صيغة للمشتقة النونية لكل مما يأتى . (ارشاد : من المشتقات الأولى القليلة حاول تخمين المشتقة النونية . هذا سيكون أسهل اذا تركت المعاملات فى صورة عوامل . الآن اثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضى)

٣٣ - x^n ٣٤ - $1/z$ ٣٥ - $1/(t+1)^2$

٣٦ - $(ax+b)^{-1}$ ٣٧ - $\sqrt{x}$ ٣٨ - x^r ، حيث r كسرية .

٣٩ - أوجد تعبيرا لـ $\frac{d^n}{dx^n} xf(x)$ بدلالة $f^{(n)}(x)$.

٣ - ٧
المعكوسات التفاضلية

بدلا من السؤال عن المشتقة لدالة f يمكننا الذهاب فى الاتجاه العكسى ونسأل عن الدالة F التى مشتقتها هى f . مثل هذه الدالة F تسمى معكوساً تفاضلياً أو تكاملا غير محدد لـ f ، وقيمته عند x يرمز لها بـ $D^{-1} f(x)$ أو أكثر اعتيادا بالرمز $\int f(x)\, dx$ (يقرأ « تكامل $f(x)$ dee x ») . فمثلا ، اذا كانت f هى الدالة المعرفة بـ $f(x) = 2x$ ، فان الدالة F المعرفة لـ $F(x) = x^2$ هى معكوس تفاضلى لـ f لأن $F'(x) = f(x)$. يمكننا أن نكتب

$$D^{-1}2x = \int 2x\, dx = x^2$$

التعبير $f(x)$ فى $\int f(x)\, dx$ يسمى الدالة المكاملة ، وعملية إيجاد تكامل غير محدد تسمى التكامل .

٣ ـ ١٨ تعريف

$$\int f(x)\ dx = F(x) \text{ if } F'(x) = f(x)$$

مثال ١

(أ) $D^{-1}12x^2 = \int 12x^2\ dx = 4x^3$ لأن $D\ 4x^3 = 12x^2$

(ب) $D^{-1}(x^3+5x+3) = \int (x^3+5x+3)\ \ dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x$ لأن

$D(\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 3x) = x^3 + 5x + 3$ الدالة المكاملة هنا هى $x^3 + 5x + 3$.

أل dx فى $\int f(x)\ dx$ تكون مضافة معظم الوقت . إذا كانت الدالة المكاملة تحتوى حروفا أخرى غير x ، فان أل dx تشير الى أننا نعتبر الدالة المكاملة دالة فى x . فمثلا

$\int (2y + x^2)\ dx = 2yx + \frac{1}{3}x^3$ إذا كانت y مقداراً ثابتا

لكن

$\int (2y + x^2)\ dy = y^2 + x^2y$ إذا كانت x مقدارا ثابتا .

بالرجوع الى الدالة $f(x) = 2x$ ، نرى أن معكوساً تفاضليا آخر لـ f هو $x^2 + 5$. كذلك أيضا $x^2 - \frac{1}{2}, x^2 + \sqrt{3}$ ، وبصفة أعم $x^2 + C$ لأى ثابت C . وبالتالى f لها عدد لانهائى من المعكوسات التفاضلية . بالمثل بالنسبة لأى دالة f . إذا كانت $F(x)$ هى أى معكوس تفاضلى خاص لـ $f(x)$ ، أى $DF(x) = f(x)$ فحينئذ أيضا تكون $F(x) + C$ لأى ثابت C إذ أن $D[F(x) + C] = f(x)$. كل دالة لها معكوس تفاضلى يكون لها عدد لانهائى من المعكوسات التفاضلية ، وأى اثنان منها يختلفان بمقدار ثابت . مجموعة الدوال المعرفة بـ $F(x) + C$ ، لجميع الثوابت C ، تشتمل على جميع المعكوسات التفاضلية لـ f . برهان هذه الحقيقة الهامة يجب أن ينتظر حتى الفصل القادم (بند ٤ ـ ٢) ، لكن سوف نفترض صحته الآن فى أمثلتنا . الاستفسار عن تلك الدوال التى لها معكوسات تفاضلية سيدرس فى الفصل الخامس . التعبير $\int f(x)\ dx$ يمثل القيمة عند x لأى واحد من المعكوسات التفاضلية لـ f . فمثلا يمكن القول أن $\int 2x\ dx = x^2 + 5$. رمز التكامل مبهم ، وعلينا أن نتذكر ذلك عند استخدامه .

من المعتاد اختصار $\int 1\ dx$ إلى $\int dx$ ، وتكامل مثل $\int 1/x^2\ dx$ يكتب عادة $\int dx/x^2$.

أساسا ، التكامل هو عملية تخمين ، لكن بالتمرين تخمينات جيدة تظهر بسهولة . ومع ذلك ، توجد ، صيغتان مفيدتان للتكامل . فى مثال ١ (ب) أوجدنا معكوسا تفاضليا لـ $x^3 + 5x + 3$ بايجاد معكوس تفاضلى لكل حد ثم جمعها . أى أننا قلنا

$$\int (x^3 + 5x + 3)\ dx = \int x^3\ dx + \int 5x\ dx + \int 3\ dx$$

لقد طبقنا النظرية الآتية ، أو بالأحرى تعميمها الى حاصل جمع ثلاث دوال .

٣ ـ ١٩ نظرية . إذا كانت الدالتان g و f لهما معكوسان تفاضليان فكذلك يكون أيضا حاصل جمعهما وفرقهما ، ويكون

$$\int[f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

يوجد تعميم واضح لحواصل الجمع والفروق لأكثر من دالتين . البرهان يستخدم النظرية المناظرة عن المشتقات . بالتعريف $\int g(x)\, dx$ و $\int f(x)\, dx$ هما معكوسان تفاضليان لـ $g(x)$ و $f(x)$. واذن

$$D[\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx] = D\int f(x)\, dx \pm D\int g(x)\, dx$$
$$= f(x) \pm g(x)$$

هذا يعنى أن $\int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ هو معكوس تفاضلى لـ$f(x) \pm g(x)$. لكن رمز المعكوس التفاضلى لـ $f(x) \pm g(x)$ هو $\int [f(x) \pm g(x)]dx$. لذلك

$$\int[f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

نظرية مرافقة هى الآتى .

٣ ـ ٢٠ نظرية . اذا كانت الدالة f لها معكوس تفاضلى ، فكذلك أيضا الدالة kf لأى ثابت k ويكون

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$$

فمثلا ،

$$\int 5x^2\, dx = 5\int x^2\, dx = 5(\tfrac{1}{3}x^3) = \tfrac{5}{3}x^3$$

البرهان لهذه النظرية يترك للقارىء (مسألة ٥٣) . بسبب غموض رمز التكامل ، يجب تفسير نظرية ٣ ـ ١٩ بعناية . إنها تعنى أن لكل معكوس تفاضلى H لـ $f \pm g$ يوجد معكوس تفاضلى لـ f وآخر لـ g بحيث يكون مجموعهما هو H ، أو بصيغة أخرى ، اذا كانت G و F و H أى معكوسات تفاضلية ممكنة لـ g و F و $f \pm g$ ، فيوجد مقدار ثابت C بحيث أن $H(x) = F(x) \pm G(x) + C$ لجميع قيم x . تفسير مماثل يجب أن يعطى لنظرية ٣ ـ ٢٠ .

باجراء تفاضل الطرف الأيمن للمعادلة ٣ ـ ٢١ ، نرى أن لكل $r \neq -1$ كسرية ، يكون

٢١ ـ٣ $$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}, \qquad r \neq -1$$

الصيغة لامعنى لها إذا كانت $r = -1$. هذا لايعنى أن $1/x$ ليس لها معكوس تفاضلى . المعكوس التفاضلى يوجد فعلا ، لكن المعادلة ٣ ـ ٢١ لاتساعد فى ايجاده . فهو الدالة اللوغاريتمية وسوف ندرسه فى الفصل السابع .

النظريتان ٣ ـ ١٩ ، ٣ ـ ٢٠ والمعادلة ٣ ـ ٢١ تمكننا من إيجاد المعكوس التفاضلى لأى دالة يمكن التعبير عنها كحاصل جمع حواصل ضرب ثوابت فى قوى x .

مثال ٢ . أوجد قيمة

$$\int\left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx \qquad (١)$$

لدينا

$$\int\left(6x^4 - 10x^2 + 7 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$$

من ٣ ـ ١٩ ، ٣ ـ ٢٠ $= 6\int x^4\, dx - 10\int x^2\, dx + \int 7dx + \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\, dx$

من ٣ ـ ٢١ $= \frac{6}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 7x + x^{1/2}$

سنضيف مقداراً ثابتاً C للاجابة فنكتب $\frac{6}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 7x + x^{1/2} + C$ لنذكر أنفسنا أنه توجد اجابات كثيرة لـ (١) لكن جميعها على هذه الصورة .

جميع المعكوسات التفاضلية يجب تحقيقها باجراء التفاضل . فى المثال السابق مشتقة المقدار الجبرى الأخير هى الدالة المكاملة ، لذلك نعرف أن الاجابة صحيحة .

تكاملات غير محددة كثيرة يمكن ايجادها بسهولة اذا عبرنا عن الدالة المكاملة بصورة أخرى .

مثال ٣ . أوجد قيمة $\int 6x(5 - x)\, dx$

لدينا

$$\int 6x(5 - x)\, dx = 6\int (5x - x^2)\, dx = 6\left(\tfrac{5}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right) + C$$
$$= x^2(15 - 2x) + C.$$

مثال ٤ . أوجد قيمة $\int (4t - 3)/t^3\, dt$

لدينا

$$\int \frac{4t-3}{t^3}\, dt = \int\left(\frac{4}{t^2} - \frac{3}{t^3}\right) dt = 4\int t^{-2}\, dt - 3\int t^{-3}\, dt$$

$$= -4t^{-1} + \tfrac{3}{2}t^{-2} + C = -\frac{4}{t} + \frac{3}{2t^2} + C = \frac{-8t+3}{2t^2} + C$$

مثال ٥ . أوجد قيمة

$$\int (x^2 + 1)^3 2x\, dx \qquad (٢)$$

يمكن تقييم التكامل بضرب الدالة المكاملة أولا . القارىء النابه قد يلاحظ أن الدالة المكاملة $(x^2 + 1)^3\, 2x$ تشابه مقادير جبرية حصلنا عليها عند إجراء التفاضل بقاعدة القوة المعممة ، وبوجه خاص أنها مشتقة دالة مثل $(x^2 + 1)^4$. دعنا نحاول $(x^2 + 1)^4$ نفسها لنر كيف يكون المعكوس التفاضلى قريبا منها . لدينا

$$D(x^2 + 1)^4 = 4(x^2 + 1)^3 2x$$

المقدار الجبرى على اليمين يختلف عن الدالة المكاملة فى (٢) بالعامل 4 . هذا يوحى بأن $\frac{1}{4}(x^2+1)^4$ قد يكون تخمين أفضل من $(x^2+1)^4$ للمعكوس التفاضلى . باجراء تفاضل هذه ، يكون لدينا

$$D[\tfrac{1}{4}(x^2+1)^4] = (x^2+1)^3 2x$$

الطرف الأيمن من هذه المعادلة هو الدالة المكاملة فى (٢) ، ولذلك يكون

$$\int (x^2+1)^3 2x\, dx = \tfrac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$$

لاحظ أن فى هذا المثال $2x$ هى مشتقة x^2+1 ، لذلك (٢) هى على الصورة $\int g^r(x)\, g'(x)\, dx$ ، حيث $r = 3$ و $g(x) = x^2 + 1$. عندما تكون الدالة المكاملة على الصورة

$$g^r(x) g'(x) \qquad (٣)$$

لدالة ما g أو تختلف عنها بعامل ثابت فقط ، فان التكامل يمكن ايجاده بسلسلة من التخمينات كما فى مثال ٥ ، التخمين الأول الجيد هو $g^{r+1}(x)$.

مثال ٦ . أوجد قيمة $\int 4x^2\sqrt{5-x^3}\, dx$

إذا وضعنا $g(x) = 5 - x^3$ ، فإن الدالة المكاملة تكون ، فيما عدا لعامل ثابت ، على الصورة $g^{1/2}(x)\, g'(x)$. نحاول $(5-x^3)^{3/2}$ كتخمين أول للمعكوس التفاضلى ونرى أن

$$\frac{d}{dx}(5-x^3)^{3/2} = \tfrac{3}{2}(5-x^3)^{1/2}(-3x^2) = -\tfrac{9}{2}x^2(5-x^3)^{1/2}$$

المقدار الجبرى الأخير يتفق مع الدالة المكاملة فيما عدا المعامل الذى هو $-\frac{9}{2}$ بدلا من 4 . وعلى ذلك ، نعدل تخميننا بضربه فى $(-\frac{2}{9})4$ ، لنتخلص من العامل غير المطلوب $-\frac{9}{2}$ ولندخل العامل 4 ، ثم نحاول

$$-\tfrac{2}{9}(4)(5-x^3)^{3/2} = -\tfrac{8}{9}(5-x^3)^{3/2}$$

كتخمين ثان . بإجراء التفاضل يكون

$$\frac{d}{dx}\left[-\tfrac{8}{9}(5-x^3)^{3/2}\right] = -\tfrac{8}{9}\left[\tfrac{3}{2}(5-x^3)^{1/2}(-3x^2)\right] = 4x^2(5-x^3)^{1/2}$$

تخميننا الثانى صحيح ، ويكون

$$\int 4x^2\sqrt{5-x^3}\, dx = -\tfrac{8}{9}(5-x^3)^{3/2} + C$$

لو كان التكامل فى مثال ٦ هو $\int 4x\sqrt{5-x^3}\, dx$ لكنا وجدنا صعوبة فى إيجاد قيمته . لاتوجد طريقة واضحة يمكن التعبير بها عن الدالة المكاملة فى الصورة (٣) . بإجراء تفاضل التخمين التجريبى $(5-x^3)^{3/2}$ تظهر x^2 ، بينما نحن نريد x فقط والتخمين $(1/x)(5-x^3)^{3/2}$ يكون أسوأ .

بعكس التفاضل ، لاتوجد طريقة محددة للحصول على المعكوس التفاضلى لدالة جبرية . معكوسات تفاضلية كثيرة يمكن إيجادها بسهولة ، لكن معكوسات أخرى تتطلب براعة فائقة ، وأيضا معكوسات أخرى لايمكن التعبير عنها برموز مألوفة . التبرير الوحيد الذى يمكن إعطاؤه لصحة معكوس تفاضلى هو أن مشتقته هى الدالة الأصلية . سندرس طرق إيجاد المعكوس التفاضلى بتفضيل أكثر بعد أن ندرس بعض استخداماته .

مسائل

أوجد التكاملات غير المحددة الآتية

١ - $\int (x+5)\, dx$

٢ - $\int (ax+b)\, dx.$

٣ - $\int dt$

٤ - $\int \frac{5}{\sqrt{3}}\, du$

٥ - $\int b(x-a)\, dx$

٦ - $\int (3x^2-8x)\, dx$

٧ - $\int \pi r^2\, dr$

٨ - $\int 3(x+\frac{5}{2}x^3)\, dx$

٩ - $\int (a^2-x^2)\, dx$

١٠ - $\int (t^3+t+5)/7\, dt$

١١ - $\int x(2x-3)\, dx$

١٢ - $\int (x\sqrt{x}-2\sqrt{x}-3)\, dx$

١٣ - $\int 4x^2(x+1)\, dx$

١٤ - $\int 3x(1+\sqrt{x})\, dx$

١٥ - $\int [z^3(4-2z)+6]\, dz$

١٦ - $\int (y+5)^2\, dy$

١٧ - $\int cr(a+r)^2\, dr$

١٨ - $\int 3\left(x+5+\frac{1}{x^2}\right) dx$

١٩ - $\int \left[x(x^3+1)-\frac{1}{x^4}\right] dx$

٢٠ - $\int \frac{7}{3}\left(s^6-s+\frac{\sqrt{2}}{s^2}+\frac{1}{3s^3}\right) ds$

٢١ - $\int (3x^{-2}+\frac{11}{3}x^{-5})\, dx$

٢٢ - $\int \frac{4}{\sqrt[3]{t}}\, dt$

٢٣ - $\int \left(\sqrt{w}-\frac{1}{\sqrt{w}}\right) dw$

٢٤ - $\int \sqrt{7z}\, dz.$

٢٥ - $\int \frac{5z^2-12z-10}{z^4}\, dz$

٢٦ - $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

٢٧ - $\int \frac{u-1}{u^3}\, du$

٢٨ - $\int \sqrt{y}(3y+1)^2\, dy$

٢٩ - $\int 3x^2(x^3-10)\, dx$

٣٠ - $\int u^2(u^3+3)^{10}\, du$

٣١ - $\int (3-4x)^{17}\, dx$

٣٢ - $\int 3x(x^2+6)^3\, dx$

٣٣ - $\int (x^2+6)^3\, dx$

٣٤ - $\int (3x+5)^{-3}\, dx$

٣٥ - 35. $\int \frac{dt}{(t-1)^2}$

٣٦ - $\int (8x-6)(4x^2-6x)^3\, dx$

٣٧ - $\int (6z^2+5)(2z^3+5z-1)^4\, dz$

٣٨ - $\frac{1}{2}\int \sqrt{4-9x}\, dx$

٣٩ - $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

٤٠ - $\int \left[x+\frac{1}{(4x+3)^2}\right] dx$

٤١ - $\int (x+\sqrt{1-x})\, dx$

٤٢ - $\int x\sqrt{2x^2-1\, dx}$

٤٣ - $\int x\sqrt[3]{4x^2-6}\, dx$

٤٤ - $\int z^2\sqrt[3]{5z^3+2}\,dz$

٤٥ - $\int y^3(by^4-c)^{-4}\,dy$

٤٦ - $\int \frac{u^2\,du}{(u^3+\pi)^6}$

٤٧ - $\int x^2\sqrt[3]{(x^3+8)^2}\,dx$

٤٨ - $\int 2x[1+(x^2+1)^{3/2}]\,dx$

٤٩ - أوجد المعكوس التفاضلى $f(x)$ لـ x^2 حيث $f(1) = 2$.

٥٠ - أوجد ثلاث دوال f حيث $f''(x) = x$

٥١ - تكامل $(x+2)^2$ يمكن إيجاد قيمته بطريقتين . إحدى الطريقتين هى

$$\int (x+2)^2\,dx = \tfrac{1}{3}(x+2)^3 + C$$

لأن $D[\tfrac{1}{3}(x+2)^3] = (x+2)^2$. الطريقة الثانية هى بفك $(x+2)^2$ ويكون

$$\int (x+2)^2\,dx = \int (x^2+4x+4)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x + C$$

اشرح الاختلاف الظاهرى بين النتيجتين .

٥٢ - إذا كانت $g(y) = (y-1)(y^2+y+1)$ و $f(y) = y^3$ فحقق أن $f'(y) = g'(y)$

من ثم يوجد مقدار ثابت C بحيث أن $f(y) = g(y) + C$ لجميع قيم y . أوجد C :

٥٣ - أثبت نظرية ٣ - ٢٠

٣ - ٨
المعادلات التفاضلية

نفرض أننا لانعرف معادلة منحنى معين لكن نعرف أن عند كل نقطة (x, y) عليه الميل يكون $x/2$ وأن المنحنى يمر بالنقطة $(3, 4)$. سنوضح كيف يمكن إيجاد معادلة المنحنى من هذه المعلومات . لتكن معادلة المنحنى هى $y = f(x)$. النص عن الميل يعنى أن

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x \qquad (١)$$

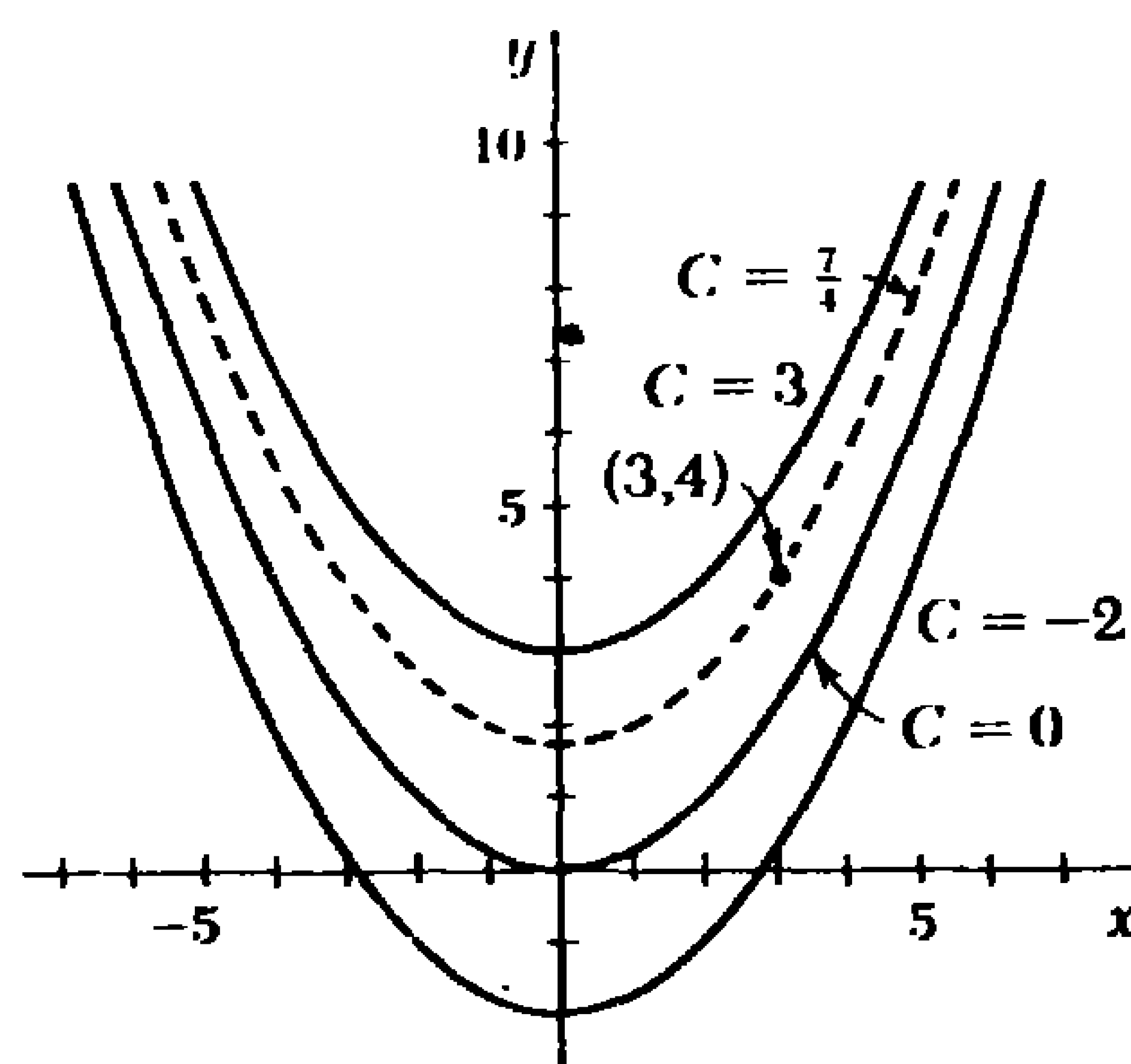
لجميع قيم x . علاوة على ذلك ، إذا كان المنحنى يمر بالنقطة $(3,4)$ ، فيجب أن يكون

$$f(3) = 4 \qquad (٢)$$

علينا أن نوجه دالة f تحقق (١) و (٢) . من (١) نرى من عملية إيجاد المعكوس التفاضلى أن كل دالة f ممكنة يجب أن تكون على الصورة

$$y = f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + C \qquad (٣)$$

لثابت ما C . كل قيمة لـ C تحدد منحنى ، عدد قليل من هذه المنحنيات مخطط فى شكل ٣ - ٨ . يجب اختيار C بحيث أن المنحنى المناظر يمر بالنقطة $(3,4)$. لذلك C يجب أن



شكل ٣-٨
الأشكال البيانية ل $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + C$ لقيم c المختلفة

تكون عدداً بحيث أن (٣) تكون صحيحة عندما $y = 4$ و $x = 3$ ، أى أن ، C يجب أن تكون عددا يحقق

$$4 = f(3) = \tfrac{1}{4}(3^2) + C$$

إذن $C = \frac{7}{4}$ ، ومعادلة المنحنى هى

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{7}{4}$$

على القارىء ان يتحقق أن الميل عند كل نقطة هو $x/2$ وأن المنحنى يمر بالنقطة $(3,4)$.

معادلة مثل (١) تشتمل على مشتقة دالة تسمى معادلة تفاضلية . عادة فى هذا الكتاب نستخدم للمشتقة الرمز التفاضلى dy/dx أو y' ونكتب (١) فى الصورة

$$y' = \tfrac{1}{2}x \quad \text{أو} \quad \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}x \qquad (٤)$$

أى حل للمعادلة التفاضلية هو دالة f بحيث أنه عندما تعوض :
$f'(x)$ عن dy/dx وتعوض $f(x)$ عن y ، إذا كانت موجودة ، فان المعادلة الناتجة تكون صحيحة لجميع قيم x حيث الكميات المحتواة تكون معرفة . فمثلا ، الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - 2$$

هو حل للمعادلة التفاضلية (٤) لأنه عندما تعوض مشتقة f عن dy/dx فى (٤) ، فان المعادلة الناتجة ، $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ ، تكون صحيحة لجميع قيم x . عادة المعادلة التفاضلية يكون لها حلول كثيرة . حل المعادلة التفاضلية سيعنى بالنسبة لنا ، إيجاد أكثر ما يمكن إيجاده من حلولها . هذا التعريف هو غير دقيق قصداً لأن لمعادلات كثيرة يكون من الصعب ، وفوق مستوى هذا الكتاب ، تحديد ما إذا كنا قد أوجدنا كل الحلول . شروط إضافية على الحلول

مثل (٢) تسمى شروطا حدية . فى مثالنا طلب منا إيجاد حل للمعادلة التفاضلية (١) يحقق الشرط الحدى (٢) . لإجراء ذلك كان علينا أن نوجد أولا كل الحلول (٣) للمعادلة (١) . إذا كنا قد اخترنا فقط أبسط الحلول $x^2/4$ ، فانه لم يكن فى امكاننا تحقيق الشرط الحدى.

مثال ١ . حقق أن الدالة

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x} \qquad (٥)$$

هى حل للمعادلة التفاضلية

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2 \qquad (٦)$$

لجميع الثوابت C .

مشتقة f هى $f'(x) = 2x/3 - c/x^2$ عندما نعوض بالطرف الأيمن لهذه المعادلة والمعادلة (٥) عن y و dy/dx فى (٦) ، فإننا نحصل على

$$x\left(\tfrac{2}{3}x - \frac{C}{x^2}\right) + \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \frac{C}{x}\right) = x^2$$

بما أن هذه المعادلة صحيحة لجميع قيم x حيث الكميات المحتواة تكون معرفة ، وهى جميع $x \neq 0$ ، فإن (٥) هى حل للمعادلة (٦) لكل C .

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{6x+1} \qquad (٧)$$

بفرض أن

$$y = 1 \text{ عندما } x = \tfrac{1}{2} \qquad (٨)$$

بعكس المثال السابق ، حيث كان علينا فقط أن نحقق أن دالة معطاة هى حل ، هنا علينا أن نكتشف الحل . علينا أن نوجد دالة f بحيث أن $f'(x) = \sqrt{6x+1}$ لجميع قيم x ، وأيضا $f(\tfrac{1}{2}) = 1$. نوجد أولا ، بإجراء العملية العكسية للتفاضل كل حلول (٧) . هذه الحلول هى

$$y = f(x) = \tfrac{1}{9}(6x+1)^{3/2} + C \qquad (٩)$$

حيث C ثابت . من بين هذه الحلول نختار حلا خاصاً يحقق الشرط الحدى (٨) . إذا كانت y لتساوى 1 عندما x تساوى $\tfrac{1}{2}$ ، فإنه بتعويض $\tfrac{1}{2}$ و 1 عن x و y فى (٩) ، نرى أن C يجب أن تكون عدداً يحقق

$$1 = \tfrac{1}{9}[6(\tfrac{1}{2}) + 1]^{3/2} + C = \tfrac{8}{9} + C$$

إذن $C=\frac{1}{3}$ ، وحل (٧) الذى يحقق (٨) هو

$$y=f(x)=\tfrac{1}{9}(6x+1)^{3/2}+\tfrac{1}{3}$$

على القارىء أن يتأكد من أن الحل يحقق (٧) و (٨) .

المعادلة التفاضلية هى أداة رياضية هامة للفيزيائى . عادة هو لايعرف بالضبط كيف تعتمد كمية معينة على كمية أخرى ، لكن من اعتبارات فيزيائية يعرف مشتقة الأولى بالنسبة إلى الثانية . بحل المعادلة التفاضلية الناتجة خاضعة للشروط الحدية يمكنه إيجاد العلاقة بين الكميتين .

مسائل

أثبت أن المعادلة التفاضلية لها الدالة المعطاة كحل :

١ - $\frac{dy}{dx}=x^2,\ f(x)=\frac{1}{3}x^3$

٢ - $\frac{dy}{dx}=3x+5,\ f(x)=\frac{3}{2}x^2+5x-2$

٣ - $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t-1}},\ f(t)=2(\sqrt{t-1}+1)$

٤ - $x^3y'=x^4-\sqrt{3},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2x^2}$

٥ - $\frac{d^2y}{dx^2}=x,\ y=\frac{1}{6}(x^3+2x-2)$

٦ - $\frac{d^2s}{dt^2}-2\frac{ds}{dt}+10=0,\ s=5t$

٧ - $xy'=2y,\ f(x)=Cx^2$

٨ - $y'''-y''=0,\ y=C_1+C_2x$

٩ - $y\frac{dy}{dx}=x^2,\ g(x)=\sqrt{\frac{2}{3}x^3+4}$

١٠ - $\frac{u}{x}\frac{du}{dx}=1,\ h(x)=\sqrt{x^2+k}$

١١ - $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2},\ y=\frac{x}{1-ax}$

١٢ - $x(y')^2-yy'+1=0,\ y=C+\frac{x}{C}$

١٣ - $\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t}=\sqrt{t^2+1},\ x=\frac{(t^2+1)^{3/2}+C}{3t}$

حل المعادلات التفاضلية الآتية :

١٤ - $\frac{dy}{dx}=-x+5$

١٥ - $f'(x)=x^3-3x^2+10$

١٦ - $y'=\frac{4}{\sqrt{x}}-x$

١٧ - $\frac{ds}{dt}=\frac{t^4-t}{2t^3}$

١٨ - $x^2\frac{dy}{dx}=x^2+1$

١٩ - $\sqrt{x}\frac{du}{dx}=(1-x)^2$

٢٠ - $z'=\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$

٢١ - $\frac{1}{t^2}g'(t)=\frac{-7}{(1+t^3)^2}$

٢٢ - $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^3}$

٢٣ - $\frac{d^ny}{dx^n}=0$

أوجد حل المعادلة التفاضلية الذى يحقق الشرط الحدى المعطى :

٢٤ - $f'(x) = -5x;\ f(1) = 2$

٢٥ - $F'(t) = 1 - 6t + t^2;\ F(-1) = 4$

٢٦ - $\frac{dy}{dx} = \sqrt{7}x^3 + 3x - 2;\ y = -5$ عند $x = 0$

٢٧ - $y' = ax^2;\ y = a$ عند $x = 1$

٢٨ - $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 - 2t};\ s = 0$ عند $t = -4$

٢٩ - $\frac{1}{t}\frac{dy}{dt} = 2t^2 + t + 1;\ y = 5$ عند $t = \frac{1}{2}$

٣٠ - $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = 8\sqrt[3]{1 + 2x^2};\ y = 2$ عند $x = 0$

٣١ - $y' = \frac{-x}{\sqrt{10 - x^2}};\ y = 3$ عند $x = -2$

٣٢ - $F''(t) = -4;\ F(0) = 2,\ F'(0) = 1$

٣٣ - $f''(x) = x;\ f(2) = \frac{1}{2},\ f'(2) = 1$

٣٤ - $\frac{d^2s}{dt^2} = g$ ، (g ثابت) ، عندما $t = 0,\ s = 12,\ \frac{ds}{dt} = 0$

٣٥ - $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$ حيث $\frac{dy}{dx} = 2$ عندما $x = 4$, $y = 0$ عند $x = 1$

٣٦ - $f''(x) = 2x;\ f(1) = 2,\ f(-1) = -3$

٣٧ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميلة x^2 — عند كل نقطة (x,y) عليه ، ويمر بالنقطة $(0,6)$.

٣٨ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله $\sqrt[3]{x}$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويمر بالنقطة $(-8, -2)$.

٣٩ - أوجد معادلة المنحنى الذى ميله $5x - 1/x^2$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويمر بالنقطة $(1,-4)$.

٤٠ - أوجد المعادلة $y = g(x)$ لمنحنى بحيث أن $g''(x) = 3$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويمر بالنقطة $(2,1)$ وميله عند هذه النقطة يساوى -1 .

٤١ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $f''(x) = 4x$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويقطع المحور x عند النقطة $(-2,0)$ بزاوية 45° .

٤٢ - أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $f''(x) = 3x^2$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويمر بالنقطتين $(2,5)$ و $(1,\frac{9}{4})$

٤٣ - أوجد المعادلة $y = F(x)$ لمنحنى بحيث أن $F''(x) = 1/x^3$ عند كل نقطة (x,y) عليه ويمر بالنقطة $(1,6)$.

٤٤ - فى الفصل التالى سنرى أنه إذا أسقط حجر من قمة جرف ، فان سرعته بعد t sec تعطى بالعلاقة $ds/dt = 32t$ ، حيث s هى المسافة التى سقطها . ما هى المسافة التى يسقطها فى 2 sec ؟ إذا كان ارتفاع الجرف 144ft متى يصل الحجر القاع؟ .

٣ - ٩
التفاضل الضمنى

لقد رأينا أن كل دالة f يناظرها معادلة فى y و x نحصل عليها بوضع $y = f(x)$. مع استثناءات بسيطة ، العكس أيضا يكون صحيحا . أى أن أى معادلة فى y و x تعرف دالة . خذ مثلا المعادلة

$$6x - 2y + 5 = 0 \tag{١}$$

لكل x ، توجد y حيث المعادلة تكون صحيحة . بعض الازدواج x's , y's معطى فى الجدول ١ . التناظر الناشىء بين الـx's, y's يكون ، مثل كل التناظرات بين فئات الأعداد ، دالة تعين بالمعادلة . دعنا نرمز لها بالرمز f . فيكون $y = f(x)$. إذا أجرينا حل (١) بالنسبة إلى y : $y = \frac{1}{2}(6x + 5)$ ، فإنه يمكننا الحصول على تعبير للعدد $f(x)$ يناظر x ، وهو

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(6x + 5) \tag{٢}$$

المعادلة (٢) يقال إنها تعرف الدالة f صراحة لأنها تعطى مباشرة ، أو صراحة ، العدد الذى يناظر x . المعادلة (١) يقال إنها تعرف الدالة ضمنيا . أيضا نقول إن (١) تعرف دالة ضمنية لـ x . مع أنها ليست الدالة التى تكون ضمنية لكن طريقة تعريفها . لايوجد سبب لتفضيل x عن y ، والمعادلة (١) أيضا تعرف ضمنيا دالة Fلـ y ، يصفها جزئيا الجدول ٢ . التعريف الصريح لـ F يمكن الحصول عليه بحل (١) بالنسبة الى x :

$$x = F(y) = \tfrac{1}{6}(2y - 5)$$

لكل x فى الفترة [5,5–] ، توجد y غير سالبة تحقق المعادلة

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{٣}$$

عدد قليل من هذه الأزواج x's, y's مدون فى الجدول ٣ . المعادلة (٣) تعين التناظر ولذلك تعرف ضمنيا دالة g لـ x ، تعريفها الصريح يمكن الحصول عليه بحل (٣) بالنسبة الى y غير السالبة :

$$y = g_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \tag{٤}$$

فئة أخرى من الـ y's التى تناظران x's وتحقق (٣) معطاة جزئيا فى الجدول ٤ . واذن المعادلة (٣) تعرف ضمنيا دالة ثانية g_2 لـx ، تعريفها الصريح هو

$$g_2(x) = -\sqrt{25 - x^2} \tag{٥}$$

جدول ١

x	$y = f(x)$
-2	$-\frac{7}{2}$
0	$\frac{5}{2}$
$\frac{1}{2}$	4
4	$\frac{29}{2}$

جدول ٢

y	$x = F(y)$
$-\frac{7}{2}$	-2
$\frac{5}{2}$	0
4	$\frac{1}{2}$
$\frac{29}{2}$	4

جدول ٣

x	$y = g_1(x)$
-5	0
-2	$\sqrt{21}$
0	5
4	3
5	0

جدول ٤

x	$y = g_2(x)$
-5	0
-2	$-\sqrt{21}$
0	-5
4	-3
5	0

الشكل البيانى لـ (٣) هو دائرة نصف قطرها 5 ومركزها عند نقطة الأصل . الشكل البيانى لـ g_1 هو النصف الأعلى للدائرة لأن الاحداثى yوهو $g_1(x)$ x يكون دائما موجبا ، والشكل البيانى لـ g_2 هو النصف الأسفل للدائرة .

الدالة f تبرز معادلة واحدة فقط ، $y = f(x)$ ، لكن كما يوضح هذا المثال ، المعادلة فى x,y قد تعين أكثر من دالة واحدة فى x .

من الممكن اثبات أن لكل x يوجد عدد حقيقى y يحقق المعادلة

$$y^5 - x^2y + 2x^3 = -1 \qquad (٦)$$

عدد قليل من هذه الأزواج مدون فى الجدول ٥ .

جدول ٥

x	$y = h(x)$
0	-1
$-\frac{1}{2}$	-1
$-2^{-1/3}$	0

وعلى ذلك ، فالمعادلة (٦) تعرف ضمنيا دالة h لـ x ، ويمكننا أن نكتب $y = h(x)$. لكن هنا يوجد اختلاف المعادلة (٦) لايمكن حلها جبريا لـ y بدلالة x ، لذلك لايوجد تعبير صريح لـ h .

كما هو الحال مع (٣) ، المعادلة (٦) قد تعرف أكثر من دالة واحدة لـ x . لمعادلات أخرى فى x,y قد لاتوجد x لها y مناظرة ، فى هذه الحالة ، المعادلة لاتعرف دالة . مثل هذه المعادلة هى $x^2 + y^2 = -9$. أيضا لمعادلات كثيرة نطاق الدالة معرفة قد يتكون فقط من واحدة أو أكثر من الفترات المحددة ، كما كان الحال مع g_2 و g_1 لايمكننا التعمق فى هذه الامور هنا ، فهى تدرس فى حساب التفاضل المتقدم . سنفترض أن المعادلات التى ندرسها تعرف دوال نطاقها يحتوى على فترة .

مشتقة الدالة غير السالبة $g_1(x)$ المعرفة بالمعادلة

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (٧)$$

يمكن إيجادها من الصورة الصريحة

$$g_1(x) = \sqrt{25 - x^2} \qquad (٨)$$

المعطاة فى (٤) . المشتقة هى

$$g_1'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

يمكن أيضاً إيجاد المشتقة مباشرة من المعادلة (٧) ، التى تعرف g_1 ضمنيا ، كما سنوضح الآن .

لكل x فى الفترة $[-5,5]$ ، تكون $g_1(x)$ هى العدد الذى عند تعويضه عن y فى (٧) يجعل هذه المعادلة صحيحة . بمعنى آخر ، المعادلة

$$x^2 + g_1^2(x) = 25 \qquad (٩)$$

تكون صحيحة ، وهى صحيحة لكل x فى نطاق الدالة g_1. بما أن الطرفين الأيسر والأيمن للمعادلة (٩) يكونان متساويين لجميع هذه القيم لـ x ، هكذا أيضا تكون مشتقاتها ، أى أن ،

$$\frac{d}{dx}[x^2 + g_1^2(x)] = \frac{d}{dx}25$$

بقاعدة القوة المعممة ٣ - ١٧ ، هذه يمكن كتابتها

$$2x + 2g_1(x)g_1'(x) = 0 \qquad (١٠)$$

فيما سبق كان لدينا تعبير صريح للدالة $g_1(x)$ يمكننا منه إيجاد $g'_1(x)$. هنا ندعى أن الأمر ليس كذلك ، فى الواقع ، أن $g'_1(x)$ هى التى نحاول إيجادها . بحل (١٠) بالنسبة إلى $g'_1(x)$ ، نرى أن

$$g_1'(x) = \frac{-x}{g_1(x)} \qquad (١١)$$

المعادلة (١١) تعطى مشتقة الدالة g_1 عند كل x فى نطاق g_1 حيث $g_1(x) \neq 0$. فمثلا ، عند $x = 4$ ، يكون

$$g_1'(4) = \frac{-4}{g_1(4)} \qquad (١٢)$$

من جدول الدالة g_1 ، نرى أن $g_1(4) = 3$ وإذن $g_1'(4) = -\frac{4}{3}$ هذا قد يكون أكثر نفعا لكن ليس أكثر صحة من (١٢) . مشتقات الدوال المعرفة صراحة ، كما فى (٨) ، تشمل x فقط . التعبير لمشتقة g_1 عندما تكون g_1 معرفة ضمنيا ، كما بالمعادلة (٧) ، لاتشمل x فقط لكن أيضا $g_1(x)$. بما أن $g_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ، يمكننا إذا أردنا ، أن نعوض $\sqrt{25 - x^2}$ عن $g_1(x)$ فى (١١) ونعبر عن $g_1(x)$ فى صورة تشمل x فقط :

$$g_1'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \qquad (١٣)$$

ليس من الضرورى عمل ذلك . الصورتان (١١) و (١٢) كلاهما صحيح . صورة المشتقة فى (١٣) هى الصورة التى حصلنا عليها سابقا بالتفاضل الصريح . هذه الطريقة لاجراء التفاضل باستخدام الصورة الضمنية للدالة تسمى **التفاضل الضمنى** .

إذا أردنا مشتقة الدالة الأخرى g_2 المعرفة بالمعادلة (٧) ، فالطريقة هى نفسها . مناظرا لـ (٩) لدينا $x^2 + g_2^2(x) = 25$ لكل x فى نطاق g_2 . باجراء تفاضل ذلك وحل المعادلة الناتجة بالنسبة إلى $g'_2(x)$ نحصل على

$$g_2'(x) = \frac{-x}{g_2(x)} \qquad (١٤)$$

إذا أردنا ، يمكننا تعويض $-\sqrt{25-x^2}$ عن $g_2(x)$ ونحصل على

$$g_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

وهذا مانحصل عليه بإجراء تفاضل (٥) مباشرة . المعادلتان (١١) و (١٤) تعطيان الميل عند النقط على النصف الأعلى والنصف الأسفل ، على الترتيب ، للدائرة $x^2 + y^2 = 25$.

دعنا نوجد الآن المشتقة $h'(x)$ للدالة h المعرفة بالمعادلة $y^5 - x^2y + 2x^3 = -1$ فى (٦) .
بما أن $y = h(x)$ ، فإن المعادلة

$$h^5(x) - x^2h(x) + 2x^3 = -1$$

تكون صحيحة لكل x فى نطاق h ، وإذن

$$\frac{d}{dx}[h^5(x) - x^2h(x) + 2x^3] = \frac{d}{dx}(-1)$$

ومن ثم

$$\frac{d}{dx}h^5(x) - \frac{d}{dx}x^2h(x) + \frac{d}{dx}2x^3 = 0$$

الحد $x^2h(x)$ هو حاصل ضرب . نستخدم قاعدة حاصل الضرب لأيجاد مشتقته ، والمعادلة السابقة تصبح

$$5h^4(x)h'(x) - [x^2h'(x) + 2xh(x)] + 6x^2 = 0 \qquad (١٥)$$

مع أن $h(x)$ تظهر إلى القوة الرابعة فى (١٥) فان $h'(x)$ تظهر الى القوة الأولى فقط وذلك يمكننا من حل المعادلة بالنسبة إلى $h'(x)$. الكتابة تكون أبسط إذا استخدمنا dy/dx و y بدلا من $h'(x)$ و $h(x)$. بهذا التغيير فى أسلوب الكتابة ، (١٥) تصبح

$$5y^4\frac{dy}{dx} - \left(x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\right) + 6x^2 = 0$$

حل المعادلة بالنسبة إلى dy/dx ، نتبع الطريقة كما مع أى معادلة من الدرجة الأولى

$$(5y^4 - x^2)\frac{dy}{dx} = 2xy - 6x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - 6x^2}{5y^4 - x^2} = \frac{2x(y-3x)}{5y^4 - x^2}$$

أو بدلالة $h(x)$

$$h'(x) = \frac{2x[h(x) - 3x]}{5h^4(x) - x^2} \qquad (١٦)$$

المشتقة معطاة بدلالة $h(x)$ بالاضافة إلى x . وجود قيمة الدالة من مميزات التفاضل الضمنى وأحيانا يكون غير مناسب مع ذلك ، لدينا فى (١٦) مقدار جبرى للمشتقة التى لم يكن فى استطاعتنا

ايجادها لو أن التفاضل الصريح هو الطريقة الوحيدة المتاحة . وعلاوة على ذلك ، ربما تكون قيم الدالة معرفة لبعض قيم x ، حتى إذا لم تكن للكل ، فى هذه الحالة يمكن إيجاد قيم المشتقة لهذه الـ x's . مثال ذلك ، من الجدول ٥ يكون $h(-\frac{1}{2}) = -1$ ، واذن

$$h'(-\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)(-1+\frac{3}{2})}{5-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{19}$$

بالقول الحازم ، لاتكون لنا أحقية فى استخدام أى من قواعد المشتقة للحصول على (١٥) مالم نعلم مسبقا أن $h'(x)$ موجودة . يوجد دليل لتعيين ما إذا كانت الدالة المعرفة ضمنيا لها مشتقة ، لكن لايمكن إعطاؤه هنا . للدوال التى نعتبرها فى أمثلتنا ، المشتقات توجد فعلا ، وسنفترض هذه الحقيقة .

مثال ١ . أوجد معادلة المماس عند النقطة $(1,4)$ للمنحنى

$$y^2 + 2\sqrt{xy} = 21 - x^2 \qquad (١٧)$$

المعادلة تعين y كدالة f فى x . نحتاج إلى ميل المنحنى عند النقطة $(1,4)$ كما تعطيه مشتقة f . بدلا من تعويض $f(x)$ بدلا من y فى (١٧) سنجرى تفاضل (١٧) كما هى ، محتفظين فى ذاكرتنا أن $y = f(x)$ ومستخدمين dy/dx لـ $f'(x)$. التعبيران الجبريان $\sqrt{xy}$ و y^2 هما أيضا يكونان دالتان فى x يمكن إيجاد مشتقتيهما بقاعدة القوة المعممة . بإجراء تفاضل (١٧) بالنسبة إلى x والحل بالنسبة الى dy/dx ، يكون

$$\frac{d}{dx}(y^2 + 2\sqrt{xy}) = \frac{d}{dx}(21 - x^2),$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2(\tfrac{1}{2})(xy)^{-1/2}\frac{d}{dx}xy = -2x,$$

$$2y\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(xy)^{1/2}}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = -2x,$$

$$2y(xy)^{1/2}\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} + y = -2x(xy)^{1/2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x(xy)^{1/2} - y}{2y(xy)^{1/2} + x}.$$

هذا يعطى المشتقة عند أى نقطة (x,y) على المنحنى . عند النقطة $(1,4)$ يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(2) - 4}{2(4)(2) + 1} = -\frac{8}{17}$$

ومعادلة المماس هى

$$y - 4 = -\tfrac{8}{17}(x - 1)$$

أو $$8x + 17y - 76 = 0$$

مثال ٢ . المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ تعرف y كدالة فى x . أوجد d^2y/dx^2 و dy/dx عند النقطة $(3,4)$.

أوجدنا dy/dx من قبل ، لكن نكرر العمل مستخدمين الـ y والـ dy/dx . بإجراء تفاضل كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى x ، يكون

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}25,$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{١٨}$$

عندما $y = 4$ و $x = 3$ يكون $dy/dx = -\frac{3}{4}$. لايجاد d^2y/dx^2 نجرى تفاضل (١٨) ضمنيا بالنسبة الى x ، فنحصل على

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{y - x\,dy/dx}{y^2}$$

من (١٨) ، $dy/dx = -x/y$. لذلك

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

لانتوقع أنه يمكن عمل أحسن من ذلك . لكن فكرة بسيطة تمكننا من تبسيط النتيجة . لأن y و x تحققان المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ ، فالبسط يمكن ابداله بالعدد 25 ، ويكون $d^2y/Dx^2 = -25/y^3$. عند النقطة $(3,4)$ يكون $d^2y/dx^2 = -\frac{25}{64}$.

لاحظ أنه عند إيجاد d^2y/d^2x فى هذا المثال قد أجرينا تفاضل المشتقة الأولى العامة $-x/y$ وليست القيمة الخاصة $-\frac{3}{4}$.

مثال ٣ . المعادلة $y = x^3 + 2x - 7$ تعرف x ضمنيا كدالة فى y . أوجد dx/dy .

بالاحتفاظ فى ذاكرتنا أن x هى دالة فى y ، نجرى تفاضل كل من طرفى المعادلة بالنسبة إلى y ، فنحصل على

$$1 = 3x^2\frac{dx}{dy} + 2\frac{dx}{dy}$$

وإذن $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 2}$$

لدوال كثيرة f ، المعادلة

$$y = f(x) \tag{١٩}$$

تعرف أيضاً x ضمنيا كدالة فى y : $x = g(y)$. إذا كانت g و f قابلتين للتفاضل ، فإن مشتقة g يمكن إيجادها بدون حل (١٩) بالنسبة الى x وذلك بإجراء تفاضل المعادلة ضمنيا بالنسبة إلى y . مثال ٣ يوضح هذه الطريقة . هذه هى أفضل طريقة لمعالجة معادلة خاصة ، لكن للأغراض النظرية ، النظرية الآتية ، التى هى صياغة لهذه الطريقة ، مفيدة

٣ - ٢٢ نظرية . إذا كانت المعادلة $y = f(x)$ تعرف x ضمنيا كدالة فى y، أى $x = g(y)$ ، فان

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

بفرض وجود المشتقات وبفرض أن $f'(x) \neq 0.$. بالرموز التفاضلية هذه تصبح

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

البرهان . أجر تفاضل كل من طرفى المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة الى y . بما أن x دالة فى y ، فان $f(x)$ يجب أن تفاضل بقاعدة السلسلة . بذلك نحصل على

$$1 = f'(x)\,\frac{dx}{dy}$$

وإذن $dx/dy = 1/f'(x)$ ، أو بأسلوب آخر

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

عندما نستخدم الرموز التفاضلية يجب أن نكون حريصين لأن نستخدم لكل x القيمة المناظرة لـ y المعطاة بالمعادلة $y = f(x)$. فى مثال ٣ لاحظ أن مقام الجواب هو dy/dx ، وهذا يتفق مع النظرية .

مسائل

معظم المعادلات الآتية تعرف ضمنيا دالة أو أكثر فى x . عندما يكون ذلك ، أوجد المقدار الجبرى الذى يعرف هذه الدوال صراحة واعط نطاق الدالة .

١ - $7y - x = 14$ ٢ - $xy + y = x$ ٣ - $3y^2 = -x$ ٤ - $y^3 - x = 0$

٥ - $x/y + y = -5$ ٦ - $x^2 - y^2 = 9$ ٧ - $y^2 = x^3$ ٨ - $5x^2 + y^4 = -1$

٩ - $x^2 + y^2 = 0$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمنياً كدالة فى x . أوجد dy/dx بطريقتين : الأولى بإجراء التفاضل الضمنى ، والثانية بحل المعادلة لـ y بدلالة x واجراء تفاضل الدالة الصريحة .

١٠ - $3x + 2y = 8$
١١ - $y/x + 4y = 3x$
١٢ - $y^2 - 5x = 2$
١٣ - $y^3 = x$
١٤ - $6x^2 - 4y^2 = 24$
١٥ - $y^2 = (2x-1)^2 + (5x)^2$
١٦ - $\sqrt{xy} + x^2 = y$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمنيا كدالة فى x . أوجد dy/dx بإجراء التفاضل الضمنى .

١٧ - $7y - x = 14$
١٨ - $y^2 = 4px$
١٩ - $2x^2 + y^2 = 8$
٢٠ - $x^2 - y^2 = 4$
٢١ - $y^2 = x^3$
٢٢ - $xy = 1$
٢٣ - $xy - 3x^2 = 7$
٢٤ - $x^2y + x^3 = -2$
٢٥ - $y^2 = (x-3)^2(2x-1)$
٢٦ - $x = 30y + 10y^3 - 6y^5$
٢٧ - $x^2 + xy + y^2 = 9$
٢٨ - $x^2y^3 = 6$
٢٩ - $x^2 + y^2 = x^2y^2$
٣٠ - $x^3 + x^2y - 3y^2 = 0$
٣١ - $xy(x+y) = 8$
٣٢ - $x^3 - 6xy - 3y^3 = 5$
٣٣ - $2x^2 - y^2 + y^3 = 3x$
٣٤ - $(x+y)^3 + (x-y)^3 = x^2 + y^2$
٣٥ - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$
٣٦ - $x = \sqrt{y} - \sqrt[3]{y}$
٣٧ - $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
٣٨ - $y^2 = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
٣٩ - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
٤٠ - $\frac{x}{y} - 3y = 2x$
٤١ - $\frac{x+y}{x-y} = x$
٤٢ - $\frac{x^2}{x+y} = 1 - y^2$
٤٣ - $\sqrt[3]{xy} + y^2 = x$
٤٤ - $\sqrt{\frac{x}{y}} + y = x^3$
٤٥ - $x = \frac{2+\sqrt{y}}{2-\sqrt{y}}$
٤٦ - $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 9$

أوجد معادلات المماسات والأعمدة للمنحنيات الآتية عند النقط المعطاة :

٤٧ - $4x^2 + 3y^2 = 12;\ (\frac{3}{2},1)$
٤٨ - $y^2 - 2xy = -8;\ (3,2)$
٤٩ - $xy^2 - y = x + 4;\ (0,-4)$
٥٠ - $3x^2 - x^2y + 2y^2 = 18;\ (1,3)$
٥١ - $x^3 - xy + y^3 = -5;\ (1,-2)$
٥٢ - $(x-y)^2 = 2x + 6;\ (5,1)$
٥٣ - $(x+y)^4 = x - y;\ (0,-1)$
٥٤ - $\frac{x-y}{x+2y} = -5;\ (3,-2)$
٥٥ - $x - \sqrt{xy} = 2y;\ (8,2)$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمنياً كدالة فى x . أوجد d^2y/dx^2 و dy/dx باجراء التفاضل الضمنى

٥٦ـ $y^2 = 4px$ ٥٧ـ $x^2 - y^2 = a^2$ ٥٨ـ $x^4 + y^4 = 8$ ٥٩ـ $xy + y^2 = 2$

٦٠ـ $x^2 - xy + 2y^2 = 1$ ٦١ـ $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ٦٢ـ $x^3 - xy^2 + y^3 = 8$

كل من المعادلات الآتية تعرف y ضمنياً كدالة فى x . أوجد قيم dy/dx و d^2y/dx^2 عند النقط المعطاة باجراء التفاضل الضمنى .

٦٣ـ $x^2 - 3y^2 = 13;\ (5,2)$ ٦٤ـ $x^3 + y^3 = 2a^3;\ (a,a)$

٦٥ـ $y^2 + 3xy = 22;\ (3,2)$ ٦٦ـ $y^2 = x^2(1 + 2x);\ (4,12)$

٦٧ـ أثبت أن الدائرتين $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 25 = 0$ و $x^2 + y^2 + 2x + y = 10$ متماستان عند النقطة $(2,1)$ ، أى لها مماس مشترك عند هذه النقطة .

المنحنيان يكونان متعامدين إذا كان مماساهما عند كل من نقط تقاطعهما متعامدين . أثبت أن ازواج المنحنيات الآتية متعامدة .

٦٨ـ $y^2 = 6x + 9,\ y^2 = 9 - 6x$ ٦٩ـ $3x^2 + y^2 = 24,\ x^2 - 3y^2 = -12$

٧٠ـ $xy = 2,\ x^2 - y^2 = 3$ ٧١ـ $x^2 + y^2 - 4x = 0,\ x^2 + y^2 - 4y = 0$

٧٢ـ أوجد النقطة الواقعة على القطع المكافىء $(y - 4)^2 = x + 2$ حيث المماس يكون موازيا للخط المستقيم $3x + 6y = -2$.

٧٣ـ المنحنيان $y^2 = 4b^2 + 4bx$ و $y^2 = 4a^2 - 4ax$ هما قطعان مكافئان لجميع قيم b و a الموجبة . خطط الاشكال البيانية عندما $a = 2$ و 4 ، 5 و $b = 2$. اثبت أن كل منحنى من إحدى فئتى القطوع المكافئة يكون عموديا على كل منحنى من الفئة الأخرى . (أنظر المسألة ٦٨ لتعريف التعامد)

٧٤ـ أثبت أن معادلة المماس للقطع المكافىء $y^2 = 4px$ عند النقطة (x_1, y_1) هى $y_1y = 2p(x_1 + x)$.

٧٥ـ أثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة (x_1, y_1) هى

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

كل من المعادلات الآتية تعرف x ضمنياً كدالة فى y . أوجد dx/dy بإجراء التفاضل الضمنى . عندما يكون ممكنا ، حقق إجابتك بحل المعادلة لـ x بدلالة y ثم إيجاد dx/dy مباشرة .

٧٦ـ $y = 2x - 3$ ٧٧ـ $y = x^3 + 5$ ٧٨ـ $y = 6\sqrt{x}$

٧٩ـ $y = 2x^3 - x^2 + 6x$ ٨٠ـ $y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

٨١ـ لقد رأينا فى دراستنا أن المعادلة $x^2 + y^2 = 25$ تعرف دالتين فى x ، هما $g_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ و $g_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

أوجد دالة ثالثة فى x تعرف بالمعادلة (إرشاد : ستكون منفصلة) .

الفصل الرابع

تطبيقات المشتقة

٤ - ١

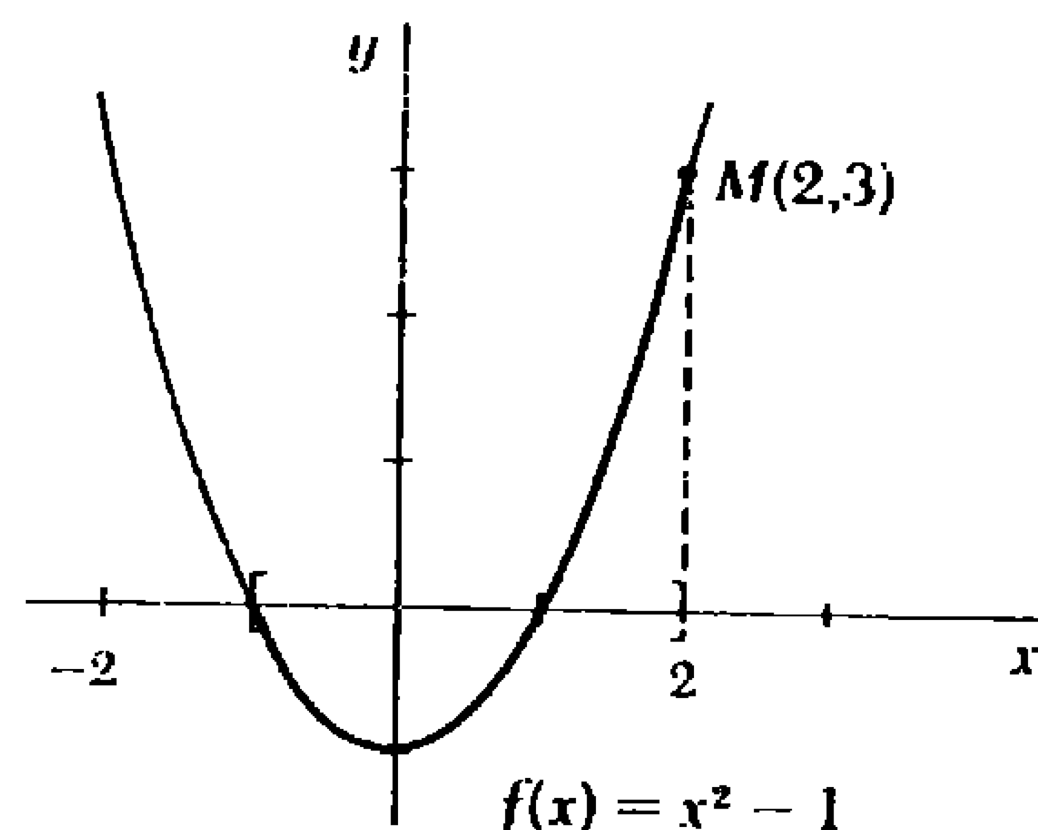
النهايات العظمى والنهايات الصغرى

مهندس الطيران يصمم جناح الطائرة للحصول على النهاية العظمى للرفع . أمر جوهرى للصانع هو كيف يقلل تكاليفه الانتاجية . الحلول لهذه المشاكل ومايشابهها تشمل إيجاد أكبر وأصغر قيمة للدالة فوق مدى معين للمتغير المستقل . المشتقة هى الأداة القوية لحل هذه المشاكل . الجزء الأول من هذا الفصل يدرس نظرية النهايات العظمى والنهايات الصغرى للدوال والموضوع المتعلق بها لتخطيط المنحنى . فى الجزء الآخر نطبق النظرية على مسائل عملية ونعطى تطبيقات أخرى للمشتقة .

الدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^2 - 1$ مخططة فى شكل ٤ - ١ . إذا وجهنا إنتباهنا الى قيم x فى الفترة المقفلة $[1,2]$ ، نرى أن أعلى نقطة على الشكل البيانى هى $(2,3)$ وأن أدنى نقطة هى $(0, -1)$. هذا يعنى أنه لجميع قيم x فى الفترة $[-1, 2]$ يكون $f(x) \geqslant f(0) = -1$ و $f(x) \leqslant f(2) = 3$.

٤ - ١ تعريف . لتكن f هى دالة معرفة فى فترة I ، يمكن أن تكون لانهائية . النقطة $M(c,f(c))$ **تسمى نقطة قيمة عظمى على الشكل البيانى للدالة f فى الفترة I** إذا كانت c فى I وكان : $f(x) \leqslant f(c)$ لجميع x فى I . الاحداثى الصادى $f(c)$ للنقطة M **يسمى القيمة العظمى للدالة f فى الفترة I** ، وهذه القيمة العظمى يقال إنها تحدث عند c . نقط القيمة الصغرى والقيمة الصغرى للدالة f فى الفترة I تعرف بالمثل .

القيمة العظمى للدالة $f(x) = x^2 - 1$ فى الفترة $[-1, 2]$ هى 3 وتحدث عند 2 : (شكل ٤ - ١) . القيمة الصغرى هى -1 ، وتحدث عند 0 . لاحظ أن القيمة العظمى أو الصغرى يقال إنها تحدث عند الاحداثى x للنقطة المناظرة على المنحنى .

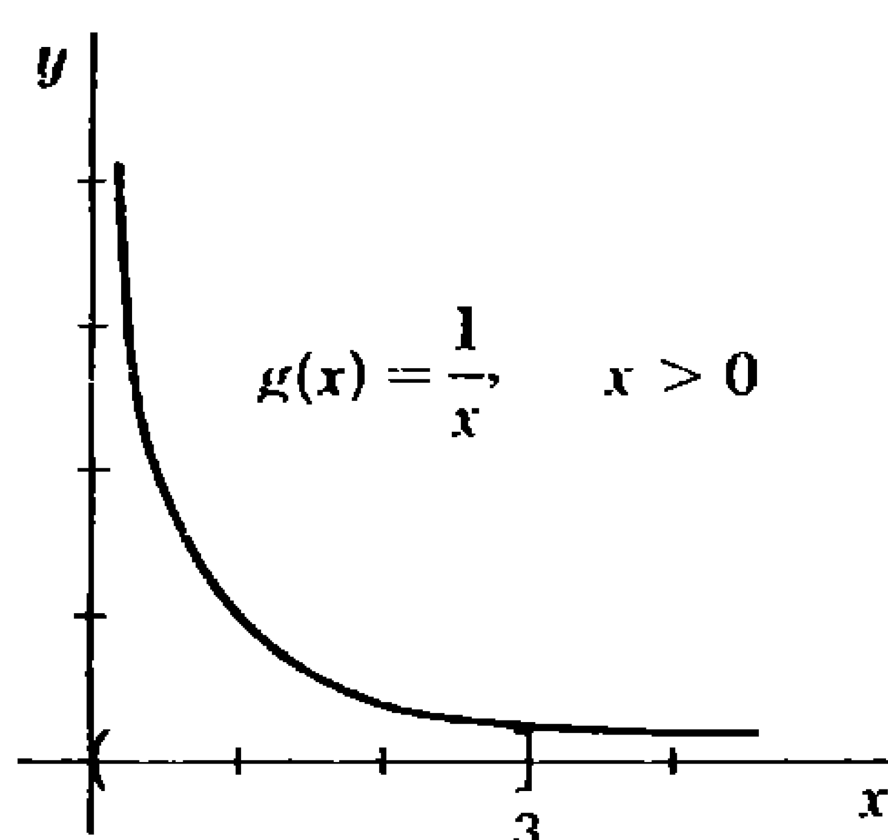


شكل ٤ ـ ١

1, 3− هما القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة *f* فى الفترة [*2 ,1*−] وهما تحدثان عند 2 و *0*

القيمة نفسها هى الاحداثى *y* . القيمة القصوى للدالة فى فترة هى أما قيمتها العظمى أو الصغرى . الدالة فى شكل ٤ ـ ١ لها قيمتان قصويان فى الفترة [*2 , 1*−] هما *3* و *1* − .

الدالة قد لايكون لها قيمة عظمى أو صغرى فى فترة ما . الدالة *g* المعرفة بـ $g(x) = 1/x$ ، حيث $x > 0$ ، ليس لها قيمة عظمى فى الفترة [*0,3*) (شكل ٤ ـ ٢) ، ولها قيمة صغرى $\frac{1}{3}$ تحدث عند *3* .



شكل ٤ ـ ٢

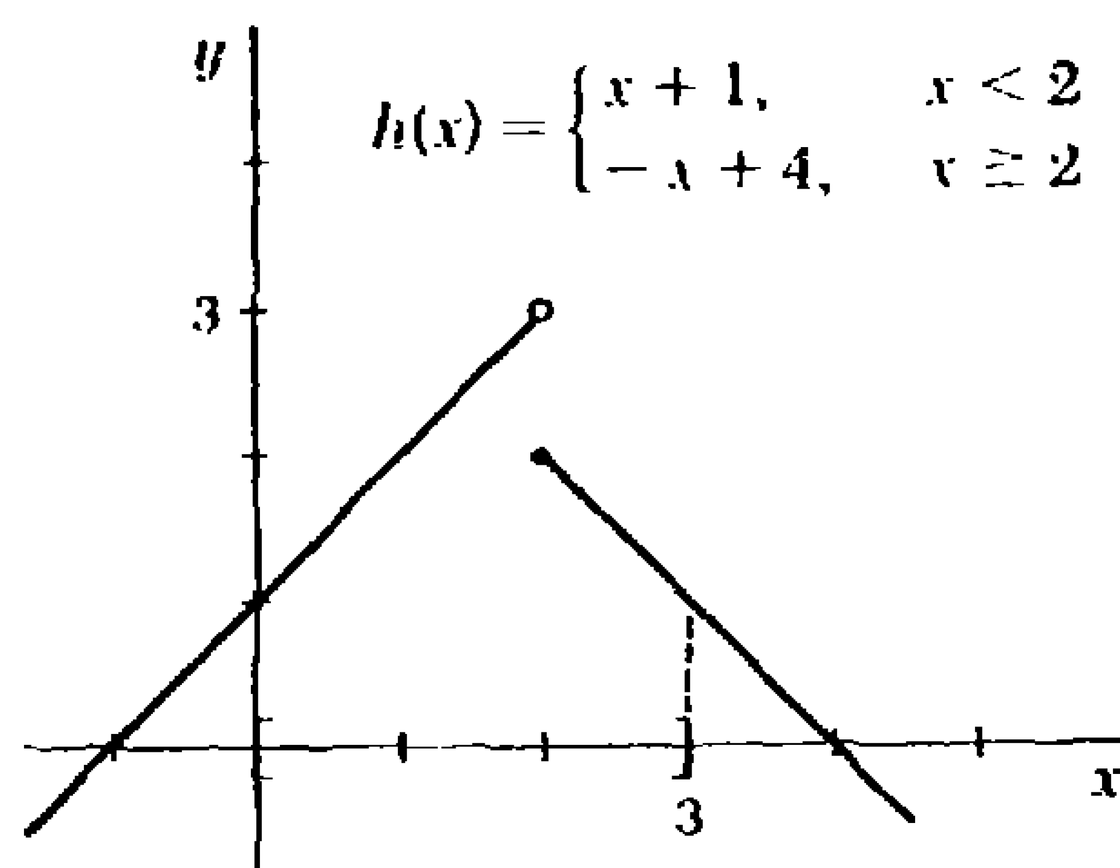
g ليس لها قيمة عظمى فى الفترة *[0,3)*

ليس من الضرورى أن قيم الدالة تصبح لانهائية لكى لاتوجد قيمة عظمى . الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ليس لها قيمة عظمى فى الفترة نصف المفتوحة *(1, 2*−] . قيم الدالة أقل من *3* لجميع قيم *x* فى الفترة وتكون قريبة من *3* عندما تكون *x* قريبة من *2* ، لكن لاتوجد *c* فى الفترة *(1, 2*−] يكون عندها *f (x)* تساوى *3* . لكن الدالة لها قيمة صغرى فى الفترة عند *0* .

أيضاً ، لتكن *h* هى الدالة المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2, \\ -x + 4, & x \geqslant 2, \end{cases}$$

ولتكن $[0,3]$ هى الفترة المعطاة (شكل ٤ ـ ٣) . لاتوجد قيمة عظمى للدالة h فى الفترة $[0,3]$. القيمة الصغرى هى 1 وتحدث عند 0 وأيضا عند 3 . الدالة يمكن أن يكون لها قيمة صغرى لكن هى واحدة ، اذا وجدت ، وهذا المثال يوضح أن القيمة الصغرى يمكن حدوثها عند أكثر من عدد واحد . يمكن أن توجد نقط « أدنى » متعددة ، جميعها على نفس المسافة من المحور السينى .



شكل ٤ ـ ٣

h ليس لها قيمة عظمى فى الفترة $[0,3]$. القيمة الصغرى فى الفترة $[0,3]$ هى 1 .
وهى تحدث عند 0 وأيضا عند 3.

المشتقة تمكننا من إيجاد القيم القصوى لدوال كثيرة . فى هذا البند سنرى كيف نستخدمها .

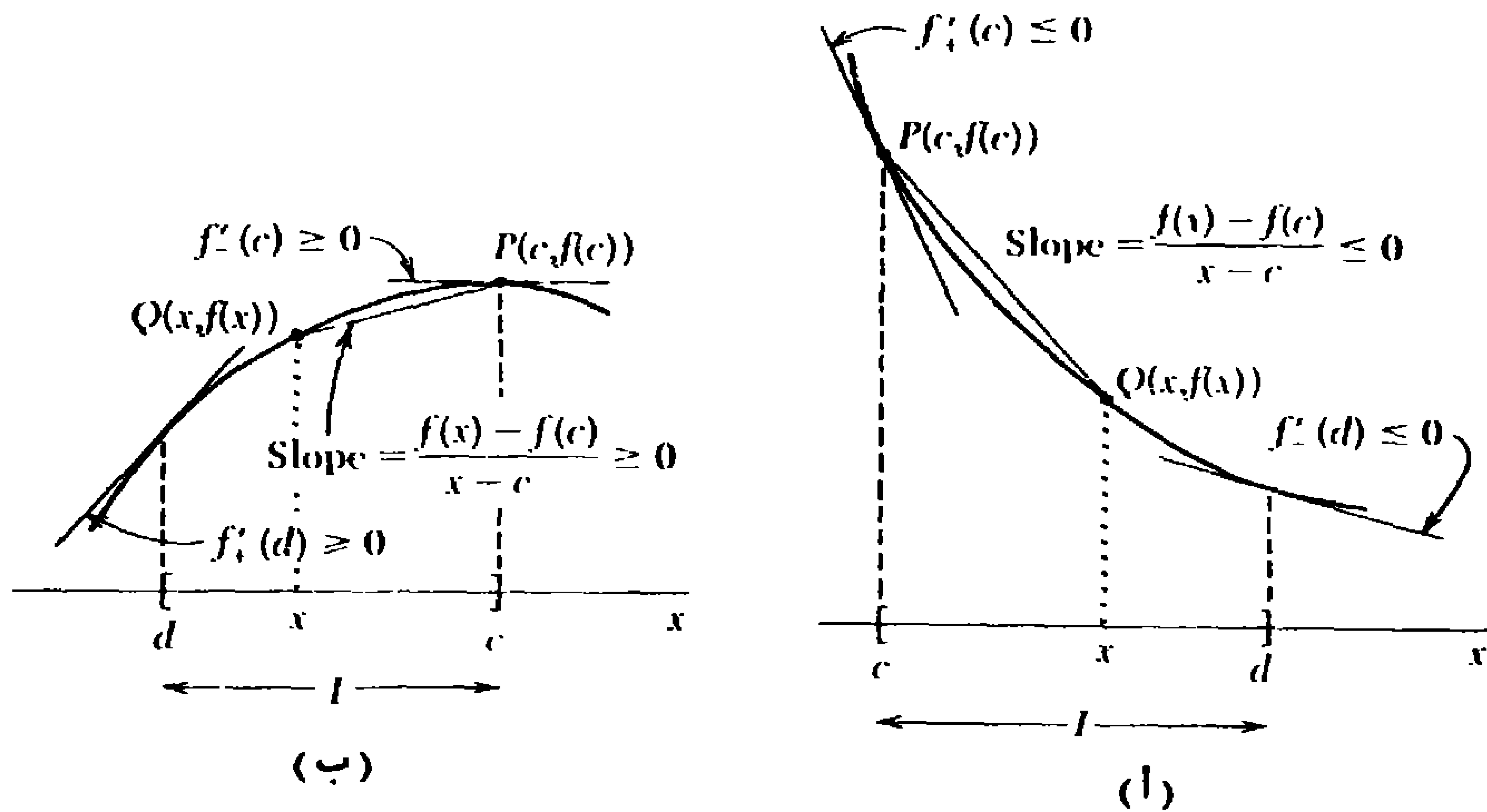
٤ ـ ٢ تمهيدية . لتكن الدالة f معرفة فى الفترة I ، التى قد تكون لانهائية ، ولنفرض أن f لها قيمة عظمى فى I عند c . اذا كانت c النقطة الطرفية اليسرى للفترة I وكانت $f'_+(c)$ موجودة ، فان $f'_+(c) \leqslant 0$.

إذا كانت c هى النقطة الطرفية اليمنى للفترة I وكانت $f'_-(c)$ موجودة ، فان $f'_-(c) \geqslant 0$. توجد عبارات مشابهة للقيمة الصغرى .

من السهل تذكر الاحتمالات بالنظر الى شكل مناسب ، كما فى شكل ٤ ـ٤ .

البرهان . لتكن I هى الفترة ولتكن f لها قيمة عظمى فى I عند c . فتكون $f(x) - f(c) \leqslant 0$ و $f(x) \leqslant f(c)$ لجميع x فى I . نفرض أن c هى النقطة الطرفية اليسرى للفترة I (شكل ٤ ـ ٤) .
فيكون $x - c > 0$ لجميع $x \neq c$ فى I ، ومن ثم

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$



شكل ٤ ـ ٤

(أ) إذا كانت القيمة العظمى للدالة f فى الفترة I تحدث عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة I فإن : $f_+(c) \leqslant 0$ (ب) إذا كانت القيمة العظمى للدالة f فى الفترة I تحدث عند النقطة الطرفية اليمنى للفترة I ، فان $f'_-(c) \geqslant 0$

هندسياً هذا معناه أن ميل الوتر PQ يكون سالباً أو صفراً . بما أن $f'_+(c)$ موجودة ، فانه من نظرية ٢ ـ ٢٣ (ثانيا) يكون

$$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$$

لنفرض الآن أن c هى النقطة الطرفية اليمنى للفترة I (شكل ٤ ـ ٤ ب) . فيكون $x - c < 0$ لجميع $x \neq c$ فى الفترة I وإذن

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

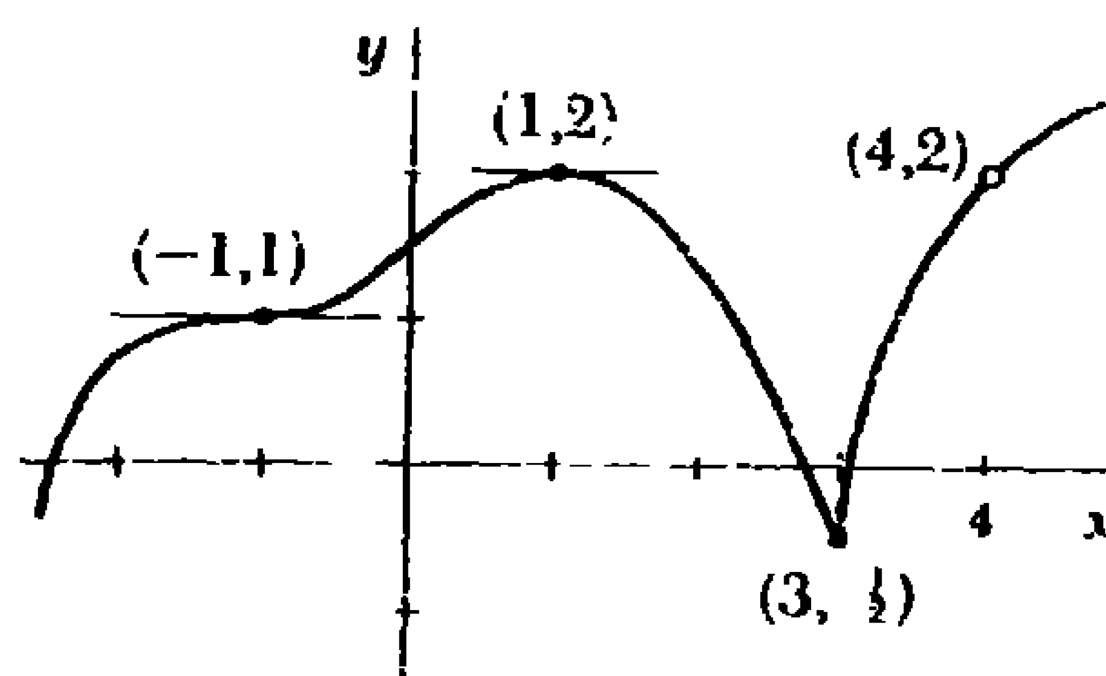
هذا يعنى أن ميل الوتر PQ يكون موجباً أو صفراً ، ومن ثم

$$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

فالبرهان للقيمة الصغرى مماثل .

العدد c يسمى عدداً حرجاً للدالة f إذا كان (١) f معرفةعند c ، (٢) $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ لاتوجد . فمثلا ، 0 عدد حرج للدالة $f(x) = x^2 - 1$ فى شكل ٤ ـ ١ ، 2 هو عدد حرج للدالة h فى شكل ٤ ـ ٣ . الدالة المخططة فى شكل ٤ ـ ٥ لها 3 و $1,1$ - أعداد حرجة ، إذ أن :

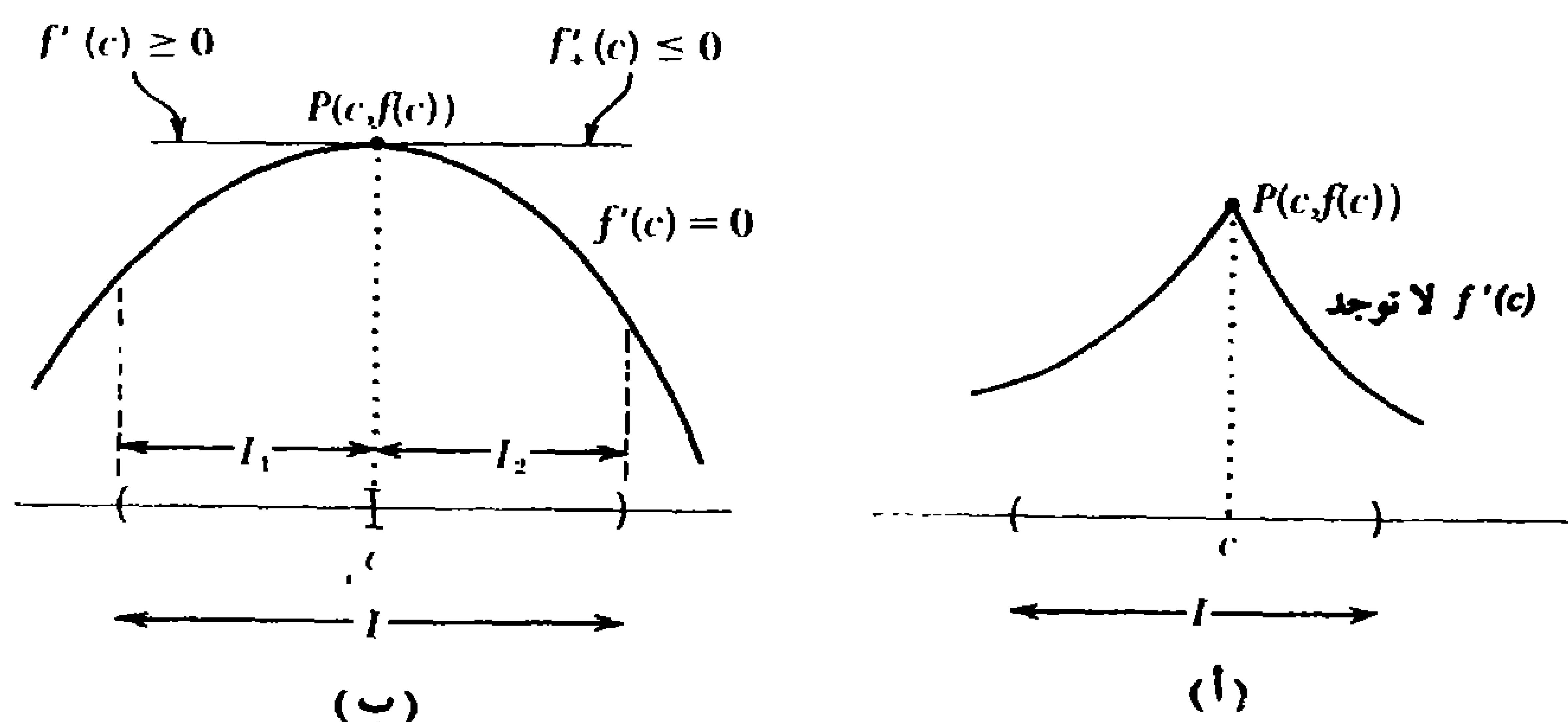
$f'(-1) = f'(1) = 0$ و $f'(3)$ لاتوجد . ورغم أن $f'(4)$ غير موجودة إلا أن 4 ليست عددا حرجا ، لأن f غير معرفة هناك . النظرية الآتية أساسية .



شكل ٤ ـ ٥
$-1, 1, 3$ أعداد حرجة لكن 4 ليست كذلك .

٤ ـ ٣ نظرية . لتكن f دالة معرفة فى فترة I ، قد تكون لانهائية . أى قيمة قصوى للدالة f فى الفترة I تحدث داخل الفترة I يمكن حدوثها فقط عند عدد حرج .

البرهان . لتكن f لها قيمة قصوى عند العدد c داخل الفترة I ولنفرض أن القيمة القصوى هى قيمة عظمى . اذا كانت $f'(c)$ لاتوجد ، فان c هو عدد حرج للدالة f بالتعريف (شكل ٤ ـ ٦ (أ)) . لنفرض الآن أن $f'(c)$ توجد . العدد c يقسم الفترة I إلى فترتين جزئيتين I_2 و I_1 حيث c النقطة المشتركة بينهما (شكل ٤ ـ ٦ (ب)



شكل ٤ ـ ٦
عند قيمة قصوى داخلية اما $f'(c)$ لا توجد واما $f'(c) = 0$

القيمتان العظميان للدالة f فى الفترة الجزئية I_1 وفى الفترة الجزئية I_2 كلاهما يحدثان عند c. بما أن c هى النقطة الطرفية اليمنى الجزئية I_1 والنقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية I_2 ، فإن التمهيدية السابقة تعطى $f'_+(c) \leqslant 0$ و $f'_-(c) \geqslant 0$ لكن $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$. إذن $f'(c) = 0$

وتكون c عددا حرجا . البرهان مماثل فى حالة ما إذا كانت القيمة القصوى هى قيمة صغرى .

هذه النظرية لاتقل أن الدالة f يجب أن يكون لها قيمة قصوى ، إنما هى تخبرنا فقط أين تحدث القيم القصوى الداخلية ان حدثت . لاتوجد طريقة عامة لتعيين ما إذا كانت الدالة لها قيمة قصوى فى فترة ما ، لكن النظرية الآتية تجيب عن السؤال للطائفة الكبرى للدوال المتصلة .

٤ ـ ٤ نظرية . اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة المحدودة $[a,b]$ ، فإنه يكون لها قيمة عظمى وقيمة صغرى فى الفترة . أى أنه ، يوجد عددان u و v فى $[a,b]$ بحيث أن : $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$ لجميع x فى $[a,b]$.

إذا أخذنا فى الاعتبار أن الشكل البيانى لدالة متصلة هو شكل بدون ثقوب أو قفزات ، فان النظرية تكون منطقيا واضحا . إذا تحركنا على المنحنى من $(a, f(a))$ إلى $(b, f(b))$ فإنه يجب أن توجد على الأقل نقطة عليا واحدة ونقطة سفلى واحدة على المنحنى . بالرغم من أن النظرية تبدو واضحة إلا أن البرهان الذى يغطى جميع الدوال ليس سهلا ، وسنفترض صحة النظرية . شكلا ٤ ـ ٣ ، ٤ ـ ٢ يوضحان أنه إذا كانت الدالة منفصلة أو كانت الفترة غير مقفلة ، فقد لاتوجد قيمة عظمى . بربط النظريتين ٤ ـ ٣ ، ٤ ـ ٤ يكون لدينا النظرية الآتية :

٤ ـ ٥ . نظرية الدالة المتصلة فى فترة محدودة مقفلة لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة . هاتان القيمتان القصويان يمكن حدوثهما فقط عند الاعداد الحرجة داخل الفترة أو عند النقطتين الطرفيتين .

البرهان . من نظرية ٤ ـ ٤ ، الدالة f لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة . تلك التى لاتحدث عند نقطة طرفية يجب أن تحدث داخل الفترة ، ومن نظرية ٤ ـ ٣ عند عدد حرج هناك .

هذه النظرية تحدد بدقة احتمالات مواقع القيم القصوى للدالة المتصلة فى فترة محدودة مقفلة . لايجادها ، نحتاج فقط إلى البحث عن الأعداد الحرجة ، وهى عادة عددها محدود ، وأن نلتفت أيضا الى النقطتين الطرفيتين . فى مثال واقعى يمكننا إتباع الخطوات الآتية . نفرض أن الفترة المقفلة هى $[a,b]$ وأن f هى الدالة . نوجد جميع الأعداد الحرجة $c_1, c_2, \ldots, c_n$ الواقعة داخل الفترة $[a,b]$. القيمتان العظمى والصغرى للدالة f فى الفترة $[a,b]$ يمكن حدوثهما فقط عند عدد أو أكثر من هذه الأعداد الحرجة أو عند a أو عند b . نحسب

$$f(a),\ \ f(c_1),\ \ f(c_2),\ .\ .\ .\ .\ ,\ \ f(c_n),\ \ f(b)$$

القيمة الأكبر تكون القيمة العظمى والأقل هى القيمة الصغرى . اذا لم توجد أعداد حرجة ، فالقيمة العظمى يجب حدوثها عند احدى النقطتين الطرفيتين والقيمة الصغرى عند الأخرى . فائدة هذه

الطريقة تكون محدودة اذا كان هنالك أعداد حرجة كثيرة ، لكن رغم ذلك ، عمليا ، يمكننا عادة ايجاد أكبر وأصغر $f(c)$ وبالتالى تعيين القيمتين العظمى والصغرى .

مثال ١ . أوجد القيمتين العظمى والصغرى فى الفترة $[-1,3]$ للدالة f المعرفة بـ $f(x) = x^4 - 8x^2$.

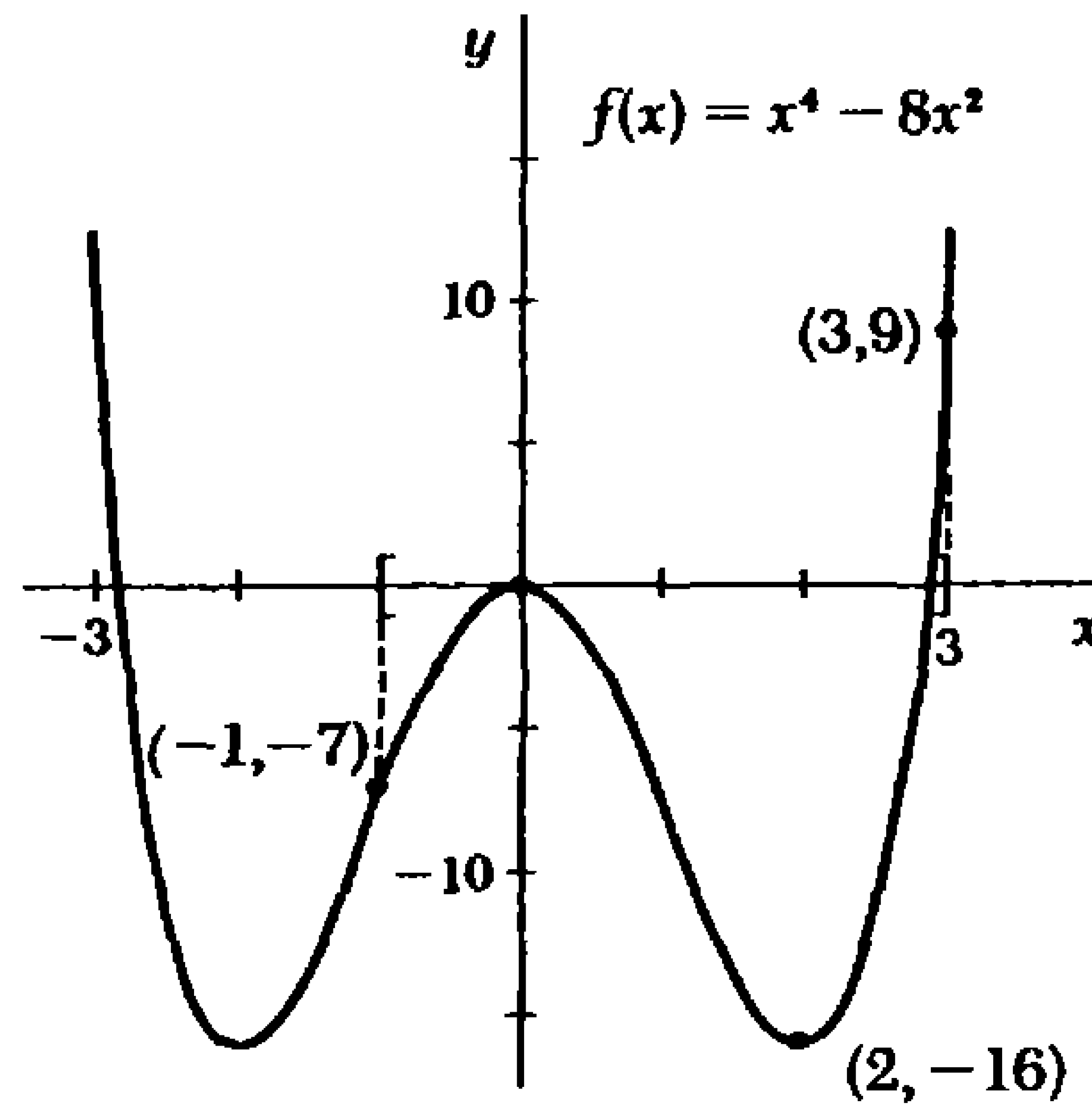
هذه الدالة ، دالة كثيرة حدود ، فهى متصلة فى كل مكان ولذلك لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة . لايجاد الأعداد الحرجة ، نعبر عن المشتقة فى صورة حاصل ضرب

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$$

المشتقة موجودة لجميع قيم x ، وعليه فالأعداد الحرجة للدالة f هى فقط قيم x حيث $f'(x) = 0$ فهى $2 , 0 , -2$ [نظرية ١ ـ ١٩ تؤكد أنه لاتوجد أصفار أخرى للمشتقة $f'(x)$] . نحسب قيم الدالة f عند الأعداد الحرجة الواقعة داخل الفترة $[-1, 3]$ وعند النقطتين الطرفيتين :

$$f(-1) = -7, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = 9$$

القيمتان العظمى والصغرى للدالة f فى الفترة $[-1, 3]$ هما أكبر وأصغر هذه القيم . القيمة العظمى هى 9 وتحدث عند 3 . القيمة الصغرى هى -16 وتحدث عند 2 . الشكل البيانى للدالة f مخطط فى شكل ٤ ـ ٧ ، حيث المقياس على المحور الصادى مصغر لتوضيح السمة العامة للشكل البيانى .



شكل ٤ ـ ٧

القيمتان العظمى والصغرى للدالة f فى الفترة $[-1, 3]$ هما 9 و -16 .

مثال ٢ . أوجد القيمتين العظمى والصغرى فى الفترة $[-1,3]$ للدالة g المعرفة بـ $g(x) = x^{2/3}(x-2)^2$.

بما أن $g(x)$ دالة جبرية معرفة لجميع قيم x ، فهى متصلة فى كل مكان بنظرية ٢ ـ ٢٠ ، وإذن لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة $[-1, 3]$. من التعبير للمشتقة

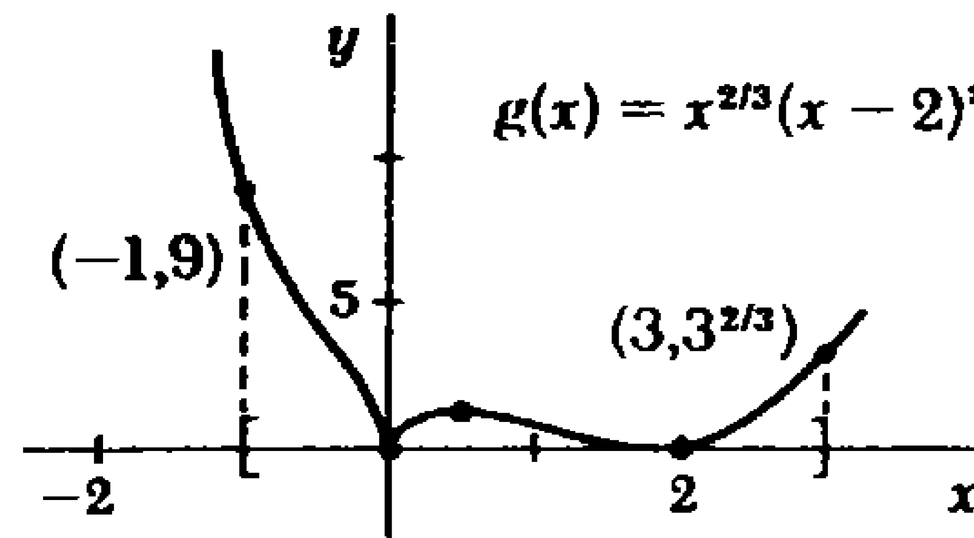
$$g'(x) = \frac{4(x-2)(2x-1)}{3x^{1/3}}, \qquad (١)$$

نرى أن $g'(x) = 0$ إذا كانت $x = \frac{1}{2}$ أو 2 . المشتقة معبر عنها فى (١) ككسر ، والبسط والمقام للكسر معرفان لجميع قيم x . وإذن الكسر معرف لجميع قيم x ماعدا تلك التى عندها يكون المقام صفرا . أى أن ، $g'(x)$ توجد لجميع قيم x ماعدا $x = 0$. الاعداد الحرجة للدالة g هى 2 و $\frac{1}{2}$ و 0 . بما أن

$$g(-1) = 9, \qquad g(0) = 0, \qquad g(\tfrac{1}{2}) = \frac{9}{2^{8/3}} \approx 1.42,$$

$$g(2) = 0, \qquad g(3) = 3^{2/3} \approx 2.08,$$

القيمة العظمى للدالة g هى 9 وتحدث عند -1 . القيمة الصغرى هى صفر وتحدث عند 0 وأيضاً عند 2 . الشكل البيانى للدالة مخطط فى شكل ٤ ـ ٨ .



شكل ٤ ـ ٨

القيمة العظمى للدالة g فى الفترة $[-1, 3]$ تحدث عند -1 والقيمة الصغرى تحدث عند 0 وعند 2 .

إيجاد الاعداد الحرجة يكون سهلا إذا عبرنا عن المشتقة فى صورة حاصل ضرب أو فى صورة خارج قسمة ببسط ومقام فى صورة عوامل .

لايوجد ضمان عام لوجود قيم قصوى للدوال المتصلة فى فترة مفتوحة يقارن مع ذلك الذى للفترات المقفلة . تحت شروط معينة يجب أن توجد قيمة قصوى لكن نؤجل دراسة ذلك الى أن نحتاج اليه فى بند ٤ ـ ٩ .

مسائل

عين ماإذا كانت الدالة لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة (الفترات) المعطاة . واذا كان كذلك فأوجد أين تحدثان .

١ ـ $f(x) = x^2 - 4x$ ، (أ) $[-3, 4]$ ، (ب) $[-3, 1]$ ٢ ـ $f(x) = 1 - x^2/2; [-2,4]$.

٣ ـ $g(x) = 3x + 2$ ، (أ) $[0, 5]$ ، (ب) $(0,5)$ ، (جـ) $(-\infty, \infty)$

٤ ـ $f(z) = z^3$ ، (أ) $[-2, 2]$ ، (ب) $(-2, 2)$ ٥ ـ $F(x) = 4; [0,3].$

٦ ـ $h(x) = 1/x$ ، (أ) $[\frac{1}{3}, 5]$ ، (ب) $[\frac{1}{4}, 5)$ ، (جـ) $[-4, -2]$ ، (د) $[-2, 2]$

٧ ـ $f(u) = u^2 + 6u; [-5,-1].$ ٨ ـ $f(x) = 3 - 5x - x^2; (-\infty,\infty).$

٩ ـ $f(t) = -3t - t^2$ ، (أ) $[-5, 2]$ ، (ب) $(-5, 2)$ ، (جـ) $[-5, 2)$

١٠ ـ $f(r) = r + 1/r$ ، (أ) $[\frac{1}{2}, 3]$ ، (ب) $(0, \infty)$

١١ ـ $u(x) = x^3 + 6x^2$ ، (أ) $[-1, 2]$ ، (ب) $[-8, 2]$

١٢ ـ $s(x) = x^2 - \frac{1}{6}x^3; [1,5]$

١٣ ـ $g(z) = 2z^3 - 9z^2 + 12z; [\frac{3}{2},4]$

١٤ ـ $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x - 3; [-2,2]$

١٥ ـ $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 1; [-3,2]$

١٦ ـ $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3; [-4,3]$

١٧ ـ $f(t) = |t|; [-3,3].$

١٨ ـ $g(x) = \sqrt{x-1}; [1,5]$

١٩ ـ $V(x) = x(a-2x)^2, a > 0; [0,a/2]$

٢٠ ـ $H(x) = (x^2 - 9)^2; [-3\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

٢١ ـ $G(y) = \dfrac{y-1}{y^2+8}; [-3,6]$

٢٢ ـ $f(t) = \begin{cases} -t-2, & t < 0, \\ 2t+1, & t \geq 0; [-3,1] \end{cases}$

٢٣ ـ $g(s) = \begin{cases} s^2, & s < 2, \\ -\frac{1}{2}(s-10), & s \geq 2; (-1,9) \end{cases}$

٢٤ ـ $g(x) = [x]; (1,2]$

٢٥ ـ $f(x) = x^{2/3}; [-3,3]$

٢٦ ـ $f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0; [-3,3] \end{cases}$

٢٧ ـ $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}; [0,4]$

28 $h(t) = \sin t; (-\infty,\infty)$

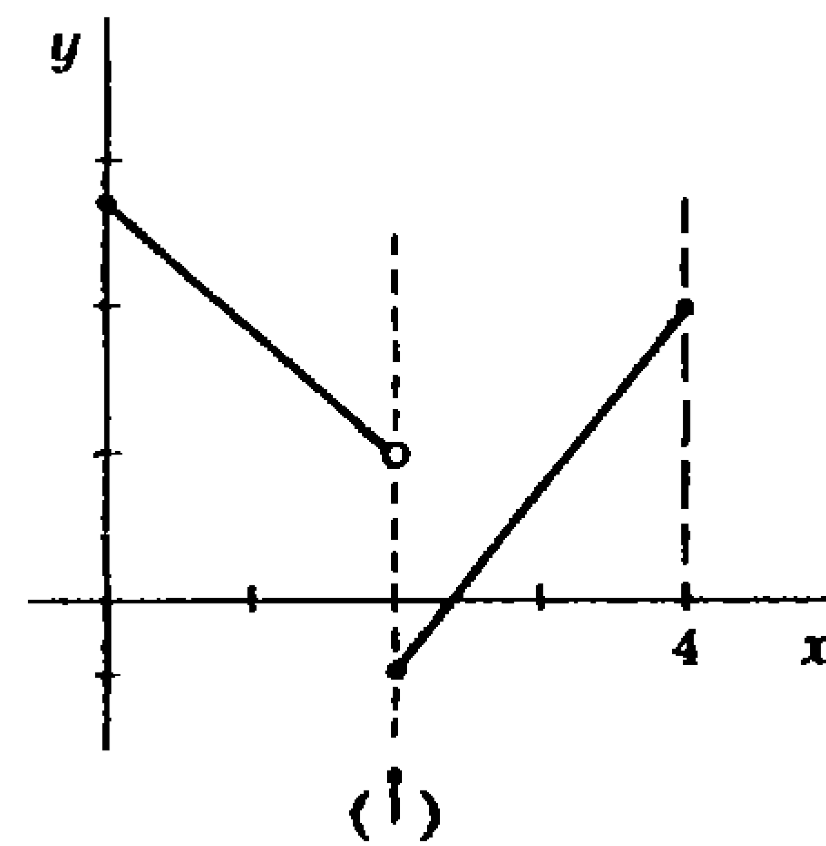
٢٩ ـ $f(x) = (x+1)^{1/3} - 2; [-3,0]$

٣٠ ـ $A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}, [0,r]$

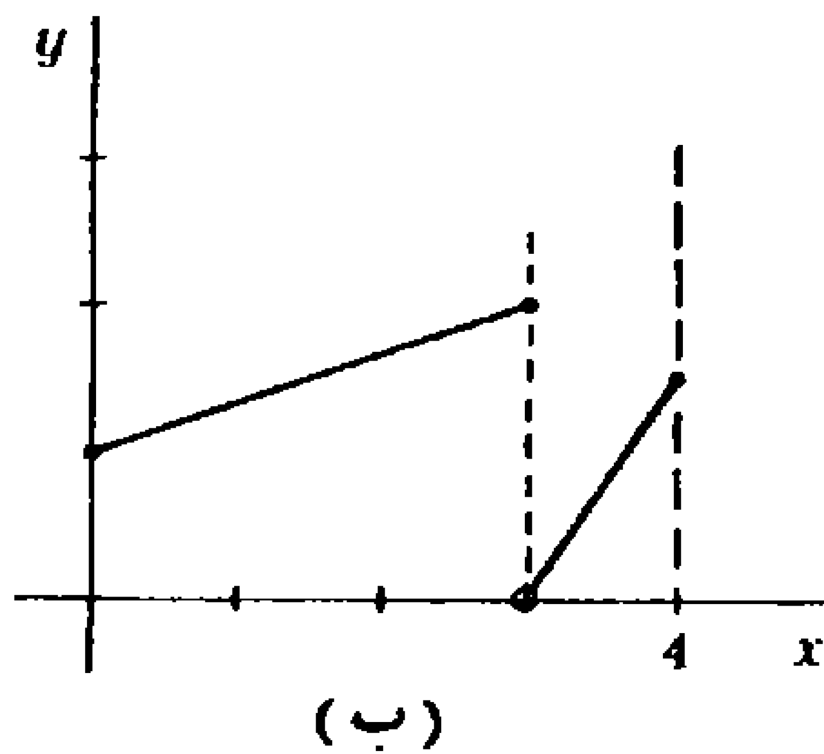
٣١ ـ $h(x) = x^{1/3}(x-4)^2; [0,5]$

٣٢ ـ الدالتان المخططتان فى شكل ٤ ـ ٩ منفصلتان فى الفترة المقفلة $[0,4]$. هل لهما قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة ، وإذا كان كذلك ، فأين تحدث هاتان القيمتان ؟

٣٣ ـ أين فى الفترة $[2, 5]$ يكون ميل المنحنى $y = -x^3 + 9x^2 + 2$ أكبر مايمكن ؟ أصغر مايمكن ؟



(أ)



(ب)

شكل ٤ ـ ٩

٣٤ - أوجد القيمتين العظمى والصغرى لميل المنحنى $y = x^3 + 6x^2$ فى الفترة [$-5 , 0$] . فى الفترة ($-5 , 0$) .

٣٥ - مستطيل له رأسان على المحور السينى والرأسان الآخران فوق المحور السينى على القطع المكافىء $y = 25 - x^2$. أوجد تعبيراً لمساحة المستطيل بدلالة الاحداثى السينى للرأس العلوى الأيمن . فوق أى فترة يمكن أن تتغير x ؟ (أجز الحالتين النهائيتين التى فيهما يكون المستطيل قطعة من خط مستقيم بمساحة صفر) . هل توجد قيمة عظمى لدالة المساحة فى هذه الفترة ؟ . إذا كان كذلك ، فأوجدها .

٣٦ - أوجد تعبيراً بدلالة x للمسافة بين النقطة $P(x,y)$ على الخط المستقيم $x + 2y - 4 = 0$ والنقطة $(0,1)$. هل دالة المسافة هذه لها قيمتان عظمى وصغرى فى الفترة [$-1 , 3$] ؟ . إذا كان كذلك ، فأوجدهما .

٣٧ - شروط النظرية ٤ - ٤ تكفى لوجود القيم القصوى فى فترة محدودة . وضح أن الشروط ليست ضرورية بإعطاء أمثلة حيث النتيجة تكون صحيحة رغم أن الدالة تكون غير متصلة أو الفترة لاتكون مقفلة .

٣٨ - أثبت أن الدالة لايمكن أن يكون لها قيمتان عظميان فى فترة . أو بمعنى آخر ، لايمكن أن توجد أكثر من قيمة عظمى واحدة ، إلا إنها يمكن أن تحدث عند أكثر من عدد واحد . وضح بيانيا مثل هذا الحدوث المتكرر .

٣٩ - اذكر وبرهن منطوق الجزء الثانى من التمهيدية ٤ - ٢ الخاص باشارة المشتقة للدالة التى قيمتها الصغرى تحدث عن نقطة طرفية .

٤٠ - أكمل برهان النظرية ٤ - ٣ باثبات أنه إذا كانت القيمة القصوى للدالة f عند c هى قيمة صغرى ، فإن c تكون عدداً حرجاً .

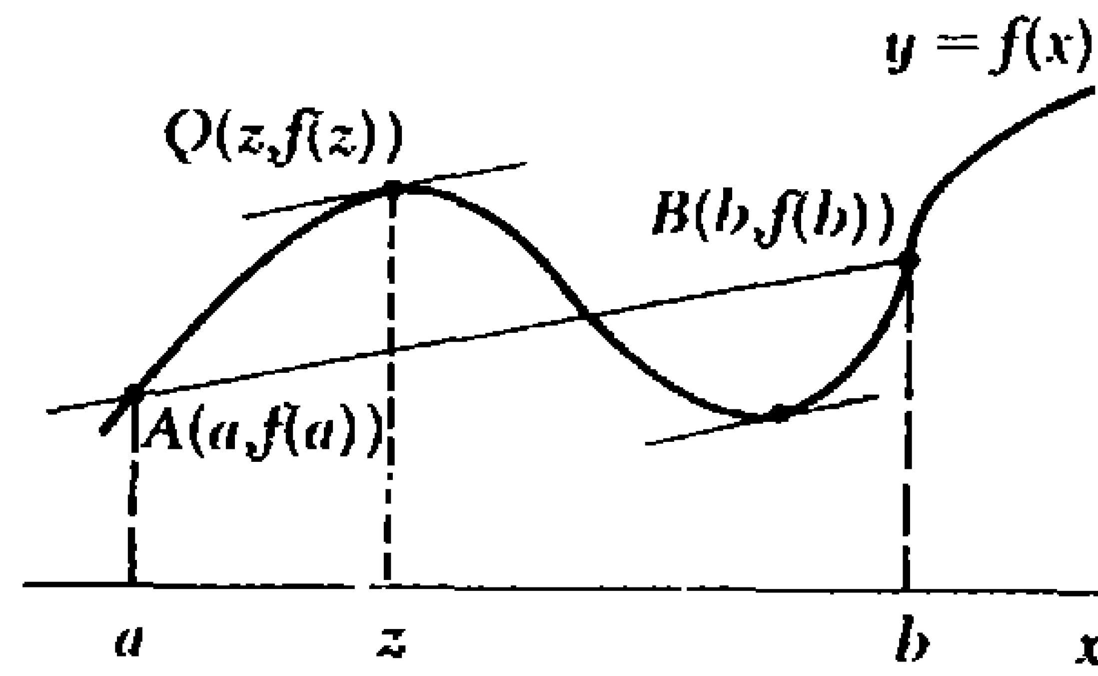
٤١ - أين فى برهان النظرية ٤ - ٣ استخدمنا الحقيقية أن c هى نقطة داخلية للفترة I ؟

٤٢ - رغم أنه من الواضح منطقيا ، الا أننا واقعيا لم نبرهن أن الدالة $f(x) = x^2 - 1$ (شكل ٤ - ١) ليس لها قيمة عظمى فى الفترة ($-1 , 2$] . كل ما أثبتناه هو أن 3 لايمكن أن تكون القيمة العظمى . أثبت أن f ليس لها قيمة عظمى باثبات أن لكل (v) فى $[-1,2)$ توجد x فى $[-1, 2)$ حيث $f(x) > f(v)$.

٤ - ٢

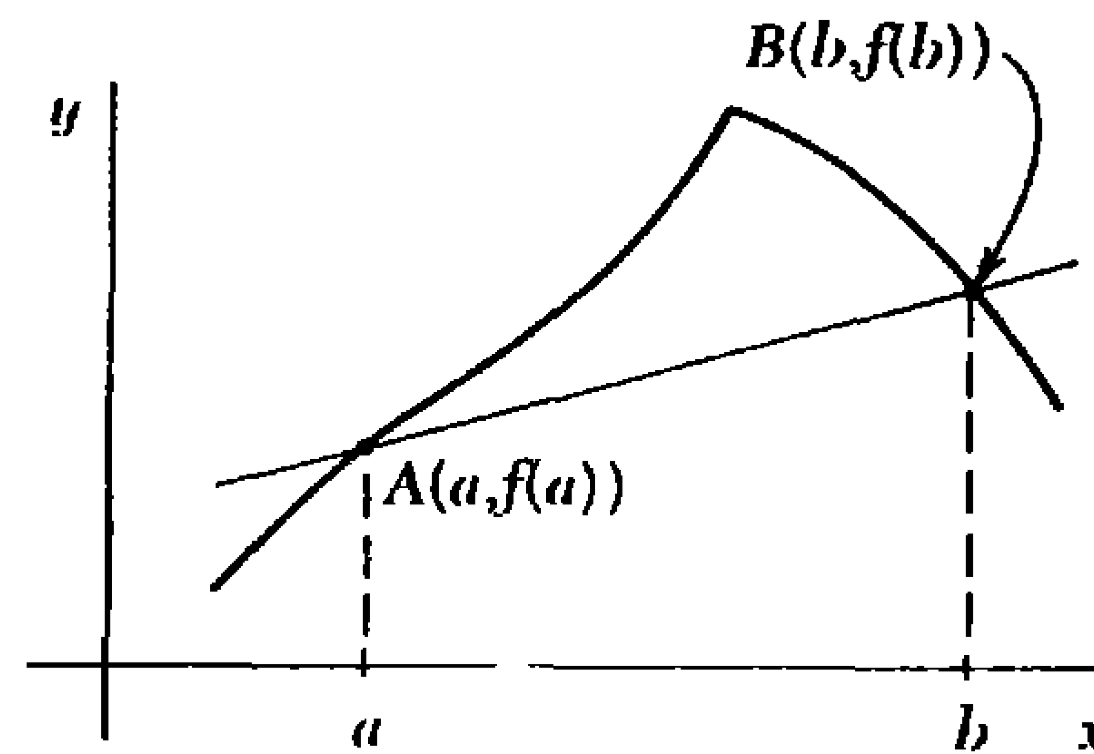
نظرية القيمة المتوسطة

لتكن $A(a, f(a))$ و $B(b, f(b))$ أى نقطتين على الشكل البيانى لدالة f (شكل ٤ - ١٠) . من الواضح أنه يجب أن توجد نقطة ما $Q(z, f(z))$ على الشكل البيانى بين B و A حيث المماس يكون موازيا للخط المستقيم الواصل بين B و A . للشكل البيانى فى شكل ٤ - ١٠ ، توجد امكانيتان للنقطة Q .



شكل ٤ ـ ١٠
نظرية القيمة المتوسطة : عند نقطة ما بين B و A على منحنى سلس يكون المماس موازياً للخط المستقيم AB .

رغم أنه يبدو واضحا أن مثل هذه النقطة توجد لكل منحنى ، الا أنه يجب الا نتسرع كثيرا . المنحنى فى الشكل ٤ ـ ١١ ليس له مماس موازيا للخط المستقيم AB . هذا يوضح الخطر فى الاستدلال من الصور . فى نظرتنا الى نظرية ما نكون ميالين للتفكير فقط فى الدوال البسيطة ، والنظرية التى تكون صحيحة لهذه الدوال قد لاتكون صحيحة أيضا للدوال الأكثر تعقيدا والتى لاترد بسرعة الى الذاكرة . لكى نتأكد من نتائجنا فاننا نعطى براهين لها . الصعوبة فى شكل ٤ ـ ١١ يمكن أن تعزى الى عدم وجود المشتقة عند عدد ما بين b و a . بوجود المشتقة فى كل مكان يجب أن يوجد مماس مواز . النظرية الآتية تنص على هذا جبريا .



شكل ٤ ـ ١١
اذا كانت f غير قابلة للتفاضل فى الفترة (a,b) فان المنحنى قد يفشل فى أن يكون له مماس يوازى AB .

٤ ـ ٦ نظرية القيمة المتوسطة . اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل داخل الفترة $[a,b]$ ومتصلة يمينا عند a ومتصلة يسارا عند b ، فانه توجد z فى الفترة (a,b) بحيث أن

$$f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

هذه يمكن كتابتها على الصورة

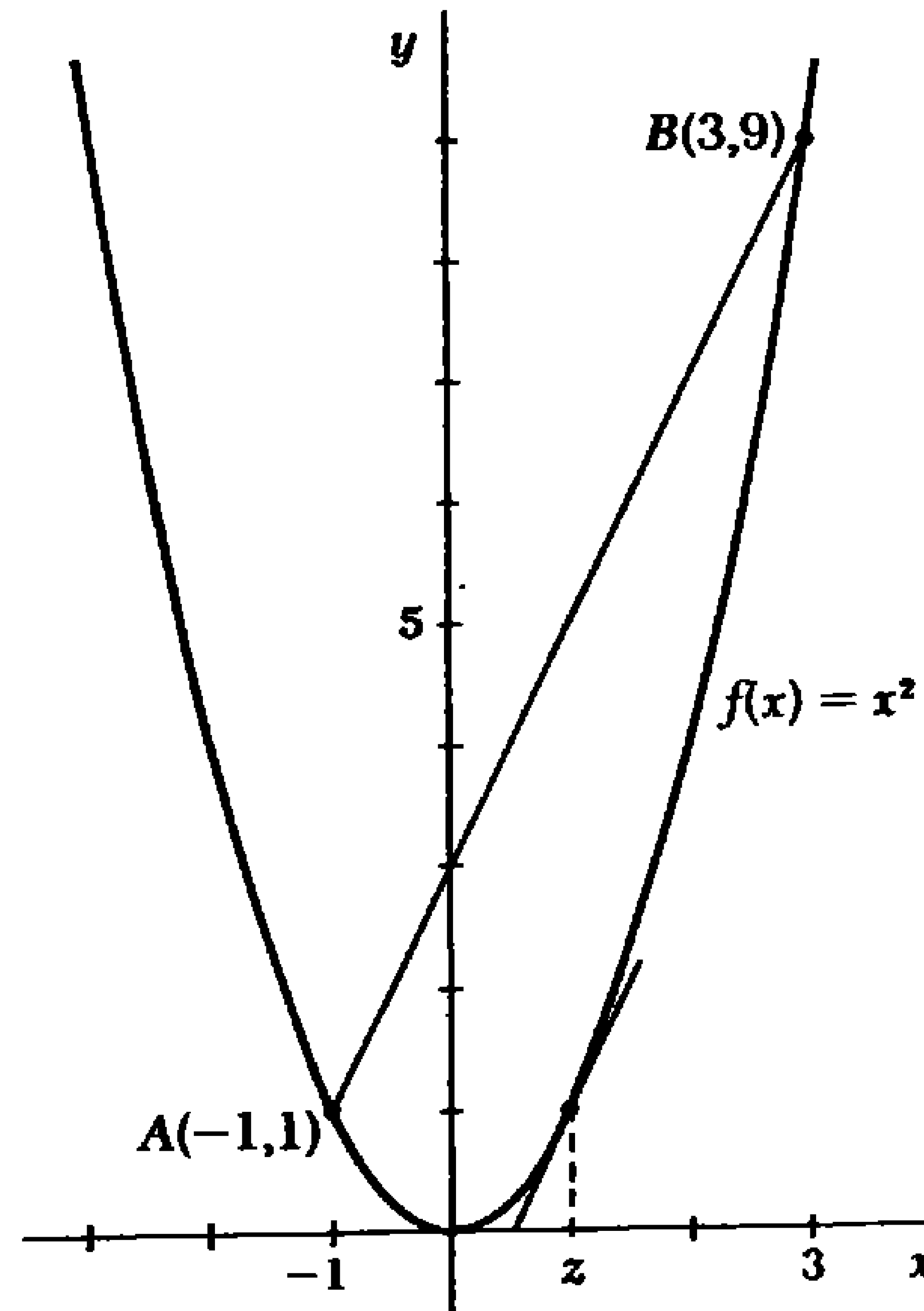
$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(z) \qquad (٢)$$

الطرف الأيمن من (١) هو ميل الخط المستقيم الواصل بين $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ فى شكل ٤ ـ ١٠ ، والطرف الأيسر هو ميل المماس عند $(z,f(z))$. هندسيا ، النظرية تنص على أنه توجد نقطة ما على المنحنى بين B و A حيث المماس يوازى AB . مع أن النظرية لها هذا التفسير الهندسى ، فإن استعمالهما الغالب هو فى التحليل ، بالصورة (١) أو (٢) . لاحظ أن نقطة z يمكن ايجادها ختما بين a,b .

كتوضيح للنظرية ، سنوجد z للدالة $f(x)=x^2$ ، وحيث $b=3$ و $a=-1$ (شكل ٤ـ ١٢) .
هنا $f'(x)=2x$ ويكون

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{9-1}{3+1}=2$$

واذن $z=1$



شكل ٤ ـ ١٢
عند $(1,1)$ المماس يوازى $A\,B$.

برهان نظرية القيمة المتوسطة . ضع

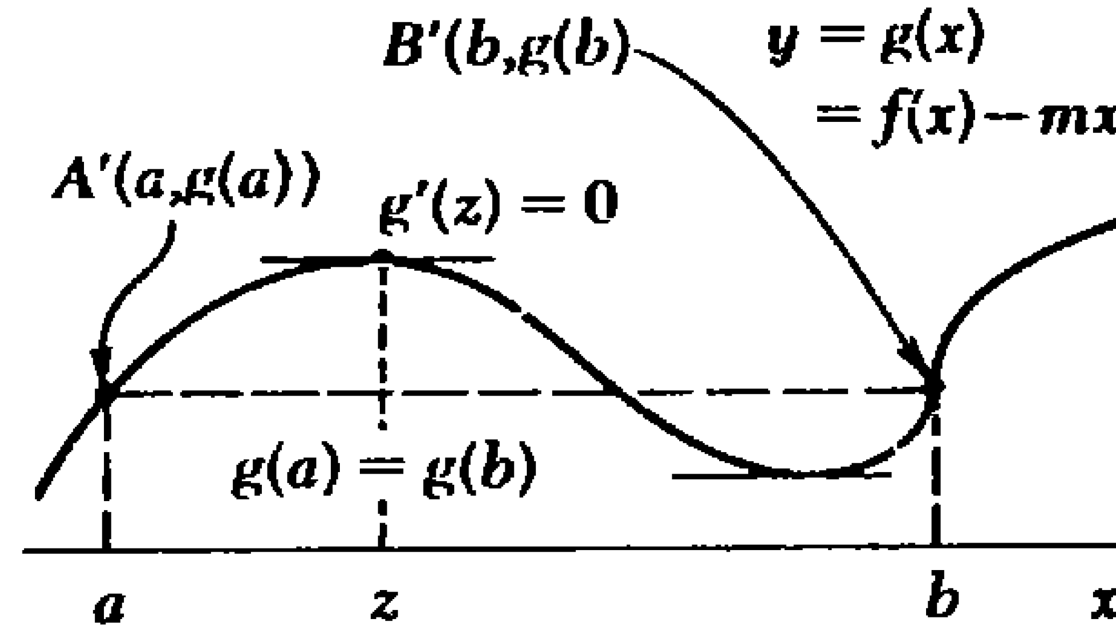
$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (٣)$$

من الدالة f والعدد m كون دالة جديدة g بالتعريف

$$g(x) = f(x) - mx$$

للدالة $f(x) = x^2$ ، $g(x) = x^2 - 2x$ ، $m = 2$ الشكل البيانى للدالة g للدالة f الموضحة فى شكل ٤ - ١٠ مخطط فى الشكل ٤ - ١٣ . المعادلة (٣) يمكن كتابتها على الصورة

$$f(a) - ma = f(b) - mb$$



شكل ٤ - ١٣

التى منها نرى أن $g(a) = g(b)$. أى أن النقطتين B' و A' فى شكل ٤ - ١٣ تكونان على نفس المسافة فوق المحور السينى . أيضا

$$g'(x) = f'(x) - m \qquad (٤)$$

لجميع x فى (a,b) . وحيث أن g حاصل جمع دوال متصلة ، فهى متصلة فى $[a,b]$ ، واذن بنظرية ٤ - ٤ يكون لها قيمتان عظمى وصغرى فى $[a,b]$. اذا كانت احدى هاتين القيمتين القصويين تحدث داخل الفترة لتكن z هى عدد تحدث عنده . (اذا كانت كلاهما تحدث داخل الفترة ، فيمكن اختيار z لأى منهما) . بنظرية ٤ - ٣ ، z يجب أن تكون عددا حرجا حيث $g'(z) = 0$. اذا كان لاتحدث قيمة قصوى داخل الفترة $[a,b]$ ، فان القيمة العظمى يجب حدوثها عند احدى النقطتين الطرفيتين والقيمة الصغرى عند الأخرى . بما أن $g(a) = g(b)$ ، فان هذا يدل على أن $g(x) = g(a)$ ، مقدار ثابت لجميع x فى (a,b) ، ومن ثم فان $g'(x) = 0$ لجميع قيم x هذه . أى أن فى كلتا الحالتين توجد z فى (a,b) بحيث أن $g'(z) = 0$. من المعادلة (٤) يكون لهذه النقطة z

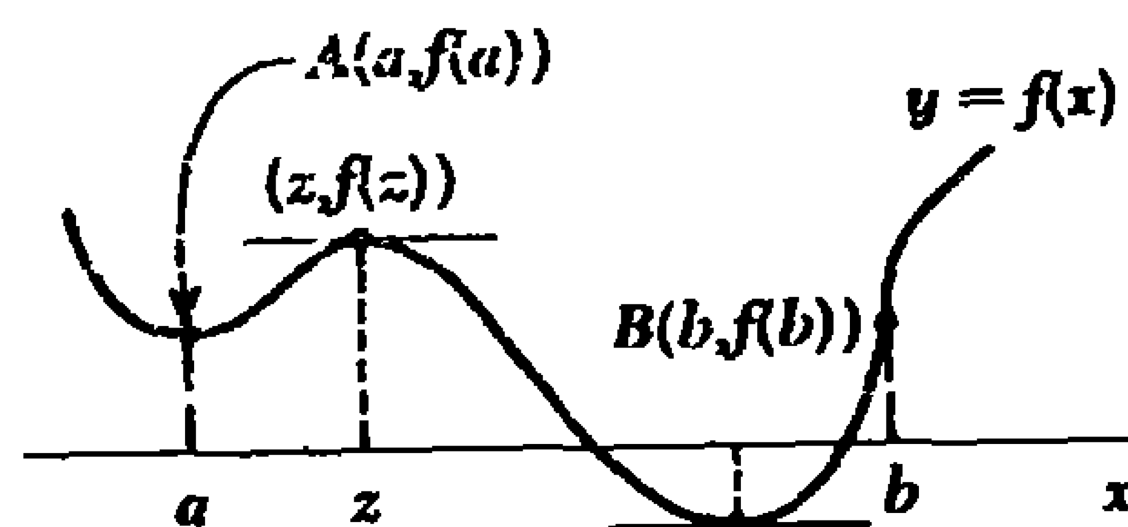
$$f'(z) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وهذا يثبت النظرية .

الحالة الخاصة لنظرية القيمة المتوسطة التى فيها B و A تكونان على نفس المسافة أعلى أو أسفل المحور السينى تعرف بنظرية رول (Rolle) .

٤ - ٧ نظرية رول : اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل داخل الفترة $[a,b]$ ومتصلة يمينا عند a ومتصلة يسارا عند b وكان $f(a) = f(b)$ ، فانه توجد z فى (a,b) حيث $f'(z) = 0$.

النظرية نتيجة مباشرة لنظرية القيمة المتوسطة لأن الطرف الأيمن من (١) يكون الآن صفرا ، هندسيا ، نظرية رول تنص على أنه اذا كانت B و A على نفس المسافة من المحور السينى ، فان على أى منحنى سلس يصل بين هاتين النقطتين يجب أن توجد نقطه ما حتما بين B و A حيث المماس يكون أفقيا (شكل ٤ - ١٤) .



شكل ٤ - ١٤

نظرية رول : عند نقطة ما بين النقطتين A,B الواقعتين على ارتفاع واحد ، على منحنى سلس يوجد مماس أفقى .

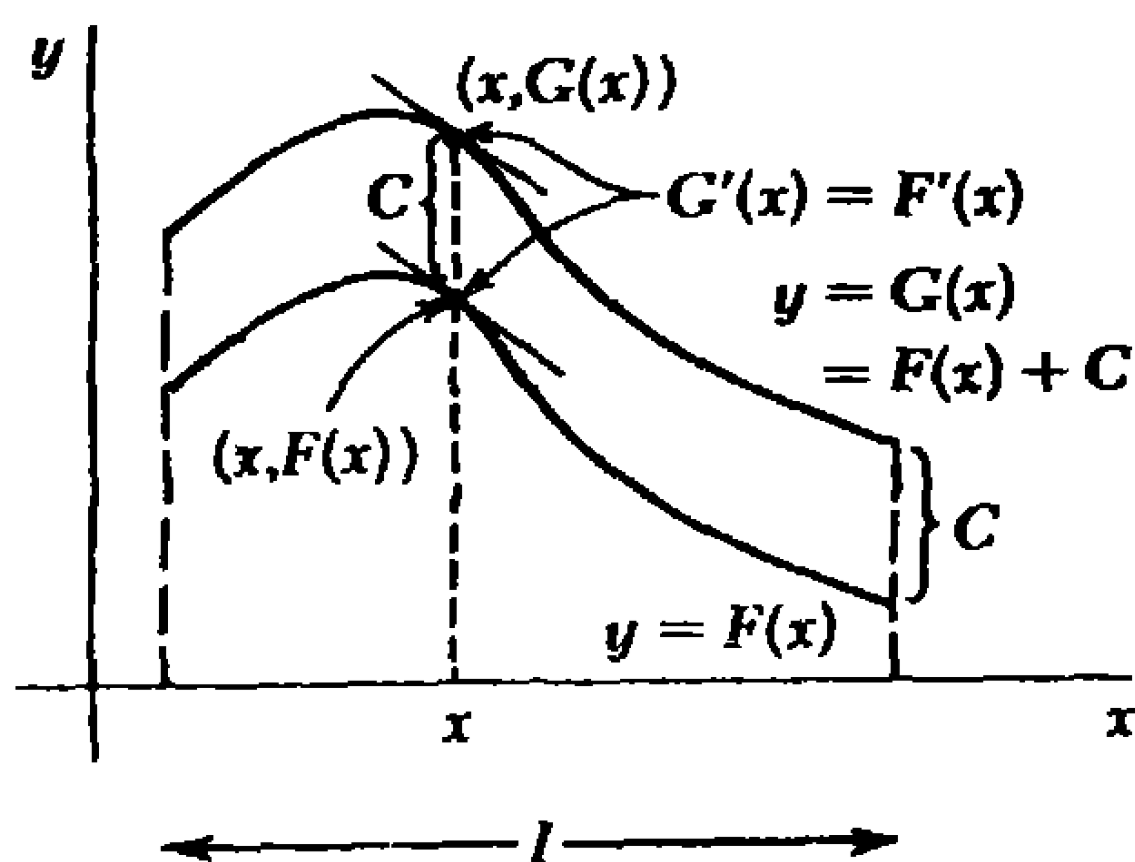
نظرية القيمة المتوسطة هى نظرية وجود ، ومع أن وجود z يكون مضمونا ، فان البرهان لايعطى فكرة عن موقعها أكثر من أنها تقع بين b و a . مثل هذه النظرية قد تبدو أنها غير دقيقة للغاية حتى يمكن الاستفادة منها ، لكن هذا ليس كذلك . فهى أداة قيمة فى التحليل وستقصر كثيرا من براهيننا . أول استخدامنا لها سيكون فى اثبات أن أى دالتين لهما نفس المشتقة يختلفان بمقدار ثابت . هذا يتضمن أنه اذا كانت F معكوسا تفاضليا لدالة f ، فان أى معكوس تفاضلى آخر للدالة f يمكن ايجاده باضافة ثابت مناسب الى F .

٤ - ٨ . نظرية اذا كانت F و G دالتين بحيث أن

$$G'(x) = F'(x)$$

لجميع x فى الفترة I ، فانه يوجد مقدار ثابت C بحيث أن $G(x) = F(x) + C$ لجميع x فى I .

هذا يعنى هندسيا أنه اذا تحرك الشكل البيانى للدالة F لأعلى بمقدار C من الوحدات فانه سينطبق على الشكل البيانى للدالة G (شكل ٤ - ١٥) . المنحنيان يكونان متوازيين .

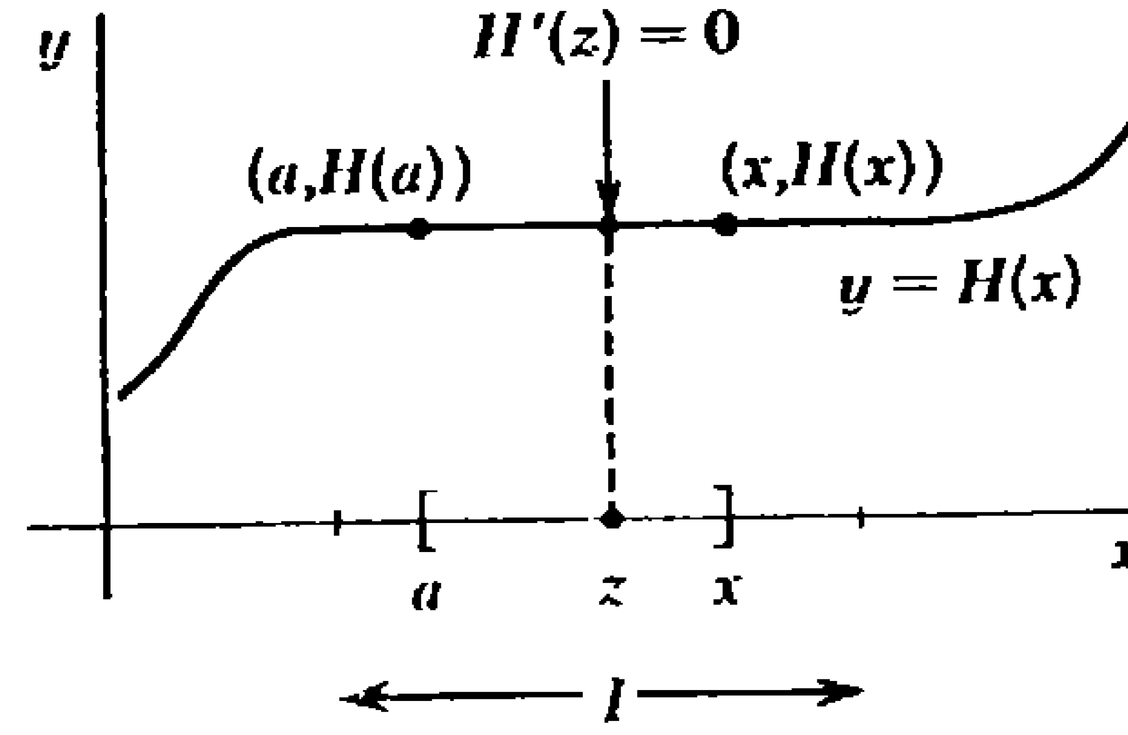


شكل ٤ - ١٥

بما ان $G(x) = F(x) + C$ فالشكل البيانى للدالة F عند تحركه الى أعلى مسافة C سينطبق على الشكل البيانى للدالة G .

البرهان . سنثبت أولا أن الثوابت هى الدوال الوحيدة التى مشتقتها تساوى صفرا فى كل مكان . لتكن H هى دالة مشتقتها $H'(x) = 0$ لجميع x فى I . نختار أى عدد ثابت a فى I (شكل ٤ ـ ١٦) . لتكن x أى عدد فى I غير العدد a . نطبق الآن نظرية القيمة المتوسطة على الدالة H على الفترة الجزئية $[a,x]$ (أو $[x,a]$ اذا كانت $x < a$) . فى الصورة المعطاه فى (٢) تشير هذه النظرية الى أنه توجد z فى (a,x) بحيث أن

$$H(x) - H(a) = (x - a)H'(z).$$



شكل ٤ ـ ١٦

إذا كانت $H'(x) = 0$ لجميع x فى I ، فان $H(x)$ تكون ثابتة فى I .

لكن $H'(z) = 0$ ، واذن $H(x) = H(a)$. بما أن x كانت اختيارية فان $H(x)$ تكون مقدارا ثابتا هو $H(a)$ ، لجميع x فى I . الآن ، اذا كانت F و G دالتين بحيث أن $G'(x) = F'(x)$ لجميع x فى I ، فان $D[G(x) - F(x)] = 0$. واذن بما أثبتناه حالا ، يوجد ثابت C بحيث أن $G(x) - F(x) = C$ ، والنظرية تكون أثبتت .

مسائل

تحقق أن الفروض لنظرية رول تكون متحققة للدالة المعطاه والفترة المعطاه وأوجد نقطة z تحقق نتيجة النظرية . هل توجد أكثر من z واحدة ؟

١ ـ $f(x) = x^2 - 3x;\ [-1,4]$

٢ ـ $g(x) = x^3 - 12x;\ [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$

٣ ـ $f(t) = (t+2)^2(t-3)^2;\ [-3,4]$

٤ ـ $h(x) = x + \frac{1}{x};\ [\frac{1}{2}, 2]$

تحقق أن الفروض لنظرية القيمة المتوسطة تكون متحققة للدالة المعطاة والفترة المعطاه ، وأوجد نقطة z تحقق نتيجة النظرية . هل توجد أكثر من z واحدة ؟

٥ ـ $f(x) = x^2;\ [-4,1]$

٦ ـ $u(t) = t^3 - t;\ [-2,3]$

٧ ـ $f(x) = x + 1/x;\ [\frac{1}{2}, 3]$

٨ ـ $g(x) = x^{1/3};\ [0,6]$

٩ ـ خطط الشكل البيانى للدالة $g(x) = |x|$. وضح أن لهذه الدالة والفترة $[-2,2]$ ، لاتوجد z تحقق نتيجة نظرية رول . أى فرض لايتحقق هنا ؟

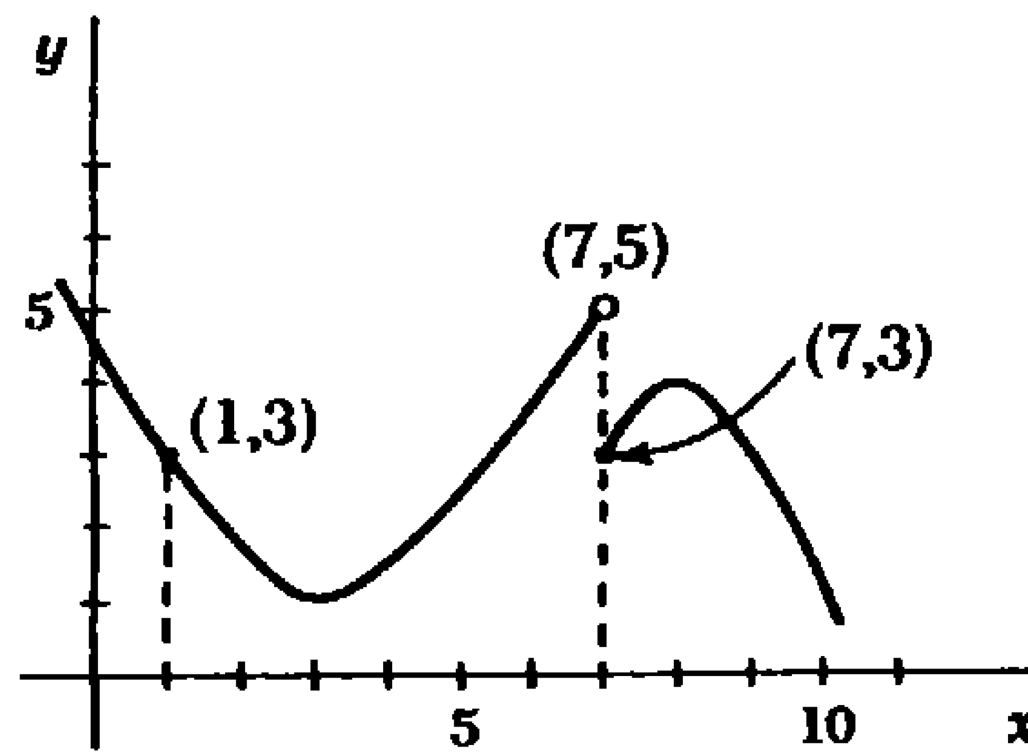
١٠ ـ الفرض لنظرية رول له ثلاثة شروط هى القابلية للتفاضل والاتصال وأن $f(a) = f(b)$ وضح عن طريق التخطيط أنه اذا حذف أى واحد من هذه الشروط ، فان منطوق النظرية قد لايكون صحيحا .

١١ ـ خطط الشكل البيانى للدالة .

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 2, \\ -t+6, & t > 2. \end{cases}$$

أين فى الفترة $[-1,5]$ تفشل f فى أن يكون لها مشتقة ؟ اثبت أنه بالرغم من ذلك ، توجد z فى $(-1,5)$ تحقق النتيجة لنظرية رول . هذا يوضح أن شروط نظرية رول كافية لكن ليست ضرورية لتكون النتيجة صحيحة .

١٢ ـ الدالة التى شكلها البيانى مخطط فى شكل ٤ ـ ١٧ تحقق الشروط لنظرية رول للفترة $[1,7]$ ماعدا الاتصال يسارا عند 7 . اثبت أنه رغم ذلك فان نتيجة النظرية تكون صحيحة لهذه الدالة بأن توجد بيانيا نقطة مناسبة z .



شكل ٤ ـ ١٧

١٣ ـ خطط الشكل البيانى لدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2, & x > -1. \end{cases}$$

أين فى الفترة $[-2,1]$ تفشل f فى أن يكون لها مشتقة ؟ اثبث أنه بالرغم من ذلك توجد z فى $(-2,1)$ تحقق النتيجة لنظرية القيمة المتوسطة . هذا يوضح أن الشروط لنظرية القيمة المتوسطة هى شروط كافية لكن ليست ضرورية لتكون النتيجة صحيحة .

١٤ ـ اثبت أنه للدالة $g(x) = x^{2/3}$ والفترة $[-1,8]$ لاتوجد z تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة . لماذا لايتعارض ذلك مع النظرية ؟ اثبت أنه توجد z اذا كانت الفترة هى $[-1, 27]$. لماذا لايتعارض ذلك مع النظرية ؟

١٥ ـ خطط الشكل البيانى لدالة تحقق القابلية للتفاضل لكن لاتحقق شرط الاتصال لنظرية القيمة المتوسطة ، وحيث (أ) النتيجة لاتكون صحيحة ، (ب) النتيجة تكون صحيحة .

حدد ما اذا كانت الفروض لنظرية القيمة المتوسطة تتحقق للدالة المعطاة والفترة المعطاه . اذا لم تتحقق ، هل النتيجة تكون صحيحة مع ذلك ؟

١٦ - $f(x) = \frac{x-2}{x};\ [1,\frac{3}{2}]$

١٧ - $f(t) = |t|;\ [1,5]$

١٨ - $g(x) = \sqrt{x};\ [0,9]$

١٩ - $G(x) = x^{1/3};\ [-8,3]$

٢٠ - $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}};\ [-8,27]$

٢١ - $f(y) = y^2 - 2y + 3,\ y \neq 0;\ [0,2]$

٢٢ - $h(u) = \begin{cases} u^2, & u \leqslant 2, \\ 4, & u > 2;\ [0,3] \end{cases}$

٢٣ - $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ -x+5, & x \geqslant 1;\ [-1,1] \end{cases}$

٢٤ - $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ -x+5, & x \geqslant 1;\ [0,1] \end{cases}$

٢٥ - أين فى برهان نظرية القيمة المتوسطة تستخدم فروض النظرية ؟

٢٦ - لتكن f دالة متصلة فى الفترة المقفلة $[a,b]$ ولها $f(a) = f(b)$. اثبت أن f لها على الأقل عدد حرج واحد فى الفترة المفتوحة (a,b) .

٢٧ - أثبت أن المعادلة $x^2 - 3x + 1 = 0$ ليس لها جذران متباينان فى الفترة المقفلة $[0,1]$. (ارشاد : اعتبر المنحنى $y = x^3 - 3x + 1$ افرض أن المعادلة لها جذران فى $[0,1]$.)

٢٨ - أثبت أن المعادلة $x^{10} + x + a$ لها على الأكثر جذران حقيقيان لكل a .

٢٩ - لتكن f قابلة للتفاضل فى (a,b) الا ربما عند العدد c ، حيث $a < c < b$. اذا كانت $\lim_{x \to c} f'(x) = r$ ، فاثبت أن المشتقة موجودة عند c وأن $f'(c) = r$. (ارشاد : استخدم نظرية القيمة المتوسطة .)

تحقق أن $G'(x) = F'(x)$ لأزواج الدوال الآتية . أوجد الثابت C ، الذى نضمن وجودة بنظرية ٤ - ٨ ، حيث $G(x) = F(x) + C$

٣٠ - $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x - 10,\ G(x) = \frac{1}{4}(x^4 + 12x + 1)$

٣١ - $F(x) = x^3/3 - x^2 + x,\ G(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3$

٣٢ - $F(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x-1},\ G(x) = x + \frac{2}{x-1}$

٣٣ - وضح أن استخدام نظرية القيمة المتوسطة فى برهان النظرية ٤ - ٨مسموح به ، بتحقيق أن الدالة H تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

٤ - ٣
الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة

فى تخطيط الشكل البيانى لدالة عادة نهتم فقط بمظهره العام وملامحه البارزة . لاتتطلب دقة كبيرة . شكل كاف لمعظم الأغراض يمكن رسمه اذا كنا نعلم أين يكون المنحنى صاعدا وأين يكون هابطا . التعبيران صاعد وهابط يشيران دائما الى سلوك المنحنى تتحرك نقطة عليه من اليسار الى اليمين . قبل أن نستطيع معرفة أين يكون المنحنى صاعدا أو هابطا يجب تعريف هذين التعبيرين . منطقيا أى جزء من المنحنى يكون صاعدا اذا واذا فقط كان لكل نقطتين عليه النقطة اليمنى أعلى من النقطة اليسرى . اذا كانت معادلة المنحنى هى $y = f(x)$ ، فهذا يعنى أن $f(x_1) < f(x_2)$ طالما كانت $x_1 < x_2$. نختار هذا التعريف . عند الحديث عن الدوال بدلا من المنحنيات ، من المعتاد استخدام الكلمتين متزايدة ومتناقصة بدلا من صاعد وهابط .

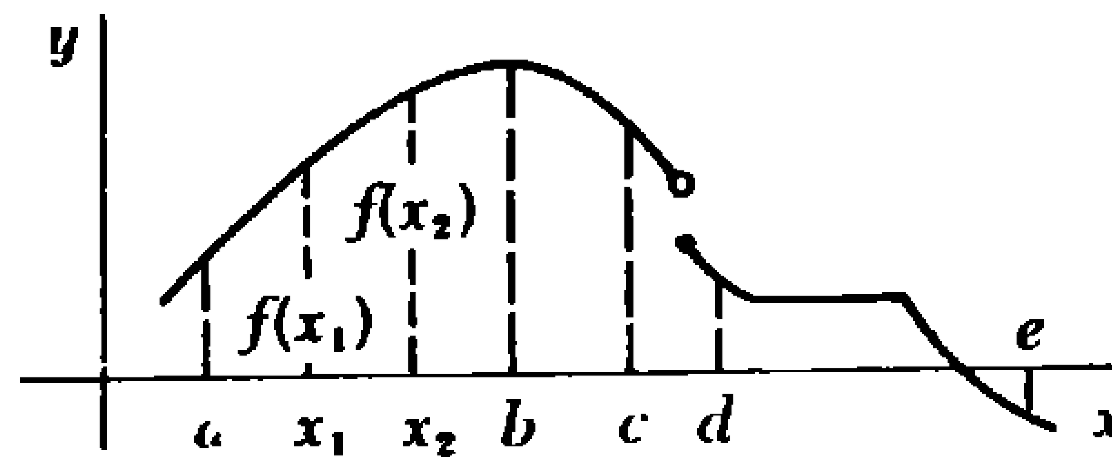
٤ - ٩ تعريف . لتكن f دالة ولتكن I فترة قد تكون لانهائية .

(أولا) f تكون متزايدة فى الفترة I اذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ لـ .ميع x_2 و x_1 فى I حيث $x_1 < x_2$.

(ثانيا) f تكون متناقصة فى الفترة I اذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ لجميع x_2 و x_1 فى I حيث $x_1 < x_2$.

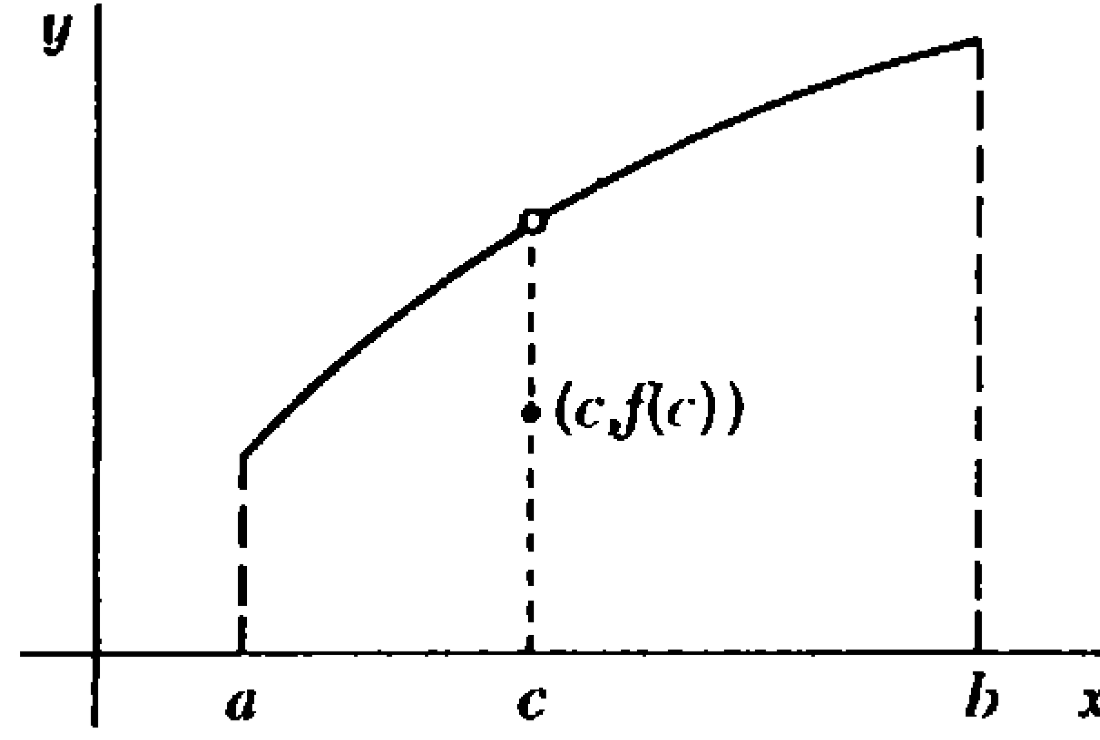
(ثالثا) f تكون متزايدة باطراد فى الفترة I اذا كانت $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ لجميع x_2 و x_1 فى I حيث $x_1 < x_2$.

(رابعا) f تكون متناقصة باطراد فى الفترة I اذا كانت $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ لجميع x_1 , x_2 فى I حيث $x_1 < x_2$.



شكل ٤ - ١٨
الدالة متزايدة فى (a,b) ، متناقصة فى $[c,d]$ $[b,c]$ ومتناقصة باطراد فى (d,e) .

الفترة I جزء حيوى من التعريف . لانقول أن الدالة متزايدة فحسب ولكن متزايدة فى فترة . الدالة المخططة فى شكل ٤ - ١٨ تكون متزايدة فى الفترة المفتوحة (a,b) ، متناقصة فى الفترتين المقفلتين $[c,d]$ و $[b,c]$ ومتناقصة باطراد فى الفترة (d,e) . الدالة ليست متزايدة فى الفترة $[a,c]$. ولاهى متناقصة هناك . لاحظ الكلمة جميع فى التعريف . اذا كان يوجد ولو زوج واحد x_1, x_2 حيث $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ ، فان f لاتكون متزايدة فى الفترة . الدالة فى شكل ٤ - ١٩ ليست متزايدة فى الفترة (a,b) . هى ، مع ذلك ، متزايدة فى $[c,b)$.



شكل ٤ - ١٩
الدالة ليست متزايدة فى (a,b) . هى متزايدة فى $[c,b)$.

الدالة تكون مطردة فى فترة I اذا كانت متزايدة باطراد فى I أو متناقصة باطراد فى I . الدالة f فى الشكل ٤ - ١٨ مطردة فى $[a,b]$ وأيضا فى $[b,e]$.

ليس من السهل دائما أن ندرك من التعريف ما اذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة فى فترة معطاة . لكن المشتقة ، تعطينا اختيارا سريعا . اذا كان ميل الشكل البيانى موجبا ، فالشكل يجب أن يكون صاعدا ، واذا كان الميل سالبا ، فالشكل يجب أن يكون هابطا . النظرية الآتية تثبت هذا .

٤ - ١٠ نظرية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة I ، التى قد تكون لانهائية .
(أولا) اذا كانت $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f تكون متزايدة فى I .
(ثانيا) اذا كانت $f'(x) < 0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f تكون متناقصة فى I .

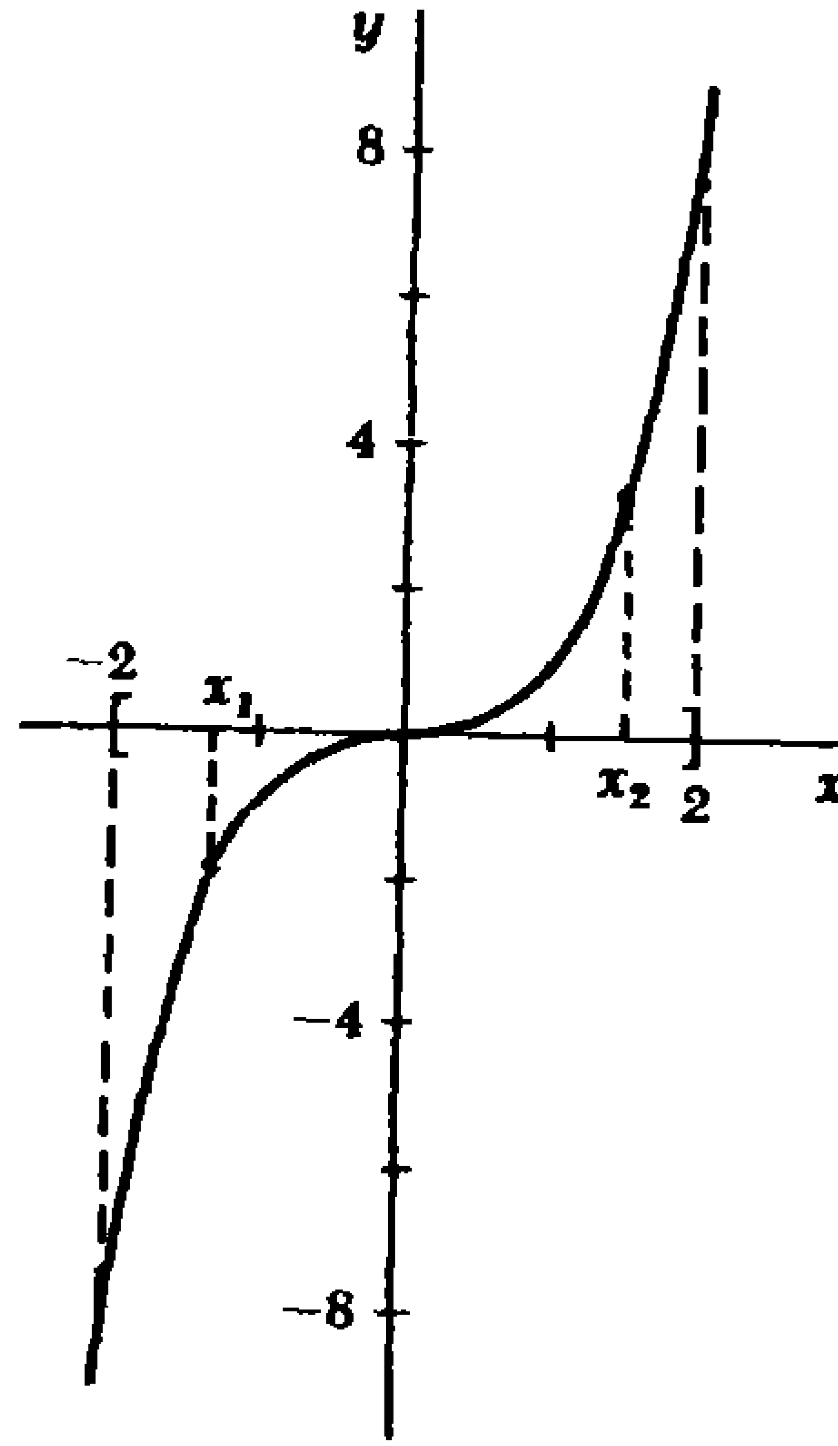
البرهان . (أولا) التعريف ٤ - ٩ يتطلب أن نثبت أن $f(x_2) > f(x_1)$ لكل زوج من الأعداد x_1, x_2 فى I حيث $x_1 < x_2$. وعلى ذلك نفرض أن x_2 و x_1 أى عددين فى I حيث $x_1 < x_2$. بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الفترة الجزئية $[x_1, x_2]$ ، توجد z فى (x_1, x_2) بحيث أن

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(z).$$

بما أن z داخل الفترة I ، اذن $f'(z) > 0$. أيضا $x_2 - x_1 > 0$. اذن $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ومنها $f(x_2) > f(x_1)$. برهان (ثانيا) مماثل .

لاحظ أنه رغم أن $f'(b) = 0$ فى الشكل ٤ - ١٨ ، النظرية تجيز لنا أن نستنتج أن f متناقصة فى الفترة المقفلة $[b,c]$ ، حيث $f(b) > f(x)$ لجميع $b < x \leqslant c$.

عكس النظرية ٤ - ١٠ ليس صحيحا . من الممكن أن تكون دالة متزايدة أو متناقصة فى فترة ما مع أن $f'(x) = 0$ عند نقطة أو أكثر هناك . خذ فى الاعتبار الدالة $f(x) = x^3$ المخططة فى الشكل ٤ - ٢٠ . الدالة f متزايدة فى الفترة $[-2,2]$ رغم أن $f'(x) = 0$ لـ x ما فى الفترة هى 0 . لتوضيح ذلك ، نرجع الى التعريف اذ لايمكننا استخدام النظرية . اذا كانت x_2 و x_1 فى $[-2,2]$



شكل ٤ ـ ٢٠

الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة فى $[-2, 2]$ رغم أن $f'(0) = 0$.

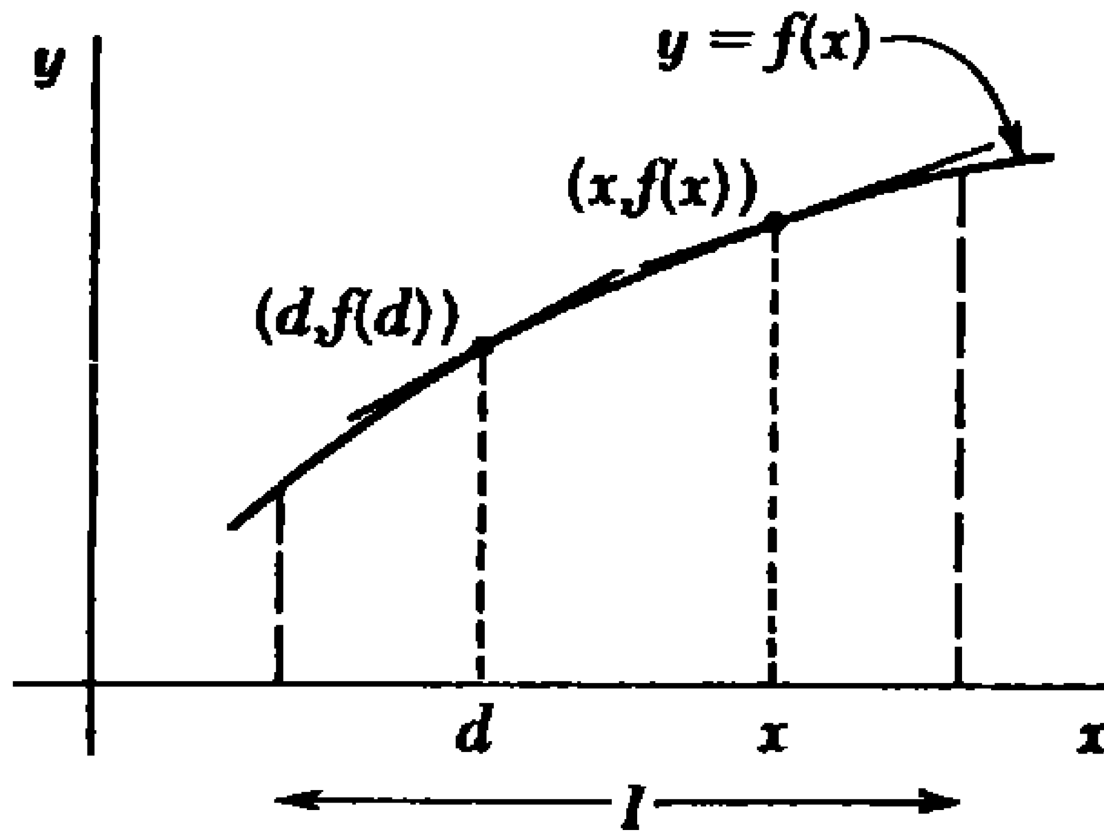
حيث

$x_1 < x_2$ ، فان من المسألة ١٧ ببند ١ ـ ٣ ، $f(x_1) = x_1^3 < x_2^3 = f(x_2)$.

النظرية الآتية تثبت حقيقة مفضلة هندسيا وهى أن بين الأعداد الحرجة الدالة تكون بالضرورة متزايدة أومتناقصة .

٤ ـ ١١ نظرية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة I ، التى قد تكون لانهائية ، ولتكن f ليس لها حرج داخل I . حينئذ اما $f'(x) > 0$ لجميع x فى الداخل وتكون f متزايدة فى I ، واما $f'(x) < 0$ لجميع x فى الداخل وتكون f متناقصة فى I .

البرهان . الفرض يتضمن أن f لها مشتقة غير صفرية فى كل مكان داخل الفترة I . اختر أى عدد d داخل I . سنثبت أنه اذا كانت $f'(d) > 0$ ، فان $f'(x) > 0$ لجميع x داخل I ، لكن اذا كانت $f'(d) < 0$ فان $f'(x) < 0$ لجميع x داخل I . [لماذا لايمكن أن تكون $f'(d) = 0$ ؟] . برهانا الحالتين متشابهان ، لذلك نعطى فقط برهان الحالة الأولى . نفرض أن $f'(d) > 0$ (شكل ٤ ـ ٢١) . لتكن x أى عدد داخل I ولنعتبر أولا الحالة الفرعية $x > d$. حيث أن f ليس لها عدد حرج داخل الفترة $[d,x]$ فان قيمتها العظمى فى هذه الفترة الجزئية يجب أن تحدث عند d أو x بالنظرية ٤ ـ ٥ . القيمة العظمى لايمكن حدوثها عند d ، لأنه اذا حدث ذلك لكانت $f'(d) \leqslant 0$ بالتمهيدية ٤ ـ ٢ . اذن يجب حدوثها عند x ، ومن ثم ، بالتمهيدية ٤ ـ ٢ أيضا تكون $f'(x) \geqslant 0$. لكن التساوى يكون مستحيلا (لماذا ؟) ، واذن $f'(x) > 0$. اذا كانت $x < d$ فان برهانا مماثلا مستخدما القيمة الصغرى للدالة f فى $[x,d]$ يثبت أن $f'(x) > 0$. بما أن x كانت اختيارية ، فان $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I والدالة f تكون متزايدة فى I بالنظرية ٤ ـ ١٠ .



شكل ٤ - ٢١
اذا كانت $f'(d)>0$ ، فان $f'(x)>0$ لجميع x داخل الفترة I

نستخدم هذه النظرية بأى من طريقتين لتحديد ما اذا كانت الدالة f التى ليس لها عدد حرج داخل الفترة I متزايدة أم متناقصة فى الفترة . فالنظرية تعمل باحدى الطريقتين أو الأخرى . الطريقة الأولى أن نحسب $f'(c)$ لنقطة ما مناسبة ، فى الداخل . اذا كانت $f'(c) > 0$ ، فان $f'(x) > 0$ لجميع x فى الداخل وتكون f متزايدة فى I . بالمثل ، اذا كانت $f'(c) < 0$ فان f تكون متناقصة فى I . الطريقة الأخرى هى أن نختار أى عددين x_2 و x_1 فى الفترة I حيث $x_1 < x_2$ ، ونحسب $f(x_2)$ و $f(x_1)$ ، ونرى أيا منهما الأكبر . اذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ ، فان f لايمكن أن تكون متناقصة فى I واذن يجب أن تكون متزايدة هناك . بالمثل ، اذا كانت $f(x_1) > f(x_2)$ ، فان f يجب أن تكون متناقصة فى I . اذا استخدمت الطريقة الأولى فان c يجب اختيارها داخل الفترة . فى الطريقة الثانية x_2 و x_1 يمكن اختيارهما فى أى مكان فى الفترة حتى عند النقطتين الطرفيتين ، بشرط أن يكونا فى الفترة .

مثال ١ . حدد ما اذا كانت الدالة $f(x) = 6x - x^2$ متزايدة أم متناقصة فى الفترة $I = (-1,3]$.

نرى من المشتقة $f'(x) = 2(3 - x)$ أن العدد الحرج الوحيد للدالة f هو 3 . بما أن الدالة متصلة فى I وليس لها عدد حرج داخل الفترة I ، فهى يجب أن تكون أما متزايدة واما متناقصة هناك . سنحدد ما اذا كانت متزايدة أم متناقصة بالطريقة الأولى . العدد 1 هو داخل الفترة I . بما أن $f'(1) > 0$ ، اذن $f'(x) > 0$ لجميع x داخل الفترة I والدالة f تكون متزايدة فى I . يمكن أيضا استخدام الطريقة الثانية ، كما يلى . العددان 3 و 0 هما فى I . بما أن $f(0) = 0 < f(3) = 9$ ، فان f يجب أن تكون متزايدة فى I .

مثال ٢ . أوجد الفترات حيث الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

تكون متزايدة والفترات حيث تكون متناقصة .

توجد أولا الاعداد الحرجة للدالة f . هذا يجرى بالتعبير عن $f'(x)$ كحاصل ضرب

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

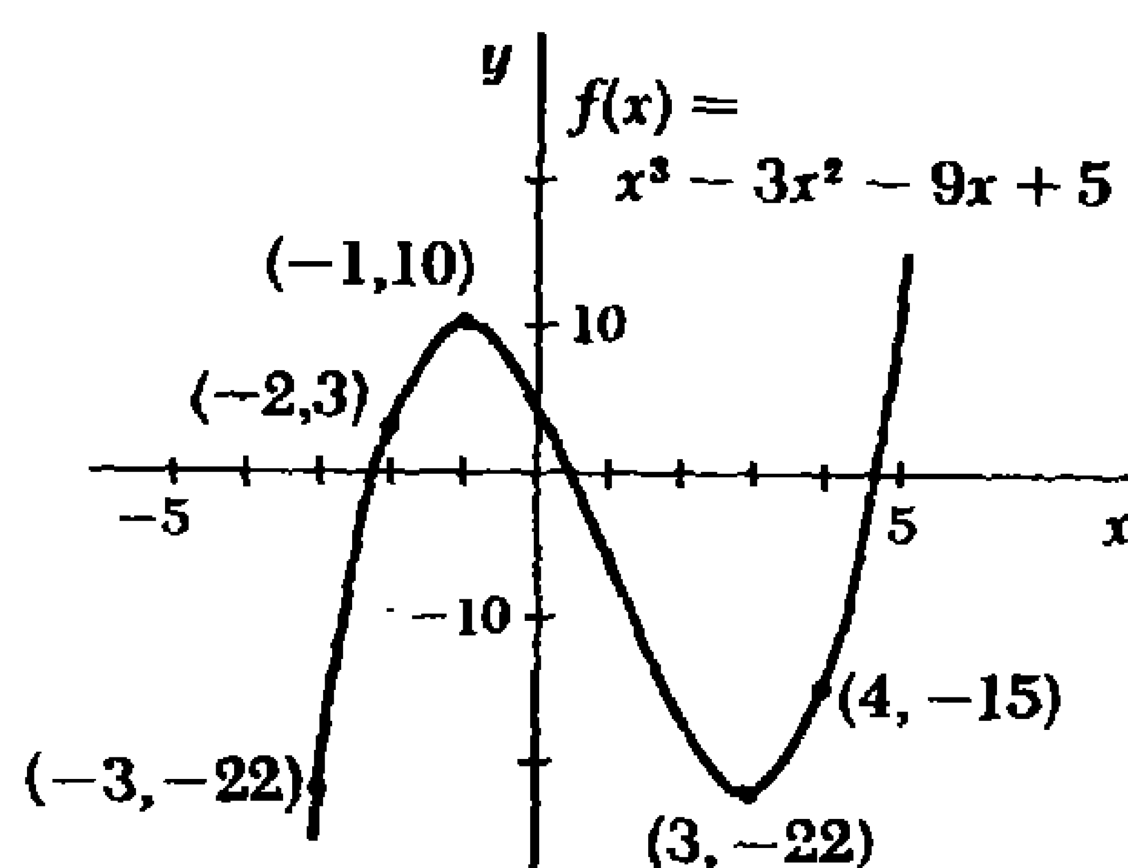
من الواضح أن 3 و -1 هما صفران للمشتقة $f'(x)$ وبالنظرية ١ - ١٩ ، هما صفراها الوحيدان .
لقد أوجدنا جميع الاعداد الحرجة . وهى تقسم محور x الى ثلاث فترات مقفلة هى

$$(-\infty,-1], \quad [-1,3], \quad [3,\infty) \qquad (١)$$

فى كل منها تكون f متصلة وداخل كل منها f ليس لها عدد حرج . فى كل منها الدالة تكون اما متزايدة واما متناقصة . لتحديد أيهما ، نختار $-2, 0, 5$ كأعداد مناسبة ، كل عدد داخل فترة . صورة العوامل للمشتقة تبين أن $f'(-2) = 3(-1)(-5) > 0$ من ثم $f'(x) > 0$ لجميع x فى $(-\infty, -1)$ ، وتكون f متزايدة فى $[-\infty, -1]$ أو أى فترة جزئية منها . بما أن : $f'(0) = 3(1)(-3) < 0$ فان $f'(x) < 0$ لجميع x فى $(-1, 3)$ ، وتكون f متناقصة فى : $[-1, 3]$. بما أن

$$f'(5) = 3(6)(2) > 0$$

فان $f'(x) > 0$ لجميع x فى $(3$ و $\infty)$ ، وتكون f متزايدة فى $[3, \infty)$. الشكل البيانى مخطط فى شكل ٤ - ٢٢ .



شكل ٤ - ٢٢

الدالة متزايدة فى الفترتين فى $[-\infty, -1]$ ، $[3, \infty)$ ومتناقصة فى $[-1, 3]$.

يمكننا أيضا تعيين ما اذا كانت الدالة f متزايدة أو متناقصة فى الفترات (١) بالطريقة الثانية ، كما يلى . العددان -2 و -3 يقعان فى الفترة الاولى $[-\infty, -1]$ ، وبما أن : $f(-3) = -22 < f(-2) = 3$ ، اذن f يجب أن تكون متزايدة فى الفترة . العددان 3 و -1 هما فى الفترة الثانية $[-1, 3]$ ، وحيث أن $f(-1) = 10 > f(3) = -22$ اذن f يجب أن تكون متناقصة فى الفترة . العددان 4 و 3 يقعان فى الفترة الثالثة $[3, \infty)$ ، وحيث أن : $f(3) = -22 < f(4) = -15$ اذن f يجب أن تكون متزايدة فى الفترة .

مسائل

عين ما اذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة فى الفترات المعطاة . اذا كانت لا متزايدة ولا متناقصة ، فهل هى متزايدة باطراد أم متناقصة باطراد ؟

١ - $f(x) = -3x + 2;\ [1,2]$

٢ - $g(x) = x^2 - 2;\ [-2,3]$

٣ - $f(x) = 5 + 4x - x^2;\ [-1,1],\ [0,6]$

٤ - $H(u) = 6;\ [-2,3]$

٥ - $f(t) = \sqrt{t};\ (1,4),\ [0,4]$

٦ - $f(x) = -x^3 - 1;\ [0,2]$

٧ - $F(r) = r^3 - 6r^2 - 15r + 1;\ [0,4],\ (6,\infty)$

٨ - $f(x) = |x|;\ (-4,0),\ [-4,0]$

٩ - $g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 0, \\ t+1, & t > 0;\ (-\infty,\infty) \end{cases}$

١٠ - $h(x) = [x];\ (0,3.5)$

١١ - $f(x) = \begin{cases} x, & \\ x-1, & \end{cases}$ x وليست عددا صحيحا ، x عدد صحيح ,$(-\infty$ و $\infty)$

١٢ - $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1;\ (0,2) \end{cases}$

١٣ - $f(x) = \begin{cases} 1, & \\ 0, & \end{cases}$ x كسرية , x غير كسرية , $[-3,3]$

أوجد الفترات حيث تكون الدوال الآتية متزايدة والفترات حيث تكون متناقصة :

١٤ - $f(x) = x^2 - 5$

١٥ - $f(x) = 2 - 4x$

١٦ - $g(x) = -9x - x^2$

١٧ - $f(t) = (t-1)^3$

١٨ - $F(x) = 6x - x^3$

١٩ - $f(z) = 2z^3 + 3z^2 - 36z$

٢٠ - $f(x) = x^3 + 6x^2 - 9x - 2$

٢١ - $f(x) = -(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x)$

٢٢ - $u(t) = t(3-t)^2$

٢٣ - $f(x) = x^4$

24 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3$

٢٥ - $g(u) = (u^2 - 16)^2$

٢٦ - $f(x) = -x^5$

27 $h(x) = 1/x.$

٢٨ - $P(x) = x + 9/(x+1)$

٢٩ - اثبت أنه اذا كانت دالة f متزايدة فى الفترتين $[a,c]$ $[c,b]$ فانها تكون متزايدة فى اتحادهما $[a,b]$. وضح أن هذا قد لايكون صحيحا اذا كانت الفترة الأولى مفتوحة . استخدم هذا والنظرية ٤ - ١٠ ، لتثبت أن الدالة $f(x) = x^3$ متزايدة فى الفترة $[-2,2]$.

٣٠ - عين ما اذا كانت الدالة $f(x) = x^4 - 4x^3$ متزايدة أم متناقصة فى الفترة $(-\infty, 3]$.

٣١ - عين ماذا كانت الدالة $g(z) = z^{1/3} + 1$ متزايدة أم متناقصة فى الفترات $[-8,8]$ و $[1,8]$ و $[-8, -1]$.

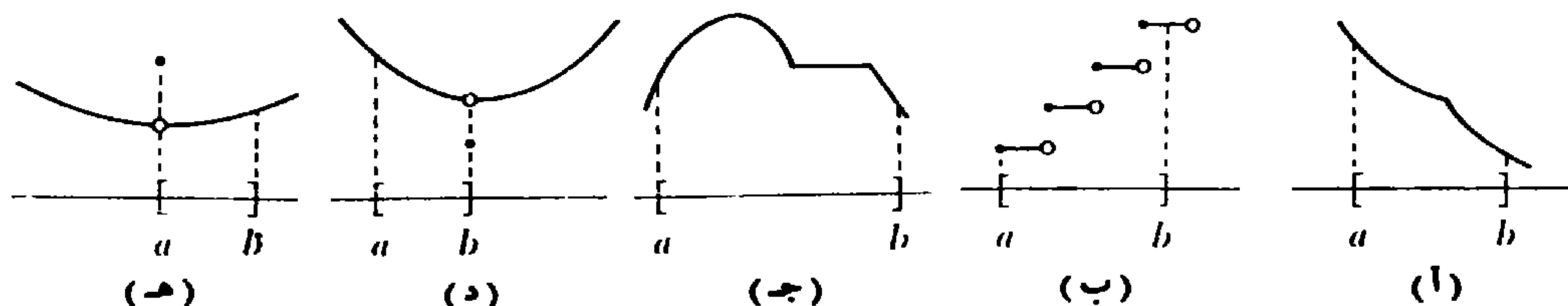
٣٢ - خطط الشكل البيانى لدالة متناقصة فى فترة رغم أن مشتقتها لاتكون سالبة فى أى مكان داخل الفترة .

٣٣ - فى الشكل ٤ - ١٩ اذا كانت النقطة المعزولة أعلى المنحنى بدلا من أدناه ، هل الدالة تكون متزايدة فى (a,b) ؟ .

٣٤ - هل الدوال المخططة فى الشكل ٤ - ٢٣ متزايدة ، متناقصة ، مطردة الزيادة أم مطردة النقصان فى الفترة المقفلة $[a,b]$ ؟ فى الفترة المفتوحة (a,b) ؟

٣٥ - خطط الشكل البيانى لدالة متزايدة فى كل فترة لكن لاتصبح لانهائية .

٣٦ - اذا كانت $\lim f(x).0= \infty$ ، هل من الضرورى أن تكون متزايدة بعد نقطة معية ؟



شكل ٤ ـ ٢٣

٣٧ ـ خطط الشكل البيانى لدالة متصلة ، رغم أنه يكون متناقصا الا أنه يكون دائما أكبر من 1 .

٣٨ ـ الدالة $f(x) = -1/x$ ليست متزايدة فى الفترة $[-10,10]$ ، لأن $f(-4) > f(3)$ ، مع أن $-4 < 3$. لكن $f'(x) = 1/x^2 > 0$ لماذا لايتعارض ذلك مع النظرية ٤ ـ ١٠ ؟

٣٩ ـ أثبت النظرية ٤ ـ ١٠ (ثانيا) .

٤٠ ـ فى برهان النظرية ٤ ـ ١٠ استخدمت نظرية القيمة المتوسطة . حقق أن انفروض لنظرية القيمة المتوسطة تكون متحققة .

٤١ ـ هل فرض الاتصال فى النظرية ٤ ـ ١٠ ضرورى ؟

٤٢ ـ اثبت أنه اذا كانت f دالة متزايدة ، فان $f(x_1) < f(x_2)$ تتضمن أن $x_1 < x_2$ وأن $f(x_1) = f(x_2)$ تتضمن أن $x_1 = x_2$.

٤٣ ـ رغم أن الدالة المخططة فى الشكل ٤ ـ ٢٢ ليست مطردة فى الفترة $[-3, 5]$ ، الا أن الفترة يمكن تقسيمها الى فترات جزئية $[3,5]$ و $[-1,3]$ و $(-3, -1)$ ، داخل كل منها تكون الدالة مطردة . هل من الممكن ، لكل دالة معرفة فى فترة محدودة ، تقسيم الفترة الى عدد محدود من الفترات الجزئية وتكون الدالة مطردة داخل كل منها .

٤٤ ـ اذا كانت دالتان g و f متزايدتين فى فترة ما ، هل fg و $f + g$ تكونان متزايدتين فى هذه الفترة ؟ .

٤٥ ـ عكس النظرية ٤ ـ ١٠ (أولا) غير صحيح . لكن اثبت أنه اذا كانت الدالة f متزايدة فى I وكانت $f'(x)$ موجودة داخل I ، فان $f'(x) \geqslant 0$ لجميع x داخل I . (ارشاد : افرض أن $f'(c) < 0$ لنقطة ما c داخل I . باستخدام التمهيدية ٢ ـ ٢٢ (ثانيا) اثبت أن هذا يتضمن أن $[f(x) - f(c)] / (x-c) < 0$ لجميع x فى جوار منقوص لـ c محتوى فى I الآن استخلص تناقضا .

٤٦ ـ أكمل برهان النظرية ٤ ـ ١١ ، معالجا الحالات $x < d$ و $f'(d) > 0$, $f'(d) < 0$

٤ ـ ٤
تخطيط المنحنى

لتخطيط الشكل البيانى للدالة ، نوجد جميع الأعداد الحرجة ، نعين مواقع النقط المناظرة ، ثم نعين ما اذا كان الشكل البيانى صاعدا أو هابطا بين هذه النقط ، بطرق البند السابق . الاجزاء

المقطوعة من المحورين لها أهميتها ، فاذا كان من السهل ايجادها ، تعيين مواقعها أيضا . نوضح بتخطيط الشكل البيانى الدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$$

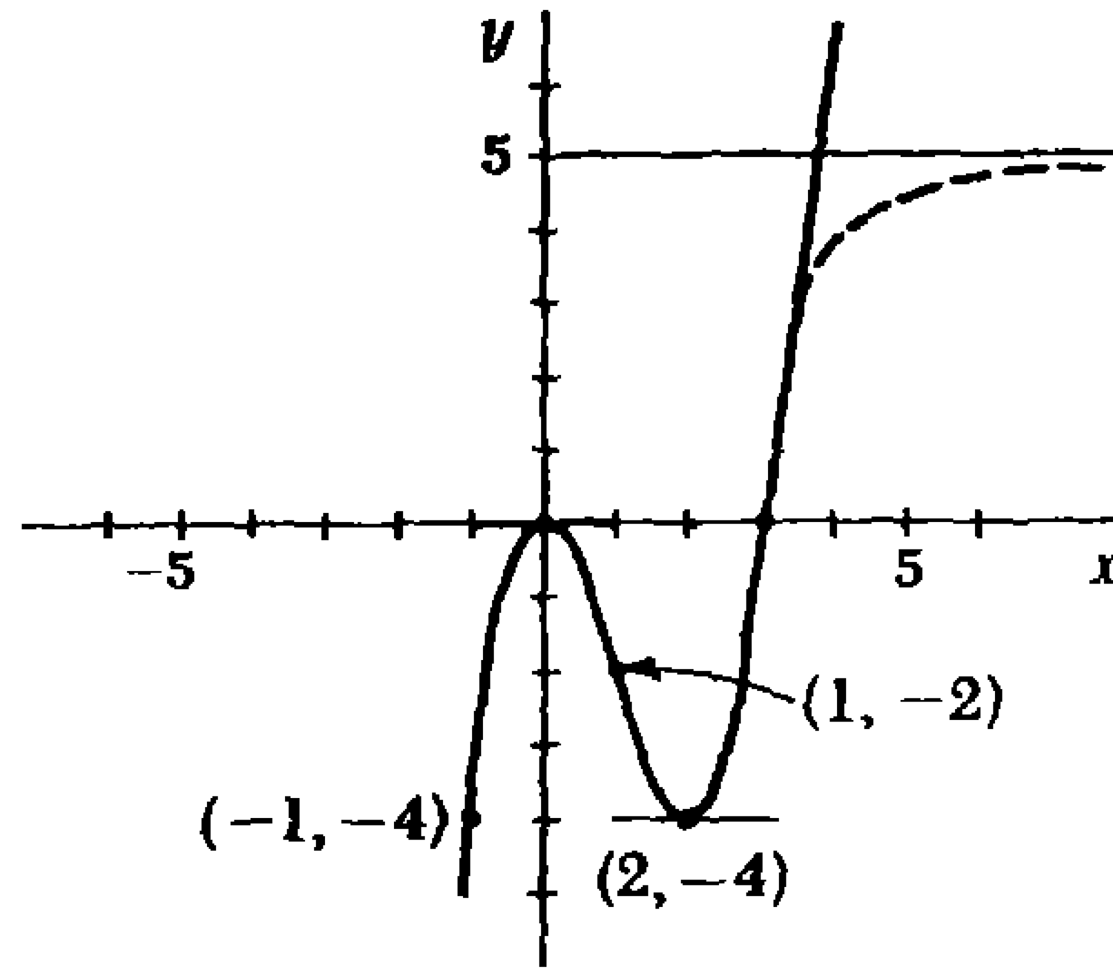
الجزء المقطوع من المحور y هو صفر ، والجزآن المقطوعان من المحور x هما 3 و 0 ، ونحصل على ذلك من صورة العوامل للدالة $f(x)$. بما أن

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

فالعددان الحرجان الوحيدان للدالة f هما 2 و 0 . النقطتان المناظرتان على الشكل البيانى هما $(2, -4)$ و $(0,0)$. نوقع هاتين النقطتين (شكل ٤ ـ ٢٤) ونذكر أن عند كل منهما الشكل البيانى له مماس أفقى . الاعداد الحرجة تقسم المحور x الى ثلاث فترات مقفلة ، هى

$$(-\infty,0], \qquad [0,2], \qquad [2,\infty)$$

فى كل منها f تكون متصلة وداخل كل منها f ليس لها عدد حرج . فى كل من هذه الفترات f تكون اما متزايدة واما متناقصة . بما أن $f'(-1) = 3(-1)(-3) > 0$ ، فان f تكون متزايدة فى الفترة $[0, \infty)$ والشكل البيانى يكون صاعدا الى النقطة $(0,0)$. يمكننا تخطيط جزء المنحنى الى يسار نقطة الأصل . بما أن النقطة $(2, -4)$ تحت النقطة $(0,0)$ ، فان f تكون متناقصة فى الفترة $[0,2]$ والشكل البيانى يكون هابطا بين هاتين النقطتين . نخطط هذا الجزء . بما أن $f'(4) = 3(4)(2) > 0$ فان f تكون متزايدة فى الفترة $(\infty, 2]$ والشكل البيانى يكون صاعدا على يمين النقطة $(2, -4)$. يمكننا تكملة التخطيط .



شكل ٤ ـ ٢٤

الشكل البيانى للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$.

عندما تكون x كبيرة جداً ، الحد x^3 فى التعبير عن الدالة $f(x)$ يكون أكبر كثيراً من الحد $3x^2$. اذن $f(x)$ لا تزداد فحسب فى الفترة $(\infty, 2]$ بل لقيم x الكبيرة كبراً كافياً تكون أكبر من مليون أو بليون أو أى عدد نختاره مسبقاً أى أن ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. هذا يعنى أن جزء الشكل البيانى الذى على يمين النقطة $(2,-4)$ يشبه المنحنى غير المشرط فى الشكل ٤ ـ ٢٤ وليس المنحنى المشرط .

بالمثل ، $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ أى أن $f(x)$ تكون كبيرة وسالبة عندما تكون x كبيرة سالبة ، والشكل البيانى ينحدر الى أسفل على اليسار . لدينا الآن فكرة جيدة عن الشكل البيانى ، ماذا يشبه . فى تخطيطنا عينا مواقع ثلاث نقط فقط . لقد أختيرا اختياراً حسناً ، والمشتقة أعطت معلومات أكثر من 20 نقطة . اذا أردنا الآن تخطيطاً أدق فاننا نوقع عدداً أكثر من النقط مثل $(-1,-4)$ و $(2,-1)$ و $(1,-2)$.

مثال ١ . خطط الشكل البيانى للدالة g المعرفة بـ $g(x) = -3x^5 + 5x^3$

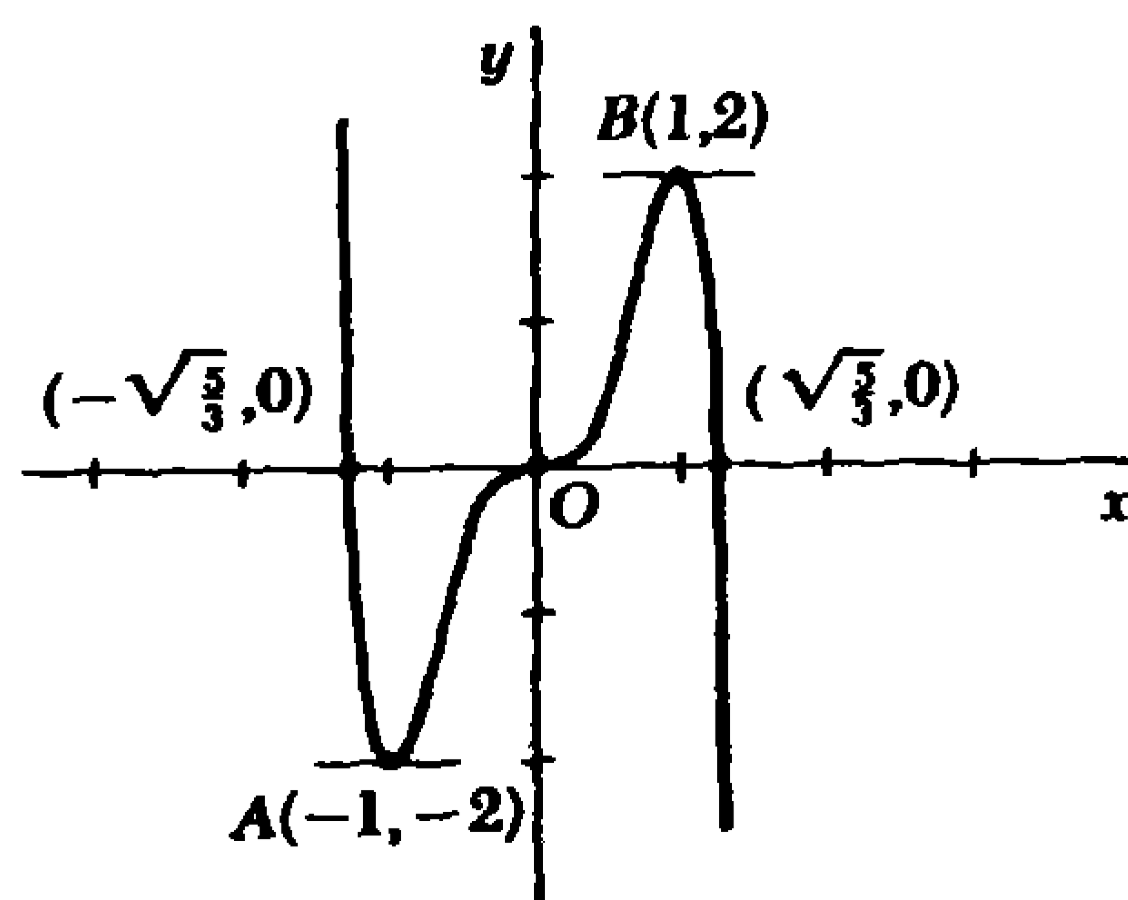
تعويض $-x$ عن x وتعويض $-y$ عن y فى $y = -3x^5 + 5x^3$ يعطى نفس المعادلة . من ثم المنحنى متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل . واضح أن الجزء المقطوع من المحور الصادى هو صفر ، واذا كتبنا $g(x)$ على الصورة $g(x) = x^3(-3x^2 + 5)$ فاننا نرى أن الأجزاء المقطوعة من السينى هى $\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \approx \pm 1.29$ و 0 . نوقع هذه النقط (شكل ٤ - ٢٥) . لايجاد الأعداد الحرجة ، نعبر عن المشتقة كحاصل ضرب :

$$g'(x) = -15x^4 + 15x^2 = -15x^2(x+1)(x-1)$$

الأعداد الحرجة هى $-1, 0, 1$ ، وهذه الأعداد فقط . النقط المناظرة هى :
$A(-1,-2), O(0,0), B(1,2)$ نوقع هذه النقط ونذكر أن الشكل البيانى له مماس أفقى عند كل منها . الأعداد الحرجة تقسم المحور السينى الى أربع فترات مقفلة هى

$$(-\infty,-1], \quad [-1,0], \quad [0,1], \quad [1,\infty)$$

فى كل منها الشكل البيانى يكون صاعداً أو هابطاً . من المواضع النسبية للنقط B و O و A والجزءان المقطوعان من المحور السينى ، نرى أن الشكل البيانى يهبط الى النقطة A ، يرتفع من A الى O ، يستمر فى الارتفاع من O الى B ، ثم يهبط بعد B . بما أن $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$ فالشكل البيانى مستمر فى الهبوط على اليمين وفى الصعود على اليسار . كاختبار أخير ، نرى أن الشكل البيانى متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل ، كما يجب أن يكون . لاحظ أن المماس للمنحنى عند نقطة الأصل يقطع المنحنى هناك .



شكل ٤ - ٢٥
الشكل البيانى للدالة $g(x) = -3x^5 + 5x^3$.

مثال ٢ . خطط المنحنى $y = x^{1/3}(x-8)$

المنحنى ليس متماثلا بالنسبة الى أى من المحورين ولا بالنسبة الى نقطة الأصل . الجزء المقطوع من المحور الصادى هو صفر ، والجزءان المقطوعان من المحور السينى هما 8 و 0 (شكل ٤ ـ ٢٦) . ضع $f(x) = x^{1/3}(x-8)$. فيكون

$$f'(x) = x^{1/3} + \tfrac{1}{3}x^{-2/3}(x-8) = \frac{4(x-2)}{3x^{2/3}} \qquad (١)$$

بالاضافة الى العدد الحرج 2 ، الذى عنده المشتقة تساوى صفراً ، يوجد العدد الحرج 0 ، الذى عنده f ليس لها مشتقة . النقطتان المناظرتان هما النقطة $(2, -6\sqrt[3]{2} \approx -7.56)$ ، التى عندها المنحنى له مماس أفقى ، والنقطة $(0,0)$. المعلومات

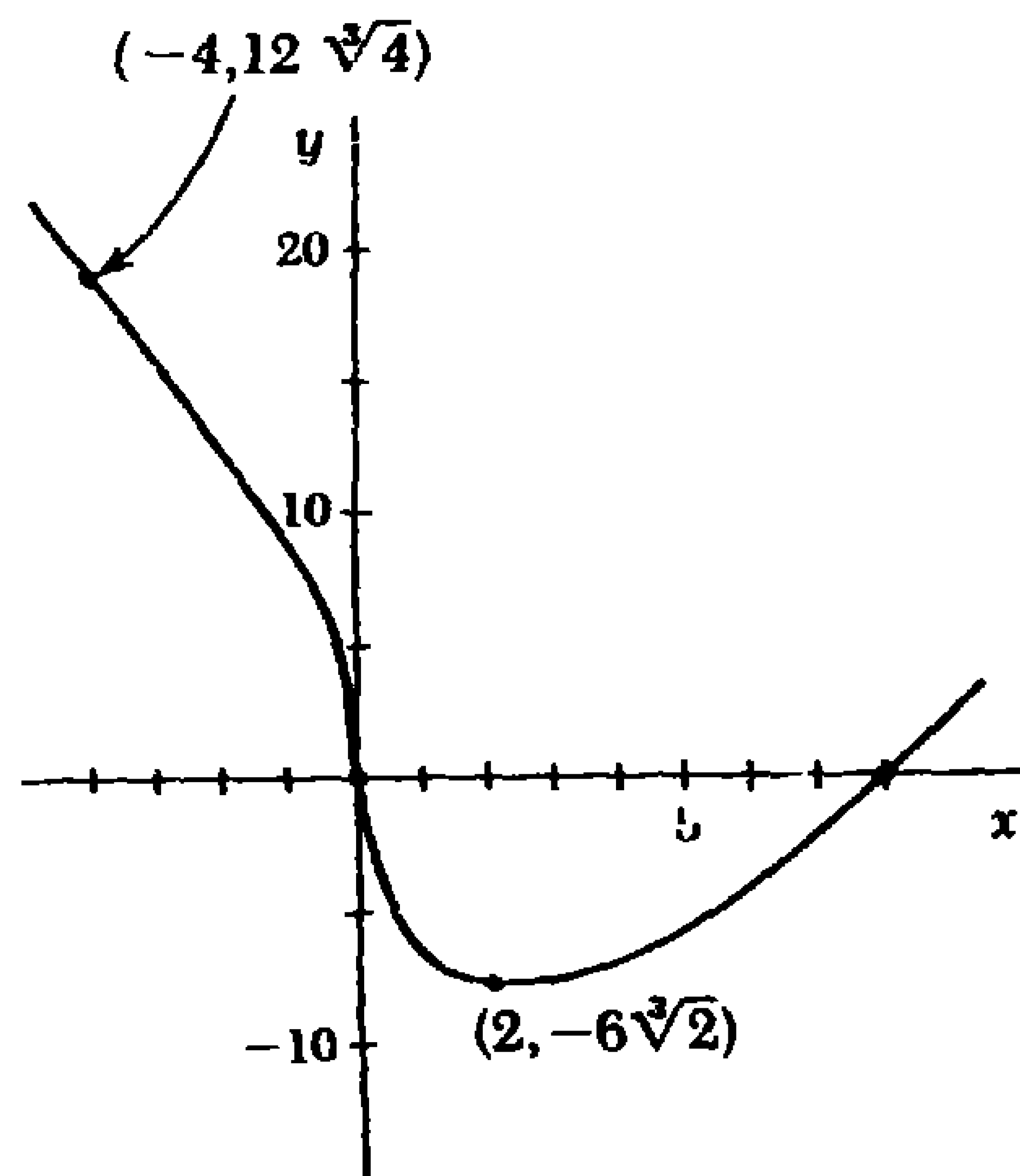
$$f'(-1) < 0, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -6\sqrt[3]{2}, \quad f(8) = 0$$

توضح أن المنحنى يكون هابطاً الى نقطة الأصل ، يستمر فى الهبوط الى النقطة $(2,-6\sqrt[3]{2})$ ، ثم يرتفع بعد ذلك . عندما لا توجد المشتقة عند عدد ما ، كما فى المثال ، غالباً ما يكون من المفيد أن ندرس المشتقة عند قيم x القريبة . عندما تكون x قريبة من الصفر ، سواء أكانت موجبة أو سالبة ، البسط فى (١) يكون قريباً من -8 والمقام قريباً من 0 وموجباً . وعلى ذلك $f'(x)$ تكون عدداً كبيراً سالباً . أى أن ، $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$. هذا يعنى أن المنحنى شديد الانحدار بالسالب بالقرب من نقطة الأصل ويصبح تزايديا كلما اقتربت x من الصفر . فى الواقع ، المحور الصادى يكون مماساً للمنحنى هناك . بما أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ فالمنحنى يصعد بغير حدود على اليمين وعلى اليسار .

نلخص الطريقة العامة لتخطيط المنحنى (الخطوة ٣ لم تحدث فى مثال حتى الآن ؟ سنأخذها فى الاعتبار فى البند ٤ ـ ٨) .

١ ـ لاحظ أى تماثلات للشكل البيانى .

٢ ـ عين مواقع الأجزاء المقطوعة اذا كان من السهل ايجادها .



شكل ٤ ـ ٢٦

الشكل البيانى للدالة $y = x^{1/3}(x-8)$.

٣ ـ اذا كانت الدالة f غير متصلة عند عدد c ، افحص قيم $f(x)$ لقيم x القريبة من c وبذلك تعين سلوك الشكل البيانى لمثل هذه القيمة x . أى أنك توجد $\lim_{x\to c^-} f(x)$ و $\lim_{x\to c^+} f(x)$.غالباً ما تكون القيم المناظرة للدالة f كبيرة وموجبة أو كبيرة وسالبة ، ويكون الخط المستقيم $x = c$ الخط التقاربى .

٤ ـ أوجد الأعداد الحرجة وعين مواقع النقط المناظرة ، ملاحظاً المواقع التى يكون عندها المماس أفقياً . هذا يجرى بسهولة اذا عبرنا عن المشتقة كحاصل ضرب أو كخارج قسمة ببسط ومقام فى صورة العوامل .

٥ ـ عين ما اذا كان المنحنى صاعداً أم هابطاً فى الفترات التى تحددها الأعداد الحرجة والأعداد حيث f غير معرفة .

٦ ـ اذا كانت f ليس لها مشتقة عند عدد حرج c ، افحص $f'(x)$ عند قيم x القريبة من c لترى مدى شدة انحدار المنحنى بالقرب من النقطة $(c, f(c))$. أى أوجد $\lim_{x\to c^+} f'(x)$ و $\lim_{x\to c^-} f'(x)$.

٧ ـ عين سلوك الشكل البيانى عندما تكون x كبيرة . أى أوجد $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to \infty} f(x)$.

مسائل

خطط الشكل البيانى للدوال أو المنحنيات الآتية . (نظرية العوامل ١ ـ ٢١ ونظرية الجذر الكسرى ١ ـ ٢٢ مفيدتان لايجاد جذور كثيرات الحدود) .

١ - $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$

٢ - $f(x) = x^2 - 3$

٣ - $g(x) = -x^2 - 9$

٤ - $y = -4x - x^2$

٥ - $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$

٦ - $F(t) = t^3$

٧ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 10$

٨ - $f(x) = 9x - x^3$

٩ - $g(z) = z^3/3 + z^2/2 - 2z - \frac{2}{3}$

١٠ - $v(s) = s(s-2)^2$

١١ - $g(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$

١٢ - $V(h) = \pi(36 - h^2)h$

١٣ - $y = x^3 + 3x$

١٤ - $u(x) = -(x-3)^4$

١٥ - $f(x) = x^4 - 4x$

١٦ - $h(x) = x(x+4)^3$

١٧ - $y = x^4 - x^3$

١٨ - $F(x) = x^4 - x^2 - 1$

١٩ - $z = (x^2 - a^2)^2,\ a > 0$

٢٠ - $f(x) = (2x^2 - 5x - 3)^2$

٢١ - $f(x) = 1 - 16x + 4x^3 - x^4$

٢٢ - $F(y) = (y+2)^5$

٢٣ - $s = 5t^2 - 2t^5$

٢٤ - $y = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3$

٢٥ - $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4$

٢٦ - $h(x) = (x-2)^2(x+3)^3$

٢٧ - $f(x) = x^5/5 - 4x^3/3 + 4x$

٢٨ - $f(r) = r^2(r^2 - 2)^2$

٢٩ - $y = x(c+x)^2(c-x)^3,\ c > 0$

٣٠ - $f(x) = 10/(x^2 + 2)$

٣١ - $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

٣٢ - $y = c - a(x-b)^{1/3};\ a, b, c > 0$

٣٣ - $f(x) = 8 - 2(x-3)^{2/3}$

٣٤ - $y = c + b(x-a)^{2/3};\ a, b, c > 0$

٣٥ - $y = x^{1/3}(4 - x)$

٣٦ - $g(r) = r^{2/3}(r - 10)$

٣٧ - $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

٣٨ - $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 16x}$

٣٩ - $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$　　٤٠ - $F(x) = |x| + x$

٤١ - $y = |x^3 - x|$

خطط المنحنيات الآتية وأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للميل فى الفترات المعطاة

٤٢ - $y = x^3 - x^2 - x - 1;\ [0,2]$　　٤٣ - $y = x^4 - 4x - 2;\ [-1,2]$

٤٤ - $y = 3x^4 - 4x^3;\ [0,2],\ [0,2),\ (0,2]$　　٤٥ - $y = x^5 - 5x + 3;\ [-2,2]$

٤٦ - $y = x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 12x;\ [-4,4]$

٤٧ - اثبت أن $x^2-2x+3>0$ لجميع قيم x . (ارشاد : أوجد القيمة الصغرى للمقدار الجبرى)

٤٨ - اثبت أن x^2-x+1 يكون موجباً لجميع قيم x .

٤٩ - اثبت أن $-x^3+9x-11$ يكون سالباً لجميع $x>-2$.

٥٠ - خطط المنحنى $y = 4x^3+3x^2-6x-2$ (أ) كم مرة يقطع المنحنى المحور السينى ؟ أين يكون ذلك بالتقريب ؟ (ب) أجب عن (أ) اذا أضفنا 4 الى جميع قيم y ، (حـ) أجب عن (أ) اذا طرحنا 4 من جميع قيم y .

٥١ - أثبت أن المعادلة $x^9+x+7=0$ لها بالضبط جذر حقيقى واحد . (ارشاد : اعتبر الشكل البيانى لـ $y = x^9+x+7$) .

٥٢ - اثبت أن المعادلة $x^5+3x^3+4x+5=0$ لها جذر حقيقى واحد فقط وحدد موقعه بين عددين صحيحين متتاليين .

٥٣ - حدد مواقع الجذور الحقيقية للمعادلة $x^4-14x^2-2=0$ بين أعداد صحيحة متتالية .

٥٤ - اثبت أن جميع الجذور الحقيقية للمعادلة $x^3+6x^2+12x+1=0$ سالبة .

٥٥ - لأى قيم b تكون المعادلة $x^4-4x+b=0$ ليس لها جذر حقيقى ؟ (ارشاد : اعتبر الشكل البيانى لـ $y = x^4-4x+b$)

٥٦ - المعادلة من الدرجة الثالثة $ax^3+bx^2+cx+d=0$ لا يمكن أن يكون لها أكثر من ثلاثة جذور حقيقية لكن قد يكون لها أقل . وضح الاحتمالات بيانياً بتخطيط المنحنى $y = ax^3+bx^2+cx+d$. صف كيف يمكن استخدام المشتقة لتعيين عدد الجذور الحقيقية لمعادلة من الدرجة الثالثة . وضح بالمعادلة $2x^3+9x^2+9=0$.

٥٧ - لأى قيم a تكون المعادلة $x^3+3x^2-9x+a=0$ لها بالضبط جذر حقيقى واحد ؟ لها جذران حقيقيان متباينان ؟ لها ثلاثة جذور حقيقية متباينة ؟ .

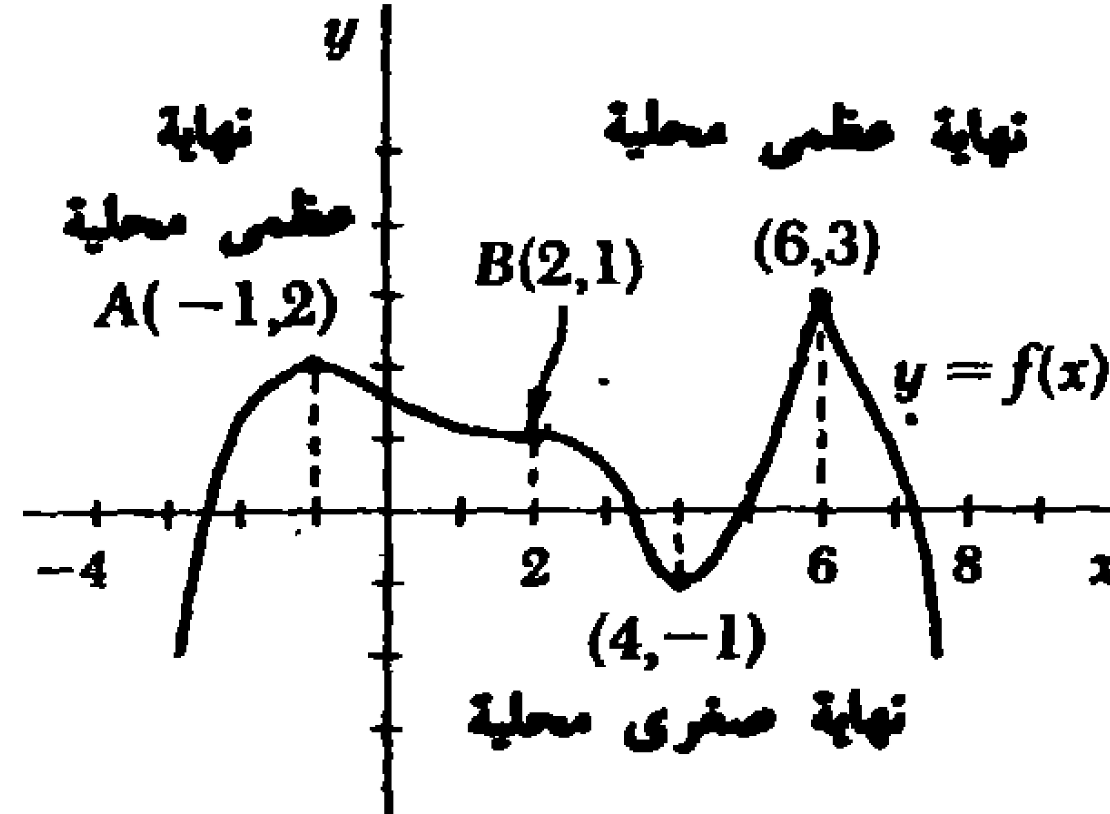
٥٨ - اذا كانت $ax+b/x\geqslant 0$ لجميع $x>0$ ، حيث c و b و a ثوابت موجبة ، اثبت أن $ab\geqslant c^2/4$.

٥٩ - اذا كانت r عدداً كسرياً أكبر من 1 ، اثبت أن $x^r-1-r(x-1)\geqslant 0$ لجميع $x>0$.

٦٠ - اثبت أن المعادلة $x^n-nx+c=0$ ، حيث n عدد صحيح أكبر من 2 وحيث c مقدار ثابت ، لا يمكن أن يكون لها أكثر من جذر حقيقى واحد فى الفترة $[-1,1]$.

النهايات العظمى والصغرى المحلية

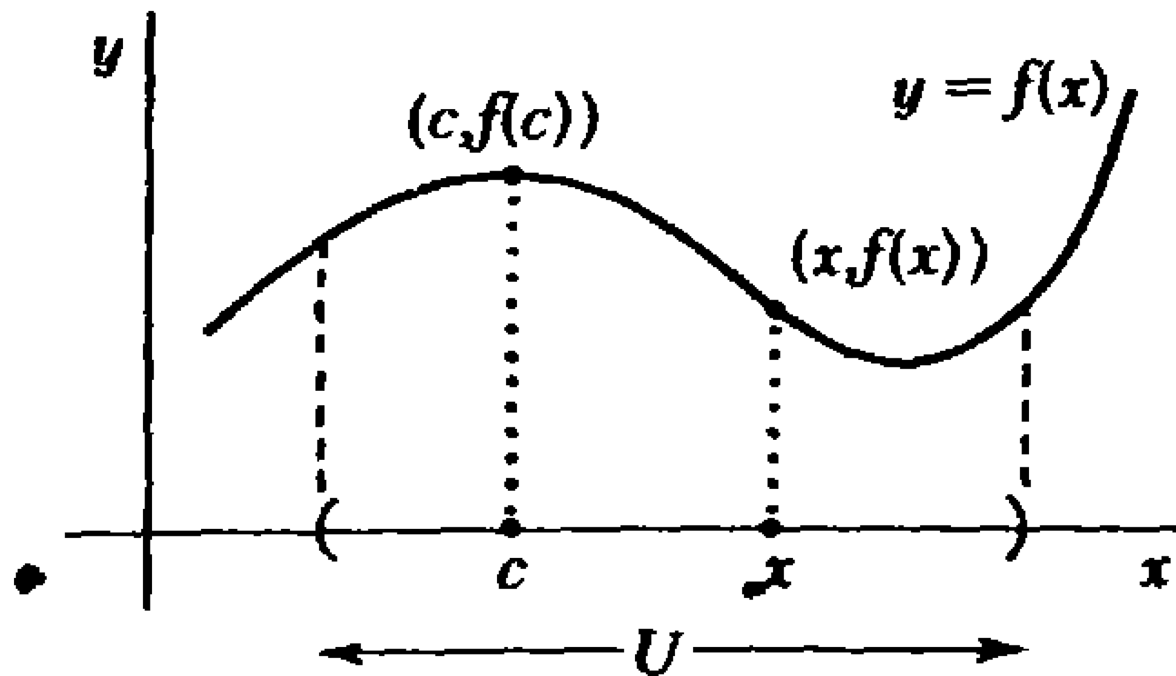
النقطة $A(-1,2)$ ليست أعلى نقطة على المنحنى $y=f(x)$ فى الشكل ٤ ـ ٢٧ ، لكن هى أعلى نقطة فى القرب المباشر . لهذا السبب تسمى A نقطة نهاية عظمى محلية على المنحنى ، والدالة f يقال أن لها نهاية عظمى محلية عند -1 بالمثل ، $(4,-1)$ هى نقطة نهاية صغرى محلية ، والدالة f لها نهاية صغرى محلية عند 4 . أيضاً الدالة لها نهاية عظمى محلية عند 6 ، لكن عند 2 الدالة ليس لها نهاية عظمى محلية ولا نهاية صغرى محلية . فى التعريف الآتى ، الجوار U يعطى دقة للكلمتين القرب المباشر المستخدمتين أعلاه .



شكل ٤ ـ ٢٧

٤ ـ ١٢ تعريف . الدالة f يكون لها نهاية عظمى محلية عند c اذا كان يوجد جوار U لـ c بحيث أن $f(x) < f(c)$ لجميع $x \neq c$ فى U (شكل ٤ ـ ٢٨) . الدالة لها نهاية صغرى محلية عند c اذا كانت $f(x) > f(c)$ لجميع $x \neq c$ فى U* .

لاحظ أن المتباينة القاطعة (> أو <) تكون مطلوبة للقيمة القصوى المحلية لكن المتباينة الضعيفة (≤ أو ≥) فقط ، تكون مطلوبة للقيمة القصوى فى فترة . التعريف يتضمن أنه اذا كانت f لها نهاية عظمى محلية عند c ، فان $f(c)$ هى القيمة العظمى للدالة f فى الفترة المفتوحة U ، ومن ثم بالنظرية ٤ ـ ٣ ، c يجب أن تكون عدداً حرجاً . نفس الشىء يكون صحيحاً للنهاية الصغرى المحلية .



شكل ٤ ـ ٢٨
لها نهاية عظمى محلية عند c لأن $f(x)<f(c)$ لجميع $x \neq c$ فى U.

---

* القيمة العظمى المحلية تكون أكثر اتفاقا مع اصطلاحنا السابق ، لكن سنستخدم هذا التعبير . المصطلح نهاية عظمى نسبية كثيرا ما يستخدم للنهاية العظمى المحلية .

٤ - ١٣ نظرية . كل قيمة قصوى محلية لدالة يجب أن تحدث عند عدد حرج .

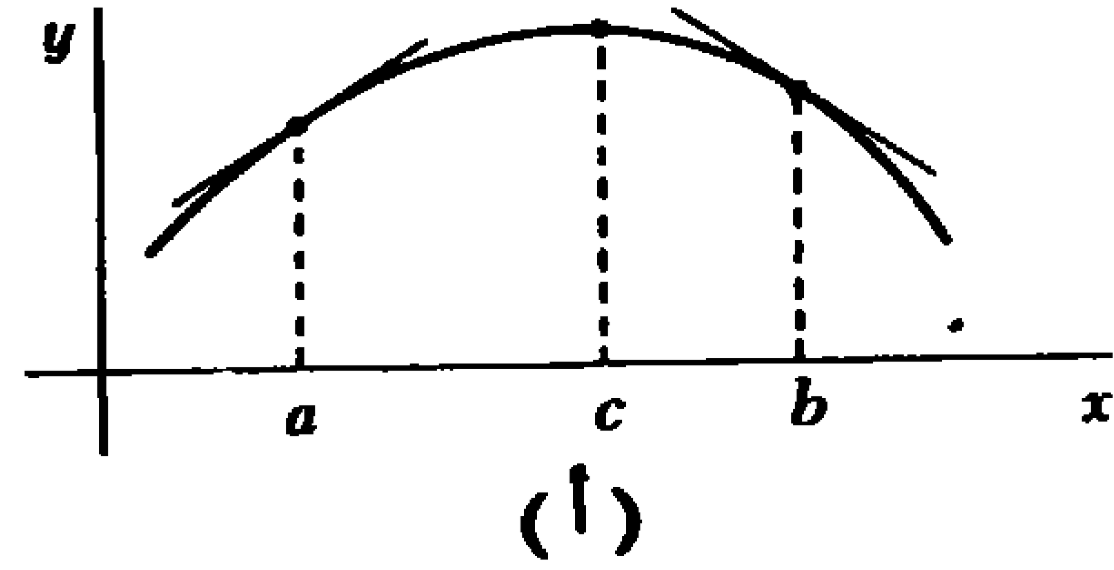
العكس ليس صحيحاً . الدالة ليس ضرورياً أن يكون لها قيمة قصوى محلية عند كل عدد حرج . مثل هذا الوضع يحدث عند B فى شكل ٤ - ٢٧ . لكن واضح منطقياً أن f يكون لها نهاية عظمى محلية عند عدد c اذا كان المنحنى صاعداً قبيل النقطة $P(c,f(c))$ وهابطاً عقب P ويكون لها نهاية صغرى محلية اذا كان المنحنى هابطاً قبيل P وصاعداً عقب P . اذا كان المنحنى صاعداً على جانبى P أو هابطاً على جانبى P ، فانه لا يمكن أن توجد قيمة قصوى محلية هناك . النظرية التالية اختبار لتحديد ما اذا كان العدد الحرج يعطى قيمة قصوى محلية واذا كان كذلك فمن أى نوع .

٤ - ١٤ اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية . لتكن c عدداً حرجاً للدالة f . اختر عددين a و b حيث $a<c<b$ وبحيث أن f تكون متصلة فى $[a,b]$ وليس لها عدد حرج فى الفترة خلاف c .

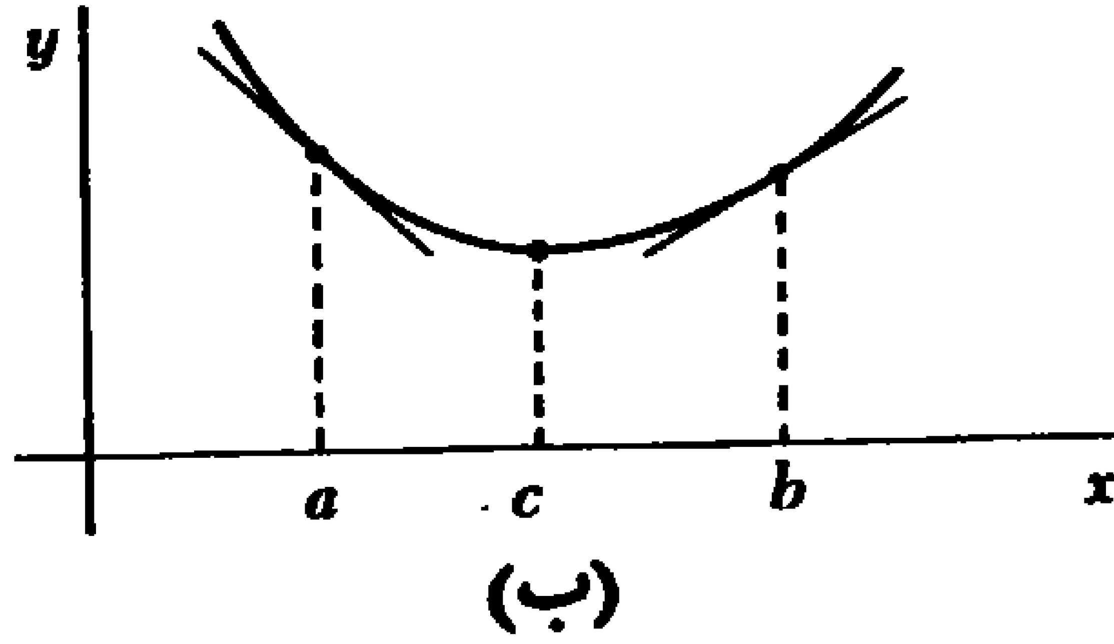
(أولا) اذا كانت $f'(b)<O$ و $f'(a)>O$ ، فان f يكون لها نهاية عظمى محلية عند c (شكل ٤ - ٢٩ أ) .

(ثانياً) اذا كانت $f'(b)>O$ و $f'(a)<O$ ، فان f يكون لها نهاية صغرى محلية عند c (شكل ٤ - ٢٩ ب) .

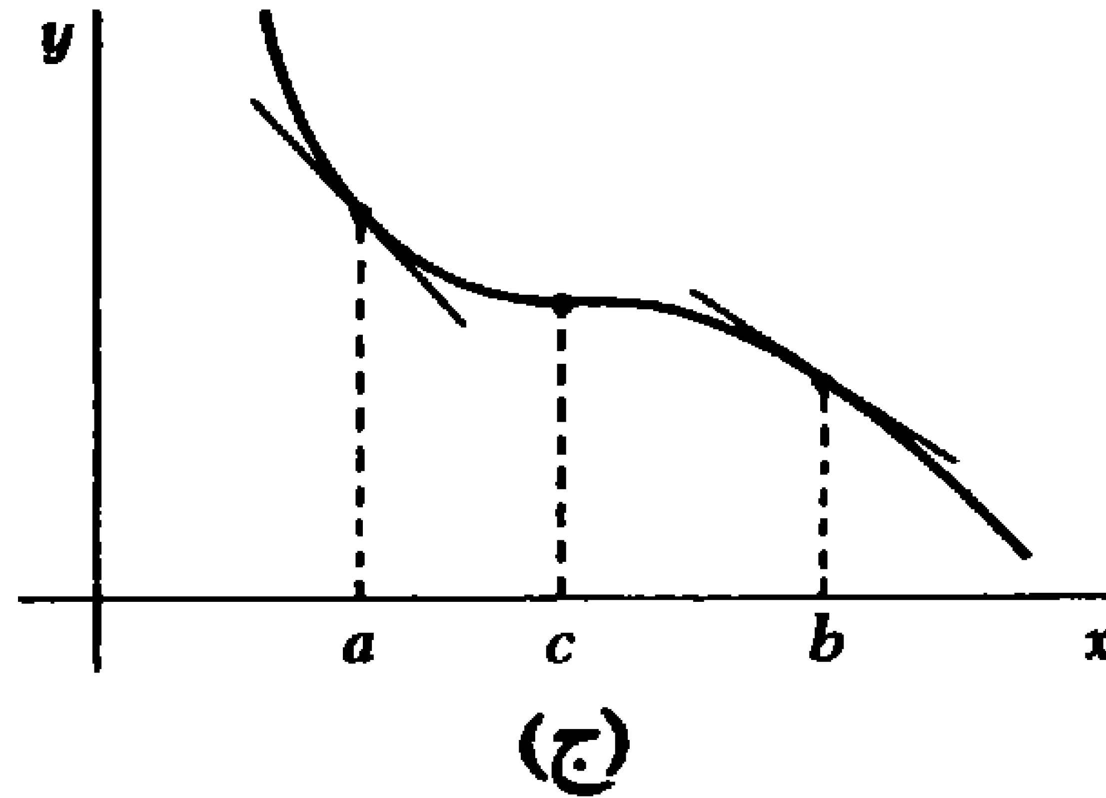
(ثالثاً) اذا كانت $f'(b)$ و $f'(a)$ كلتاهما موجبتين أو سالبتين ، فان f لا يكون لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c (شكل ٤ - ٢٩ حـ) .



(أ)



(ب)



(ج)

شكل ٤ - ٢٩

(أ) اذا كانت $f'(b)<0$ و $f'(a)>0$ فان f لها نهاية عظمى محلية عند c (ب) إذا كانت $f'(b)>0$ و $f'(a)<0$ فان f' لها نهاية صغرى محلية عند c (جـ) $(c$ اذا كانت $f'(b)<0$ و $f'(a)<0$ فان f ليس لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c.

البرهان . نبرهن (ثانياً) ونترك (ثالثاً) و (أولا) للقارىء (المسألة ٢٥) . نحتاج هنا الى صورة بديلة للنظرية ٤ ـ ١١ برهانها مماثل تماماً : لتكن f متصلة فى الفترة I وليس لها عدد حرج فى الداخل . عندئذ تكون f متزايدة أو متناقصة فى الفترة حسب كون مشتقتها عند عدد ما فى الفترة موجبة أو سالبة . بتطبيق هذه النظرية على الفترتين $[c,b]$ و $[a,c]$ هنا . نرى أن $f'(b)>O$ و $f'(a)<O$ تتضمنان أن f تتناقص فى الفترة $[a,c]$ وتتزايد فى الفترة $[c,b]$. ومن ثم $f(x)>f(c)$ لجميع $x \neq c$ فى الفترة $[a,b]$ ، وهذا هو الشرط أن الدالة f يكون لها نهاية صغرى محلية عند c .

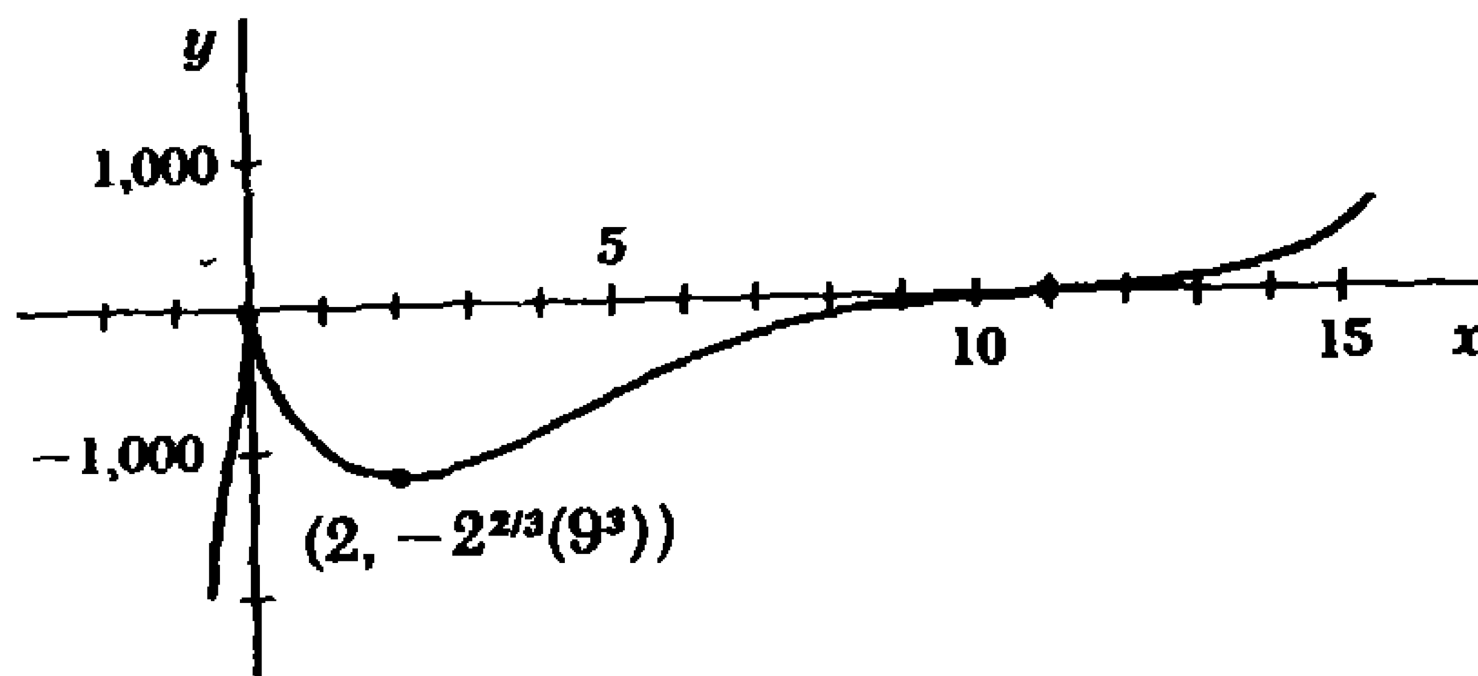
اذا خطط الشكل البيانى لدالة بايجاد الفترات حيث الدالة تكون متزايدة ومتناقصة ، كما فعلنا فى الأمثلة بالبند ٤ ـ ٤ ، فاننا سنحصل نتيجة لذلك على القيم القصوى المحلية . لكن أحياناً تكون القيم القصوى المحلية هى كل ما نريد . يمكننا ايجادها بدون تخطيط الشكل البيانى بأن نوجد جميع الأعداد الحرجة . النظرية ٤ ـ ١٣ تضمن أن القيم القصوى المحلية ستكون من بينها ، رغم أنه قد توجد نقط أخرى أيضاً . يمكن عندئذ اختبار كل عدد حرج باختبار المشتقة الأولى ٤ ـ ١٤ لتعيين ما اذا كانت هناك قيمة قصوى محلية ومن أى نوع هى .

مثال ١ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $g(x) = x^{2/3}(x-11)^3$.

الشكل البيانى مخطط فى الشكل ٤ ـ ٣٠ ، لكن سوف نحل المسألة بدون الرجوع اليه . من المشتقة

$$g'(x) = \frac{11(x-2)(x-11)^2}{3x^{1/3}}$$

نرى أن الأعداد الحرجة هى 11 و 2 و 0 . وهى الاحتمالات الوحيدة حيث يمكن أن تحدث القيم المحلية . لكن قد يكون واحداً أو أكثر لا يعطى قيمة قصوى محلية . نختبر كل عدد حرج بدوره باختبار المشتقة الأولى ٤ ـ ١٤ . للعدد الأول ، نختار $a=-1, b=1$ الدالة g متصلة فى الفترة $[-1,1]$ وليس لها عدد حرج هناك غيره . بما أن $g'(1)<O$ و $g'(-1)>O$ فان g لها نهاية عظمى محلية عند 0 من ٤ ـ ١٤ (أولا) . لاختبار العدد الحرج 2 ، نأخذ $b=8$ و $a=1$. بما أن $g'(8)>0$ و $g'(1)<0$ ، فان g لها نهاية صغرى محلية عند 2 من ٤ ـ ١٤ (ثانياً) . للعدد الحرج 11 ، نأخذ $b=12$ و $a=10$ ، ونرى أن $g'(12)>0$ و $g'(10)>0$ فنستنتج من ٤ ـ ١٤ (ثالثاً) أن g ليس لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند 11 .



شكل ٤ ـ ٣٠
الشكل البيانى لـ $g(x) = x^{2/3}(x-11)^3$.

مسائل

١ - أى من الدوال المخططة فى الشكل ٤ - ٣١ لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c ؟

٢ - اثبت أن الدالة التى شكلها البيانى مخطط فى الشكل ٤ - ٢٤ لها نقطة نهاية عظمى محلية عند $(0,0)$ ونقطة نهاية صغرى محلية عند $(2,-4)$ وذلك بالتأشير على المحور السينى بجوارين للنقطتين 2 و 0 يحققان التعريف ٤ - ١٢ . الى أى مدى يساراً ويميناً يمكن اختيار النقطتين الطرفيتين لجوار 2 ؟

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية ، باستخدام اختبار المشتقة الأولى .

٣ - $f(x) = 10 - 2x^2$

٤ - $f(x) = x^2 - 2x - 3$

٥ - $f(x) = -x^3 + 1$

٦ - $v(y) = -y^3 - 7y + 1$

٧ - $f(u) = u^3 - 12u^2 + 36u$

٨ - $g(t) = t^{5/3}$

٩ - $f(x) = 4x^3 - x^4$.

١٠ - $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 30x^2 - 36x - 1$

١١ - $G(x) = -(x+4)^4$

١٢ - $s(r) = (r+2)^3(r-3)^2$

١٣ - $g(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب ١٤ - $f(x)=x+4/x$.

١٥ - $f(z) = z^3 + 3/z$

١٦ - $f(x) = x^3 - 3/x$

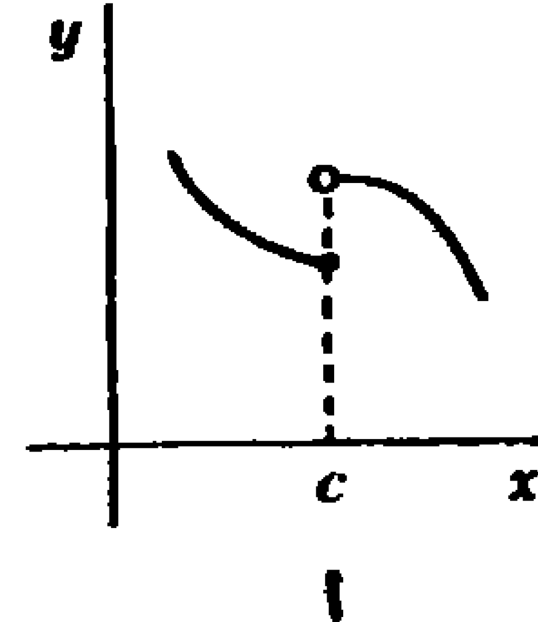
١٧ - $F(x) = x^2 + 4/x^2$

١٨ - $h(x) = x^{1/3}(x-5)$

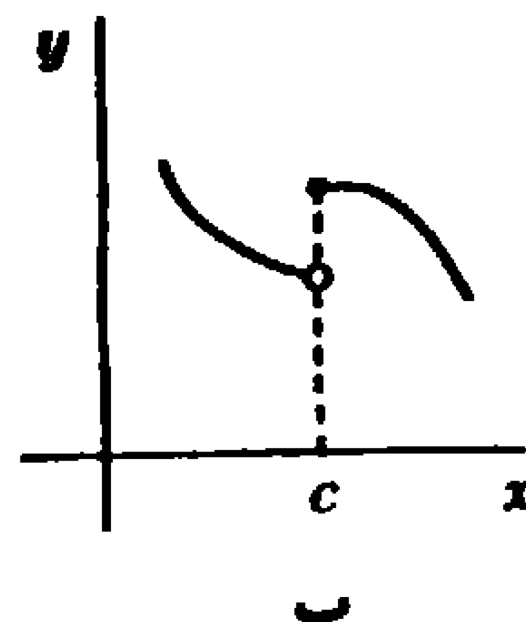
١٩ - $f(x) = x^{5/3} + 5x^{2/3}$

٢٠ - $f(t) = \sqrt[3]{t}(t-2)^2$

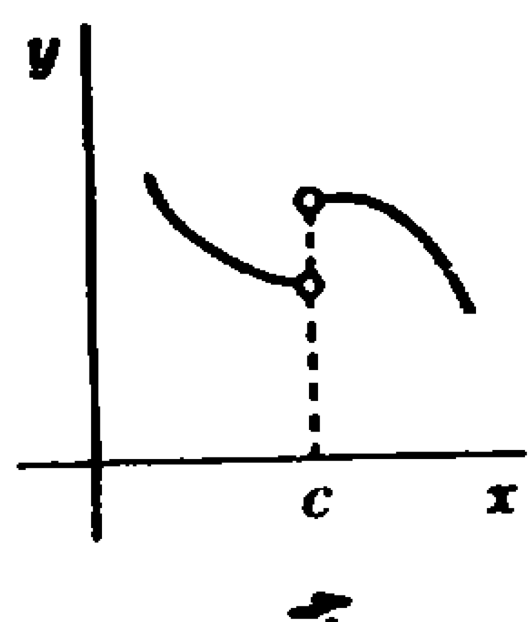
٢١ - $h(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$



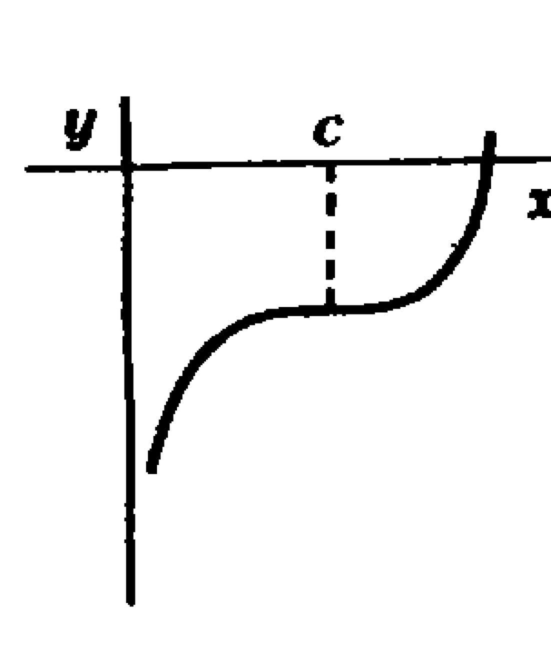
أ

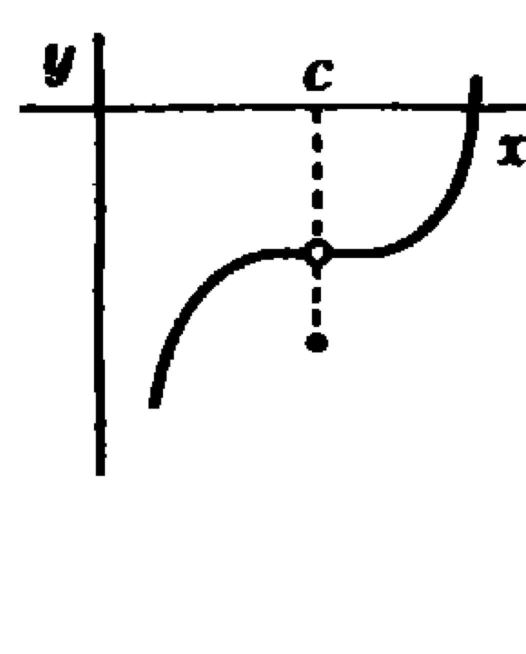


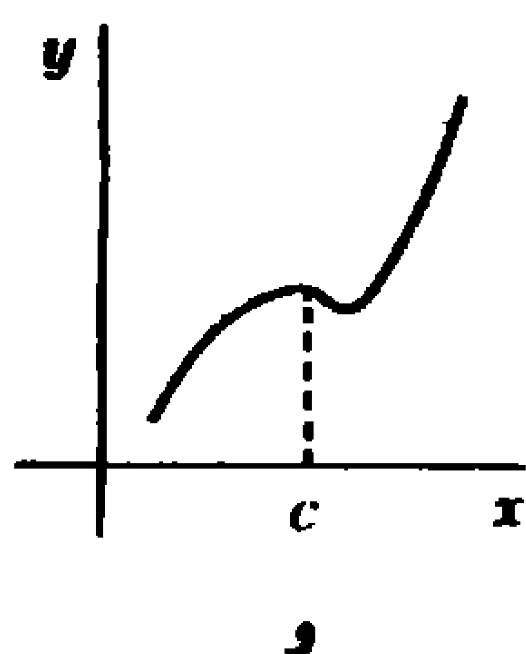
ب



جـ







و

شكل ٤ - ٣١

٢٢ ـ عين b و a بحيث تكون -1 عدداً حرجاً للدالة $g(x)=x^3+ax^2+bx$ وتكون $g(-1)=4$. هل $(-1,4)$ نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صغرى محلية للشكل البيانى للدالة g ؟

٢٣ ـ اذا كانت الدالة لها نهاية عظمى محلية واحدة ونهاية صغرى محلية واحدة ، هل يتحتم أن تكون القيمة العظمى المحلية أكبر من القيمة الصغرى المحلية ؟

٢٤ ـ لتكن الدالة f متصلة فى فترة ما ، قد تكون لا نهائية ، ولها عدد حرج واحد فقط c فى الداخل . اثبت أنه حسب كون الدالة f لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية عند c ، تكون f لها قيمة عظمى أوصغرى فى الفترة وأن هذه تحدث عند c .

٢٥ ـ أثبت (أ) الجزء (أولا) ، (ب) الجزء (ثالثاً) من اختبار المشتقة الأولى ٤ ـ ١٤ .

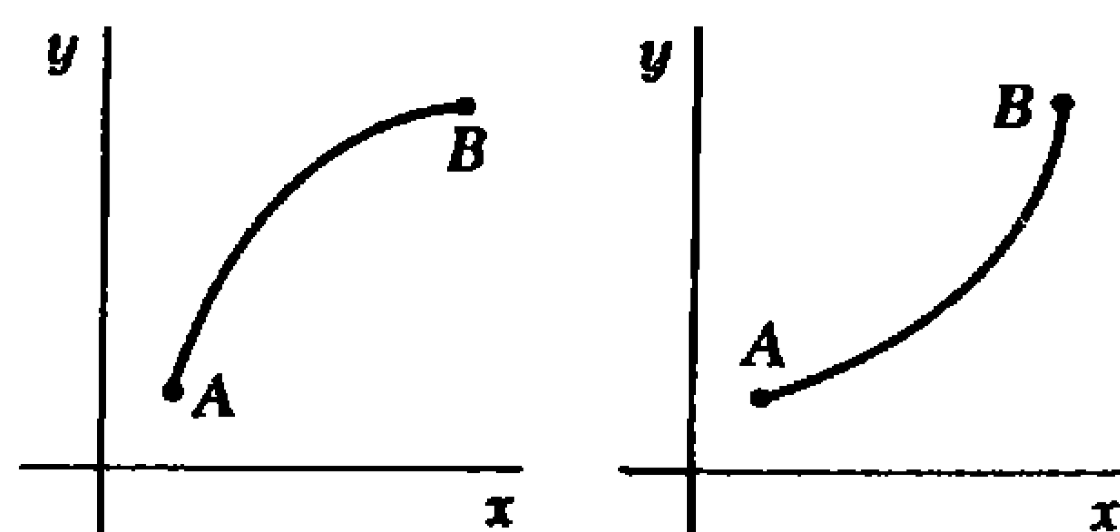
٢٦ ـ اذا كانت دالة f تتزايد فى فترة الى يسار العدد c وتتناقص فى فترة الى يمين c ، فان f يكون لها نهاية عظمى محلية عند c . هل العكس يكون صحيحاً ؟ أى اذا كانت الدالة لها نهاية عظمى محلية عند c ، فهل يجب أن توجد فترة ما $[a,b]$ تشمل c داخلها بحيث أن f تتزايد فى $[a,c]$ وتتناقص فى $[c,b]$ ؟

٤ ـ ٦
التقعر ونقط الانقلاب

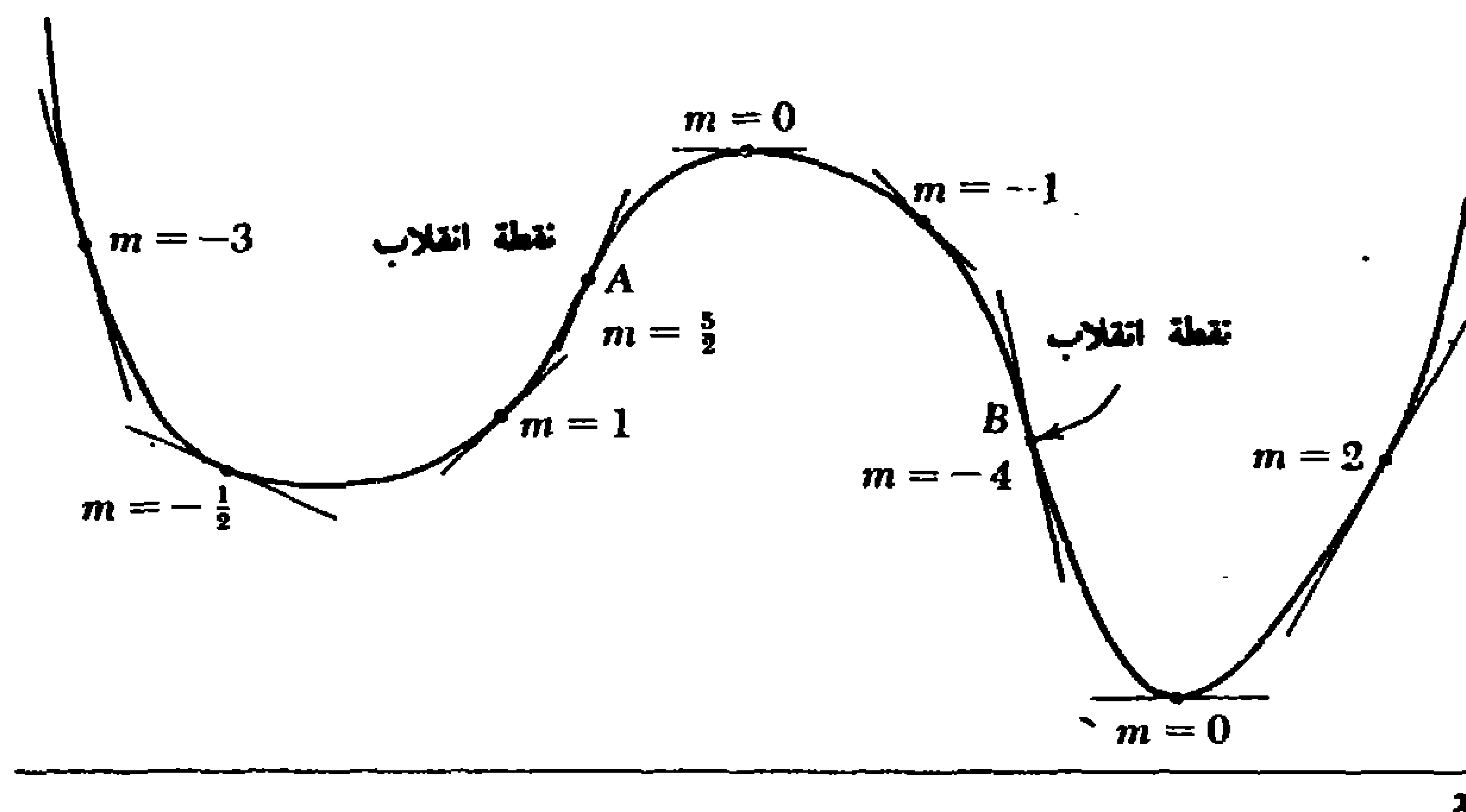
المنحنيان المخططان فى الشكل ٤ ـ ٣٢ كلاهما يرتفع من A الى B لكن لهما شكلان بيانيان مختلفان تماماً . واضح أنه يمكننا عمل تخطيط أفضل للمنحنى اذا كنا نعلم فى أى اتجاه ينحنى عند صعوده أو هبوطه . المشتقة تعطينا معلومات عن ذلك أيضاً .

الشكل البيانى لدالة نمطية مخطط فى الشكل ٤ ـ ٣٣ . أجزاء الشكل البيانى الى يسار النقطة A والى يمين النقطة B يقال أنها مقعرة الى أعلى والجزء بين A و B يقال أنه مقعر الى تحت . قبل أن نتمكن من ايجاد دليل للتقعر لأعلى أو لأسفل ، يجب أن نشرح بعناية أكثر ماذا نقصد بهذين التعبيرين .

عندما تتحرك نقطة من اليسار الى اليمين على المنحنى فى شكل ٤ ـ ٣٣ ، الميل m يزداد حتى نصل الى النقطة A . بعد ذلك يبدأ الميل فى التناقص ويستمر فى التناقص حتى نصل الى النقطة B . الى يمين B يتزايد الميل مرة أخرى ويستمر فى التزايد . بما أن هذه الخاصية يمكن التعبير عنها جبرياً فاننا نختارها كتعريف للتقعر .



شكل ٤ ـ ٣٢



شكل ٤ - ٣٣

الميل يزداد إلى A ، يتناقص من A الى B ، ويزداد بعد B .

٤ - ١٥ تعريف . لتكن الدالة f لها مشتقة فى الفترة I ، التى قد تكون لا نهائية . الشكل البيانى للدالة f يكون مقعراً لأعلى أو مقعراً لأسفل فى الفترة I حسب كون الدالة المشتقة f' تتزايد أو تتناقص فى I .

بمعنى آخر ، الشكل البيانى يكون مقعراً لأعلى فى الفترة I اذا كانت $f'(x_1)<f'(x_2)$ لجميع x_1,x_2 فى I حيث $x_1<x_2$ ، وبالمثل بالنسبة الى التقعر لأسفل . النظرية القادمة تعطى اختباراً بسيطاً للتقعر لأعلى أو لأسفل .

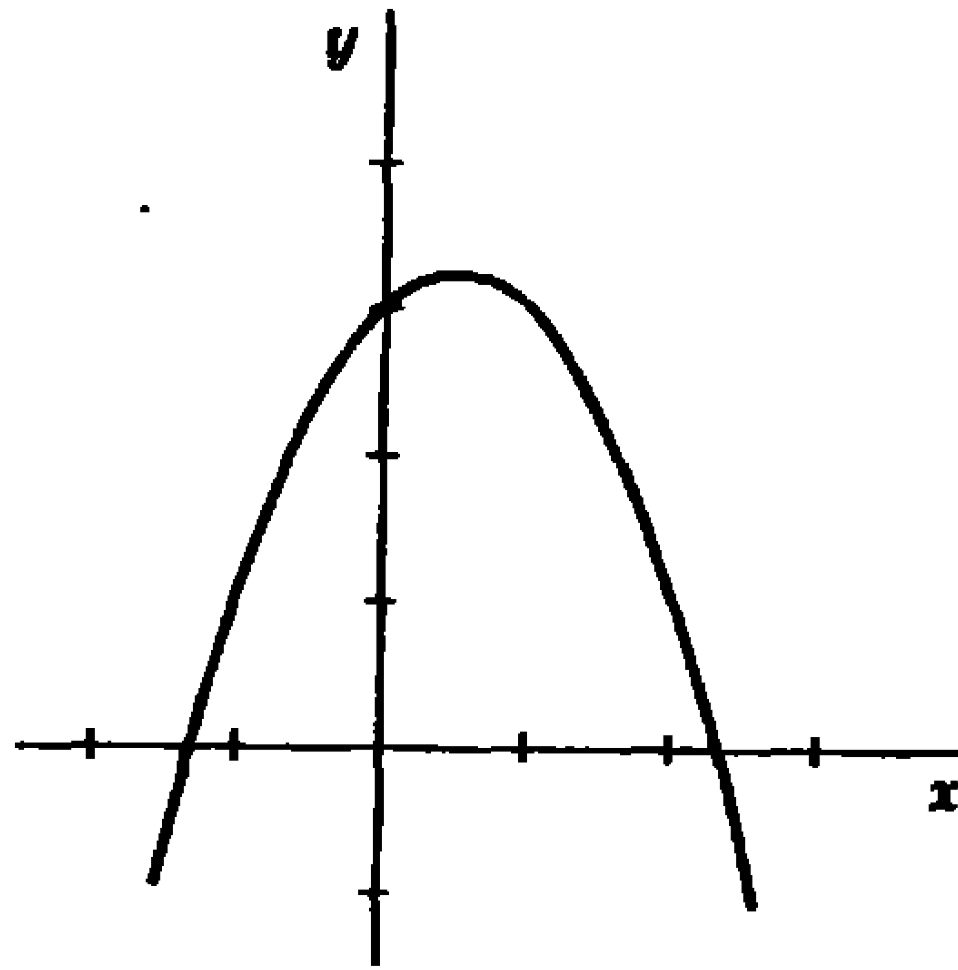
٤ - ١٦ نظرية . لتكن الدالة f لها مشتقة متصلة فى الفترة I ، التى قد تكون لا نهائية .

(أولا) الشكل البيانى للدالة f يكون مقعراً لأعلى فى I اذا كانت $f''(x)>0$ لجميع x داخل الفترة I .

(ثانياً) الشكل البيانى للدالة f يكون مقعراً لأسفل فى الفترة I اذا كانت $f''(x)<0$ لجميع x داخل الفترة I .

البرهان : النظرية ٤ - ١٠ تكون صحيحة لأى دالة تحقق فروض تلك النظرية . بوجه خاص ، يمكن تطبيقها على الدوال التى هى مشتقات دوال أخرى . من ثم اذا كانت $f''(x)=Df'(x)>0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان الدالة f' تكون متزايدة فى I والشكل البيانى يكون مقعراً لأعلى فى I بالتعريف ٤ - ١٥ . بالمثل ، اذا كانت $f''(x)<0$ لجميع x داخل الفترة I ، فان f' تكون متناقصة والشكل البيانى يكون مقعراً لأسفل فى I .

نوع التقعر يكون مستقلا عما اذا كان المنحنى صاعداً أم هابطاً . المنحنى الصاعد يمكن أن يكون مقعراً لأعلى أو لأسفل (أنظر الشكل ٤ - ٣٢) ، وبالمثل للمنحنى الهابط . يمكننا أن نتذكر



شكل ٤ - ٣٥
الشكل البيانى للدالة $g(x) = -x^2+x+3$ مقعر لأسفل فى كل فترة .

+
يستوعب الماء

—
يسقط الماء

شكل ٤ - ٣٤

الحالتين بأن نذكر أن : اذا كانت $f''(x)$ موجبة ، فان المنحنى يكون على شكل كوب « ويحتفظ بالماء » ، واذا كانت $f''(x)$ سالبة ، فان المنحنى « يسقط الماء » (الشكل ٤ - ٣٤) .

الشكل البيانى للدالة $g(x)=-x^2+x+3$ هو القطع المكافىء المخطط فى شكل ٤ - ٣٥ . لأن $g''(x)=-2<0$ لكل x ، فان الشكل البيانى مقعر لأسفل فى كل فترة .

نفرض أن f متصلة فى الفترة I وأن $f''(x)$ موجودة فى كل مكان فى الداخل ولا تساوى صفراً أبداً هناك . بتطبيق النظرية ٤ - ١١ على الدالة المشتقة f' ، اما $f''(x)>0$ لجميع x فى الداخل والشكل البيانى للدالة f يكون مقعراً لأعلى فى I ، واما $f''(x)<0$ لجميع x فى الداخل والشكل البيانى للدالة f يكون مقعراً لأسفل فى I . يمكن تعيين أى الحالتين بايجاد اشارة $f''(x)$ عند نقطة مناسبة x داخل الفترة I . سنوضح كيف نعين الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى أو لأسفل بعد أن ندرس نقط الانقلاب .

عند النقطتين B و A فى الشكل ٤ - ٣٣ التقعر يتغير من أعلى لأسفل أو العكس . مثل هذه النقط تسمى نقط انقلاب وتتميز بأنها النقط التى بالقرب المباشر منها يكون المنحنى مقعراً لأعلى على أحد جانبى النقطة ومقعراً لأسفل على الجانب الآخر . التعريف الآتى يجعل هذا محكماً .

٤ - ١٧ تعريف . النقطة $(c,f(c))$ تكون نقطة انقلاب للشكل البيانى للدالة f اذا كانت f متصلة عند c اذا كان يوجد جوار (a,b) لـ c بحيث أن الشكل البيانى يكون مقعراً لأعلى فى (a,c) ومقعراً لأسفل فى (c,b) أو العكس .

اذا كان عند نقطة انقلاب $(c,f(c))$ دالة المشتقة الثانية f'' متصلة وموجبة ، أى كانت $f''(c)>0$ ، فانه لابد أن يوجد (بالمسألة ٢٠ بند ٢ - ٩) جوار لـ c تكون فيه $f''(x)>0$ والمنحنى لا يمكنه تغيير اتجاه تقعره عند c . بالمثل ، لا يمكن أن تكون f'' متصلة وسالبة عند c . هذا يتضمن أن أية نقطة انقلاب يمكن حدوثها فقط عند عدد c حيث f'' تكون متصلة وحيث $f''(c)=0$

أو حيث f'' لا تكون متصلة ، وهذا يكافىء أن $f''(c)=0$ أو f'' لا تكون متصلة عند c . بربط هذه الملاحظة مع التعريف ٤ ـ ١٧ ، يكون لدينا الدليل الآتى لنقط الانقلاب .

٤ ـ ١٨ . نظرية . النقطة $(c,f(c))$ تكون نقطة انقلاب للشكل البيانى للدالة f إذا وإذا فقط تحقق جميع ما يأتى :

(أولاً) f متصلة عند c .
(ثانياً) $f''(c)=0$ أو f'' غير متصلة عند c .
(ثالثاً) يوجد جوار (a,b) لـ c بحيث أن الشكل البيانى يكون مقعراً لأعلى فى (a,c) ومقعراً لأسفل فى (c,b) أو العكس .

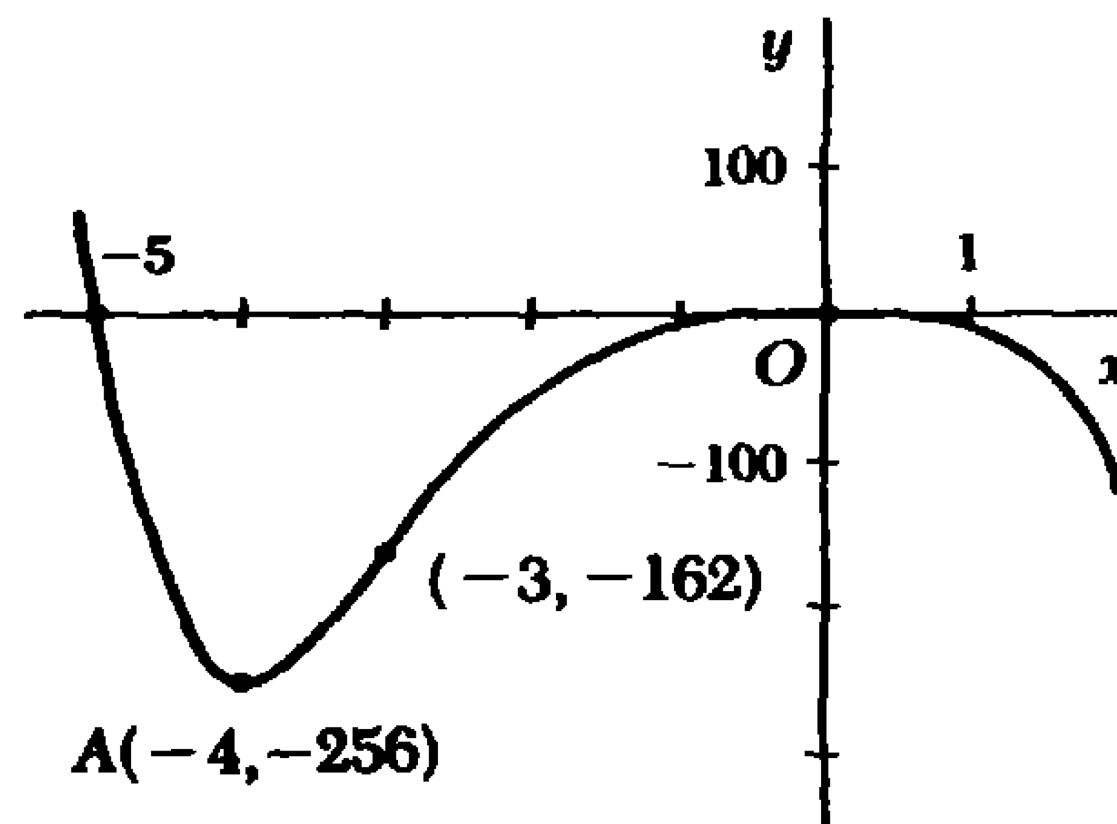
لاحظ أن الشرط (ثانياً) رغم أنه ضرورى لنقطة الانقلاب ، فهو ليس كافياً . النقطة $(c,f(c))$ قد لا تكون نقطة انقلاب رغم أن $f''(c)=0$. هذه النظرية تمكننا من ايجاد نقط الانقلاب للمنحنى . نوجد أولا جميع الأعداد c حيث $f''(c)=0$ أو حيث f'' ليست متصلة . الشرط (ثانياً) يؤكد لنا أن فئة النقط المناظرة على الشكل البيانى ستحتوى جميع نقط الانقلاب ، الا أن شبكتنا قد تكون اصطادت سمكاً آخر أيضاً . عندئذ نختبر كل c لنرى ما اذا كان المنحنى يغير تقعره هناك . لاحظ أن عند نقطة انقلاب ، المشتقة الأولى ، أن وجدت ، لها قيمة قصوى محلية والمماس يقطع المنحنى هناك ، (أنظر الشكل ٤ ـ ٣٣) أيضاً جدير بالذكر أن عند نقطة انقلاب حيث $f''(c)=0$ ، تكون c عدداً حرجاً للدالة f' .

مثال ١ . خطط المنحنى $y=-x^5-5x^4$ ، مع ايجاد الفترات حيث يكون المنحنى مقعراً لأعلى ولأسفل وايجاد نقط الانقلاب له .

لتكن $f(x)=-x^5-5x^4$. كما سبق ، نوجد أولا أين تتزايد f وأين تتناقص . لدينا

$$f'(x) = -5x^4 - 20x^3 = -5x^3(x+4)$$

المنحنى له مماسان أفقيان عند $O(0,0)$ و $A(-4,-256)$ الجزءان المقطوعان من المحور السينى هما -5 و 0 . بتوقيع هذه النقط (شكل ٤ ـ ٣٦) ، نرى أن المنحنى يهبط حتى يصل A ، يرتفع من A الى O ، ثم يهبط بعد ذلك .



شكل ٤ ـ ٣٦
الشكل البيانى للمنحنى $y = -x^5-5x^4$.

ثم نوجد أين يكون المنحنى مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب . بما أن

$$f''(x) = -20x^3 - 60x^2 = -20x^2(x+3)$$

فان $f''(x)$ تكون متصلة فى كل مكان وتكون صفراً فقط عند -3 و 0 . النقطتان المناظرتان $(-3,-162)$ و $(0,0)$ على المنحنى هما الاحتمالان الوحيدان لنقط الانقلاب ، لكن أيا منهما أو كلاهما قد لا تكون . العددان -3 و 0 ، اللذان هما العددان الحرجان للدالة f' ، يقسمان المحور السينى الى الفترات

$$(-\infty,-3], \quad [-3,0], \quad [0,\infty)$$

حيث داخل كل منها $f''(x)$ تكون موجودة ولا تكون صفراً مطلقاً . لكل فترة ، أما $f''(x)>0$ لجميع x فى الداخل والمنحنى يكون مقعراً لأعلى فى الفترة ، واما $f''(x)<0$ لجميع x فى الداخل والمنحنى يكون مقعراً لأسفل فى الفترة . يمكن تحديد أى الحالتين ، باختيار عدد فى داخل كل فترة ، مثلا 1 و -1 و -4 وايجاد اشارة المشتقة الثانية هناك . بما أن $f''(-4)=-20(16)(-1)>0$ اذن $f''(x)>0$ لجميع x فى الفترة $(-\infty,-3)$ والمنحنى يكون مقعراً لأعلى فى $(-\infty,-3]$. بما أن $f''(-1)=-20(1)(2)<0$ ، فان $f''(x)<0$ لجميع x فى الفترة $(-3,0)$ والمنحنى يكون مقعراً لأسفل فى $[-3,0]$. النقطة $(-3,-162)$ هى نقطة انقلاب لأن التقعر يتغير هناك . بما أن $f''(1)=-20(1)(4)<0$ فان $f''(x)<0$ لجميع x فى الفترة $(0,\infty)$ والمنحنى يكون مقعراً الى أسفل فى $[0,\infty)$. النقطة $(0,0)$ ليست نقطة انقلاب لأن التقعر لا يتغير هناك . هذا فقط ما نتوقعه اذ أننا وجدنا أن f لها نهاية عظمى محلية عند نقطة الأصل .

مثال ٢ . الدالة $f(x)=x^{1/3}(x-8)$ قد درست فى مثال ٢ ، بند ٤ ـ ٢٤ وخططت فى الشكل ٤ ـ ٢٦ . أوجد الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب له .

لدينا

$$f'(x) = \frac{4(x-2)}{3x^{2/3}} \quad \text{و} \quad f''(x) = \frac{4(x+4)}{9x^{5/3}}$$

ونرى أن $f''(-4)=0$ وأن $f''(0)$ لا توجد . واذن الاحتمالان الوحيدان لنقط الانقلاب هما النقطتان $(0,0)$ و $(-4,12\sqrt[3]{4})$. العددان 0 و -4 يقسمان المحور السينى الى الفترات

$$(-\infty,-4], \quad [-4,0], \quad [0,\infty)$$

التى فى كل منها يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل . بما أن

$$f''(-5) = \frac{4(-1)}{9(-5)^{5/3}} > 0, \qquad f''(-3) = \frac{4(1)}{9(-3)^{5/3}} < 0,$$

$$f''(1) = \frac{4(5)}{9} > 0,$$

فان المنحنى يكون مقعراً لأعلى فى الفترة الأولى ، والى تحت فى الثانية ، والى أعلى فى الثالثة ، فكلتا النقطتين $(0,0)$ و $(-4,12\sqrt[3]{4})$ هما نقطتا انقلاب .

معرفة أين يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل وتعيين مواقع نقط الانقلاب هى اجراءات ثانوية لتخطيط المنحنى ، مفيدة اذا أردنا تخطيطاً أكثر دقة . لأغراض كثيرة لا نحتاج الى مثل هذه الدقة .

مسائل

١ - خطط الشكل البيانى لدالة f بحيث أن عند x تساوى 2 وبالقرب منها يتحقق أحد الشروط الآتية :

أ - $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ب - $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ ج - $f'(x) > 0, f''(2) = 0$

د - $f'(x) < 0, f''(x) > 0$ هـ - $f'(x) < 0, f''(x) < 0$ و - $f'(x) < 0, f''(2) = 0$

ز - $f'(2) = 0, f''(x) > 0$ ح - $f'(2) = 0, f''(x) < 0$ ط - $f'(2) = 0, f''(2) = 0$

٢ - خطط منحنى متصلا $y=f(x)$ حيث $f''(x)>0, f(2)=0$ عند $x<2$ و $f''(x)<0$ عند $x>2$.

٣ - خطط منحنى متصلا $y=f(x)$ له الخواص الآتية :

$$f'(x)>0,\ f(-3)=0,\ f(0)=2,\ f(4)=5,\ f'(-3)=f'(4)=0$$

اذا كانت : $-3<x<4$ ، $f'(x)<0$. اذا كانت $x<-3$ أو $x>4$ ، $f''(x)>0$:

اذا كانت $x<0$ ، $f''(x)<0$ اذا كانت $x>0$.

٤ - خطط منحنى متصلا $y=f(x)$ حيث $f'(x)<0$ عند $x<-1$ ، $f'(x)>0$ عند $x>-1$ ، وله احدى الخواص الآتية : (أ) $f'(x)$ توجد عند -1 (ب) $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1$ و $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1$

(ج) $f'(x)=-1$ عند $x<-1$ و $f'(x)=1$ عند $x>-1$.

خطط المنحنيات الآتية ، مع ايجاد الفترات حيث المنحنى يكون مقعراً لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب له :

٥ - $y = x^2 + 3x - 4$ ٦ - $y = x^3$ ٧ - $y = 2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$

٨ - $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ ٩ - $y = 4z^3 - 18z^2 + 15z$ ١٠ - $y = (x-1)^2(x+1)$

١١ - $y = x^4$ ١٢ - $V = 12r^2 - r^4$ ١٣ - $u = 3t^4 + 4t^3 + 1$

١٤ - $y = -3x^4 + 8x^3$ ١٥ - $y = (x^2 - 5)^2$ ١٦ - $y = (x-2)^4 - 24(x-2)^2$

١٧ - $y = -x^4 - 32x - 48$ ١٨ - $z = s^4 - 4s - 2$ ١٩ - $y = x^5 - 5x - 1$

٢٠ - $s = 3t^5 - 5t^3$ ٢١ - $y = -\frac{x^5}{5} + x^4$ ٢٢ - $y = x(x^2 - 10)^2$

٢٣ - $y = \frac{1}{x^2 + a^2}, a \neq 0$ ٢٤ - $y = \frac{4x}{1 + x^2}$ ٢٥ - $y = (z-2)^{1/5}$

٢٦ - $y = x^{2/3} - 4.$ ٢٧ - $y = x^{5/3}$ ٢٨ - $y = x^{2/3}(x + 8)$

٢٩ - $y = 3x^{1/3} + 2x^2$ ٣٠ - $y = x^{2/3}(x - 15)$

٣١ ـ خطط المنحنى $y=4+3x-x^3$ ، موضحاً الخط المماس عند نقطة الانقلاب أوجد معادلة المماس .

٣٢ ـ أوجد معادلة المماس للمنحنى $y=x^3-x^2+x-2$ عند نقطة الانقلاب .

٣٣ ـ أوجد نقط الانقلاب للمنحنى $y=x^2-1/3x^2$ ومعادلات الخطوط المماسية هناك .

٣٤ ـ عين b و a بحيث أن المنحنى $y=x^3+ax^2+bx$ يكون له نقطة انقلاب عند $(1,-3)$.

٣٥ ـ عين c بحيث أن العمودى للمنحنى $y=c(x^2-5)^2$ عند نقطة انقلاب يمر بنقطة الأصل .

٣٦ ـ اثبت أن المنحنى التكعيبى العام $y=ax^3+bx^2+cx+d$ يكون متماثلا بالنسبة الى نقطة الانقلاب . (ارشاد : انقل نقطة الأصل الى نقطة الانقلاب) .

٣٧ ـ أوجد معادلة منحنى $y=f(x)$ بحيث أن $f'(x)>0$ لـ x عند وقرب 0 و $f''(0)=0$ ، ويحقق أحد الشروط الآتية : (أ) يكون مقعراً لأسفل على يسار 0 ومقعراً لأعلى على يمين 0 (ارشاد : ادرس $f''(x)=6x$) ، (ب) يكون مقعراً لأعلى على كلا جانبى 0 ، (ج) لا يكون مقعراً لأعلى ولا مقعراً لأسفل على اليسار وعلى اليمين لنقطة الأصل 0 .

٣٨ ـ هل عكس النظرية ٤ ـ ١٦ (أولا) صحيح ؟ أى اذا كان الشكل البيانى للدالة f مقعراً لأعلى فى I ، فهل $f''(x)>0$ لجميع x داخل I ؟

٣٩ ـ لتكن a جذرا لكثيرة حدود $P(x)$. أثبت أن a تكون جذراً مزدوجاً لكثيرة الحدود $P(x)$ اذا واذا فقط كانت جذرا للمشتقة $P'(x)$. (ارشاد : استخدام نظرية العوامل ١ ـ ٢١) .

٤٠ ـ أثبت أن كثيرة الحدود $P(x)$ تكون مماسة للمحور السينى عند $(a,0)$ اذا واذا فقط كانت a جذراً مكرراً .

٤١ ـ أثبت أن كثيرة الحدود $P(x)$ يكون لها نقطة انقلاب عند $(a,0)$ اذا كانت a جذراً لكثيرة الحدود $P(x)$ مكرراً ثلاث مرات .

٤٢ ـ اذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل مرتين فى الفترة $[a,b]$ (أى اذا كانت $f''(x)$ موجودة فى كل مكان فى الفترة $[a,b]$) وكانت f'' ليس لها أصفار هناك ، فما هو أكبر عدد من الأصفار يمكن أن يكون للدالة f وللمشتقة f' فى الفترة (a,b) ؟ وضح بأمثلة .

٤ ـ ٧
اختبار المشتقة الثانية

المشتقة الثانية كثيراً ما تستخدم كبديل مناسب لاختبار المشتقة الأولى لتحديد ماذا كانت الدالة لها نهاية عظمى أو صغرى محلية عند عدد حرج c .

٤ ـ ١٩ اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

(أولا) اذا كانت $f''(c)<0$ و $f'(c)=0$ ، فان f تكون لها نهاية عظمى محلية عند c .

(ثانياً) اذا كانت $f''(c)>0$ و $f'(c)=0$ ، فان f يكون لها نهاية صغرى محلية عند c .

البرهان (اولا) من تعريف المشتقة والفرض يكون

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} < 0$$

التمهيدية ٢ ـ ٢٢ تتضمن وجود جوار (a,b) لـ c بحيث أن . $f'(x)/(x-c) < 0$ لجميع $x \neq c$ فى الفترة (a,c) . من ثم

$$f'(x) > 0 \text{ حيث } a < x < c$$

اذ أن $x - c < 0$ ، وأيضاً

$$f'(x) < 0 \text{ حيث } c < x < b$$

اذ أن $x - c > 0$. واذن f تكون متزايدة فى $[a,c]$ ومتناقصة فى $[c,b]$ وبالتالى لها نهاية عظمى محلية عند c . بالمثل يمكن البرهنة على (ثانياً) .

من السهل تذكر الحالات اذا ربطنا النهاية العظمى المحلية بمماس أفقى وتقعر الى أسفل (مشتقة ثانية سالبة) وربطنا النهاية الصغرى المحلية بمماس أفقى وتقعر لأعلى (مشتقة ثانية موجبة) .

مثال ١ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$.

لدينا

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$$

العددان الحرجان للدالة f هما 2 و 0 نختبرهما باختبار المشتقة الثانية ٤ ـ ١٩ . بما أن $f''(2) = 6 > 0$ و $f''(0) = -6 < 0$ فالدالة f لها نهاية عظمى محلية عند 0 ولها نهاية صغرى محلية عند 2 . هذه الدالة درست فى الجزء الأول من البند ٤ ـ ٤ وخططت فى الشكل ٤ ـ ٢٤ .

لا يمكن استخلاص نتائج من اختبار المشتقة الثانية اذا كانت $f''(c) = 0$ أو كانت لا توجد . توجد دوال لها $f''(c) = 0$ ولها نهاية عظمى محلية عند c ، وأخرى لها نهاية صغرى محلية عند c ، وأيضاً دوال أخرى ليس لها هذه أو ذاك . (أنظر المسألة ٣٨) . لتحديد ماذا يحدث عند العدد الحرج c للدالة f حيث $f''(c) = 0$ أولا توجد ، يجب أن نرجع الى اختبار المشتقة الأولى .

مثال ٢ . أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدالة $f(x) = -x^5 - 5x^4$.

هذه هى الدالة التى درسناها فى مثال ١ بند ٤ ـ ٦ وخططت فى شكل ٤ ـ ٣٦ ، لكن سنوجد القيم القصوى المحلية بدون الرجوع الى عملنا السابق . لدينا

$$f'(x) = -5x^4 - 20x^3 = -5x^3(x+4)$$

$$f''(x) = -20x^3 - 60x^2 = -20x^2(x+3)$$

العددان الحرجان للدالة f هما 0 و -4 . بما أن $f''(-4)>0$ ، فان f لها نهاية عظمى محلية عند -4 . اختبار المشتقة الثانية لا يعطى معلومات عن 0 لأن $f''(0)=0$. لنرى ماذا يحدث هناك ، يجب أن نستخدم اختبار المشتقة الأولى . بما أن $f'(-1)>0$ و $f'(1)<0$ فان f لها نهاية عظمى محلية عند 0 .

فيما عدا لدوال معينة ، عادة لا تدرج فى الرياضيات الأولية ، اختبار المشتقة الأولى دائماً يحدد ما اذا كانت الدالة لها نهاية عظمى محلية أولها نهاية صغرى محلية أو ليس لها هذه أو ذاك عند العدد الحرج . اختبار المشتقة الثانية لا يميز بينهما دائماً لكن عندما يمكن تطبيقه فاستخدامه عادة يكون أسهل . حتى عندما يمكن استخدام اختبار المشتقة الثانية ، أحياناً يكون استخدام اختبار المشتقة الأولى أسهل من ايجاد المشتقة الثانية . هذا سيكون صحيحاً للدالة g فى مثال ١ ، بند ٤ ـ ٥ .

مسائل

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية باستخدام اختبار المشتقة الثانية اذا كان ذلك ممكناً :

١ ـ $f(x) = x^2 - 3$ ٢ ـ $g(x) = 4x - x^2$ ٣ ـ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

٤ ـ $u(t) = (12 - 2t)^2 t$ ٥ ـ $F(t) = t(t - 3)^3$ ٦ ـ $h(x) = x^5 + x^4$

٧ ـ $f(z) = (z + 1)^2(z - 2)^3$ ٨ ـ $g(x) = x^3 - 3/x$ ٩ ـ $f(x) = 4x + 2a^3/x^2, a > 0$

أوجد أين تحدث القيم القصوى المحلية للدوال الآتية

١٠ ـ $f(y) = 5 + 3y - y^3$ ١١ ـ $f(x) = x^3 - 6x^2$

١٢ ـ $t(x) = -2 - 9x - 6x^2 - x^3$ ١٣ ـ $g(x) = 8x - x^4$

١٤ ـ $F(z) = (z^2 - 9)^2$ ١٥ ـ $G(t) = (2t^2 + 5t + 2)^2$

١٦ ـ $f(u) = 3u^5 - 25u^3 + 60u - 1$ ١٧ ـ $f(x) = x(x^2 - 6)^2$

١٨ ـ $g(v) = v^2(v + 3)^3$ ١٩ ـ $f(x) = x^2 + 1/x$

٢٠ ـ $V(r) = r^2 + \frac{1}{r^2}$ ٢١ ـ $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3}$

٢٢ ـ $h(t) = \frac{bt}{b^2 + t^2}, b > 0$ ٢٣ ـ $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 5}$

٢٤ ـ $f(x) = x^{5/3}$ ٢٥ ـ $g(u) = u^{8/5}$

٢٦ ـ $A(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}, r \text{ const}$ ٢٧ ـ $f(t) = t\sqrt{t + 8}$

٢٨ ـ $g(x) = 6x^{1/3} + 4x$ ٢٩ ـ $f(x) = 7x^{2/7} + 2x$

٣٠ ـ $u(x) = x^{1/3}(x-a)^2,\ a > 0$ ٣١ ـ $f(x) = x^{2/3}(x-4)^2$

٣٢ ـ $f(x) = x^{2/3}(11-x)^3$

للمنحنيات الآتية أوجد أين يكون الميل له قيمه القصوى المحلية وأوجد قيمة الميل هناك :

٣٣ ـ $y = -3x^2 + 2x + 1$ ٣٤ ـ $y = x^3 + x^2 + 6x - 6$ ٣٥ ـ $y = x^4 + 5x^3 + 6x^2$

٣٦ ـ $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$ ٣٧ ـ $y = x\sqrt{6-x^2}$

٣٨ ـ اثبت أن الدالة يمكن أن يكون لها نهاية صغرى محلية ، أو نهاية عظمى محلية ، أو لا هذه ولا ذاك ، عند عدد حرج c حيث $f''(c)=0$ ، بدراسة الأمثلة $f(x)=x^3$ و $f(x)=-x^4$ و $f(x)=x^4$. خطط الشكل البيانى فى كل حالة .

٣٩ ـ عين a و b بحيث أن الدالة $g(x)=x^2+ax+b$ يكون لها عدد حرج عند 2 ويكون $g(2)=1$. هل $(2,1)$ نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صغرى محلية للشكل البيانى للدالة g ؟

٤٠ ـ عين a و b بحيث تكون 3 عدداً حرجاً للدالة $h(x)=ax+b/x$ ويكون $h(3)=2$. هل $(3,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية أم نقطة نهاية صغرى محلية للشكل البيانى للدالة h ؟

٤١ ـ اثبت أنه اذا كانت $-1 \leqslant a \leqslant 1$ ، فان المعادلة $4x^3-3x-a=0$ يكون لها جذر وحيد فى الفترة $[\frac{1}{2},1]$. هذه المسألة تظهر فى تعيين أى الزوايا يمكن تثليثها بمسطرة وفرجار ، العدد a هو جيب تمام الزاوية .

٤٢ ـ اذا كانت $f(x)=ax^2+2bx+c, a>0$ ، فاثبت أن $f(x) \geqslant 0$ لجميع x الحقيقية اذا واذا فقط كان $b^2-ac \leqslant 0$.

٤٣ ـ اثبت متباينة اشفارتز *(Schwarz)*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

لجميع $a_1, a_2 \ldots, \ldots, a_n, b_1, b_2 \ldots, b_n$ الحقيقية . هذه المتباينة أداة هامة فى التحليل العالى . (ارشاد : ضع

$$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$$

واستخدم المسألة ٤٢)

٤٤ ـ اذا كانت دالتان موجبتان ، بمشتقاتهما اللازمة ، كل لها نهاية عظمى محلية عند نفس العدد ، هل حاصل ضربهما له نهاية عظمى محلية هناك ؟ اذا كان كل لها نقطة انقلاب عند نفس العدد ، هل حاصل ضربهما له نقطة انقلاب هناك .

٤٥ ـ أثبت النظرية ٤ ـ ١٩ (ثانياً) .

٤٦ ـ النظرية أن الدالة المتصلة فى فترة محدودة مقفلة لها قيمتان عظمى وصغرى هناك هى نظرية أساسية فى حساب التفاضل . أكتب قائمة بالنظريات فى البنود ٤ ـ ١ الى ٤ ـ ٧ التى تستخدم هذه النظرية بطريق مباشر أو غير مباشر فى برهانها .

٤ ـ ٨
الخطوط التقاربية والمماسات الرأسية

الدوال التى خططناها حتى الآن كانت دوال متصلة . اذا لم تكن الدالة متصلة عند عدد c ، فعلينا أن ندرس سلوكها لقيم x القريبة من c ، هذا بالاضافة الى اتباع خطوات التخطيط التى شرحناها فى بند ٤ ـ ٤ .

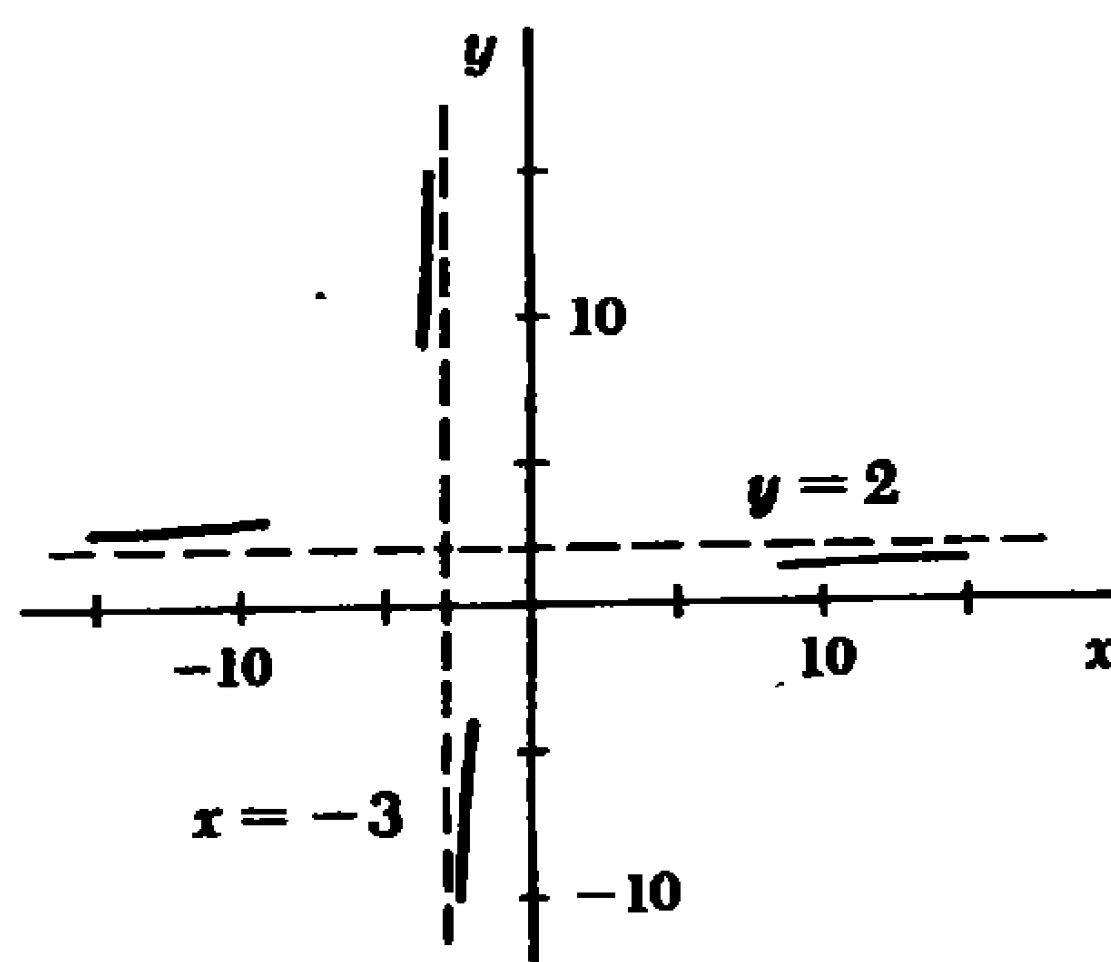
نفرض أننا نريد تخطيط الشكل البيانى للدالة

$$f(x) = \frac{2x}{x+3} \qquad (1)$$

نلاحظ أن f غير معرفة عند $x=-3$ ونبدأ بفحص قيم الدالة $f(x)$ لـ x قرب -3 . عندما تكون x أصغر قليلا من -3 ، البسط فى (١) يكون قريباً من -6 ، والمقام يكون قريباً من الصفر وسالباً ، ومن ثم $f(x)$ تكون كبيرة وموجبة . عندما تكون x أكبر قليلا من -3 ، البسط والمقام لا يزالان قرب -6 و 0 ، لكن المقام يكون الآن موجباً وبالتالى $f(x)$ تكون كبيرة وسالبة . أى أن

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$$

الشكل ٤ ـ ٣٧ يوضح سلوك الشكل البيانى لـ x فى القرب من -3 المنحنى يقترب أكثر فأكثر الى الخط المستقيم $x=-3$ ، الذى هو بالتالى خط تقاربى . الحد الحرج فى هذا التحليل هو $x+3$ لا يكفى أن نعرف أن $x+3$ تكون قريبة من الصفر عندما تكون x قريبة من -3 . بل يجب أن نعرف أيضاً اشارته لكى نحدد ما اذا كانت $f(x)$ كبيرة وموجبة أم كبيرة وسالبة . هذا يكمل الخطوة ٣ فى ملخص تخطيط المنحنى ببند ٤ ـ ٤ . الآن نستمر كما فعلنا فى الأمثلة هناك ، لكن نجد أنه من المناسب أن نعكس ترتيب الخطوات فنحدد بعد ذلك سلوك الشكل البيانى لقيم x الكبيرة . لمثل قيم x هذه ، (١) تعبر عن $f(x)$ كخارج قسمة عددين كبيرين ، وليس واضحاً مباشرة ما اذا كانت



شكل ٤ ـ ٣٧
شكل بيانى جزئى للدالة $f(x)=2x/(x+3)$ لقيم x القريبة من -3 ولقيم x الكبيرة .

الدالة $f(x)$ كبيرة أو قرب الصفر ، أو قرب عدد ما متوسط مثل 173 . النهاية عندما x تصبح لا نهائية يمكن ايجادها بأن نقسم أولا بسط ومقام الكسر على أعلى قوة لـ x ، فى هذه الحالة x ذاتها اذا فعلنا ذلك ، يكون لدينا

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1+3/x} = 2$$

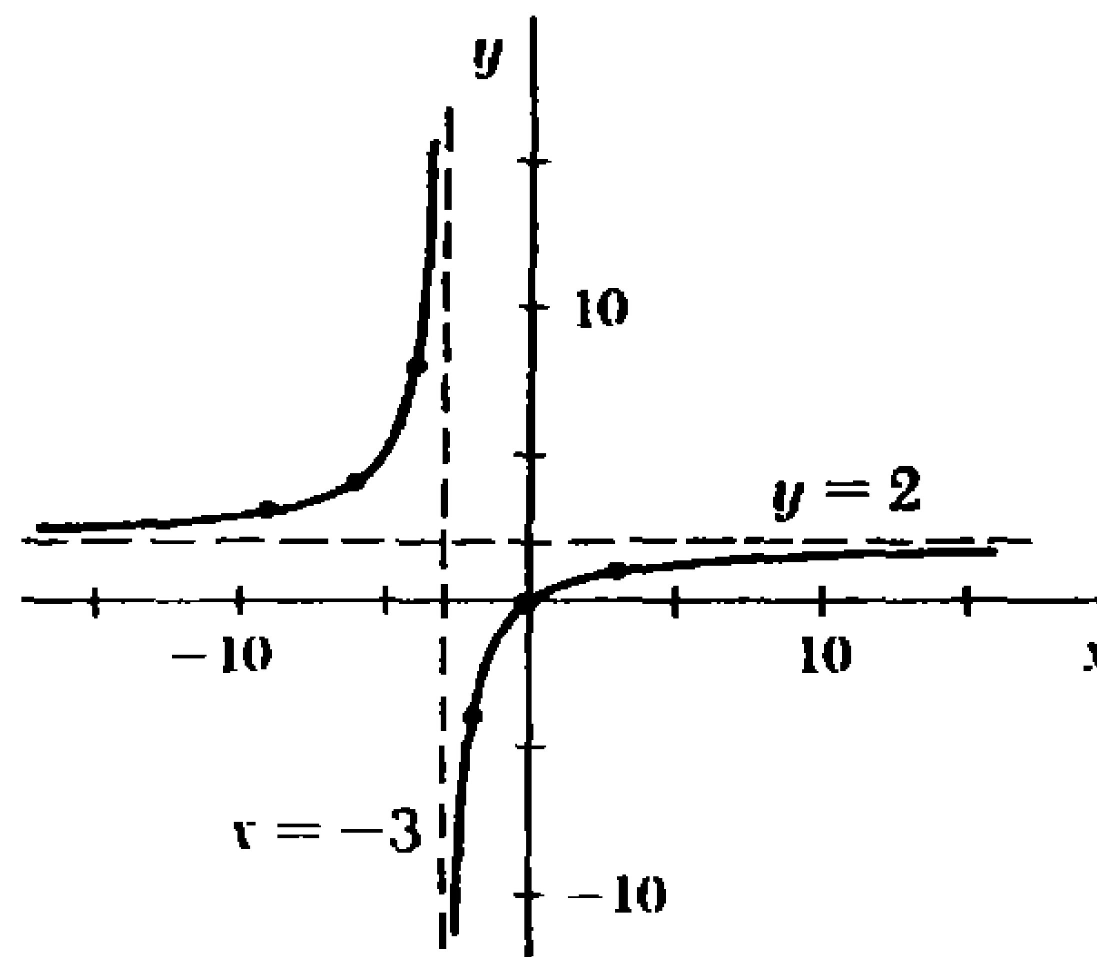
واذن الشكل البيانى لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة يتقارب الى الخط المستقيم $y=2$. فى الحالة الأولى يقترب من الخط من أسفل اذ أن $x/(x+3)<1$ لقيم x الكبيرة الموجبة ، وفى الحالة الثانية يقترب من الخط من أعلى اذ أن $x/(x+3)>1$ لقيم x الكبيرة السالبة . جزء الشكل البيانى لقيم x الكبيرة موضح فى الشكل ٤ ـ ٣٧ . الجزء المقطوع الوحيد هو نقطة الأصل . المشتقة هى

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2}$$

العدد -3 ليس عدداً حرجاً لأن f ليست معرفة هناك . بالرغم من ذلك ، متضمنة مع الأعداد الحرجة ، ان وجد (فى هذه الحالة لا يوجد) فى تحديد الفترتين $(-3,\infty)$ و $(-\infty,3)$ اللتين داخلهما المشتقة لا تغير اشارتهما . المشتقة توضح أن f تتزايد فى كلتيهما . لم نعين بعد سوى نقطة واحدة ، لذلك نوقع عدداً قليلا من النقط لتخطيط المنحنى :
$(-2,-4)(3,1)(-9,3)(-6,4),\ (-4,8)$ التخطيط الكامل موضح فى الشكل ٤ ـ ٣٨ .

مثال ١ . خطط الشكل البيانى للدالة

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \qquad (٢)$$



شكل ٤ ـ ٣٨

الشكل البيانى للدالة $f(x) = 2x/(x+3)$ له خطان تقاربيان .

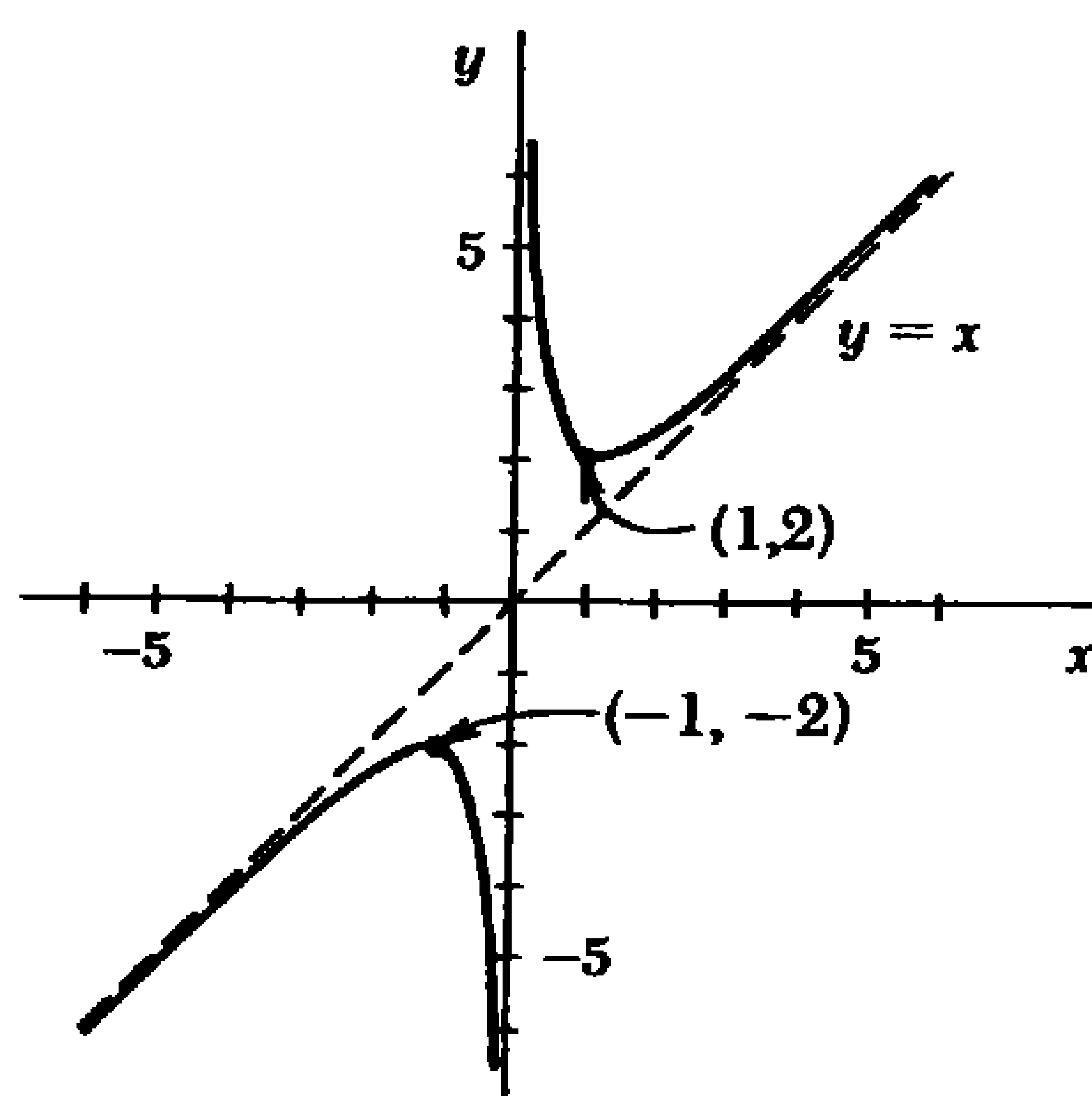
الشكل البيانى متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل ، والدالة g غير معرفة عند $x = 0$. بفحص الدالة $g(x)$ لقيم x القريبة من الصفر نرى أن

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty, \quad و \quad \lim_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$$

وهذه تبين أن المحور الصادى هو خط تقاربى (شكل ٤ ـ ٣٩) لا توجد أجزاء مقطوعة . المشتقة للدالة g هى $g'(x) = (x^2 - 1)/x^2$ العددان الحرجان الوحيدان هما $1, -1$ ، والشكل البيانى له مماسان أفقيان عند النقطتين المناظرتين $(1, 2)$ و $(-1, -2)$ العددان الحرجان والعدد 0 حيث g غير معرفة تقسم المحور السينى الى أربع فترات هى $[1, \infty)$ و $[-1, 0), (0, 1]$ و $(-\infty, -1]$ ، داخل كل منها المشتقة لا تغير اشارتها . الشكل البيانى يرتفع فى الفترتين الأولى والأخيرة ويهبط فى الثانية والثالثة . بما أن

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty \quad و \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = \infty$$

فالشكل البيانى غير محدود من أعلى وأسفل لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة . الا أنه لا يرتفع منحدراً بشدة . المعادلة (٢) توضح أنه لقيم x الكبيرة ، الدالة $g(x)$ تكون أكبر قليلا من x . الشكل البيانى يقترب أكثر فأكثر الى الخط المستقيم $y = x$ ، الذى هو بالتالى خط تقاربى ، والشكل البيانى يقع أعلاه لقيم x الموجبة . بالمثل ، لقيم x الكبيرة السالبة ، والشكل البيانى يتقارب الى نفس الخط المستقيم ، لكن من تحته .



شكل ٤ ـ ٣٩

المنحنى $y = x + 1/x$ يقترب الى المحور الصادى والى الخط المستقيم $y = x$.

مثال ٢ . خطط الشكل البيانى للدالة

$$y^2 = \frac{4(2-x)}{x} \qquad (٣)$$

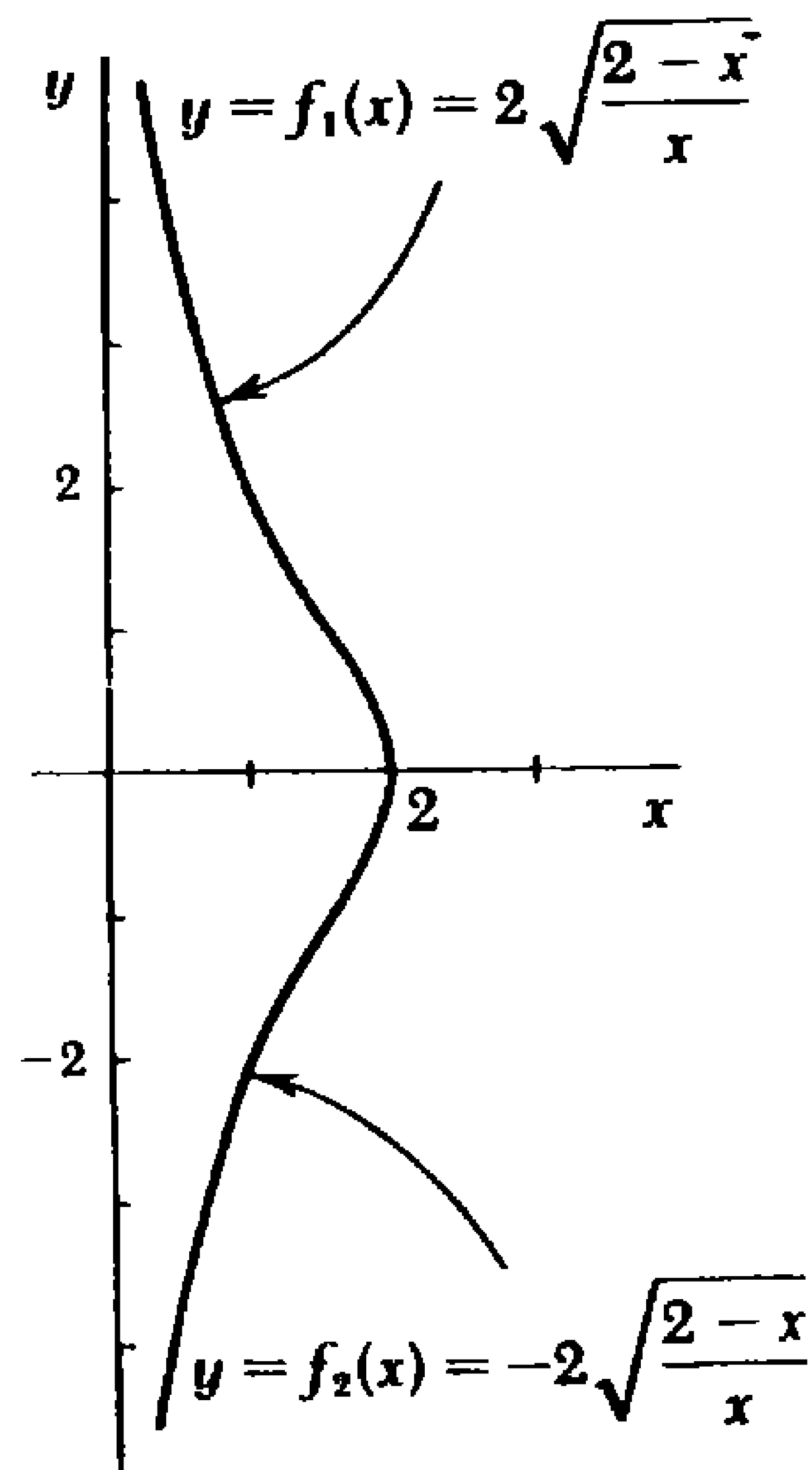
المنحنى متماثل بالنسبة الى المحور السينى . حيث أن y^2 تكون موجبة أو صفراً فقط اذا كان البسط والمقام فى (٣) لهما نفس الاشارة فان x يجب أن تقيد بالفترة $0 < x \leqslant 2$ واذن الشكل البيانى يقع بين المحور الصادى والخط المستقيم $x = 2$. المعادلة تعرف ضمنياً دالتين فى x ، نحصل عليهما بحل (٣) لـ y :

$$f_1(x) = 2\sqrt{\frac{2-x}{x}} \quad \text{و} \quad f_2(x) = -2\sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

الشكل البيانى لكل منهما هو انعكاس الشكل البيانى للأخرى فى المحور السينى . بأخذهما معاً هما يكونان الشكل البيانى لـ (٣) . سنخطط f_1 ثم نحصل على f_2 من التماثل . بما أن $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = \infty$ ، فالشكل البيانى لـ f_1 يتقارب الى المحور الصادى الموجب من اليمين . الجزء المقطوع الوحيد هو $(2, 0)$. مشتقة f_1 هى

$$f_1'(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^3(2-x)}}$$

فالعدد 2 هو العدد الحرج الوحيد . وحيث أن المقام دائماً موجب ، فان f_1 تكون متناقصة فى الفترة $(0, 2]$. لا توجد مشتقة عند 2 ، لكن $\lim_{x\to 2^-} f_1'(x) = -\infty$ ، وهذا يبين أن الشكل البيانى ينحدر بشدة بالقرب من $(2, 0)$. الشكل البيانى مخطط فى الشكل ٤ ـ ٤٠ .



شكل ٤ ـ ٤٠

الرسم البيانى لـ $y^2 = 4(2-x)/x$.

مع أننا لم نعمل ذلك فى الأمثلة السابقة فقد كان فى امكاننا تحديد الفترات حيث يكون المنحنى مقعراً لأعلى أو لأسفل باستخدام المشتقة الثانية .

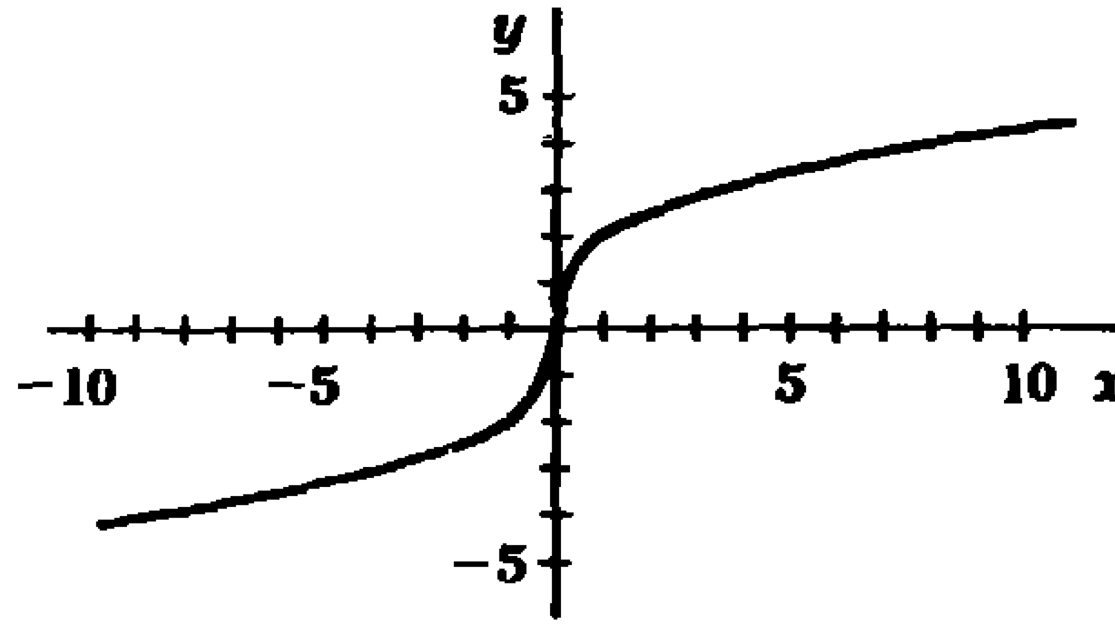
فى البند ٣ ـ ١ عرفنا المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $P(a, f(a))$ بأنه الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة P وميله $f'(a)$. طبقاً لهذا التعريف ، f يجب أن يكون لها مشتقة عند a ليكون هناك مماس . المنحنى $y = g(x) = 2x^{1/3}$ مخطط فى الشكل ٤ ـ ٤١ . لدينا

$$g'(x) = \tfrac{2}{3}x^{-2/3} = \frac{2}{3x^{2/3}} \qquad (٤)$$

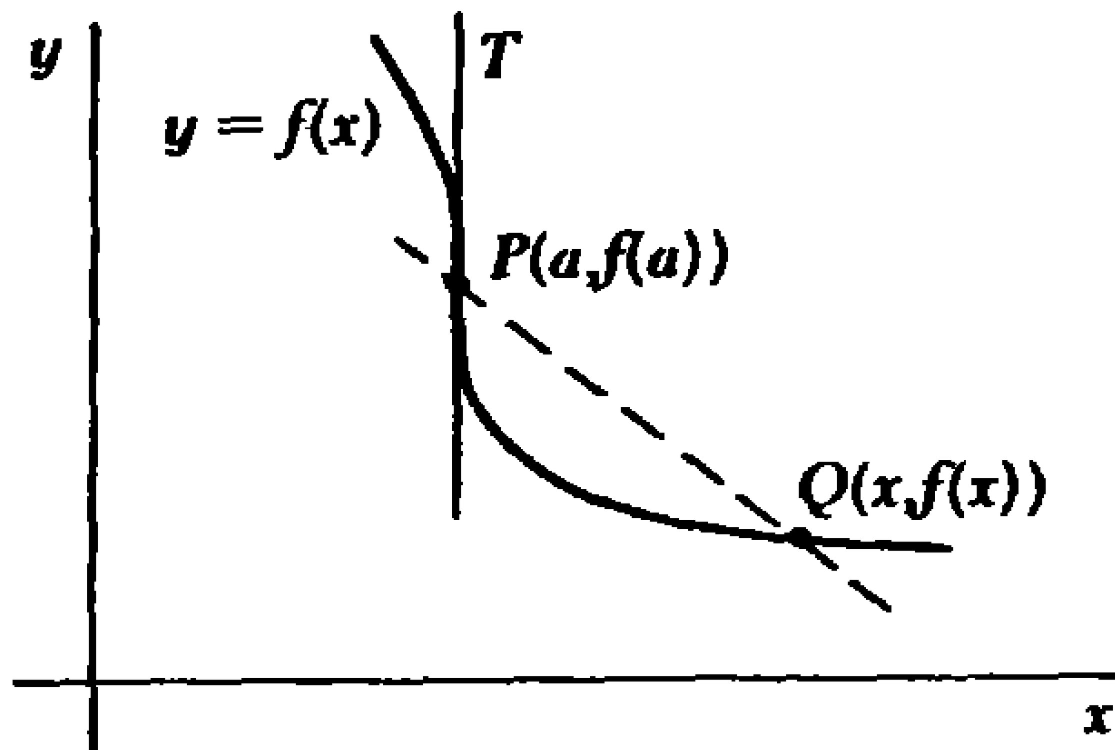
بما أن $g'(0)$ لا توجد ، فانه لا يوجد مماس عند نقطة الأصل طبقاً لتعريفنا . بل ليس من العدل أن ننكر أن هذا المنحنى له مماس بينما واضح أن المحور الصادى يجب أن يحتسب مماساً له . من المناسب أننا نعدل تعريف المماس ليسمح بمماسات رأسية .

اذا كان المنحنى $y = f(x)$ فى الشكل ٤ ـ ٤٢ سيعتبر له مماساً رأسياً عند نقطة $P(a, f(a))$ فاننا نتوقع أن ميل الوتر PQ سيصبح لا نهائياً موجباً أو سالباً عندما تقترب x من a . أى أن ،

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| = \infty$$

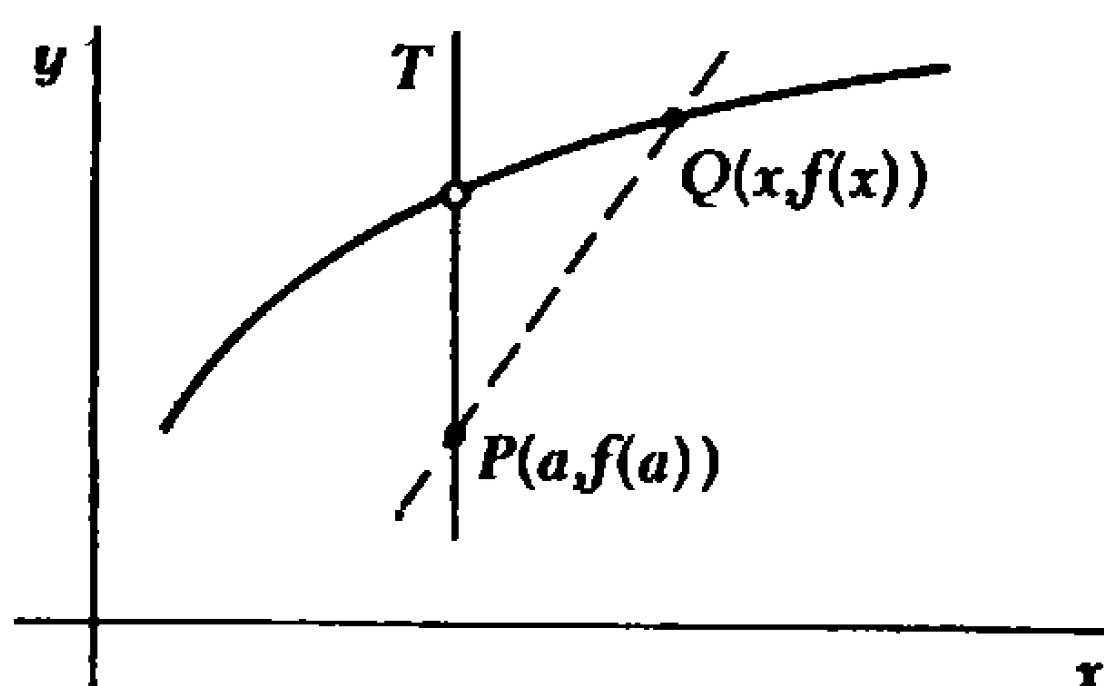


شكل ٤ ـ ٤١
الشكل البيانى للدالة $g(x) = 2x^{1/3}$.



شكل ٤ ـ ٤٢
اذا كان T ليحتسب مماساً رأسياً فان ميل PQ يجب أن يصبح لا نهائياً عندما تقترب x من a .

لكن هذا المطلب غير كاف . فهو سيسمح لبعض المنحنيات بأن يكون لها مماسات رأسية عند نقط حيث منطقياً لا يوجد مماس . ميل الوتر PQ فى الشكل ٤ ـ ٤٣ يصبح لا نهائى عندما تقترب x من a ، لكن من الواضح أننا لا نطلب أن يكون الخط الرأسى المار بالنقطة P مماساً . يمكننا علاج ذلك بأن نتطلب علاوة على (٤) أن تكون f متصلة عند a . هذان الشرطان يعطيان تعريفاً منطقياً وعملياً للمماس الرأسى .



شكل ٤ ـ ٤٣
رغم أن (٤) متحققة ، T لا ينبغى أن يكون مماساً . أيضاً الاتصال عند a مطلوب للمماس الرأسى .

٤ ـ ٢٠ تعريف . المنحنى $y = f(x)$ يكون له مماس رأسى عند النقطة $(a, f(a))$ اذا كانت f متصلة عند a وكان

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| = \infty$$

الدالة $g(x) = 2x^{1/3}$ المخططة فى الشكل ٤ ـ ٤١ متصلة عند 0 ، وأيضاً

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{2}{x^{2/3}}\right| = \infty$$

اذن الشكل البيانى له مماس رأسى عند 0 .

مثال ٣ . حدد اذا كان المنحنى $y = f(x) = (x-2)^{2/5}$ له مماساً رأسياً .

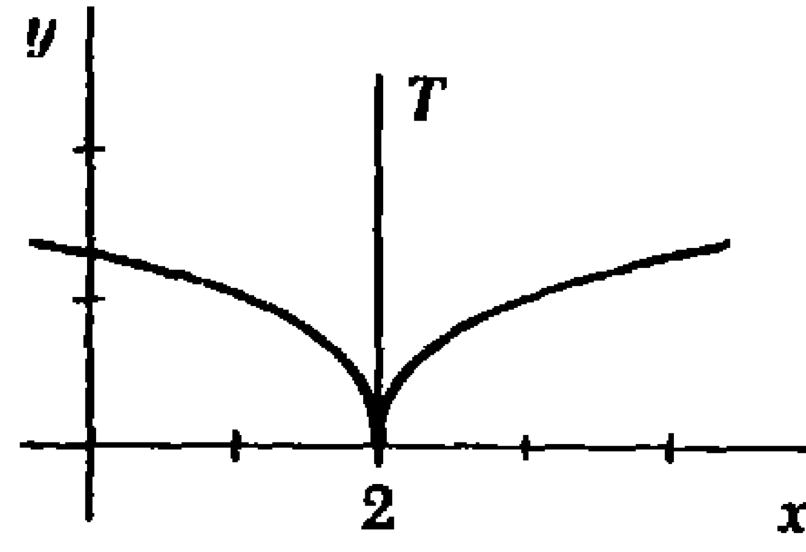
لدينا

$$f'(x) = \frac{2}{5(x-2)^{3/5}}$$

المشتقة توجد لجميع $x \neq 2$ ، فالاحتمال الوحيد لمماس رأسى هو عند $(2, 0)$. نختبر هذه النقطة . الدالة متصلة عند 2 ، وأيضاً

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right| = \lim_{x\to 2}\left|\frac{1}{(x-2)^{3/5}}\right| = \infty$$

اذن يوجد مماس رأسى عند $(2, 0)$. المنحنى مخطط فى الشكل ٤ ـ ٤٤ .



شكل ٤ - ٤٤

المنحنى $y = (x - 2)^{2/3}$ له مماس رأسى عند النقطة $(2, 0)$.

مسائل

خطط الشكل البيانى للدوال أو المنحنيات الآتية :

١ - $f(x) = 3 + \frac{2}{x}$

٢ - $y = \frac{2}{x - 2}$

٣ - $F(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$

٤ - $f(t) = t - \frac{1}{t}$

٥ - $G(z) = \frac{z^2 - 5}{z + 1}$

٦ - $s(t) = t^2 + \frac{16}{t}$

٧ - $f(x) = x^3 - \frac{3}{x}$

٨ - $f(x) = \frac{1}{x^2}$

٩ - $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 1}$

١٠ - $s = \frac{t - 4}{t(t - 3)}$

١١ - $y = \frac{x - 2}{(x - 1)^2}$

١٢ - $g(t) = \frac{t}{t^2 - 2t - 3}$

١٣ - $y = \frac{x - 1}{x^2 + 8}$

١٤ - $f(s) = \frac{as}{s^2 + a^2},\ a > 0$

١٥ - $y = \frac{(x - 2)(1 + x)}{x^2}$

١٦ - $y = \frac{2x^2}{x^2 + 2x - 8}$

١٧ - $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$

١٨ - $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$

١٩ - $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$

خطط الشكل البيانى للمنحنيات الآتية :

٢٠ - $y^2 = 1 + x^3$

٢١ - $y^2 = x(x + 2)$

٢٢ - $y = -\sqrt{x + 5}$

٢٣ - $y^2 + y^2x^2 = 1$

٢٤ - $y^2 = \frac{4}{9}(x - 1)^2$

٢٥ - $y^2 = x(9 - x^2)$

٢٦ - $y^2 = x^4/(1 - x^2)$

٢٧ - خطط المنحنى $y = 4/(x^2 + 1)$ وأوجد نقط الانقلاب .

٢٨ - هل يمكن للمنحنى أن يقطع خطه التقاربى الأفقى عدداً لا نهائياً من المرات عندما يسير الى اللانهاية ؟

٢٩ - أوجد نقط الانقلاب للمنحنى $y = x + 1/(x^2 + 1)$ وخطط المنحنى .

أوجد النهاية للتعبيرات الجبرية الآتية عندما $x \to \infty$ وعندما $x \to -\infty$ اذا كانت النهاية محدودة ، عين ما اذا كان التعبير الجبرى يقترب من نهايته من أعلى أم من أسفل .

٣٠ - $\dfrac{x+3}{x^2+6}$ ٣١ - $\dfrac{-3x+7}{7x+1}-\dfrac{6}{x^2}+10$ ٣٢ - $\dfrac{x^2+6x}{x^3-x^2+2}$

٣٣ - $\dfrac{5x^4+7x+10}{-3x^3+2}$ ٣٤ - $\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+3x+1}}$ ٣٥ - $\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{x+1}$

اثبت أن كلا من المنحنيات الآتية له مماس رأسى عند النقطة المعطاة وخطط المنحنى .

٣٦ - $y=x^{2/3};\ (0,0)$ ٣٧ - $y=2+(x+1)^{1/5};\ (-1,2)$ ٣٨ - $y=x^{1/3}(8-x);\ (0,0)$

خطط كلا من المنحنيات الآتية وعين ما اذا كان له مماس رأسى :

٣٩ - $g(x)=\begin{cases}4-x^2, & x\leq 2\\ 4-(x-4)^2, & x>2\end{cases}$ ٤٠ - $y=\sqrt{x^2-8x+18}$

٤١ - $y=x(8-x)^{1/3}$ ٤٢ - $y=x\sqrt[3]{3x-5}$

٤٣ - $y=x^{5/3}(x-1)$ ٤٤ - $f(x)=\begin{cases}\sqrt{16-x^2} & -4\leq x\leq 4,\\ \sqrt{4-(x-6)^2}, & 4<x\leq 8.\end{cases}$

٤٥ - اشرح بدلالة الميل الفرق بين

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}f'(x)=\infty$$

خطط الشكل البيانى لدالة تتحقق لها العبارة الأولى ولا تتحقق لها العبارة الثانية .

٤ - ٩
النهايات العظمى والصغرى التطبيقية

نتجه الآن الى تطبيقات عملية للمشتقة ، واحدة من أهمها تختص بمسائل النهايات العظمى والصغرى . نعلم أن الدالة المتصلة فى فترة محدودة مقفلة لها قيمة عظمى وقيمة صغرى هناك . النظرية التالية تعطى شرطاً اذا تحقق فان الدالة المتصلة فى فترة ليست بالضرورة مقفلة يكون لها قيمة قصوى هناك .

٤ - ٢١ نظرية • لتكن الدالة f متصلة فى فترة ، قد تكون لا نهائية ، ولها عدد حرج واحد c فى الداخل . اذا كانت f لها نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية ، عند c ، فأنه يكون لها ، على التناظر ، قيمة عظمى أو قيمة صغرى ، فى الفترة ، وهذه تحدث عند c .

رغم أن النظرية صحيحة لأى فترة ، الا أن فائدتها الرئيسية تكون فى معالجة الفترات المفتوحة ، حيث نظرية الفترة المقفلة لا يمكن استخدامها .

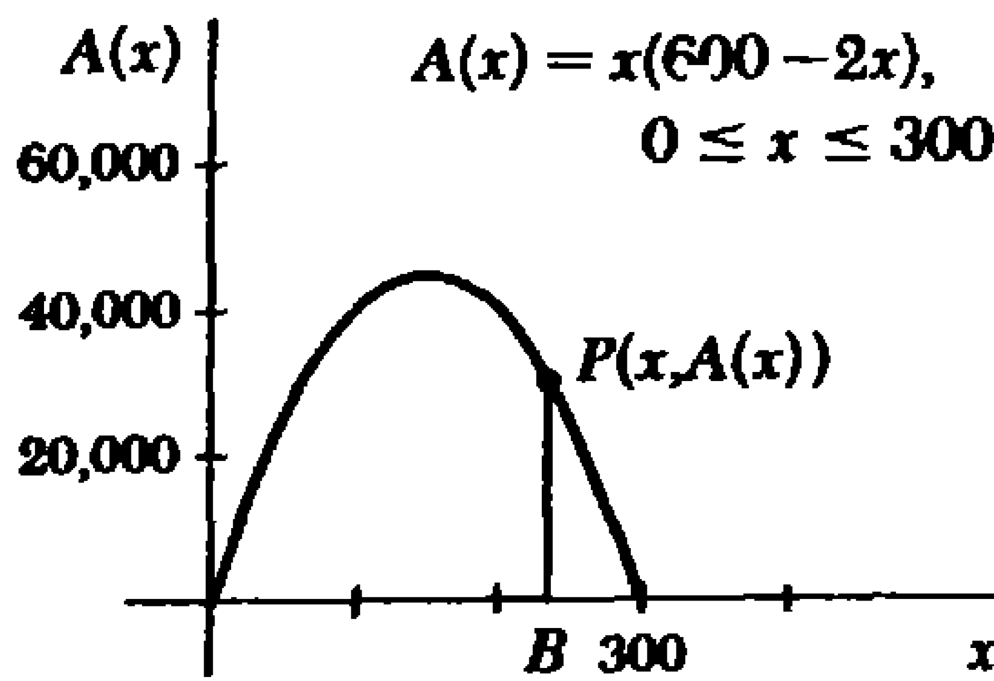
البرهان . سنعطى البرهان فى حالة الفترة المحدودة المفتوحة . البرهان مماثل للفترات الأخرى . لتكن (a, b) هى الفترة ولنفرض أن عند c الدالة f لها نهاية صغرى محلية . بما أن f ليس لها عدد حرج فى الفترة الجزئية (a, c) ، فان f تكون اما متزايدة واما متناقصة فى $(a, c]$ ، ولأن f لها نهاية صغرى محلية عند c ، فيجب أن تكون الحالة الثانية . استدلال مماثل يوضح أن f تكون متزايدة فى $[c, b)$. ومن ثم $f(c)$ هى القيمة الصغرى للدالة f فى (a, b) . البرهان للنهاية العظمى مماثل .

مثال ١ . مزارع لديه 600 yd من الأسياج ، يرغب فى أن يحيط بها حقلا مستطيلا على أرض ملامسة لنهر مستقيم . لا يحتاج لاقامة سور جانب النهر . ما هى أبعاد الحقل حتى يحيط أكبر مساحة ؟

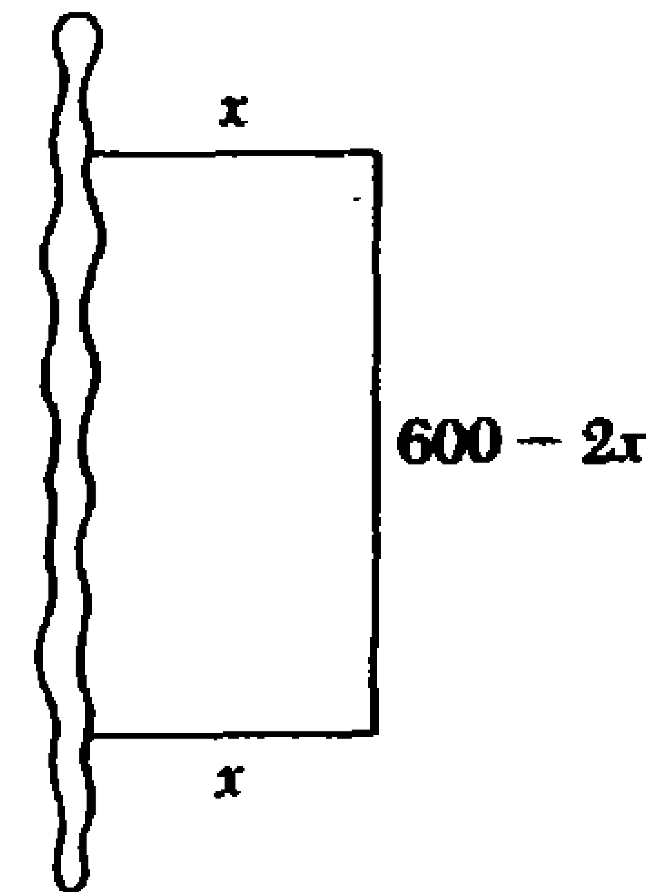
حقل مطابق لشروط المسألة ، لكن ليس بالضرورة الأكبر ، موضح فى الشكل ٤ ـ ٤٥ . لتكن x طول الجانب العمودى على النهر ، فيكون $600 - 2x$ هو طول الجانب الموازى للنهر ، وتكون مساحة الحقل هى $A(x) = x(600 - 2x)$ حيث $0 \leq x \leq 300$. واضح أن x يجب ألا تكون سالبة ولا أكبر من 300 اذا كان للمسألة معنى . بما أن المساحة تعتمد على x ، فهى دالة ونستخدم الرمز الدالى $A(x)$ لقيمتها .

الدالة معرفة فقط لـ $0 \leq x \leq 300$ ، وشكلها البيانى موضح فى الشكل ٤ ـ ٤٦ . الاحداثى الصادى عند كل نقطة $(x, A(x))$ على الشكل البيانى هو مساحة الحقل الذى طول ضلعه x . يجب أن توجد قيمة x فى الفترة $[0, 300]$ حيث $A(x)$ هى القيمة العظمى لـ A . لدينا الاختيار بين طريقتين .

الطريقة ١ . لأن A متصلة فى الفترة المقفلة ، فيجب أن يكون لها قيمة عظمى ، وهذه القيمة العظمى ستحدث عند عدد حرج أو عند نقطة طرفية ، مشتقة A هى $A'(x) = 600 - 4x$ فالعدد



شكل ٤ ـ ٤٦
طول الخط المستقيم BP هو مساحة الحقل الذى طول ضلعه x .



شكل ٤ ـ ٤٥

الحرج الوحيد هو 150 . نحسب قيمة A عند 150 وعند النقطتين الطرفيتين ونرى أيا منها تكون الأكبر :

$$A(0) = 0, \quad A(150) = 45{,}000, \quad A(300) = 0$$

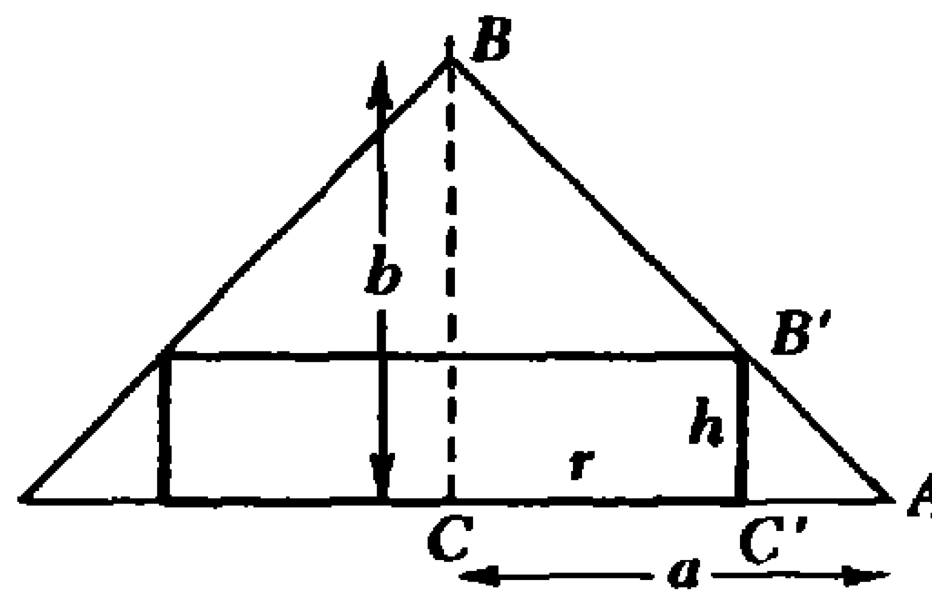
القيمة العظمى تحدث عند 150 ، وبعدا الحقل ذات أكبر مساحة هما 150×300 yd والضلع الأكبر يوازى النهر .

الطريقة ٢ . A لها عدد حرج واحد فى الفترة $[0, 300]$ ، وحيث أن $A''(x) = -4$ لجميع x ، فاختبار المشتقة الثانية يبين أن A لهما نهاية عظمى محلية عند $x = 150$ بالنظرية ٤ ـ ٢١ ، القيمة العظمى لـ A يجب أن تحدث هناك .

حلت هذه المسألة بتفصيل غير عادى لنؤكد وضوح الطريقة والاستنتاج . الطريقة الثانية أقصر ، لكن الأولى ينبغى دراستها بعناية اذ توجد حالات لا يمكن أن تستخدم فيها الطريقة الثانية . لاستخدام الطريقة ١ ، من الضرورى أن تكون A معرفة فى فترة محدودة مقفلة ، والا لا نستطيع ضمان وجود نهاية عظمى . لقد كان هذا هو السبب لأن نسمح لـ x أن تكون 300 و 0 بالرغم من علم وجود حقل ، بالمفهوم العادى ، لهاتين القيمتين . فى مسائل كثيرة حيث نستخدم الطريقة ١ من الممكن قطع بعض الأجزاء . فمثلا ، من الاعتبارات الطبيعية ، واضح أن المساحة تساوى صفراً عند 300 و $x = 0$ وأنها موجبة عند $0 < x < 300$ النهاية العظمى اذن لا يمكن حدوثها عند نقطة طرفية ويجب أن تحدث عند العدد الحرج . لاحظ أنه لكى نوجد الحقل ذات أكبر مساحة أوجدنا أولا تعبير المساحة لجميع الحقول الممكنة المسورة من ثلاثة جوانب .

مثال ٢ . اثبت أن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التى يمكن وضعها داخل مخروط دائرى قائم معلوم هو $\frac{4}{9}$ من حجم المخروط .

مقطع عرضى للمخروط والأسطوانة ماراً بمحورهما المشترك موضح فى الشكل ٤ ـ ٤٧ . رغم أنه فى الواقع طلب منا ايجاد حجم أكبر اسطوانة ، الا أن الطريقة الوحيدة لاجراء ذلك هى ايجاد أبعاد أكبر اسطوانة . أولا نوجد تعبيراً لحجم جميع الاسطوانات الممكنة التى يمكن وضعها داخل المخروط . اذا كانت h و r هما نصف القطر وارتفاع الاسطوانة ، فان حجمها هو $V = \pi r^2 h$. h و r كلاهما متغيران . يجب أن نعبر عن الحجم بدلالة متغير واحد . التعبير للحجم V هو علم



شكل ٤ ـ ٤٧

جداً . ويطبق لأى اسطوانة وليس فقط لتلك التى داخل المخروط . من الواضح أن لكل r توجد اسطوانة واحدة داخل المخروط ومن ثم لها ارتفاع h مناظر وحيد . بمعنى آخر ، h تتعين عندما تعطى r . سنوجد هذه العلاقة . بما أن أبعاد المخروط غير معطاة فاننا ، نفرض أن a طول نصف قطره وأن b ارتفاعه . المثلثان $AC'B'$ و ACB فى الشكل ٤ ـ ٤٧ متشابهان . من ثم

$$\frac{b}{a}=\frac{h}{a-r} \tag{١}$$

$$h=\frac{b}{a}(a-r) \tag{٢}$$

نعوض الطرف الأيمن بدلاً من h فى التعبير الجبرى للحجم ، فنحصل على

$$V=\pi r^2\frac{b}{a}(a-r), \qquad 0\leqslant r\leqslant a$$

V معبر عنها الآن بدلالة متغير واحد . الحجم دالة فى r ، نسميها $f(r)$:

$$V=f(r)=\pi\frac{b}{a}r^2(a-r), \qquad 0\leqslant r\leqslant a \tag{٣}$$

نبحث عن قيمة r فى $[0, a]$ [أو $(0, a)$ اذا أردنا أخذ فترة مفتوحة] التى تجعل f أكبر ما يمكن . مشتقة f هى

$$f'(r)=\pi\frac{b}{a}(2ra-3r^2)=\pi\frac{b}{a}r(2a-3r)$$

والعددان الحرجان هما $2a/3$ و 0 .

الطريقة ١ . اذا قفلنا الفترة ، فلأن f متصلة هناك ، توجد قيمة عظمى وتحدث اما عند نقطة طرفية أو عند عدد حرج . من اعتبارات طبيعية أو من (٣) ، من الواضح أن $f(0)=0=f(a)$ وأن $f(x)$ تكون موجبة عند $0<r<a$. القيمة العظمى لذلك لا يمكن حدوثها عند طرفية واذن يجب حدوثها عند العدد الحرج $2a/3$.

الطريقة ٢ . شروط النظرية ٤ ـ ٢١ متحققة سواء كانت الفترة مفتوحة أو مقفلة . من التعبير الجبرى للمشتقة الثانية للدالة f

$$f''(r)=\pi\frac{b}{a}(2a-6r)$$

نرى أن

$$f''\left(\frac{2a}{3}\right)=\pi\frac{b}{a}(-2a)<0$$

فالدالة لها نهاية عظمى محلية عند $2a/3$ ومن ثم قيمتها العظمى هناك .

القيمة المناظرة لـ h يمكن ايجادها الآن بتعويض $2a/3$ لـ r فى (٢) ، وهى $h = b/3$. الحجم الأقصى للاسطوانة هو $\frac{4}{9}\frac{\pi a^2 b}{3}$ ، الذى هو $4/9$ من حجم المخروط .

بدلا من التعبير عن V بدلالة r ، كما عملنا فى (٣) ، يمكننا أيضاً حل (١) لـ r ثم التعبير عن V بدلالة h . إذا عملنا ذلك فإننا نحصل على V كدالة لـ h :

$$V = g(h) = \pi \frac{a^2}{b^2}(b-h)^2 h, \qquad 0 \leq h \leq b \tag{٤}$$

نستمر كما سبق ، لكن مع (٤) بدلا من (٣) ، ونحصل على

$$g'(h) = \pi \frac{a^2}{b^2}(b^2 - 4bh + 3h^2) = \pi \frac{a^2}{b^2}(b-h)(b-3h)$$

العددان الحرجان لـ g هما $b/3$ و b . أى من الطريقتين ١ أو ٢ تبين أن القيمة العظمى لـ g تحدث عند $h = b/3$ ، كما سبق .

كما فى المثال السابق ، كثيرا ما تكون الكمية التى نريد جعلها أكبر ما يمكن ، يمكن التعبير عنها بأكثر من صورة واحدة ، تعتمد على المتغير المستقل المختار . فى المثال السابق الصورتان كانتا مناسبتين ، لكن عادة تكون واحدة أسهل فى العمل عن الأخرى .

مثال ٣ . صاحب مصنع يريد صنع علبة من الصفيح تسع k cu in . ما هى الأبعاد التى تجعل كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن ؟

المطلوب هو أن نجعل المساحة الكلية لاسطوانة دائرية قائمة حجمها k أقل ما يمكن . لنعمل ذلك ، نوجد أولا المساحة الكلية لجميع الاسطوانات الممكنة التى حجمها k . المساحة الجانبية لاسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها h هى $2\pi rh$ والقاعدة والغطاء كل مساحته πr^2 . المساحة الكلية A للاسطوانة هى

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{٥}$$

h و r كلاهما متغير . يجب أن نعبر عن A بدلالة متغير واحد . سنرى ماذا نعمل عندما ندرك أن (٥) تعطى المساحة الكلية لجميع الاسطوانات ، وليس فقط لتلك التى حجمها k . لأى نصف قطر r معطى توجد اسطوانة واحدة فقط حجمها k ، وهذا بدوره يعين h . العلاقة بين h و r هى

$$\text{الحجم} = \pi r^2 h = k \tag{٦}$$

يمكننا حل هذه إما لـ h وإما لـ r وبتعويض النتيجة فى (٥) نعبر عن A بدلالة r أو h . يبدو أنه من الأسهل التعويض عن h . من (٦)

$$h = \frac{k}{\pi r^2}, \tag{٧}$$

وإذن

$$A = A(r) = \frac{2k}{r} + 2\pi r^2, \qquad r > 0$$

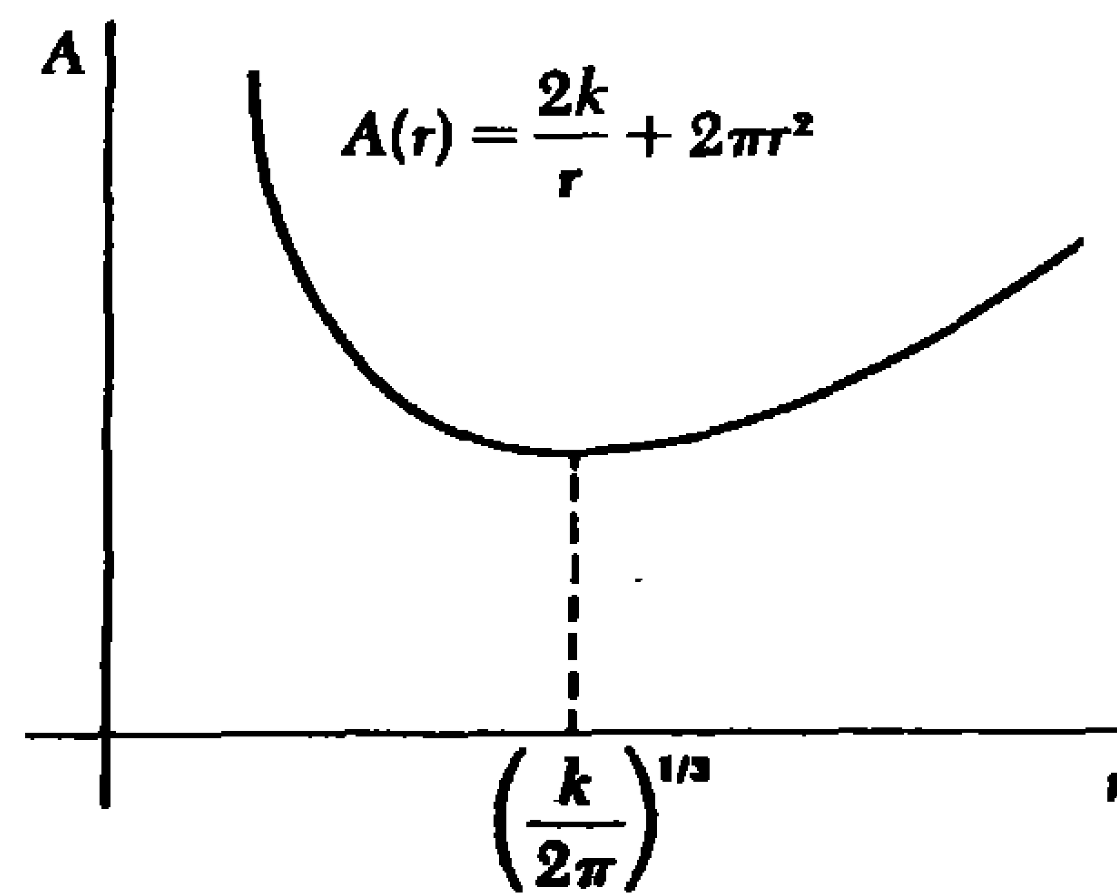
A يعبر عنها الآن كدالة فى r ، معرفة فى فترة مفتوحة لا نهائية $(0, \infty)$. نريد ايجاد قيمتها الصغرى فى هذه الفترة . نظرية تحديد موضع القيمة الصغرى فى فترة منتهية مقفلة لا يمكن استخدامها لأن الفترة ليست مقفلة . نأمل وجود عدد حرج واحد فقط فى الداخل حتى يمكن استخدام النظرية ٤ ـ ٢١ . الشكل البيانى لـ $A(r)$ موضح فى الشكل ٤ ـ ٤٨ . المشتقة لـ A هى

$$A'(r) = -\frac{2k}{r^2} + 4\pi r = \frac{2(-k + 2\pi r^3)}{r^2}$$

العدد الحرج الوحيد لـ A فى الفترة هو $r = (k/2\pi)^{1/3}$. المشتقة الثانية

$$A''(r) = \frac{4k}{r^3} + 4\pi$$

موجبة لجميع $r > 0$ ، فالدالة A لها نهاية صغرى موضعية عند $r = (k/2\pi)^{1/3}$ ومن ثم قيمتها الصغرى هناك . ارتفاع الاسطوانة لأقل مساحة ، كما نحصل عليه من (٧) ، هو $2(k/2\pi)^{1/3} = 2r$. العلبة لأقل مساحة ، ارتفاعها يساوى قطرها ، بصرف النظر عن حجمها .



شكل ٤ ـ ٤٨

مثال ٤ . شركة أتوبيس للرحلات نعرف من التجربة أن عند أخذ 20 عن كل شخص جميع المقاعد وعددها 30 ستحجز لكن لكل زيادة قدرها 1 سيبقى مقعدان غير مشغولين . تكاليف الرحلة هى 100 مضافاً اليها 11 عن كل شخص . ما هو الثمن الذى يجب أن تتقاضاه الشركة ليكون ربحها أكبر ما يمكن ؟

لتكن x هى الزيادة بالدولار فى الثمن ، فيكون الثمن لكل شخص هو $x + 20$ دولار . لهذا الثمن $30 - 2x$ من الأشخاص سيذهبون فى الرحلة ، ومجموع الدخل للشركة سيكون $(20 + x)(30 - 2x)$ دولاراً . التكاليف هى $100 + 11(30 - 2x)$ دولاراً . الربح P هو الدخل الاجمالى مطروحاً منه التكاليف ، فهو

$$\begin{aligned} P &= (20 + x)(30 - 2x) - [100 + 11(30 - 2x)] \\ &= 170 + 12x - 2x^2, \qquad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

بما أن $dP/dx = 12 - 4x$ ، العدد الحرج لـ P هو 3 ويعطى نهاية عظمى موضعية . الشركة تزيد أرباحها لأقصى حد عندما تتقاضى $23\$$ عن كل شخص .

مثال ٥ . أوجد النقطة على المنحنى $y = \sqrt{8x}$ التى تكون أقرب ما يمكن من النقطة $(1, 0)$.

المنحنى هو النصف الأعلى من قطع مكافىء (شكل ٤ ـ ٤٩) . اذا كانت u هى المسافة بين النقطة $(1, 0)$ وأى نقطة $P(x, y)$ على المنحنى ، فان

$$u^2 = (x-1)^2 + y^2 \qquad (٨)$$

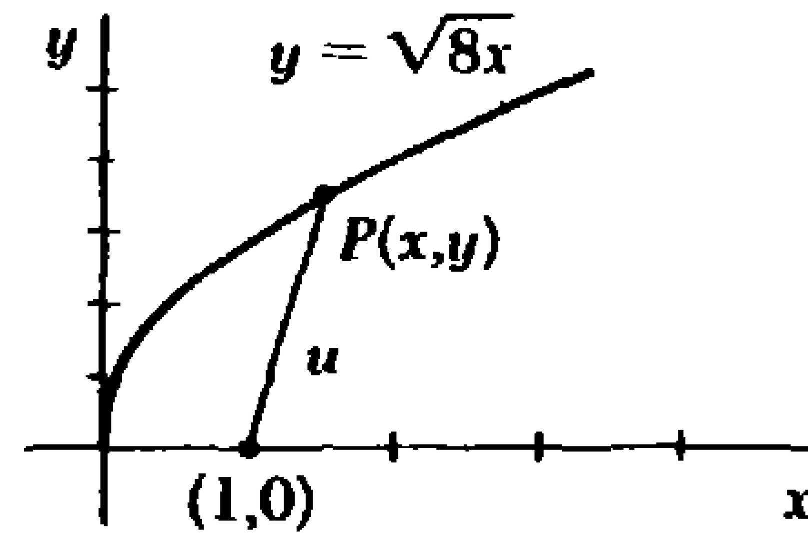
يجب أن نعبر عن u بدلالة x أو y فقط . بما أن P تكون على المنحنى ، فاحداثياها يحققان معادلة المنحنى ، لذلك يمكن تعويض $8x$ عن y^2 فى (٨) ونحصل على u^2 بدلالة x ، فيكون

$$u^2 = (x-1)^2 + 8x, \qquad x \geqslant 0$$

المشتقة du/dx نحصل عليها بسهولة بالتفاضل الضمنى :

$$2u\frac{du}{dx} = 2(x-1) + 8, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(x+3)$$

المشتقة موجودة لجميع x لأنه لا توجد x يكون عندها $u = 0$ ولأن u ليس لها عدد حرج فى نطاقها والنطاق لا نهائى ، فانه لا يمكننا استخدام أى الطرق التى استخدمت من قبل . لكن المشتقة توضح أن u متزايدة فى الفترة $[0, \infty)$ ، واذن قيمتها الصغرى يجب حدوثها عند 0 . أى أن ، النقطة الأقرب الى $(1, 0)$ هى نقطة الأصل .



شكل ٤ ـ ٤٩

نلخص النقط الرئيسية فى حل مسائل النهايات العظمى والصغرى :

١ ـ ارسم الشكل اذا كان مناسباً .

٢ ـ أوجد تعبيراً جبرياً للكمية التى ستجعل أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن ، مستخدماً أى حروف لازمة . التعبير يجب أن يكون صحيحاً لجميع الأشكال الممكنة التى تحقق شروط المسألة ، وليس فقط لذلك الذى يعطى قيمة قصوى . لاحظ أى الحروف تكون ثابتة وأى تكون متغيرة .

٣ ـ اذا كان التعبير يعتمد على أكثر من متغير واحد ، فيجب كتابة التعبير بدلالة متغير واحد فقط . أنظر الى الشكل واقنع نفسك بأن اختيار متغير واحد يعين المتغيرات الأخرى . ثم أوجد العلاقة

بينها . اذا لم تعط العلاقة مباشرة كمعادلة ، عادة يمكن ايجادها بدراسة مثلثات متشابهة أو مثلثات قائمة ، أو ربما تكون المتغيرات احداثيات نقطة على منحنى معادلته يمكن تعيينها .

٤ - استخدم العلاقة التى حصلت عليها للتعبير عن الكمية المطلوب جعلها أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن ، بدلالة متغير واحد ولاحظ الفترة التى يمكن أن يتغير فوقها هذا المتغير .

٥ - أوجد قيمة المتغير حيث الدالة تكون نهاية عظمى أو صغرى ، مستخدماً النظرية لتعيين مواضع القيم القصوى فى فترة محدودة ومقفلة أو نظرية ٤ - ٢١ .

نذكر القارىء أن الكمية المتغيرة y تتناسب مع الكمية x اذا كان يوجد عدد ثابت $k \neq 0$ ، يسمى ثابت التناسب ، بحيث أن $y = kx$ لجميع قيم y و x . الكمية y تتناسب عكسياً مع x اذا كان يوجد ثابت $k \neq 0$ بحيث أن $y = k/x$ لجميع y و x غير الصفرية .

مسائل

١ - القدرة المتولدة بمولد 120 — volt بمقاومة داخلية 5 ohms هى $120i - 5i^2$watts ، حيث i التيار بالأمبير . لأى تيار يعطى المولد أكبر قدرة .

٢ - مزارع يريد أن يحيط حقلا مستطيلا بسور وبعد ذلك يقسم الحقل بسور آخر مواز لأحد أضلاعه . اذا كان لديه 1200 yd لعمل السور ، ما هى أبعاد الحقل التى تجعل المساحة المحددة بهذه الكيفية أكبر ما يمكن ؟

٣ - قطعة أرض مستطيلة الشكل يراد تحويطها من جوانبها الأربعة . السور للضلع الأمامى سيكون مزخرفاً عن الباقى وتكلفته 3 $ للقدم ، بينما السور على الاضلاع الثلاثة الأخرى سيتكلف 1 $ للقدم . ما هى أبعاد أكبر قطعة أرض يمكن تسويرها بهذه الطريقة اذا كانت 320 $ على الأكثر ستصرف على السور ؟

٤ - أين نقطع قطعة مستقيم طولها 10 in اذا كان حاصل ضرب طولى القطعتين أكبر ما يمكن ؟

٥ - أثبت أن حاصل جمع أى عدد حقيقى موجب ومعكوسة هو على الأقل 2 .

٦ - بطارية معينة مقاومتها الداخلية r ohms . تعطى E volts . الشغل W المبذول كل ثانية فى مرور تيار خلال دائرة كهربية مقاومتها R ohms يعطى بالعلاقة $W=[E^2R/(r+R)^2]10^7\ ergs$. مع ثبوت E و r اثبت أن W تكون أكبر ما يمكن عندما $R = r$.

٧ - صندوق مفتوح (ليس له غطاء) يراد صنعه بقطع مربعات من أركان قطعة مستطيلة من الصفيح 18×24 in وثنى الجوانب الى أعلى . أوجد أبعاد الصندوق الذى يمكن صنعه بهذه الكيفية ليكون الحجم أكبر ما يمكن ؟ ما هى الأبعاد اذا كان ارتفاع الصندوق لا يزيد عن 2 in ؟

٨ - مستطيل محيطه P يدور حول أحد أضلاعه ، لينشىء اسطوانة . ما هى أبعاد المستطيل التى تجعل حجم الاسطوانة أكبر ما يمكن .

٩ - مخروط ينشأ من دوران مثلث قائم حول احدى ساقيه . لجميع المثلثات القائمة ذات وتر معلوم ، أوجد المثلث الذى ينشىء المخروط ذات أكبر حجم .

١٠ ـ اثبت أن من بين المستطيلات ذات المحيط المعلوم يكون المربع هو ذات أكبر مساحة .

١١ ـ أوجد أبعاد المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل نصف دائرة .

١٢ ـ أوجد مساحة أكبر مستطيل حيث الرأسان العلويان على المنحنى $y = 18 - x^2$ والرأسان السفليان على المنحنى $y = \frac{1}{2}(x^2 - 18)$ والذى يقع داخل المنطقة المحددة بالمنحنيين .

١٣ ـ أوجد أبعاد المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل القطع الناقص : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ وتقع رؤوسه على القطع .

١٤ ـ مستطيل ضلعان فيه على المحور السينى والمحور الصادى وأحد رؤوسه على المنحنى $y = 1/x^2$. أوجد أبعاد المستطيل اذا كانت الاسطوانة المكونة من الدوران حول المحور الصادى حجمها أكبر ما يمكن .

١٥ ـ أوجد النقطة التى تقع على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وتكون أقرب ما يمكن من النقطة $(1, 0)$.

١٦ ـ ثلاثة أضلاع من شبه منحرف كل منها b in فى الطول . ما طول الضلع الرابع اذا كانت المساحة أكبر ما يمكن ؟

١٧ ـ كل من القاعدة والارتفاع لمستطيل معين يجب أن يكون أكبر من أو يساوى 4 ft وأقل من أو يساوى 6 ft والمحيط هو 20 ft . لأى أبعاد تكون مساحة المستطيل أقل ما يمكن .

١٨ ـ مزارع لديه 200 yd للتسوير ويرغب فى تسوير حقل مستطيل الشكل له أكبر مساحة ، جاعلا جزءاً من المحيط كله حائطاً حجرياً مستقيماً طوله 100 yd . التسوير يمكن أن يكمل جانب الحقل الذى به الحائط كجزء . ما هى أبعاد الحقل لأكبر مساحة يمكن تكوينها بهذه الطريقة ؟ (ارشاد : لتكن x هى عدد الياردات للتسوير المستخدمة فى اكمال الناحية المحتوية على الحائط) .

١٩ ـ صندوق قاعدته مربعة ومفتوح من أعلى يراد صنعه من 27 sq ft من مادة معينة . ما أبعاد الصندوق حتى يكون الحجم أكبر ما يمكن ؟

٢٠ ـ اناء اسطوانى مفتوح من أعلى ويحتوى c cu in يراد صنعه بأقل كمية من المادة ، أوجد أبعاده .

٢١ ـ صندوق مقفل قاعدته مربعة ، ويسع 20 cu ft ، يراد صنعه من الخشب مع قاعدة من الزنك . اذا كانت تكاليف الخشب 10 cents للقدم المربع وللزنك 20 cents للقدم المربع ، ما هى أبعاد الصندوق التى تجعل التكاليف أقل ما يمكن ؟

٢٢ ـ أثبت أن مساحة المستطيل ذات أكبر مساحة الذى يمكن رسمه داخل مثلث واحد أضلاعه على قاعدة المثلث هى نصف مساحة المثلث . لماذا تختلف الأبعاد فى هذه المسألة عن تلك التى فى مثال ٢ ؟

٢٣ ـ أوجد أبعاد الاسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التى يمكن عملها داخل كرة .

٢٤ ـ أوجد أبعاد المخروط الدائرى القائم ذات أكبر حجم الذى يمكن عمله داخل كرة .

٢٥ ـ مستطيل ضلعاه المتجاوران على المحور السينى والمحور الصادى الموجبين والرأس المقابل على المنحنى $y = 1/x^2$. أوجد أبعاد المستطيل التى تجعل مساحته أقل ما يمكن .

٢٦ ـ صلابة قضيب مستطيل الشكل يتناسب مع حاصل ضرب عرضه ومكعب عمقه . أوجد أبعاد القضيب ذات أكبر صلابة الذى يمكن قطعه من كتلة معلوم نصف قطرها .

٢٧ ـ من النقطة $P(a, b)$ فى الربع الأول رسم خط مستقيم قاطعاً المحورين السينى والصادى فى B و A ،أوجد احداثيات B و A اذا كانت (أ) مساحة المثلث OAB أكبر ما يمكن حيث O هى نقطة الأصل ، (ب) حاصل جمع الجزئين المقطوعين أكبر ما يمكن ، (ج) المسافة من نقطة الأصل الى الخط المستقيم AB أكبر ما يمكن .

٢٨ ـ رجل فى قارب يبعد 2 miles عن أقرب نقطة A على الشاطىء المستقيم ، يرغب الذهاب الى نقطة B على الشاطىء تبعد 2 miles عن A . يمكن الرجل أن يرسو فى أى مكان على الشاطىء بين B و A ويمشى الباقى من الطريق . اذا كان فى امكانه أن يجدف 3 mph (ثلاثة أميال فى الساعة) ويمشى 5 mph ، أين ينبغى أن يرسو ليصل B فى أقل وقت .

٢٩ ـ حل المسألة 28 مفترضاً أن الرجل يمكنه أن يجدف بسرعة 4 mph .

٣٠ ـ محطة سكة حديد يراد بناؤها لتخدم مدينتين على نفس الجانب من السكة . بعدا المدينتين من السكة هما b و a ، والمسافة بين مسقطيهما على السكة هى c . أين ينبغى أن تقع المحطة لتجعل حاصل جمع المسافتين بين المدينتين والمحطة أقل ما يمكن ؟

٣١ ـ موقدان على بعد 20 ft ، أحدهما يعطى حرارة ثمانية أمثال الآخر . عند نقطة على الخط الواصل بينهما وعلى مسافة x من الأصغر ، تعطى كمية الحرارة H المستقبلة من الموقدين بالعلاقة $H = 60/x^2 + 480/(20 - x)^2$. أوجد أبرد نقطة على الخط بين الموقدين .

٣٢ ـ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة ، بحيث ينطبق قطر نصف الدائرة على الضلع الأعلى للمستطيل . جميع هذه النوافذ لها محيط ثابت . ما هى أبعاد النافذة ذات أكبر مساحة .

٣٣ ـ سلك طوله a in قطع الى جزئين ، عملت دائرة من جزء وعمل مربع من الجزء الآخر ، أين ينبغى أن يقطع السلك اذا كان حاصل جمع مساحة الدائرة ومساحة المربع أكبر ما يمكن ؟ أصغر ما يمكن ؟ (يوجد تفسيران للمسألة) .

٣٤ ـ اذا كان حاصل جمع مساحتى مكعب وكرة مقداراً ثابتاً ، أوجد النسبة بين طول ضلع المكعب وطول نصف قطر الكرة عندما يكون حاصل جمع حجميهما أقل ما يمكن ؟ أكبر ما يمكن ؟ (يوجد تفسيران لهذه المسألة) .

٣٥ ـ مستطيل ثابت معطى . أوجد النسبة بين مساحة القطع الناقص المحيط به ومساحته أقل ما يمكن ، ومساحة المستطيل . (ارشاد : مساحة القطع الناقص هى πab ، حيث b و a نصفا طولى المحورين) .

٣٦ ـ المنحنى $10x^2 + 6xy + 2y^2 = 11$ هو قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل ، لكن محوريه

لا يوازيان محورى الاحداثيات . أوجد احداثيات أطراف محورية بايجاد أكبر مسافة وأصغر مسافة من المركز لنقطة على القطع الناقص .

٣٧ ـ أوجد طول أقصر قطعة محصورة بين المحورين من المماس للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

٣٨ ـ سلم الغرض منه الوصول من الأرض الى مبنى ويستند على حائط ارتفاعه a ft ويبعد مسافة b ft من المبنى . ما طول أقصر سلم يمكن استعماله ؟

٣٩ ـ أوجد النقطة على المنحنى $y = x^2$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة $(4,\frac{7}{2})$

٤٠ ـ أوجد النقطة على النصف الأعلى للقطع المكافىء $y^2 = 4x$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة $(c, 0)$.

٤١ ـ أوجد النقطة على القطع المكافىء $y^2 = 4x$ التى تكون أقرب ما يمكن الى النقطة : $(\frac{15}{4},-\frac{3}{4})$.

٤٢ ـ أوجد النقطة على الدائرة $(x-a)^2 + y^2 = b^2$ التى تكون أقرب ما يمكن الى نقطة الأصل .

٤٣ ـ المنطقة المحدودة بالمحورين والقطع المكافىء $y = 9x^2 - 28x + 24$ والخط الرأسى المرسوم من المحور السينى الى رأس القطع المكافىء أديرت حول المحور الصادى ، ليتولد جسم مصمت . أوجد نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة داخل هذا الجسم التى حجمها أكبر ما يمكن ومحورها على المحور الصادى
[C.S. Ogilvy, *Am. Math. Monthly*, vol. *64*, p. 504 *(1957)*.] .

٤٤ ـ أوجد نصف قطر المخروط الذى مساحته الجانبية أكبر ما يمكن ورأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور السينى ، وحافة القاعدة على السطح المتولد بدوران القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a \geqslant b$ حول المحور السينى .

٤٥ ـ اثبت أن $x^3 - x^2 - 6x$ يكون سالباً لجميع $x \leqslant -\frac{5}{2}$.

٤٦ ـ اثبت أن $3x^4 + 4x^3 + 2$ موجب لجميع قيم x .

أوجد مدى الدوال الآتية :

٤٧ ـ $f(x) = x^2 + 4x + 7$

٤٨ ـ $g(t) = -t^3 + 9t - 2$

٤٩ ـ $f(t) = \dfrac{10}{t^2 + 5}$

٥٠ ـ $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 36}$

٥١ ـ مصنع يمكنه انتاج 120 units على الأكثر فى اليوم . اذا كان ثمن بيع الوحدة هو 10 $ ، فانه يمكنه بيع جميع الـ 120 units ، لكن لكل زيادة قدرها 50-cent فى الثمن ، يفقد المصنع بيع واحدة . كم وحدة فى اليوم ينبغى أن يعملها المصنع ليكون دخله أكبر ما يمكن ؟

٥٢ ـ بفرض أن فى المسألة ٥١ تكاليف العمل هى 200 $ مضافاً الى ذلك 5 $ لكل وحدة ، كم وحدة فى اليوم ينبغى أن يعملها المصنع حتى يكون دخله أكبر ما يمكن .

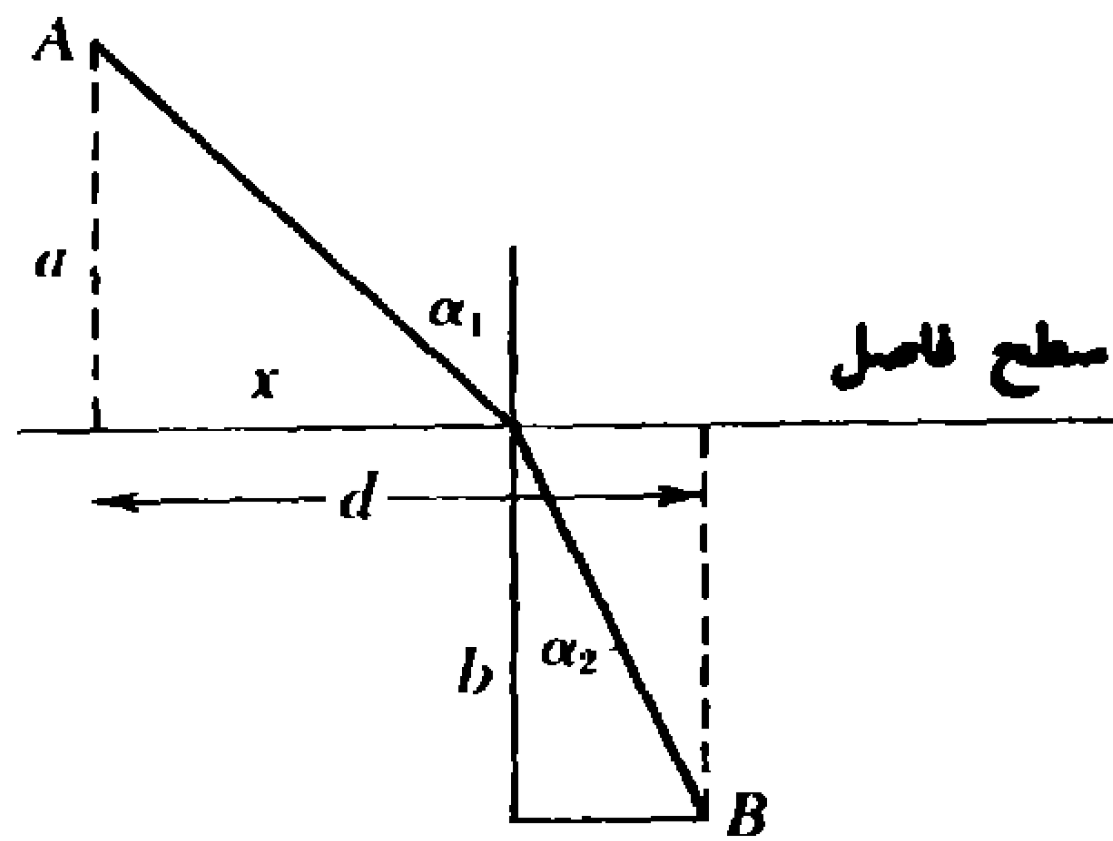
٥٣ ـ المتوسط x لعدد من يدخل يومياً أى ملعب للعبة البيسبول يتبع القانون $x = a/p + b$ ، حيث p ثمن تذكرة الدخول وحيث b و a ثابتان تعتمد قيمتهما على الملعب الخاص . ملعب بيسبول معين به 10,000 مقعد . المالك يعرف من تجربته أنه عندما يكون ثمن تذكرة الدخول هو 2.50 $ ، فان متوسط عدد الداخلين يومياً هو 5000 ، لكن عندما يخفض الثمن الى 2 $ ، فان متوسط عدد الداخلين يومياً يرتفع الى 8000 . أوجد b و a لهذا الملعب وعين ثمن تذكرة الدخول الذى يجعل متوسط الدخل اليومى أكبر ما يمكن .

٥٤ ـ صانع اطارات يمكنه كل يوم عمل x من مئات الاطارات من صنف واحد بمكسب صاف p دولار لكل اطار وعمل y من مئات الاطارات من صنف آخر بربح صاف $3yp$ دولاراً لكل اطار ، حيث y و x ترتبطان بالمعادلة $x = 40 - 8y$. طاقة عمل y هى $0 \leqslant y \leqslant 4$. كم اطاراً من كل صنف ينبغى أن يعمل يومياً ليكون ربحه الكلى الصافى أكبر ما يمكن ؟

٥٥ ـ مصنع منسوجات يمكنه انتاج x من مئات الدست من الشرابات فى اليوم من نوع معين وانتاج y من مئات الدست من الشرابات فى اليوم من نوع أرخص ، حيث y و x ترتبطان بالمعادلة $y = (24 - 6x)/(5 - x),\ 0 \leqslant x \leqslant 4$. اذا كان الربح الصافى على الشراب الجيد ضعفه للشراب الأرخص ، كم من كل نوع ينبغى للمصنع أن ينتج حتى يكون مجموع ربحه الصافى أكبر ما يمكن ؟

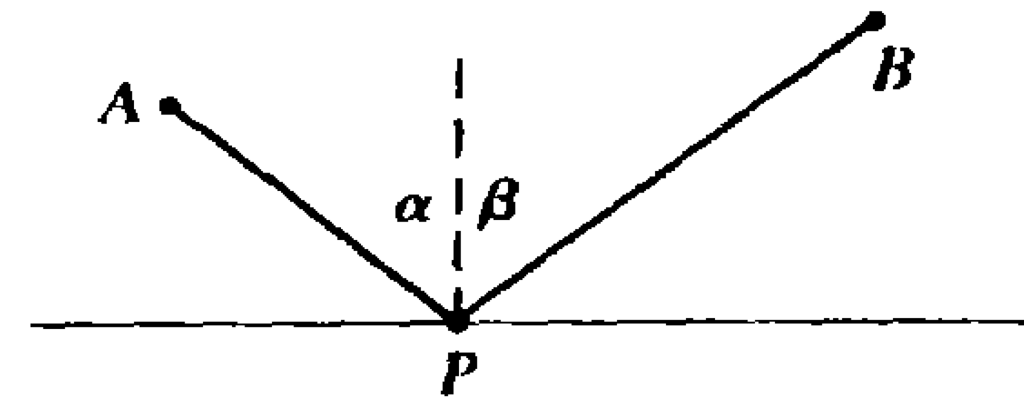
٥٦ ـ مثلث محيطه وأحد أضلاعه ثابتان . وضح أنه لجميع هذه المثلثات المثلث المتساوى الساقين هو ذات أكبر مساحة . (ارشاد : اذا كانت a, b, c أطوال الأضلاع وكانت $s = (a + b + c)/2$ ، فان المساحة $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

٥٧ ـ شعاع من الضوء يصدر من نقطة A وينعكس على مرآة مستوية الى النقطة B (شكل ٤ ـ ٥٠) . بفرض أن الضوء يسير من نقطة الى أخرى على مسار أقل وقت فأوجد النقطة على المرآة حيث ينعكس الشعاع ووضح أن زاوية السقوط α تساوى زاوية الانعكاس β .



شكل ٤ ـ ٥١

انكسار الضوء : $\dfrac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$.



شكل ٤ ـ ٥٠

انعكاس الضوء : $\alpha = \beta$.

٥٨ ـ شعاع من الضوء يسير من نقطة A فى وسط مثل الهواء الى نقطة B فى وسط آخر مثل الماء ، السطح الفاصل بين الوسطين مستوى (شكل ٤ ـ ٥١) . تبعاً للسرعتين المختلفتين للضوء فى الوسطين ينثنى الشعاع ، أى ينكسر ، عند الحد الفاصل . نفترض أن الضوء يسير من نقطة لأخرى على مسار أقل وقت . اذا كانت السرعتان فى الوسط الأول والثانى هما v_2 و v_1 ، على الترتيب ، اثبت أن $(\sin \alpha_1)/(\sin \alpha_2) = v_1/v_2$ ، حيث α_2 و α_1 هما زاويتا السقوط والانكسار ، كما هو موضح فى الشكل . هذه المعادلة تعرف بقانون *Snell* للانكسار (ارشاد : أوجد تعبيراً جبرياً للوقت T بدلالة المسافة x الموضحة فى الشكل . اثبت أن $dT/dx = (\sin \alpha_1)/v_1 - (\sin \alpha_2)/v_2$) .

٥٩ ـ اذا كانت النقطة Q على المنحنى $y = f(x)$ أقرب نقطة الى p ، اثبت أن الخط المستقيم pQ يكون عمودياً على المنحنى عند Q . ما هى الافتراضات التى تعملها عن f ؟

٦٠ ـ طول قضيب يراد تعيينه بدقة بقدر الامكان. n من قياسات الطول أخذت بالقراءات $l_1, l_2, \ldots, l_n$ ، وتختلف قليلا بعضها عن البعض . اذا كانت x هى الطول الحقيقى للقضيب ، فان $|x - l_i|$ هو الخطأ فى القياس رقم i . طريقة معروفة لحساب x هى طريقة المربعات الصغرى ، التى تنص على أن القيمة الأكثر احتمالا لـ x هى القيمة التى تجعل حاصل جمع مربعات الأخطاء

$$(x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \cdots + (x - l_n)^2$$

أقل ما يمكن . اثبت أن القيمة الأكثر احتمالا لـ x هى المتوسط الحسابى للقياسات ، : $(l_1 + l_2 + \ldots + l_n)/n$.

٦١ ـ وضح عن طريق التخطيط أنه إذا كان شرط الاتصال فى النظرية ٤ ـ ٢١ محذوفاً ، فإن النظرية قد لا تكون صحيحة .

٦٢ ـ لتكن f دالة متصلة فى الفترة المفتوحة (a, b)، التى قد تكون لا نهائية، ولتكن $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$. أثبت أن f لها قيمة صغرى فى (a, b) ووضح كيف توجدها . (ارشاد : لتكن c أى عدد مناسب فى (a, b) . اختر x_1 فى (a, c) و x_2 فى (c, b) بحيث أن $f(x) > f(c)$ لجميع x فى $(a, x_1]$ وفى $[x_2, b)$. اعتبر الفترة $[x_1, x_2]$.)

٤ ـ ١٠
الحركة على خط مستقيم

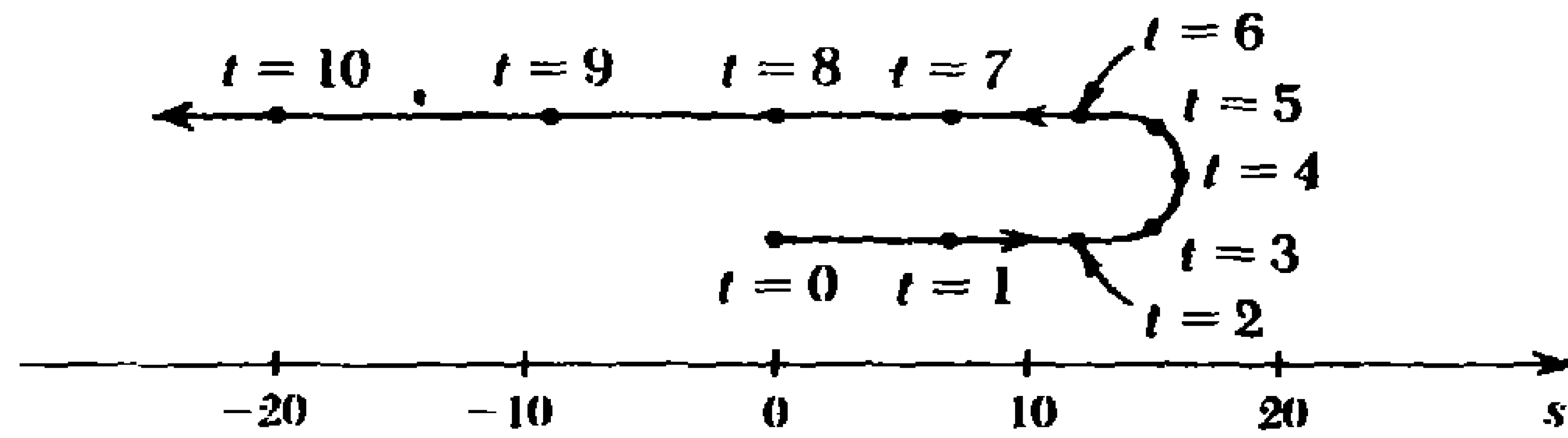
أحد التطبيقات الأكثر أهمية للمشتقة هو دراسة حركة الأشياء . فهى حيوية فى دراسة الميكانيكا السماوية ، الخيوط المهتزة ، الكهرباء ، البنيان الذرى ، وفى الحقيقة أجزاء كثيرة للفيزياء . لقد كانت الحاجة الى حل مسائل صادفت نيوتن فى فحصه لحركة الكواكب هى التى قادته الى اختراع

حساب التفاضل . سنحدد لأنفسنا هنا الحالة البسيطة لكن المهمة لشيء يتحرك فى خط مستقيم ، مثال ذلك ، حركة سقوط جسم بدون مقاومة أو حركة ثقل معلق من نهاية خيط مهتز .

عندما تتحرك نقطة على خط للاحداثيات ، سندع s مسافته المتجهة من نقطة الأصل عند الزمن t . العدد s هو اذن الاحداثي للنقطة . كمثال بسيط لمثل هذه الحركة ، يمكننا أن نتصور نقطة تتحرك على خط للاحداثيات بحيث أن المسافة بالقدم من نقطة الأصل بعد t sec نعطى بالعلاقة .

$$s = 8t - t^2, \qquad t \geqslant 0 \tag{10}$$

الجدول فى الهامش يعطى احداثيات النقطة لقيم متعددة للزمن t . مبتدئة من نقطة الأصل ، النقطة تتحرك الى اليمين لمدة أربع ثوان . بعد ذلك تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار ، مارة بنقطة الأصل ثانية بعد 8 sec وتستمر فى أن تتحرك الى اليسار أسرع فأسرع . الحركة صورت بيانياً فى الشكل ٤ ـ ٥٢ . الرسم هو لمجرد التوضيح ، إذ فى الواقع ، النقطة تكون دائماً على خط الاحداثيات . لاحظ أن s تعطى المسافة الموجهة للنقطة من نقطة الأصل وليست المسافة الكلية المقطوعة .



شكل ٤ ـ ٥٢

موضع نقطة تتحرك وفقاً للقاعدة $s(t) = 8t - t^2, t \geqslant 0$.

t ثانية	$s = s(t)$, قدم
0	0
1	7
2	12
3	15
4	16
5	15
6	12
7	7
8	0
9	−9
10	−20
20	−240

فى جميع حالات الحركة على خط مستقيم قيمة لـ s تناظر كل قيمة لـ t . أى أن s دالة للزمن t ، ومن المناسب أن نستخدم الرمز الدالى $s(t)$ للاشارة الى ذلك . فى التوضيح السابق $s(2) = 12$ و $s = s(t) = 8t - t^2$ العلاقة الدالية كانت واضحة جداً فى هذا المثال اذ أن اعتماد s على t معطى صراحة بـ (١) ، لكن حتى عندما لا توجد معادلة معبرة عن s بدلالة t فان s تظل دالة للزمن t . عربة مسافرة من Boston الى New York تتحرك بسرعات مختلفة وربما أيضاً تتوقف بعض الأوقات . رغم أنه لا توجد معادلة تعطى مسافتها من Boston بعد زمن t hours ، إلا أنها عند أى لحظة تكون على مسافة محددة من Boston . فالمسافة دالة للزمن .

لتكن $s(t)$ هى الاحداثى عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات s . عند الزمن t_1 النقطة تكون عند $s(t_1)$ وعند الزمن t_2 النقطة تكون عند $s(t_2)$. المسافة الموجهة من $s(t_1)$ الى $s(t_2)$ هى $s(t_2) - s(t_1)$ وهى المسافة المقطوعة فعلا بين الزمنين t_2 و t_1 . هذه المسافة مقسومة على فرق الزمنين $t_2 - t_1$ تسمى السرعة المتوسطة للنقطة فى الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$.

٤ - ٢٢ تعريف . إذا كانت $s(t)$ هى الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، فإن السرعة المتوسطة للنقطة فى الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هى

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

للنقطة التى موضعها يعطى بالمعادلة (١) ، $s(t) = 8t - t^2$ السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[1, 3]$ هى

$$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{15 - 7}{2} = 4 \text{ ft/sec}$$

السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 8]$ هى

$$\frac{s(8) - s(2)}{8 - 2} = \frac{0 - 12}{6} = -2 \text{ ft/sec}$$

الاشارة السالبة تشير الى أن النقطة تكون متحركة الى اليسار بعضاً من الوقت . السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 6]$ هى

$$\frac{s(6) - s(2)}{6 - 2} = \frac{12 - 12}{4} = 0 \text{ ft/sec}$$

السرعة المتوسطة صفر لا تعنى أن النقطة لم تتحرك . فهى فى هذا الزمن قد تحركت الى الامام ثم رجعت الى الخلف الى نقطة الابتداء .

كما يوضح هذا المثال الأخير ، السرعة المتوسطة لا تعطى معلومات عن السرعة عند أى لحظة خاصة . العربة قد تقطع الـ 225 miles من Boston إلى New York فى 5 hr . فسرعتها المتوسطة تكون 45 mph ، لكن هذا لا يتضمن أن سرعتها عند أى لحظة كانت 45 mph .

هذا يثير السؤال كيف يمكننا إيجاد سرعة النقطة عند لحظة معطاة . لكن أولا يجب أن نقرر ماذا نقصد بالسرعة اللحظية . نريد تعريفاً يعكس أفكارنا المنطقية عن السرعة . دعنا نعتبر أولا النقطة المتحركة التى موضعها يعطى بالمعادلة (١) ، $s(t) = 8t - t^2$ ونحاول تعريف ماذا نقصد بسرعة النقطة عند $t = 2$. السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 4]$ هى

$$\frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{16 - 12}{2} = 2 \text{ ft/sec}$$

كما رأينا ، هذه ليست بالضرورة السرعة عند $t = 2$ ، لكن إذا كانت السرعة لا تتغير تغيرا ملحوظا ، فهذه تعطى تقريباً غير دقيق للسرعة عندئذ ، وأيضاً للسرعة عند أى وقت بين 4 و 2 . تقريب أفضل يعطى بالسرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية الأقصر $[2, 3]$.

$$\frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{15 - 12}{1} = 3 \text{ ft/sec}$$

لازالت تقريبات أفضل يمكن إيجادها بحساب السرعة المتوسطة

$$\frac{s(t') - s(2)}{t' - 2}$$

فى فترات زمنية $[2, t']$ أصغر فأصغر ، كما هو موضح فى الجدول الآتى

t'	$s(t')$	$s(t') - s(2)$	السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, t']$ قدم / ثانية
4	16	4	2
3	15	3	3
2.1	12.39	0.39	3.9
2.01	12.0399	0.0399	3.99
1.999	11.995999	−0.004001	4.001
t'	$8t' - t'^2$	$8t' - t'^2 - 12$	$6 - t'$

السطر الأخير هو حساب السرعة المتوسطة لفترة زمنية اختيارية $[2, t']$ (أو $[t', 2]$ اذا كانت $t < 2$) . عندما تكون t' قريبة من 2 ، تكون السرعة المتوسطة قريبة من 4 وفى الواقع

$$\lim_{t' \to 2} \frac{s(t') - s(2)}{t' - 2} = \lim_{t' \to 2} (6 - t') = 4 \text{ ft/sec}$$

من المعقول عندئذ تعريف السرعة عند $t = 2$ لتكون 4 ft/ sec .

الحالة العامة تعالج بالمثل . السرعة عند لحظة معطاة t تعرف بأنها نهاية السرعة المتوسطة فى فترات زمنية أقصر فأقصر $[t, t']$. أى أن السرعة عند الزمن t = نهاية (السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[t, t']$) $t' \to t$

$$= \lim_{t' \to t} \frac{s(t') - s(t)}{t' - t}$$

لكن هذه هى تماماً $s'(t)$ ، مشتقة s عند t . لدينا إذن تعريف منطقى قوى ومناسب للسرعة .

٤ ـ ٢٣ . تعريف إذا كانت $s(t)$ هى الموضع عند الزمن t لنقطة متحركة على خط الاحداثيات فإن سرعة النقطة عند الزمن t تعرف بأنها المشتقة $s'(t)$.

سنرمز للسرعة بالرمز $v(t)$ ، مستخدمين الأسلوب الدالى لأن السرعة قد تتغير هى أيضاً مع الزمن . بما أننا نتعامل مع مواضيع فيزيائية ، فسوف نأخذ فى الاعتبار فقط الدوال التى توجد مشتقاتها

السرعة كما عرفت أعلاه تسمى أحياناً السرعة اللحظية لنؤكد إنها مختلفة عن السرعة المتوسطة . سوف لا نفعل ذلك هنا . السرعة سنعنى بها السرعة عند الزمن t كما عرفت فى ٤ ـ ٢٣ . السرعة المتوسطة هى دائماً بالنسبة إلى فترة زمنية . السرعة هى دائماً بالنسبة إلى لحظة معطاه .

سرعة النقطة التى موضعها يعطى بالمعادلة (١)

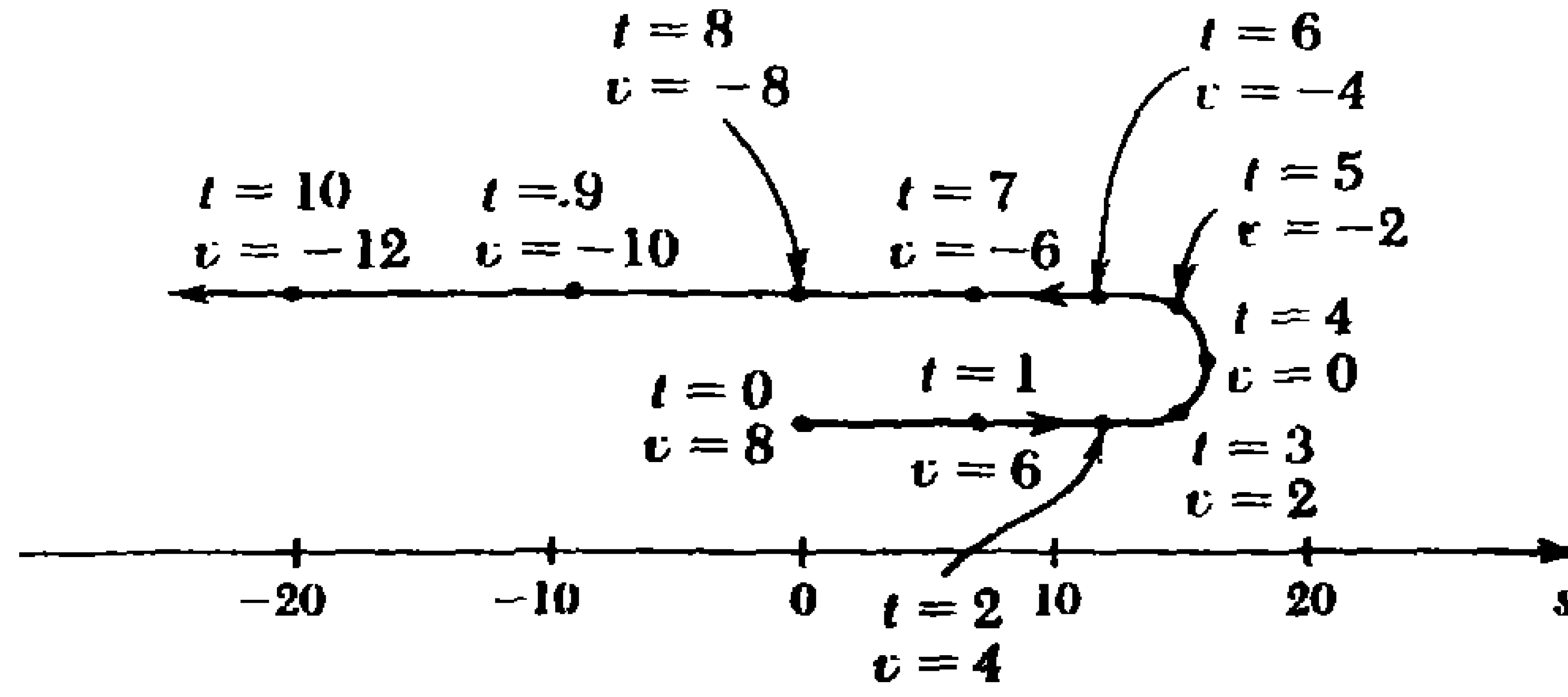
$$s(t) = 8t - t^2, \qquad t \geqslant 0 \tag{١}$$

هى

$$v(t) = s'(t) = 8 - 2t \tag{٢}$$

نكتب ثانية جدول المواضع المعطى سابقاً ونجمع السرعات عند الأوقات المناظرة . الشكل ٤ ـ ٥٣ هو نفس الشكل ٤ ـ ٥٢ لكن يوضح السرعات عند النقط .

t، ثانية	$s(t)$، قدم	$v(t)$، قدم/ثانية
0	0	8
1	7	6
2	12	4
3	15	2
4	16	0
5	15	−2
6	12	−4
7	7	−6
8	0	−8
9	−9	−10
10	−20	−12
20	−240	−32



شكل ٤ -٥٣

الموضع والسرعة لنقطة تتحرك وفقاً للقاعدة $s(t) = 8t - t^2$ و $t > 0$.

إشارة $v(t)$ تشير إلى الاتجاه الذى تتحرك فيه النقطة . إذا كانت $v(t) > 0$ لجميع t فى الفترة الزمنية (t_1, t_2) ، فإن s تتزايد فى $[t_1, t_2]$ والنقطة تكون متحركة إلى اليمين . إذا كانت $v(t) < 0$ ، فإن s تكون متناقصة والنقطة تكون متحركة إلى اليسار . من الجدول نرى أن النقطة تتحرك إلى اليمين أثناء الـ 4 sec الأولى لكن متباطئة بالتدريج . تصل للسكون لحظياً عند $t = 4$ وعندئذ تتحرك إلى اليسار أسرع فأسرع . القيمة المطلقة للسرعة $|v(t)|$ تسمى السرعة غير الموجهة للنقطة . فى المثال السابق ، سرعة النقطة هى 4 عند $t = 2$ وعند $t = 6$ ، لكن فى الحالة الأولى النقطة تكون متحركة إلى اليمين وفى الثانية إلى اليسار .

القارىء الملم بالمتجهات يلاحظ أن السرعة هى بالضبط متجه وهى مثل جميع المتجهات يمكن تمثيلها بقطعة مستقيمة متجهة . عندما تكون الحركة على خط مستقيم ، المتجه يقع على الخط المستقيم ، مشيراً لاتجاه الحركة . الكمية $v(t)$ كمية عادية لكن تعطى معلومات كاملة عن المتجه . طول المتجه هو $|v(t)|$ ، واتجاهه يعطى بإشارة $v(t)$ المتجه يشير إلى اليمين إذا كانت $v(t) > 0$ وإلى اليسار إذا كانت $v(t) < 0$.

التغير فى السرعة يسمى العجلة ويقاس بمشتقة $v(t)$. أى أن ، إذا كانت $a(t)$ ترمز الى العجلة عند الزمن t ، فإن $a(t) = v'(t) = s''(t)$. العجلة الموجبة تعنى أن السرعة متزايدة ، والعجلة السالبة تعنى أن السرعة متناقصة . العجلة السالبة عامة تسمى عجلة تقصيرية . عجلة النقطة التى موضعها وسرعتها تعطيان بـ (١) و (٢) هى $a(t) = v'(t) = -2$ ft/sec/sec . السرعة متناقصة بمعدل ثابت هو 2 ft/sec/sec ، كما هو واضح أيضاً من جدول السرعات . هذا لا يعنى أن السرعة غير المتجهة دائماً متناقصة . عندما تكون $t \geq 4$ ، السرعة غير المتجهة تتزايد عندما تتحرك النقطة إلى اليسار مسرعة أكثر فأكثر .

العجلة هى معدل التغيير فى السرعة . كما أن السرعة يعبر عنها بدلالة المسافة فى الثانية ، مثلا قدم/ثانية ، فإن العجلة يعبر عنها بدلالة السرعة فى الثانية ، مثلا قدم/ثانية/ثانية . مثل السرعة ،

العجلة هي متجه . رغم أننا سنشير إلى $a(t)$ كالعجلة ، فهي في الواقع مقدار العجلة وإشارتها ، لمتجه العجلة .

مثال ١ . صف الحركة لنقطة يتعين موضعها على خط الاحداثيات عند الزمن t بالعلاقة $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 2,\ t \geqslant 0$.

نوجد الفترات الزمنية التي خلالها تكون السرعة موجبة وسالبة ، لكي نعين اتجاه الحركة . لهذا الغرض ، نوجد أولا متى تكون السرعة صفراً . بما أن

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5) \ ^{\bullet}$$

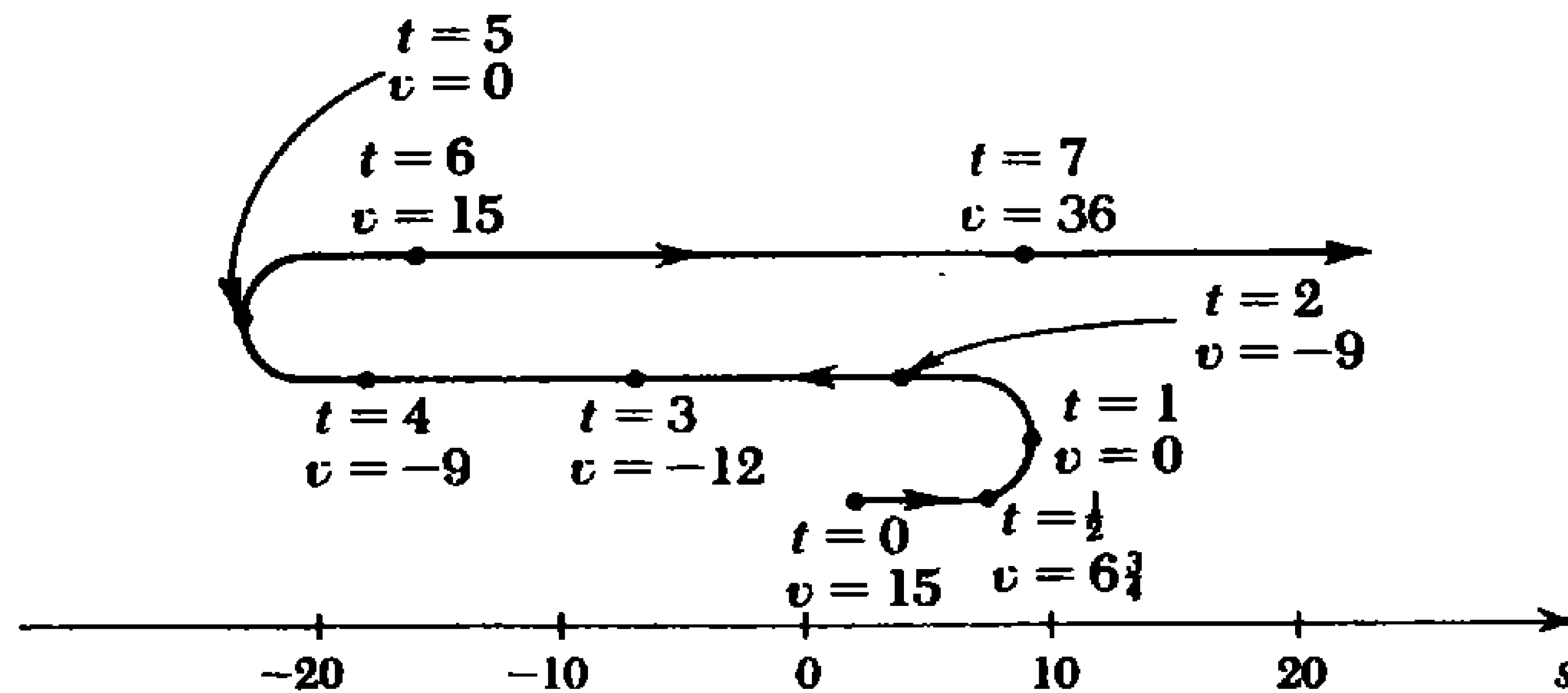
فان $v(t) = 0$ عند وفقط عند 5 و $t = 1$. عند هذين الزمنين $s(5) = -23$ و $s(1) = 9$. العددان 5 و 1 يقسمان الفترة الزمنية اللانهائية $[0, \infty)$ الى الفترات الجزئية

$$[0,1], \quad [1,5], \quad [5,\infty)$$

التي في كل منها السرعة تكون موجبة دائماً أو سالبة دائماً ومن ثم في كل منها تكون s اما متزايدة واما متناقصة .

في الفترة $(0, 1)$ $v(t) > 0,$ ، وتكون s متزايدة في $[0, 1]$ ، والنقطة تتحرك الى اليمين .
في الفترة $(1, 5$ $v(t) < 0,$ ، وتكون s متناقصة في $[1, 5]$ ، والنقطة تتحرك الى اليسار .
في الفترة $(5, \infty)$ $v(t) > 0,$ ، وتكون s متزايدة في $[5, \infty)$ ، والنقطة تتحرك الى اليمين .

الحركة صورت في الشكل ٤ ـ ٥٤ . عندما $t = 0$ النقطة تكون عند $s = 2$ وتتحرك الى اليمين بسرعة 15 . وهي تستمر في الحركة الى اليمين حتى $t = 1$ ، حيث تقف لحظياً عند $s = 9$. ثم تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار حتى $t = 5$ ، عندما تقف لحظياً عند $s = -23$. الآن تتحرك الى اليمين ثانية وتستمر في ذلك متحركة بعيداً الى ما لا نهاية .



شكل ٤ ـ ٥٤

حركة نقطة يتعين موضعها بالعلاقة $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 2,\ t \geqslant 0$. السرعة لها نهاية صغرى موضعية عند $t = 3$ حيث $a(t) = 0$.

● لكي لا نحجب الموقف العام ، الوحدات في المعالجة الرياضية للمسائل الطبيعية غالباً مالا تذكر . اذا كانت s مقيسة بالياردات ، t بالدقائق ، فان v تقاس بالياردات لكل دقيقة . اذا كان s, t بالسنتيمترات والثواني ، فان تقاس بالسنتيمترات لكل ثانية .

العجلة تعطى بـ $a(t) = v'(t) = 6(t-3)$ وهى تبين أن السرعة متناقصة لـ $0 \leqslant t \leqslant 3$ ومتزايدة لـ $t \geqslant 3$. عندما $t = 3, v = -12$ والنقطة تكون متحركة الى اليسار أسرع من نهاية صغرى موضعية للسرعة . قيم v المعطاة فى الشكل ٤ ـ ٥٤ توضح ذلك . لاحظ أن فى الفترة $3 \leqslant t \leqslant 5$ النقطة تتحرك الى اليسار مع أن السرعة تكون متزايدة .

سرعة النقطة قد لا تكون صفراً عند $t = 0$. الزمن $t = 0$ يشير فقط الى اللحظة التى نبدأ منها قياس الزمن . اذا كان الزمن مقيساً بالساعات ، فان $t = -2$ تعنى ساعتين قبل تشغيل الساعة .

مثال ٢ صف حركة النقطة التى موضعها على خط الاحداثيات عند الزمن t يتعين بالعلاقة $s(t) = 5t^3 - 3t^5$.

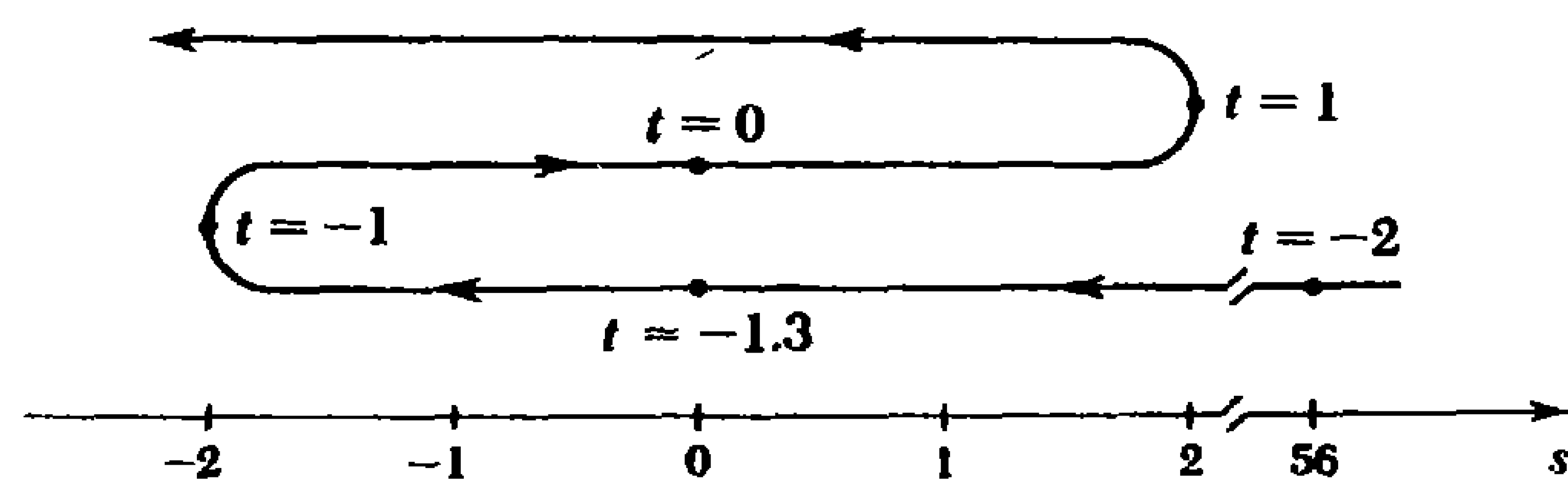
لدينا

$$v(t) = s'(t) = 15t^2 - 15t^4 = 15t^2(1-t^2),$$
$$a(t) = v'(t) = 30t - 60t^3 = 30t(1-2t^2).$$

السرعة تساوى صفراً عند 1 و 0 و $t = -1$ ، وعند هذه اللحظات $s(1) = 2$ و $s(0) = 0$ و : $s(-1) = -2$.

فى الفترة $(-\infty, -1]$ ، $v(t) < 0$ وتكون s متناقصة فى $(-\infty, -1]$.
فى الفترة $(-1\ 0)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة فى $[-1$ و $0]$.
فى الفترة $(0,1)$ ، $v(t) > 0$ ، وتكون s متزايدة فى $[0, 1]$.
فى الفترة $(1,\infty)$ ، $v(t) < 0$ ، وتكون s متناقصة فى $[1, \infty)$.

نلاحظ أن s تكون كبيرة وموجبة عندما تكون t سالبة وكبيرة . واذن من على بعد كبير جداً على المحور s الموجب تتحرك النقطة الى اليسار أثناء الفترة الزمنية $(-\infty, -1]$ حتى $t = -1$ حيث تقف لحظياً عند $s = -2$ (شكل ٤ ـ ٥٥) . ثم تتحرك الى اليمين حتى $t = 0$ حيث تقف لحظياً عند نقطة الأصل . وتستمر فى التحرك الى اليمين حتى $t = 1$ حيث تقف عند $s = 2$. ثم تعكس اتجاهها وتتحرك الى اليسار الى اللانهاية السالبة .



شكل ٤ ـ ٥٥
حركة نقطة موضعها يعطى بالعلاقة $s(t) = 5t^3 - 3t^5$.

مثال ٣ . عند أى زمن t السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $v(t) = t - 1$
اذا كانت النقطة عند $s = 2$ عندما $t = 0$ ، أوجد موضعها عندما $t = 5$.

دالة الموضع $s(t)$ هى المعكوس التفاضلى ، أو التكامل غير المحدد ، لـ $v(t)$.

$$s = s(t) = \int v(t)\, dt = \int (t-1)\, dt = \tfrac{1}{2}t^2 - t + C \qquad (٣)$$

الثابت C يمكن تعيينه من الشرط الحدى $s(0) = 2$. بتعويض $t = 0$ و $s = 2$ فى (٣) نحصل على

$$2 = 0 - 0 + C$$

اذن $C = 2$ ودالة الموضع الخاصة هى

$$s(t) = \tfrac{1}{2}t^2 - t + 2$$

عندما

$$t = 5,\ s = s(5) = \tfrac{25}{2} - 5 + 2 = \tfrac{19}{2}$$

مثال ٤ . عند أى زمن t العجلة لنقطة متحركة على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $a(t) = 2t$.
من المعلوم أن عند $t = 0$ ، النقطة تكون عند نقطة الأصل وسرعتها 3 . أوجد سرعة النقطة عندما $s = 18$.

لدينا

$$v(t) = \int a(t)\, dt = \int 2t\, dt = t^2 + C$$

حيث C ثابت . من الشرط الحدى $v(0) = 3$ ، نرى أن $C = 3$ ، ومن ثم

$$v(t) = t^2 + 3 \qquad (٤)$$

باجراء التكامل مرة ثانية ، نجد أن $s(t) = \tfrac{1}{3}t^3 + 3t + C'$ حيث C' ثابت آخر . بما أن $C' = 0$ و $s(0) = 0$ وتكون

$$s(t) = \tfrac{1}{3}t^3 + 3t$$

المعادلة (٤) تعطى v بدلالة t . لايجاد السرعة عندما $s = 18$ يجب أولا ايجاد قيمة t حيث $s = 18$ ، أى قيمة حيث

$$\tfrac{1}{3}t^3 + 3t = 18$$

التى هى

$$t^3 + 9t - 54 = 0 \qquad (٥)$$

بالتجريب والخطأ نجد أن $t = 3$ هى جذر ، وفى الواقع الجذر الوحيد (الحقيقى) اذ أن

$$t^3 + 9t - 54 = (t - 3)(t^2 + 3t + 18)$$

والعامل الثانى ليس له جذر حقيقى . السرعة عند $s = 18$ ، كما نحصل عليها من (٤) ، هى $v(3) = 12$. نظرية العوامل ١ ـ ٢١ قد استخدمت لتحليل الطرف الأيسر من (٥) .

لا يلتبس عليك الأمر بين السرعة المتوسطة ومتوسط السرعات . السرعة المتوسطة فى فترة زمنية قد لا تكون نفس الشىء مثل متوسط السرعتين عند بداية ونهاية الفترة .

فكرة معدل التغير ليست خاصة بالسرعة فقط . اذا أسقط حجر فى بركة فانه يرسل سلسلة من الموجات المتحدة المركز . المساحة A للدائرة المتكونة من الموجة الأكثر بعداً تعتمد على الزمن ولذلك فهى دالة للزمن ، $A = g(t)$. مشتقة g هى معدل تغير A بالنسبة الى t وتقيس سرعة تزايد A . اذا سلطت الحرارة على نهاية واحدة لقضيب حديدى ، درجة الحرارة T عند أى نقطة ثابتة على القضيب دالة للزمن ، $T = f(t)$ ، المشتقة للدالة f هى معدل تغير f بالنسبة الى t وتقيس سرعة تغير درجة الحرارة هناك .

مسائل

فى المسائل الآتية $s(t)$ هى الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات . عين اذا كانت النقطة تتحرك يميناً أو يساراً أثناء الفترات المعطاة .

١ - $s(t) = -3t + 5;\ [1,3]$

٢ - $s(t) = t^2 - 6;\ [2,6],\ [-4,-2]$

٣ - $s(t) = \sqrt{t+4};\ [-1,5]$

٤ - $s(t) = 7t - t^2;\ [0,5],\ [0,3]$

٥ - $s(t) = 3 + 4t - t^2;\ [3,\infty),\ [0,10]$

٦ - $s(t) = t^3 - 6t;\ [-1,1],\ [0,4]$

فى المسائل الآتية $s(t)$ هى المسافة الموجهة من نقطة الأصل الى النقطة التى تتحرك على خط الاحداثيات . صف وصور الحركة .

٧ - $s(t) = t^2 - 7t + 10$

٨ - $s(t) = 6 + 10t - t^2$

٩ - $s(t) = t^3$

١٠ - $s(t) = t^3 - 3t$

١١ - $s(t) = 9t - t^3$

١٢ - $s(t) = t(t-3)^2$

١٣ - $s(t) = t^2 - \frac{1}{3}t^3$

١٤ - $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t$

١٥ - $s(t) = t^4 - 4t$

١٦ - $s(t) = t^4 - t^3$

١٧ - $s(t) = 5t^2 - 2t^5$

١٨ - $s(t) = t + 16/t,\ t > 0$

١٩ - $s(t) = \dfrac{6}{t^2+1}$

٢٠ - $s(t) = t^2 + \dfrac{36}{t+1},\ t > -1$

٢١ - قذف جسم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية 160 ft/ sec ، وكان ارتفاع الجسم s ft فوق الأرض وبعد زمن قدره t sec يعطى بالدالة $s(t) = 160t - 16t^2$. ما أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم ؟ ما المسافة التى يتحركها فى الثانية الثالثة ؟ أثناء الثانية السابعة ؟

٢٢ - قذفت كرة رأسياً لأعلى . مسافتها s ft فوق الأرض بعد t sec تعطى بالعلاقة $s = -16t^2 + 48t$. أوجد سرعتها عندما تصطدم بالأرض .

٢٣ - اذا كان موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = \sqrt{t} + 25/\sqrt{t},\ t > 0$ أوجد موضعه وعجلته عندما يقف أولا .

٢٤ ـ موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s(t) = 6t^2 - t^3$ حيث s بالقدم والزمن t بالدقيقة . ما المسافة الكلية المقطوعة خلال 5 min الأولى .

٢٥ ـ طاقة الحركة لجسم كتلته m متحرك بسرعة v هى $\frac{1}{2}mv^2$ موضع الجسم الذى كتلته m متحركاً على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = 1 + t^2$ حيث s بالسنتيمترات والزمن t بالثوانى . ما طاقة الحركة للجسم بعد 5 sec ؟

٢٦ ـ أوجد أقصى سرعة للنقطة فى مثال ٢ .

٢٧ ـ أوجد أكبر وأصغر سرعة للنقطة فى المسألة ١٠ فى الفترة الزمنية $[-1, 5]$.

٢٨ ـ أوجد أكبر وأصغر سرعة للنقطة فى المسألة ٨ . فى الفترة الزمنية $[0, 12]$.

٢٩ ـ موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = t^3 - 6t^2 + 8t$ أوجد أصغر سرعة ومقدارها .

٣٠ ـ أوجد السرعتين الكبرى والصغرى للنقطة فى المسألة ١٨ .

٣١ ـ موضع نقطة متحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = t^3 - 2t^2 - 3t + 10$ أوجد السرعة المتوسطة فى الفترة الزمنية $[2, 4]$ ومتوسط السرعتين عند $t = 2$ و $t = 4$.

٣٢ ـ اثبت أنه اذا كانت معادلة الحركة خطية أو من الدرجة الثانية ، فان السرعة المتوسطة فى أى فترة زمنية يساوى متوسط السرعتين عند بداية ونهاية الفترة . (ارشاد : خذ المعادلة $s(t) = at^2 + bt + c$ وخذ $[t_1, t_2]$ الفترة الزمنية) . هل النتيجة صحيحة اذا كانت المعادلة من الدرجة الثالثة ؟

٣٣ ـ موضع نقطة تتحرك على خط الاحداثيات يعطى بالعلاقة $s = \sqrt{t + 2}$ ، أثبت أن العجلة تكون دائماً سالبة وتتناسب مع مكعب السرعة .

٣٤ ـ نقطة تتحرك على خط الاحداثيات بسرعة تساوى $\sqrt[3]{t}$ ft/sec . ما هى المسافة التى تقطعها فى الثانية الرابعة ؟

٣٥ ـ السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تتناسب دائماً مع الجذر التربيعى للزمن . أوجد دالة المسافة $s(t)$ ، بفرض أن $s = 2$ عند $t = 0$ وأن $s = 3$ عند $t = 1$.

٣٦ ـ عند الزمن t تكون عجلة نقطة متحركة على خط الاحداثيات هى $6t$. عندما $t = 1$ ، النقطة تكون عند نقطة الأصل وتتحرك فى الاتجاه السالب بسرعة مقدارها 4 . أين تكون النقطة عند $t = 4$ ؟ . هل النقطة تكون عند نقطة الأصل لقيم أخرى لـ t غير 1 ؟

٣٧ ـ نقطة تتحرك على خط الاحداثيات فى الفترة الزمنية $[0, 4]$ لها عجلة تعطى بالعلاقة $a(t) = 6 - 6t$. عندما $t = 0$ ، النقطة تكون ساكنة وعند نقطة احداثيها 1 . أوجد دالة الموضع $s(t)$ وارسم شكلا بيانياً للحركة . أوجد الموضع النهائى على اليمين الذى تصل اليه النقطة وأوجد الزمن عندما تكون هناك . أوجد السرعة المتوسطة أثناء الثانية الثانية .

٣٨ ـ العجلة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات تعطى بالعلاقة $a(t) = 2$. اذا كانت $s(1) = 10$ و $v(1) = 4$ فأوجد السرعة عندما $s = 22$.

٣٩ - ينزلق الفحم لأسفل بعجلة 12 ft/ sec/ sec . اذا كان عند لحظة معينة ينزلق بسرعة 4 ft/ sec . ما المسافة التى ينزلقها أثناء الـ 5 sec التالية .

٤٠ - قطار سرعته 80 ft/ sec ، يستخدم السائق فرامله ، ليحصل على عجلة تقصيرية مقدارها $\frac{1}{2}$ ft/sec/sec أوجد متى يقف القطار ، أوجد طول المسافة التى يقطعها خلال هذا الزمن .

٤١ - صاروخ مبتدىء من سكون يتحرك بعجلة ثابتة ، مسافة 600 ft فى 5 sec ، ما هى عجلته ؟

٤٢ - بالبدء من سكون ، بأى عجلة ثابتة يجب أن تتحرك عربة لتقطع 200 ft فى 5 sec ؟

٤٣ - حجر ينزلق على الجليد بسرعة ابتدائية قدرها 30 ft/ sec . الاحتكاك يبطئه بعجلة ثابتة سالبة . اذا كان فى 3 sec السرعة تنقص الى 24 ft/ sec ، الى أى مسافة سينزلق الحجر ؟

٤٤ - بفرض أنه عندما تستخدم فرامل العربة فانها تعطى عجلة تقصيرية مقدارها k ft/ sec/ sec . ما قيمة k التى تجعل عربة تقف بعد أن تقطع مسافة قدرها 300 ft اذا كانت سرعتها 60 mph (60 mph = 88 ft/ sec) ؟ بنفس قيمة k ، ما طول المسافة التى تقطعها عربة سرعتها 30 mph قبل أن تقف ؟

٤٥ - من قمة تل طوله 110 ft ، بدأت كرة تتدحرج لأسفل . اذا كانت عجلتها دائماً 8 ft/ sec/ sec وتقطع مسافة 20 ft فى الـ 2 sec الأولى ، فمتى تصل قاعدة التل .

٤٦ - قطار بدأ من السكون متجهاً الى مدينة تبعد 10 miles . ظل يتحرك بعجلة ثابتة خلال الـ 2 miles الأولى وبعد ذلك ظل يتحرك بعجلة مقدارها صفر . ما هى العجلة الثابتة اذا وصل الى المدينة فى 15 min ؟

٤٧ - السرعة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات دائماً تساوى $\sqrt{s}$ أوجد عجلتها عند $s = 3$

(ارشاد : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$)

٤٨ - أثبت أن الصيغة $d = rt$ ، المعروفة فى الجبر الابتدائى ، للمسافة d التى يقطعها جسم فى فترة زمنية طولها t يتحرك بمعدل أو سرعة r ، صحيحة للسرعات الثابتة .

٤ - ١١
الأجسام الساقطة

أحد اضافات نيوتن العظمى فى العلوم هو اكتشافه أن حركة الجسم تحدد بالكامل بالقوى المؤثرة عليه . قانونه الثانى للحركة يشير الى أن حاصل ضرب الكتلة m والعجلة a للجسم هو فى كل الأوقات مساوياً لحاصل الجمع F للقوى المؤثرة عليه . أى أن ،

$$ma = F \quad * \qquad (1)$$

القوة تعطى عجلة تتناسب مع القوة . الكميتان F و a متجهتان . اذا كان الجسم متحركاً على خط الاحداثيات موازياً لاتجاه القوة فان (١) تكافىء معادلة غير متجهة

* نيوتن أعطى قانونه فى صورة أعم ، حيث لجسم كتله ثابتة يختزل الى (١)

$$ma = F \quad \text{و} \quad ma = -F \tag{٢}$$

طبقاً لكون القوة F تعمل على زيادة أو نقص احداثى الجسم فى (٢) ، a هو المقدار باشارته لمتجه العجلة ، أى أن ، $a = a(t) = v'(t)$ ، F تكون مقدار القوة . هذه هى المعادلة الأساسية التى تحكم كل حركة على خط مستقيم مسببة بقوة . المقدار F للقوة ، هو طول متجه ، فهو لا يكون سالباً أبداً .

التطبيق الهام لقانون نيوتن $ma = F$ هو على الأجسام الساقطة . القوة الأساسية المؤثرة على الجسم الساقط ناشئة عن الجاذبية الأرضية ، للتبسيط ، سنفترض أنها القوة الوحيدة فقط . القوة تتوقف على بعد الجسم من مركز الأرض ، لكن بالقرب من سطح الأرض هى ثابتة بالتقريب ومقدارها $F = mg$ ، حيث m كتلة الجسم وحيث g ثابت ، يسمى عجلة الجاذبية الأرضية وقيمته تعتمد على الوحدات المستخدمة . فى النظام قدم ـ باوند ـ ثانية (ق . ب . ث) تكون $g = 32$ ft/ sec/ sec بالتقريب ؛ وفى النظام سنتيمتر ـ جرام ـ ثانية (سم . حم . ث) (ارج) (ergs) تكون $g = 980$ cm/ sec/ sec بالتقريب . اذا كانت $s = s(t)$ هى احداثى الجسم عند الزمن t ، فان $a = d^2s/ dt^2$. بتعويض d^2s/ dt^2 لـ a و mg لـ F فى (٢) ، يكون لدينا

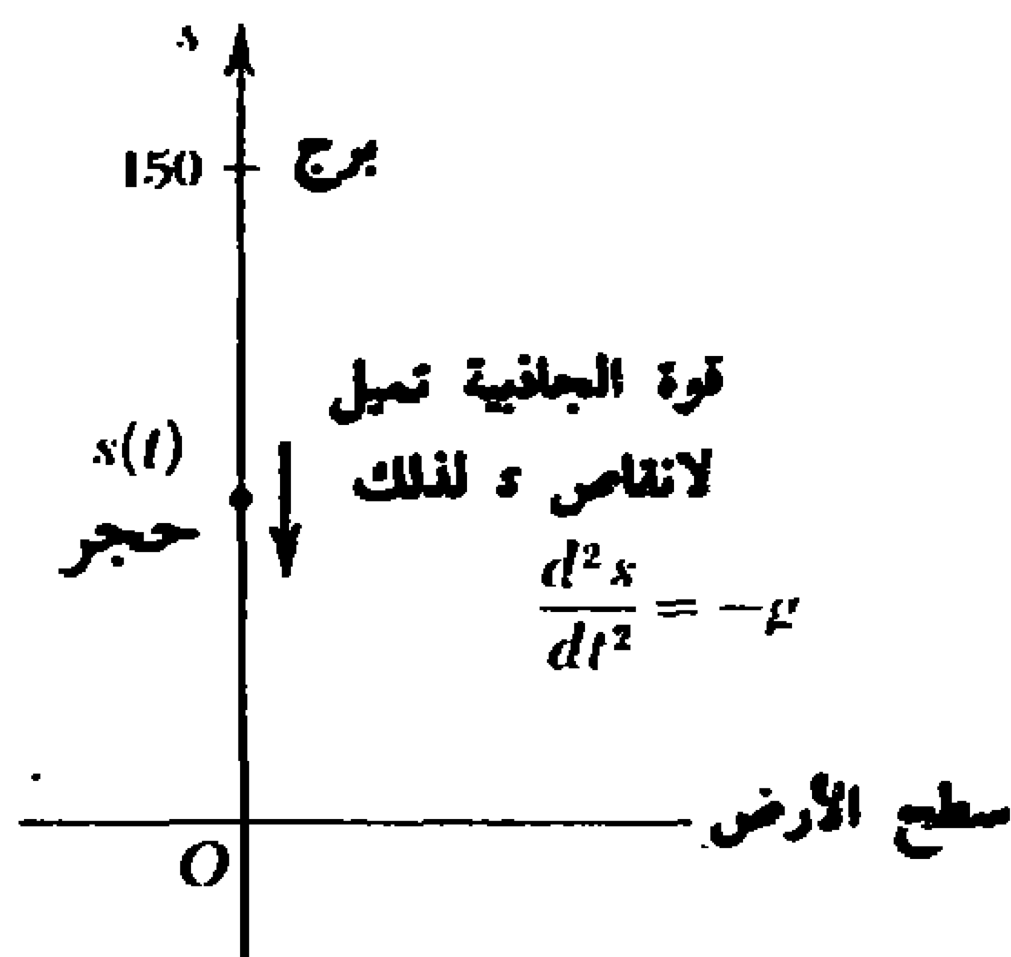
$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \quad \text{أو} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g \tag{٣}$$

تبعاً لكون قوة الجاذبية تعمل على زيادة أو انقاص الاحداثى s للجسم . هذه هى معادلة تفاضلية تحكم حركة الجسم الساقط قرب سطح الأرض تحت الافتراض أن الجاذبية هى القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم . المعادلة توضح أن الجسم يسقط بعجلة ثابتة g وأن تلك الحركة لا تعتمد على كتلة الجسم : الجسم الخفيف يسقط سريعاً مثل الجسم الثقيل . فى الأمثلة أدناه سنوضح كيف تستخدم (٣) لايجاد السرعة وموضع الجسم عند أى لحظة .

مثال ١ . ألقى ولد حجراً رأسياً لأسفل من برج ارتفاعه 150 ft بسرعة ابتدائية قدرها 20 ft/ sec باهمال جميع القوى ما عدا القوة التى تنشأ عن الجاذبية الأرضية ، أوجد سرعة الحجر عندما يرتطم بسطح الأرض .

ندخل خط الاحداثيات s متجهاً الى أعلى بنقطة الأصل عند سطح الأرض (شكل ٤ ـ ٥٦) ولتكن $s = s(t)$ هى احداثى الحجر عند الزمن t . القوة الناشئة عن الجاذبية تكون دائماً متجهة لأسفل ، هذه ستكون صحيحة حتى اذا كان الحجر قد قذف لأعلى . ولأن القوة تعمل على انقاص s ، فالمعادلة الثانية فى (٣) هى التى تصف الحركة ، $d^2s/dt^2 = -g$. فى نظام الوحدات قدم ـ باوند ـ ثانية ، الذى سنستخدمه ، $g = 32$ ، والمعادلة تصبح

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -32, \qquad t \geq 0 \tag{٤}$$



شكل ٤ ـ ٥٦
$s(t)$ هى بعد الحجر فوق سطح
الأرض عند الزمن t

بتكامل (٤) ، يكون لدينا

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + C \qquad (٥)$$

لايجاد قيمة الثابت C ، نبحث عن قيمة t التى عندها تكون v معلومة . عندما $t = 0$ تكون $v = -20$ (v يجب اختبارها سالبة لأن s تتناقص عند $t = 0$) . ومن ثم $C = -20$ ، وتصبح (٥) .

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t - 20 \qquad (٦)$$

لا يمكننا ايجاد السرعة التى بها يرتطم الحجر بالأرض الى أن نعلم الزمن لارتطام الحجر . لتعيين الزمن ، نحتاج لدالة المسافة التى توجد بتكامل (٦) ، ويكون

$$s = s(t) = -16t^2 - 20t + C' \qquad (٧)$$

لايجاد C' نبحث عن قيمة لـ t تكون عندها s معلومة . عندما $t = 0$ ، تكون $s = 150$. ومن ثم $C' = 150$ ، وتصبح (٧)

$$s(t) = -16t^2 - 20t + 150 \qquad (٨)$$

هذه تعطى موضع الحجر عند أى زمن t . الحجر سيصل الأرض عند قيمة t حيث $s = 0$. الطرف الأيمن من (٨) يحلل الى

$$s(t) = -2(4t + 15)(2t - 5) \qquad (٩)$$

ومنه $s = 0$ عندما $t = \frac{5}{2}$. الجذر الآخر لـ (٩) ، يكون سالباً ، فيستبعد بالاعتبارات الطبيعية وأيضاً بالقيد فى (٤) أن $t \geqslant 0$. الآن وقد علمنا متى يرتطم الحجر بالأرض ، يمكننا من (٦) ايجاد السرعة التى يرتطم بها وهى

$$v(\tfrac{5}{2}) = -32(\tfrac{5}{2}) - 20 = -100 \text{ ft/sec}$$

الاشارة السالبة توضح أن s تكون عندئذ متناقصة .

مثال ٢ . قذفت كرة رأسياً الى أسفل من قمة مبنى . اذا كانت تسقط 20 ft فى الثانية الأولى ، ما هى سرعتها الابتدائية ؟ باهمال كل القوى ما عدا التى تنشأ عن الجاذبية الأرضية .

فى أى مسألة يكون الاختلاف فى اختيار نقطة الأصل واتجاه خط الاحداثيات أمراً ليس له أهمية . تفاصيل الحل ستختلف باختيارات مختلفة ، لكن الاجابات ستكون نفس الشيء . هذه المرة سنوجه خط الاحداثيات لأسفل ونضع نقطة الأصل عند قمة المبنى (شكل ٤ ـ ٥٧) . ندع $s = s(t)$ موضع الحجر بعد t sec . القوة الناتجة عن الجاذبية اتجاهها لأسفل . بما أن القوة تعمل على زيادة s ، فان الحركة توصف بالمعادلة الأولى فى (٣) ، وتكون $d^2s/dt^2 = g$. مرة ثانية $g = 32$ والمعادلة تصبح

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 32, \qquad t \geqslant 0$$

التكامل يعطينا

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 32t + C \qquad (١٠)$$

بما أنه لا توجد معلومات عن قيمة $v(t)$ عند زمن معين t ، فانه لا يمكن ايجاد الثابت C الآن . التكامل مرة ثانية يعطينا

$$s(t) = 16t^2 + Ct + C'$$

من المعروف أن $s(0) = 0$. ومن ثم $C' = 0$.

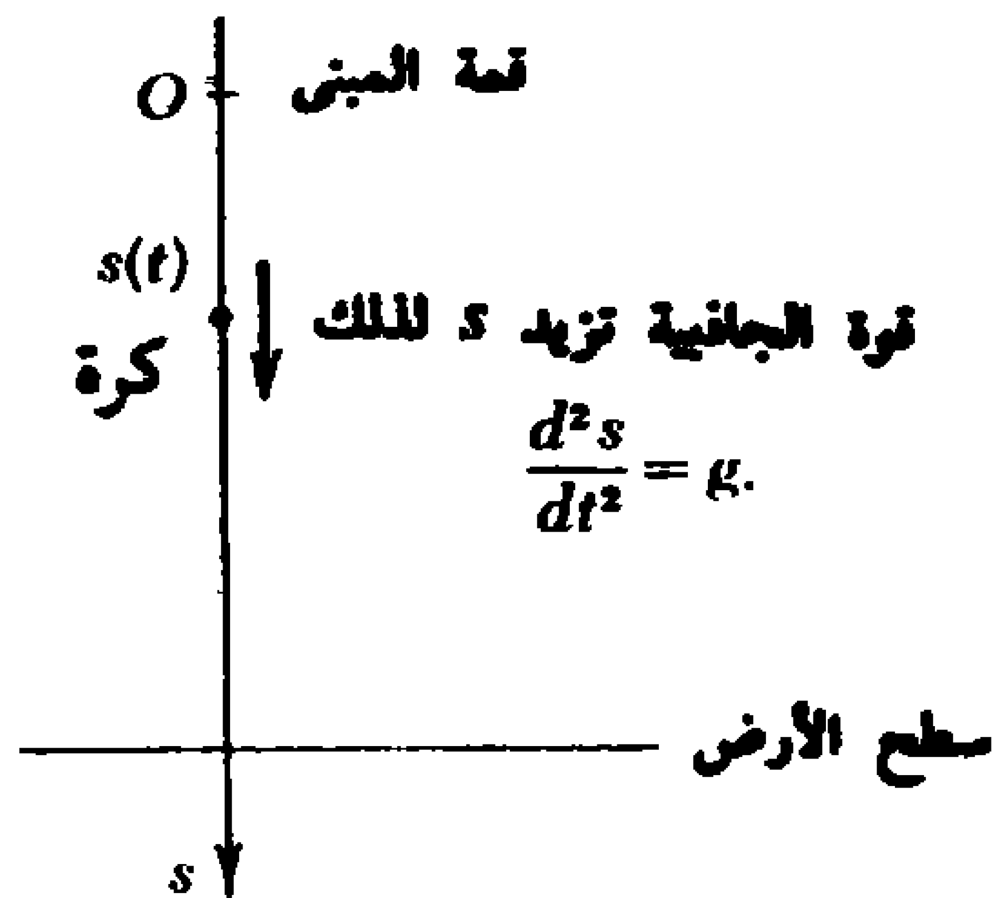
$$s(t) = 16t^2 + Ct \qquad (١١)$$

أيضاً نعلم حقيقة أخرى عن $s(t)$ هى $s(1) = 20$ وبذلك نستطيع ايجاد C . بتعويض $s(1) = 20$ و $t = 1$ فى (١١) ، يكون $20 = 16 + C$. ومن ثم $C = 4$ ، وتصبح (١٠) على الصورة $v(t) = 32t + 4$ السرعة الابتدائية تعطى الآن بـ $v(0) = 4$. الحقيقة أنها موجبة تعنى أن الكرة قذفت لأسفل وليس لأعلى .

نلخص الخطوات لحل مسائل الحركة على خط مستقيم الناشئة عن تأثير قوة .

١ ـ اختر خط الاحداثيات s منطبقاً على خط الحركة .

٢ ـ قرر أى المعادلتين فى (٢) تصف الحركة . هذا يحدد بما تعمله القوة على الجسم ، وليس على الاتجاه الذى يتحرك فيه الجسم . للأجسام الساقطة ، الحالة الخاصة من (٢) المعطاة فى (٣) تكون أكثر ملاءمة لوصف الحركة .



شكل ٤ ـ ٥٧

$s(t)$ هى المسافة تسقطها الكرة فى t sec.

٣ ـ اجر تكامل المعادلة التفاضلية . ثوابت التكامل توجد ، عندما يمكن ايجادها ، بالبحث عن قيمة t حيث تكون $v(t)$ أو $s(t)$ معلومة . اشارة السرعة عند هذا الزمن t يحدد بالاتجاه الذى يكون الجسم متحركاً فيه عند ذلك الزمن .

٤ ـ بما أن $s(t)$ و $v(t)$ تكتبان بدلالة t ، فالاستفسارات عنهما يمكن اجابتها فقط بأن نوجد أولا متى يحدث الحادث .

مسائل

فى المسائل الآتية المحتوية على الأجسام الساقطة افترض أن الجاذبية هى القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم .

١ ـ قذف حجر رأسياً الى أسفل من قمة جرف عال بسرعة ابتدائية 15 ft/sec. ما طول المسافة التى يسقطها أثناء الـ 3 sec الأولى .

٢ ـ لقياس ارتفاع الجرف ، اسقط حجر من القمة فارتطم بسطح الأرض بعد $2\frac{3}{4}$ sec . ما ارتفاع الجرف ؟

٣ ـ اثبت أن الجسم الساقط البادىء من السكون فيقطع 16 ft فى الثانية الأولى ، 48 ft فى الثانية الثانية ، 80 ft فى الثانية الثالثة ، 112 ft فى الثانية الرابعة .

٤ ـ اشتق صيغة طبيعية $s = \frac{1}{2}gt^2$ للمسافة التى يقطعها جسم مبتدئاً من السكون فى t sec . كيف يجب اختيار نظام الاحداثيات للحصول على هذه الصيغة ؟ وضح أن سرعة الجسم عند سقوطه مسافة s ft هى $\sqrt{2gs}$.

٥ ـ اشتق صيغة للمسافة التى يسقطها جسم فى t sec اذا كانت سرعته ابتدائية v_0 ft/ sec لأسفل .

٦ ـ اثبت أنه اذا كانت لا توجد قوة تؤثر على نقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، فان السرعة تكون ثابتة .

٧ ـ رجل واقف على سطح مبنى ارتفاعه 256 ft يقذف حجراً رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 96 ft/ sec. متى وبأى سرعة سيصطدم الحجر بسطح الأرض ؟

٨ ـ رجل على سطح مبنى ارتفاعه 30 meters، بأى سرعة ينبغى أن يقذف الرجل حجراً رأسياً لأعلى اذا كان الحجر يصل الى سطح الأرض بعد زمن قدره 5 sec ؟ .

٩ ـ رجل يقذف حجراً رأسياً لأعلى بسرعة قدرها v_0 cm/ sec. الى أى ارتفاع يصل الحجر ؟

١٠ ـ بأى سرعة ، مقيسة بالسنتيمتر/ثانية ، يجب قذف حجر رأسياً لأعلى من سطح الأرض اذا كان سيرجع لسطح الأرض ثانية بعد مرور 12 sec ؟

١١ ـ ولد على سطح الأرض يرغب فى قذف كرة رأسياً لأعلى لصديق له على سطح بعده 48 ft فوق سطح الأرض . بأى سرعة ينبغى أن يقذف الكرة اذا كانت الكرة لمجرد أن تصل الى صديقه ؟

١٢ ـ رجل واقف على سطح الأرض يقذف كرة رأسياً لأعلى . اثبت أن الكرة تأخذ وقتاً فى الصعود الى أعلى مثل وقت الهبوط لأسفل وأن الكرة ترتطم بسطح الأرض بسرعة مقدارها نفس مقدار سرعتها الابتدائية .

١٣ ـ طاقة الحركة لجسم كتلته m يتحرك بسرعة v تعرف بأنها $\frac{1}{2}mv^2$. أثبت أن طاقة الحركة عند أى لحظة لجسم قذف رأسياً لأسفل هى $mgs + K_0$ حيث s هى المسافة التى سقطها ، K_0 هى طاقة الحركة الابتدائية .

١٤ ـ صاروخ بعيد فى الفراغ يسقط متجهاً نحو الأرض بسرعة تتناسب عكسياً مع $\sqrt{x}$ ، حيث x هى مسافته من مركز الأرض . اثبت أن العجلة تتناسب مع x^2 .

١٥ ـ قوة الجاذبية على القمر هى سدس (1/6) تلك على الأرض . إذا كان شخص يستطيع أن يقفز إلى ارتفاع 3 H عن الأرض ، فما الارتفاع الذى يستطيع أن يقفز إليه عن القمر ؟

١٦ ـ على أحد الأجرام الخرافية قوة الجاذبية تساوى 32 ft/ sec/ sec الى ارتفاع 10,400 ft لكن لأعلى من ذلك الارتفاع تكون فقط 20 ft/ sec/ sec. وقع حجر من ارتفاع 11,400 ft. متى سيصل سطح الكوكب ؟

٤ ـ ١٢
المعدلات المرتبطة ببعضها

فى الفيزياء ندرس العالم الحقيقى بايجاد علاقات بين الكميات. فمثلا، المعادلة $K = \frac{1}{2}mv^2$ تربط طاقة الحركة K لجسم متحرك كتلته m وسرعته v . المعادلة $pv = c$ تربط الضغط p لغاز بالحجم v للأناء الذى يحتويه ، وحيث c مقدار ثابت . عادة فى المسألة الفيزيائية تتغير الكميات من الزمن . اذا كان معدل التغير لكمية واحدة معلوماً ، فكيف يمكننا ايجاد معدل تغير كمية مرتبطة ؟ الأمثلة توضح الطريقة جيداً .

مثال ١ . رمى حجر فى بركة ، صانعاً سلسلة من التموجات المتحدة المركز . نصف قطر الدائرة المتكونة بأبعد موجه يتزايد بمعدل 2 ft/ sec . ما هى سرعة تزايد مساحة الدائرة بعد 5 sec ؟

هنا لدينا كميتان ، نصف القطر والمساحة ، اللذان يعتمدان على الزمن . نعلم معدل تغير احدى الكميتين ونريد ايجاد معدل تغير الأخرى . اذا فرضنا أن A و r هما نصف القطر والمساحة للدائرة ، فان A و r دالتان للزمن t :

$$r = f(t), \qquad A = g(t)$$

فى هذ المسألة وما يماثلها سنفترض أن g و f قابلتان للتفاضل . معدلا التغير لـ A و r يعطيان بمشتقتيهما بالنسبة الى t ، وهما dA/dt و dr/dt . لقد أعطينا أن

$$\frac{dr}{dt} = f'(t) = 2 \text{ ft/sec} \qquad (1)$$

وعلينا أن نوجد dA/dt ، أى $g'(t)$. نبحث الآن عن علاقة تربط r و A . من السهل ايجادها وهى $A = \pi r^2$. بما أن كلا الطرفين لهذه المعادلة دالتان للزمن t ، فان مشتقتيهما بالنسبة الى t متساويتان . نفاضل كلا الطرفين ، ونفرض العمل فى عمودين متوازيين ، احدهما يستخدم الرمزين r و A والآخر الرمزين الدالين .

$$A = \pi r^2 \qquad g(t) = \pi f^2(t)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}\pi r^2 \qquad Dg(t) = D[\pi f^2(t)]$$

$$= 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad g'(t) = 2\pi f(t) f'(t)$$

$$= 4\pi r. \qquad = 4\pi f(t).$$

فى الخطوة الثالثة على اليمين استخدمت قاعدة القوة المصممة لايجاد $Df^2(t)$ ، وفى الخطوة الأخيرة على اليسار أبدلنا dr/dt بقيمتها 2 . المساحة تتزايد بمقدار $4\pi r$ sq ft/ sec . المعدل لا يكون ثابتاً بل يعتمد على نصف القطر . الدوائر الكبرى تزداد بسرعة أكبر عن الدوائر الصغرى ولزيادة فى نصف قطر دائرة كبيرة يضيف للمساحة أكثر مما تضيفه عن نفس الزيادة فى نصف القطر لدائرة صغيرة . عندما $r = 1$ يكون $dA/dt = 4\pi$ sq ft/ sec وعند : $r = 12$, $dA/dt = 48\pi$ sq ft/ sec . لايجاد dA/dt عند $t = 5$ ، يجب أولا ايجاد r عند $t = 5$. حل المعادلة التفاضلية (١) يعطينا $r = 2t + C$ الثابت . C يجب أن يكون صفراً لأن $r = 0$ عند $t = 0$ وبناء على ذلك ، عندما $t = 5$, $r = 10$ وتكون $dA/dt = 40\pi$ sq ft/sec .

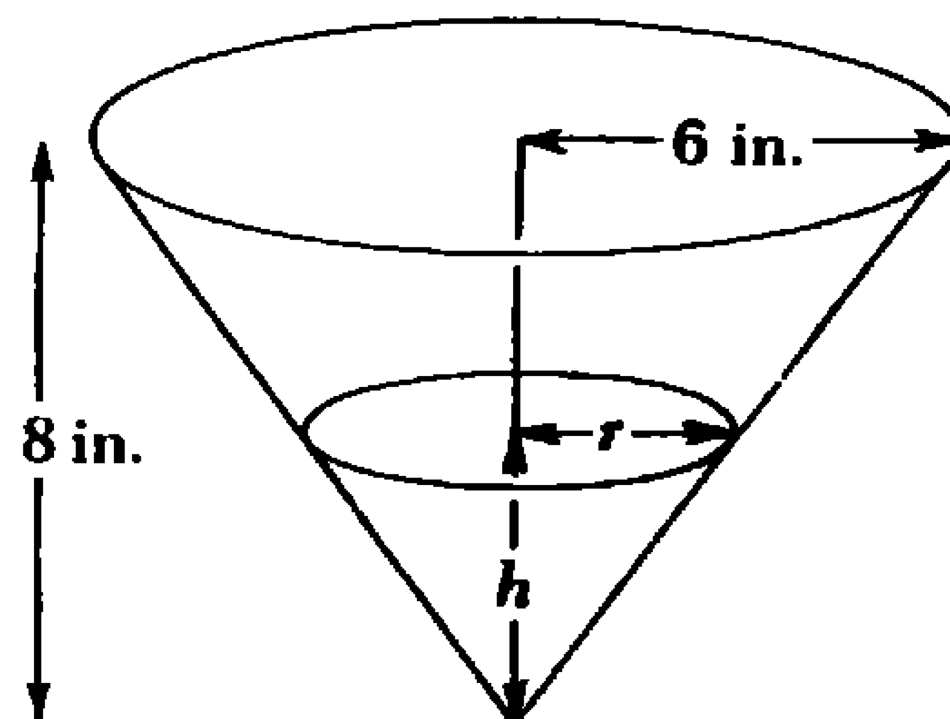
مثال ٢ . اناء مخروطى دائرى قائم نصف قطره 6 in. وعمقه 8 in. محوره رأسى ورأسه الى أسفل . ينساب الماء الى الاناء ، الذى كان أولا فارغاً ، بمعدل 3 cu in./ sec. ما معدل ارتفاع مستوى سطح الماء عندما يكون الماء 4 ft عمقاً ؟

الخطوة الأولى لحل المسألة هو التعبير عنها فى لغة رياضية . المخروط موضح فى شكل ٤ ـ ٥٨ . لتكن V و h العمق وحجم الماء بعد زمن قدره t sec . كلاهما دالتان لـ t

$$h = f(t), \qquad V = g(t)$$

المعلومات أن الماء ينساب الى المخروط بمقدار 3 cu in./ sec تعنى أن V تزداد بمعدل 3 cu in./ sec أى أن ،

$$\frac{dV}{dt} = g'(t) = 3 \qquad (٢)$$



شكل ٤ ـ ٥٨

علينا أن نوجد $dh/dt = f'(t)$ عندما $h = 4$. لاجراء ذلك نبحث عن علاقة تربط h و V. اذا كانت r هى نصف قطر سطح الماء عند الزمن t ، فان

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (٣)$$

هذا التعبير يعطى V بدلالة r وأيضاً بدلالة h ، وهذه حالة غير مرضية لأننا لا نعلم معدل تغير r . سنحاول أن نعبر عن r بدلالة h. من الواضح من شكل ٤ ـ ٥٨ أن h و r ليسا مستقلين كل عن الآخر لكن r تتعين فى الحال عندما تعطى h. العلاقة بين الاثنين يمكن ايجادها من المثلثين المتشابهين فى الشكل ، وهى $6/r = 8/h$ أو $r = 3h/4$. باستبدال r فى (٣) بـ $3h/4$ ، يكون لدينا

$$V = \frac{3\pi}{16} h^3 \qquad (٤)$$

بما أن h و V تفرضان دالتين تفاضليتين للزمن فيمكننا تفاضل كلا الطرفين لهذه المعادلة بالنسبة الى t . مرة أخرى نوضح العمل فى عمودين متوازيين لتجنب سوء الفهم الذى قد ينجم عن الرمزين h و V .

$$V = \frac{3\pi}{16} h^3 \qquad\qquad g(t) = \frac{3\pi}{16} f^3(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{3\pi}{16} h^3\right) \qquad\qquad Dg(t) = D\left[\frac{3\pi}{16} f^3(t)\right]$$

$$= \frac{9\pi}{16} h^2 \frac{dh}{dt} \qquad\qquad g'(t) = \frac{9\pi}{16} f^2(t) f'(t).$$

بالتعويض فى (٥) المعلومة المعطاة وهى $dV/dt = 3$ ثم حلها لـ dh/dt ، يكون لدينا

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16(3)}{9\pi h^2} = \frac{16}{3\pi h^2} \text{ in./sec.} \qquad (٥)$$

عندما $dh/dt = 1/3\,\pi$ in/sec و $h = 4$. لاحظ أننا أوجدنا معدل تغير h أولا لأى h وبعد ذلك لـ h الخاصة التى نريدها . من مميزات مسائل المعدلات المرتبطة أننا نوجد أولا الحل العام ثم بعد ذلك الحل الخاص .

سنعطى حلا آخر لهذه المسألة نعبر فيه عن h صراحة كدالة لـ t. نجرى العمل كما سبق الى المعادلة (٤) . بحل هذه المعادلة بالنسبة الى h ، يكون لدينا

$$h = \left(\frac{16}{3\pi} V\right)^{1/3} \qquad (٦)$$

الكمية V يمكن التعبير عنها بدلالة t بحل المعادلة التفاضلية (٢) . هذا يعطى $V = 3t + C$ ، وحيث أن $V = 0$ عندما $t = 0$ فيكون لدينا $V = 3t$ و $C = 0$. بتعويض $3t$ لـ V فى (٦) ، نحصل على

$$h = \left(\frac{16}{\pi} t\right)^{1/3} = \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/3} t^{1/3} \qquad (٧)$$

واذن

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{3} t^{-2/3} \text{ in./sec.} \qquad (٨)$$

هذا يعطى معدل تغير h لأى زمن t . عندما $h = 4$ ، نحصل من (٧) على

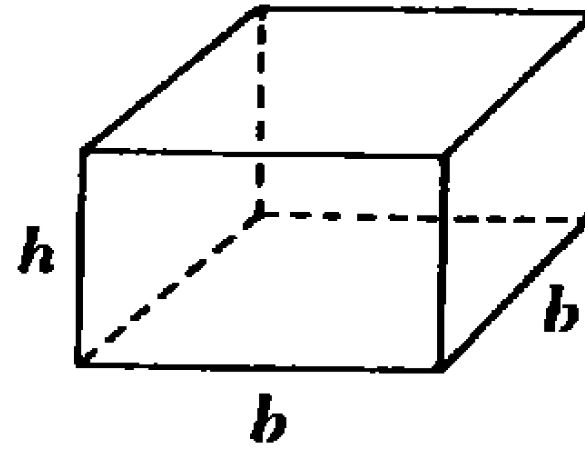
$$t = \frac{\pi}{16} 4^3 = 4\pi$$

وبتعويض هذه القيمة فى (٨) نحصل على

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{16}{\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{3(4\pi)^{2/3}} = \frac{1}{3\pi} \text{ in./sec.}$$

فى مثال ٢ . الحجم V ازداد عندما ازدادت t . هذا يعنى أن dV/dt موجبة . لو كانت V تتناقص ، كما هو الحال اذا كان الماء ينساب خارج المخروط ، فاننا نضع $dV/dt = -3$ فى (٢) .

مثال ٣ . أبعاد متوازى مستطيلات (شكل ٤ ـ ٤٩) تتغير . طول ضلع القاعدة ، التى هى دائماً مربع ، يزداد بمقدار 3 ft/min ، والارتفاع يتناقص بمقدار 5 ft/min. ما معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة 4 ft والارتفاع 3 ft ؟



شكل ٤ ـ ٤٩

لتكن b طول ضلع القاعدة ، h الارتفاع ، V حجم الجسم ، عند الزمن t . الكميات الثلاث دوال للزمن t. قد أعطينا أن

$$\frac{db}{dt} = 3 \qquad \text{و} \qquad \frac{dh}{dt} = -5$$

حيث اشارتا المشتقتين تعكسان الحقيقة أن b تتزايد ، h تتناقص . نرغب فى ايجاد dV/dt عندما $h = 3$ و $b = 4$ ، لكن لاجراء ذلك يجب أولا ايجاد dV/dt حيث h و b اختياريان . نبحث عن علاقة بين h و b و V . هذه هى

$$V = b^2 h \qquad (٩)$$

الموقف غير مشابه لذلك فى مثال ٢ ، لا يمكننا أن نعبر عن V بدلالة b أو h على حدة ، لأن b و h لا تعتمدان على بعضهما . لكن هذا لا يكون عقبة اذ أننا نعلم dh/dt و db/dt . بتذكر أن h و b و V دوال للزمن t ، نفاضل كلا طرفى (٩) بالنسبة للزمن t ، فنحصل على

$$\frac{dV}{dt} = b^2 \frac{dh}{dt} + 2bh \frac{db}{dt} = -5b^2 + 6bh$$

عندما $dV/dt = -8$ cu ft/ min و $h = 3$ و $b = 4$. الحجم يتناقص بمعدل 8 cu ft/ min عند تلك اللحظة .

مسائل

فى المسائل من ١ الى ٥ ، z و y و x دوال للزمن t .

١ ـ اذا كانت $y = x^3 + x$ فأوجد $D_t y$ عندما $D_t x = 4$ و $x = 2$.

٢ ـ اذا كانت $y = x/(x + 1)$ ، فأوجد $D_t x$ عندما $D_t y = -3$ و $x = 1$.

٣ ـ اذا كانت $z = x^2 + y^2$ ، فأوجد dz/dt عندما $dy/dt = 2$ و $dx/dt = -1$ و $y = 2$ و $x = 1$.

٤ ـ اذا كانت $z = x + x^2y$ ، فأوجد dx/dt عندما $dz/dt = -2$ و $dy/dt = 1$ و $y = \frac{1}{2}$ و $x = 1$

٥ ـ اذا كانت $z^3 + z = x/y$ ، فأوجد dz/dt عندما $dy/dt = -5$ و $dx/dt = -3$ و $y = 3$: و $x = 6$.

٦ ـ طول ضلع مربع يتناقص بمعدل 2 ft/ min . ما معدل تناقص المساحة عندما يكون طول الضلع 4 ft ؟

٧ ـ يتسرب الهواء من بالون للعب بمعدل 10 cu in./ min عندما يكون نصف القطر 6 in.. ما معدل تناقص نصف القطر والمساحة السطحية ؟

٨ ـ حل مثال ١ بالتعبير عن A صراحة كدالة لـ t .

٩ ـ نقطة تتحرك على المنحنى $x^3 + xy + y^3 = 5$ بحيث أن احداثيها الصادى يتزايد بمعدل 2 وحدة فى الثانية . ما معدل تغير الاحداثى السينى عند النقطة $(2, -1)$ ؟

١٠ ـ نقطة تتحرك على المنحنى $y = 5x - x^3$ بحيث أن احداثيها الصادى يتناقص بمعدل $\frac{1}{2}$ وحدة فى الثانية . ما معدل تغير ميل المنحنى عندما $x = 3$ ؟

١١ ـ قوة الجذب F بين جسمين سماثيين كتلتاهما m و m' grams ويتباعدان عن بعضهما مسافة r cm تعطى بالعلاقة $F = Gmm'/r^2$ ، حيث G ثابت . اذا كانت r تتناقص بمعدل 3×10^7 cm/ sec. فأوجد معدل تغير F .

١٢ ـ ولد يحرك طائرة ورقية على ارتفاع 200 ft الطائرة تتحرك بعيداً عنه على خط مستقيم أفقى بمعدل 5 ft/ sec. ما هو المعدل الذى يجب على الولد أن يرخى به الخيط عندما يكون قد فك منه 300 ft ؟

١٣ ـ القانون الذى يحكم العلاقة بين الضغط p والحجم v لكمية معينة من الغاز داخل إناء مغلق ، يعطى بالعلاقة $pv^{1.4} = k$ ، حيث k مقدار ثابت . إذا كان عند لحظة معينة $p = 30$ lb/sq in و $v = 50$ cu in وكانت v تتناقص بمعدل 2 cu in/ sec ، فما هو معدل تغير p ؟

١٤ ـ قارب يجذب الى المرفأ بحبل مربوط بمقدمته يدا الرجل الذى يشد الحبل على ارتفاع 5 ft من مقدمة المركب . اذا كان الحبل يجذب بمعدل $\frac{3}{4}$ ft/ sec ، ما معدل اقتراب المركب من المرفأ عندما يكون على بعد 12 ft ، مقيسة أفقياً ؟

١٥ ـ طائرة على ارتفاع 1 mile تطير فى خط أفقى فى اتجاه المطار . اذا كانت سرعة الطائرة هى 400 mph ، ما هو معدل تغير المسافة بين الطائرة والمطار عندما تكون الطائرة على بعد 10 miles من المطار ، مقيسة أفقياً ؟

١٦ ـ يصف الرمل على قمة كومة مخروطية بمعدل 12 cu ft/ min ، ارتفاع الكومةدائماً يساوى قطر القاعدة . ما معدل تغير الارتفاع عندما يكون 8 ft .

١٧ ـ يصعد منطاد رأسياً لأعلى بمعدل 100 ft/ min عندما يكون ارتفاعه 300 ft فوق الأرض ، يصبح رجل يسير بسرعة 300 ft/ min على مسار مستقيم ، تحته مباشرة . ما معدل تغير المسافة بينهما بعد دقيقة واحدة ؟

١٨ ـ سلم طوله 20 ft يرتكز على حائط رأسى . اذا كانت قاعدة السلم تنسحب بعيداً عن الحائط بمعدل 2ft / sec ، فما معدل انزلاق قمة السلم على الحائط لأسفل عندما تكون قاعدته على بعد 12 ft من الحائط ؟

١٩ ـ حوض أفقى طوله 12 ft مقطعه الرأسى على شكل مثلث قائم متساوى الساقين . إذا كان الماء يصب فيه بمعدل 10 cu ft/ min فما هو معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون الماء على عمق 2 ft ؟

٢٠ ـ كل ضلع لمثلث متساوى الاضلاع فى الابتداء طوله 6 in . معدل زيادة كل ضلع هو 2 in./ min. ما معدل زيادة المساحة عندما يكون طول الضلع 9 in. ؟ ما معدل زيادة المساحة بعد 3 min ؟

٢١ ـ صهريج مخروطى دائرى قائم ارتفاعه 500 cm وقطره 400 cm ، محوره رأسى ورأس الصهريج الى أسفل ، ومليء بالماء . عمل ثقب فى قاعدة الصهريج وكان الماء يتدفق بمعدل 500,000 cu cm/ min. ما معدل تناقص العمق عندما يكون 200 cm ؟

٢٢ ـ حل المسألة ٢١ مفترضاً أن المخروط قائماً على قاعدته بثقب فى القاعدة .

٢٣ ـ تتغير أبعاد مستطيل ، القاعدة تزداد بمعدل 3 cm/ min والارتفاع يتناقص بمعدل 2 cm/ min. ما معدل تغير المساحة وهل هى تكون متزايدة أم متناقصة عندما يكون طول القاعدة 10 cm والارتفاع 6 cm ؟

٢٤ ـ قاعدة مثلث تتناقص بمعدل 5 in./ sec ، وارتفاعه يتزايد بمعدل 3 in./ sec ما معدل تغير المساحة وهل تتزايد أم تتناقص عندما يكون طول القاعدة 20 in. والارتفاع 4 in. ؟

٢٥ ـ عند لحظة معينة الطول ، والعرض ، والارتفاع لمتوازى مستطيلات هى 10, 8, 4 . الطول والعرض يتزايدان بمعدل 2 in./ sec و 3 والارتفاع يتناقص بمعدل 2 in./ sec. ما معدل تغير الحجم وهل بالتزايد أم بالتناقص ؟

٢٦ ـ قضيب من الصلب تجرى دلفنته بحيث تكون حافته دائماً على شكل مربع . عندما يكون طوله 10 ft وطول ضلع حافته المربعة 1 ft ، يتزايد طوله بمعدل 2 ft/ min . أوجد معدل تناقص طول حافته عندئذ .

٢٧ ـ نصف قطر مخروط دائرى قائم يتناقص بمعدل 2 cm/ min وارتفاعه يتزايد بمعدل 6 cm/min. أوجد معدل تغير المساحة الكلية للمخروط (المساحة الجانبية مضافاً اليها مساحة القاعدة) عندما يكون نصف القطر 5 cm والارتفاع 12 cm .

٢٨ ـ عند لحظة معينة نصف القطر والارتفاع لاسطوانة دائرية قائمة هما .4 in و 20 . اذا كان نصف القطر يتزايد بمعدل ½ in./ sec ، ماذا ينبغى أن يكون معدل تغير الارتفاع عند تلك اللحظة للاحتفاظ بحجم الأسطوانة ثابتاً ؟

٢٩ ـ تبحر سفينة شمالا بمعدل 24 mph . وتبحر سفينة أخرى شرقاً بمعدل 16 mph وتقطع مسار السفينة الأولى على بعد 80 miles منها . ما معدل تباعد السفينتين بعد زمن قدره ساعة ؟ متى تكون السفينتان أقرب ما يمكن من بعضهما ؟

٣٠ ـ تبحر سفينة شمالا بمعدل 10 mph وسفينة أخرى تبحر شرقاً بمعدل 20 mph وتقطع مسار السفينة الأولى على بعد 60 miles منها . أثناء الساعات الثلاث التالية متى تكون السفينتان أكثر تباعداً ؟

٣١ ـ ملعب البايسبول مستطيل طوله 90 ft . Smith هو الضارب ويكون Jones عند القاعدة الأولى . Smith يضرب الكرة ويجرى اتجاه القاعدة الأولى بمعدل 25 ft/ sec . فى نفس الوقت Jones يجرى اتجاه القاعدة الثانية بمعدل 30 ft/ sec . متى يكون الرجلان أقرب ما يكون الى بعضهما ؟

٣٢ ـ جزء صغير من مادة انشطر وجسيمان منها طاراً بسرعة a و b cm/ sec على خطين مستقيمين متقاطعين بزاوية 120° . ما معدل تباعدهما بعد t sec ؟ (إرشاد : استخدم قانون الـ cosine)

٣٣ ـ حل مثال ٢ باجراء تفاضل (٣) كما هى ، تذكر أن h و r دالتان للزمن t ، ثم أوجد dr/dt بدلالة dh/dt من العلاقة $r = 3h/4$.

٣٤ ـ مصباح فى قمة برج ارتفاعه 60 ft . من نقطة على بعد 40 ft من المصباح وعلى نفس الارتفاع سقطت كرة . ما معدل تحرك ظل الكرة على الأرض بعد ثانية واحدة ؟

٣٥ ـ يعبر رجل كوبرى ماشياً بمعدل 6 ft/ sec وارتفاع الكوبرى 20 ft عن النهر . عندما كان فى المنتصف ، كانت مركب تبحر فى النهر بمعدل 10 ft/ sec تمر مباشرةً تحته . ما معدل تباعد الرجل والمركب بعد 30 sec ؟

٣٦ ـ رجل طوله 6 ft ويمشى بمعدل 5 ft/ sec فى اتجاه نور الشارع الذى ارتفاعه 12 ft فوق الأرض . ما معدل تحرك ظل رأسه عندما يكون على بعد 20 ft من عمود الاضاءة ؟ ما معدل تغير طول ظله ؟

٣٧ ـ صهريج ارتفاعه 10 ft وجوانبه رأسية وقاعدته مربعة طول ضلعها 6 ft . ينصرف منه الماء خلال ثقب فى القاعدة بمعدل (.ft/ min) مساو لضعف الجذر التربيعى للعمق فى هذه اللحظة . ما معدل تغير العمق عندما يكون 5 ft ؟

٣٨ ـ كرة ثلجية تذوب بمعدل يتناسب مع مساحة سطحها . إذا كان الزمن مقيساً بالساعة ، ما معدل تغير نصف القطر ، المساحة السطحية ، والحجم عندما يكون نصف القطر 2 in. ؟

٣٩ ـ نصف قطر الدائرة ، عند الابتداء كان 2 ft ، فجأة ابتدأ فى الزيادة بمعدل $t^{2/3}$ ft/ min ، حيث t زمن الزيادة . ما معدل زيادة مساحة الدائرة بعد 8 min ؟

٤٠ ـ صهريج اسطوانى نصف قطره 2 ft وارتفاعه 10 ft قائماً على طرف ، فى الأصل كان الصهريج فارغاً ، ويملأ بالماء بمعدل $10/\sqrt{t+1}$ cu ft/ min ، حيث t هو زمن سريان الماء . ما معدل ارتفاع مستوى الماء . عندما يكون الصهريج ملىء الى نصفه ؟ ما الزمن الذى سيأخذه الماء لملء الصهريج ؟

٤١ ـ عند اللحظة $t = 0$ كان نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة 4 cm وكان ارتفاعها 20 cm . نصف قطرها يزداد بمعدل $2t$ cm/ sec ، وارتفاعها يتناقص بمعدل $3\sqrt{t}$ cm/ sec . ما معدل تغير الحجم بعد 4 sec ، وهل هو متزايد أم متناقص عندئذ ؟

٤٢ ـ سقط حجر من قمة جرف ، وبعد b sec سقط حجر آخر . أثبت أن المسافة بينهما تزداد بمعدل $32b$ ft/ sec .

٤ ـ ١٣
تطبيقات فى الاقتصاديات

منذ زمن بعيد كانت الرياضيات الوسيلة الأساسية التى لا مفر منها فى العلوم الفيزيائية ، الآن طبقت على مسائل فى العلوم الاجتماعية . فى هذا البند سنعطى بعض أمثلة لاستعمال حساب التفاضل فى الاقتصاديات . المبادىء والتكنولوجيا فى هذه الأمثلة لا تشتمل شيئاً جديداً لكن المصطلحات الفنية تحتاج للشرح .

عدد الوحدات x لسلعة يمكن أن يبيعها الصانع أو التاجر فى كل وحدة زمن يسمى الطلب للسلعة ، ويعتمد على الثمن p فى السوق لوحدة السلعة ، الارتفاع فى السعر عادة ينتج عنه طلب أقل للسلعة . العدد x إذن دالة لـ p ،

$$x = \phi(p) \qquad (١)$$

هذه المعادلة تعطى عدد الوحدات التى يمكن بيعها فى وحدة الزمن عندما تكون p الثمن لكل وحدة . معادلات الطلب النمطية هى

$$x = 16 - \tfrac{3}{2}p \qquad (٢)$$

$$x = \frac{23.7}{p+6} + 18$$

$$x = 2(2.7^{-1.41p})$$

إذا حلت (١) فى p ، الثمن يعبر عنه كدالة للطلب ، ويكون

$$p = \psi(x) \tag{٣}$$

فمثلا ، عندما تحل (٢) فى p ، نحصل على $p = \frac{2}{3}(16 - x)$. كل من المعادلتين المتكافئتين (١) أو (٣) تسمى معادلة الطلب للسلعة . سنفترض أن x و p ليسا سالبين وأن أى دوال تقابلها لها المشتقات اللازمة فى الحياة الواقعية هى عادة قد لا تكون حتى متصلة ، لكن هذا الافتراض يكون منطقياً لجعل المواقف المدروسة هنا مثالية . سوف نستخدم دائماً p لثمن الوحدة ، ونستخدم x لعدد الوحدات المباعة بذلك الثمن .

إذا كانت x من وحدات السلعة تباع بالثمن p عن الوحدة فإن ، الدخل الكلى ، أو الايراد ، R يعطى بالعلاقة

$$R = xp = x\psi(x)$$

الدالة $x\,\psi(x)$ تسمى دالة الدخل الكلى . مشتقتها dR/dx هى دالة الدخل الهامشى . وهى تقيس كيف يؤثر تغيير بسيط فى عدد الوحدات المباعة على الدخل الكلى .

التكاليف الكلية لإنتاج سلعة تعتمد على عدد الوحدات المنتجة . سنستخدم $F(x)$ ، وتسمى دالة التكلفة الكلية ، لنشير الى التكلفة الكلية لانتاج x من الوحدات ونفترض أنها تزايدية وقابلة للتفاضل . التكاليف عادة تتكون من تكاليف ثابتة مثل استثمار المبانى والآلات ، التى تكون مستقلة عن عدد الوحدات المنتجة ، وتكاليف متغيرة تبعاً لبعض الأشياء مثل المواد الخام والعمال ، التى تزداد مع عدد الوحدات المنتجة . دالة تكلفة للتوضيح هى

$$F(x) = \tfrac{1}{10}x^2 + 4x + 170$$

هنا $\frac{1}{10}x^2 + 4x$ هى التكلفة المتغيرة، 170 هى التكلفة الثابتة. دالة التكلفة المتوسطة هى $F(x)/x$ وهى تعطى التكلفة لكل وحدة عندما ينتج x من الوحدات . وهى عادة ليست ثابتة . رجال الأعمال يأملون أن التكلفة المتوسطة تهبط عند انتاج وحدات أكثر . دالة التكلفة الهامشية هى المشتقة $F'(x)$. وهى تقيس كيف يؤثر تغير صغير فى عدد الوحدات المنتجة على التكلفة الكلية .

مثال ١ . صاحب مصنع آلات تصوير يمكنه عمل x آلة تصوير فى اليوم بتكلفة كلية $60x + 200$ دولاراً . معادلة الطلب هى $x = 90 - p/2$. كم آلة تصوير ينبغى صنعها فى اليوم ليكون ربحه الكلى أكبر ما يمكن ؟

معادلة الطلب تعطى عدد آلات التصوير التى يمكن بيعها كل يوم عندما يكون ثمن الآلة p دولاراً . الدخل الكلي اليومى هو xp دولاراً ، والربح الكلى p هو الدخل ناقصاً التكلفة .

$$P = xp - (60x + 200)$$

نعبر عن P بدلالة x فقط ، باستخدام دالة الطلب $p = 180 - 2x$ ، فيكون

$$P = x(180 - 2x) - (60x + 200)$$
$$= -2x^2 + 120x - 200, \qquad x \geq 0$$

يجب أن نوجد قيمة x التى تجعل P أكبر ما يمكن . لدينا

$$\frac{dP}{dx} = -4x + 120$$

ليس واضحاً مباشرة أن العدد الحرج $x = 30$ يعطى قيمة عظمى لـ P . فلربما تكون قيمة صغرى . بما أن $d^2P/dx^2 = -4$ ، فإن $x = 30$ تعطى نهاية عظمى موضعية ومن ثم قيمة عظمى لـ P . الأرباح ستكون أكبر ما يمكن عندما تصنع 30 آلة تصوير فى اليوم وتباع بمبلغ 120 $ لكل منها .

مثال ٢ . صاحب مصنع معين يتكلف $x^3 - 23x^2 + 200x + 500$ دولاراً فى الأسبوع لانتاج x من وحدات إنتاجه . بسبب إمكانيات المصنع المحدودة ، لا يمكنه إنتاج أكثر من 15 من الوحدات فى الأسبوع . معادلته للطلب هى $x = 100 - 2p$. أوجد عدد الوحدات التى ينبغى إنتاجها كل أسبوع ليكون ربحه أكبر ما يمكن .

ربحه P يعطى بالعلاقة

$$P = xp - (x^3 - 23x^2 + 200x + 500)$$

أو ، بدلالة x فقط

$$P = f(x) = x\left(50 - \frac{x}{2}\right) - (x^3 - 23x^2 + 200x + 500)$$
$$= -x^3 + \tfrac{45}{2}x^2 - 150x - 500, \qquad 0 \leq x \leq 15$$

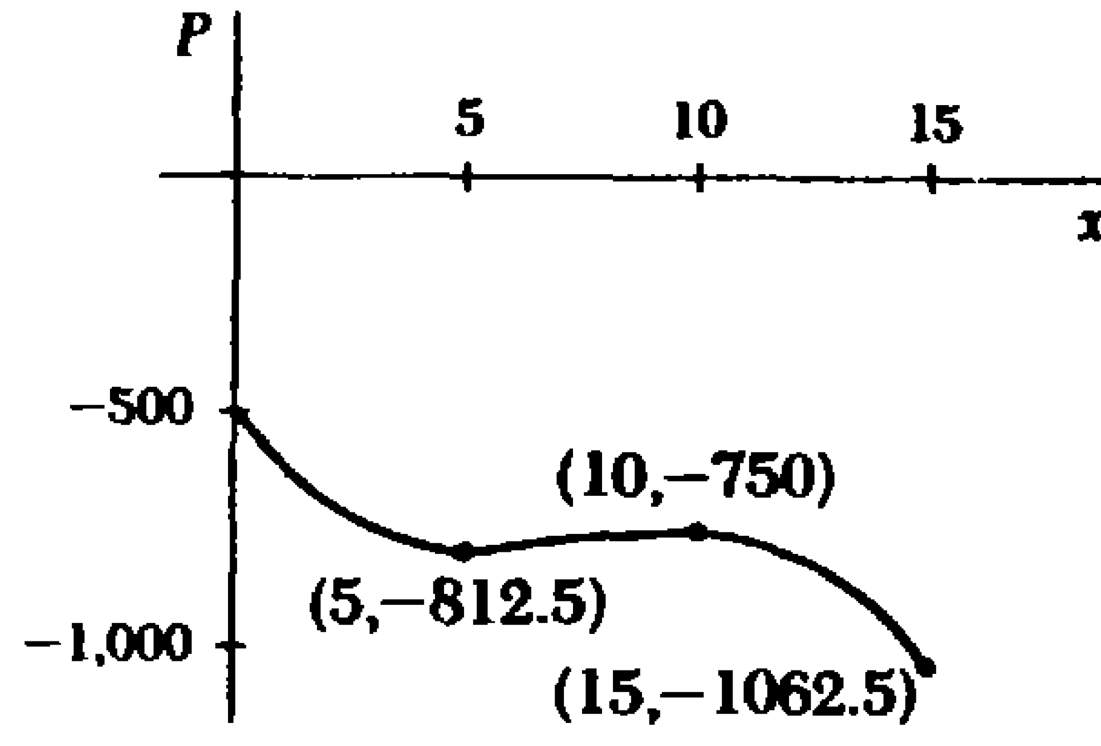
بما أن

$$\frac{dP}{dx} = -3x^2 + 45x - 150 = (-3x + 15)(x - 10)$$

العددان الحرجان لـ P هما 10 و 5 . لدينا

$$f(0) = -500, \qquad f(5) = -812.5, \qquad f(10) = -750, \qquad f(15) = -1062.5$$

ربح صاحب المصنع يكون أكبر ما يمكن عندما ينتج صفراً من الوحدات فى الأسبوع . بما أنه يجد خسارة 500 $ فى الأسبوع ، فهو يجب أن يراجع خطة العمل أو يترك العمل . صعوبته تبدو أن تكون فى التكاليف المتغيرة المرتفعة على نحو استثنائى . الشكل البيانى لـ P موضح فى شكل ٤ - ٦٠ .



$$P = -x^3 + \frac{45}{2}x^2 - 150x - 500,$$
$$0 \le x \le 15$$

شكل ٤ - ٦٠

الشكل البيانى للربح P عندما x من الوحدات تباع فى الأسبوع .

مسائل

١ - خباز يشترى دقيقاً بسعر 7 cents لكل باوند . مصاريفه غير المباشرة هى 500 $ فى الشهر . أوجد التكلفة الشهرية الكلية كدالة لعدد الباوندات المشتراة فى الشهر . اثبت أن التكلفة المتوسطة تتناقص كلما ازدادت المشتريات الشهرية .

٢ - عدد الركاب x المسافرين كل يوم على خط جوى معين بين مدينتين يعتمد على أجرة السفر p ، العلاقة هى $p = 30 - x^2/10,000$ ، خطط منحنى الدخل الكلى وأوجد أجرة السفر التى تجعل الدخل أكبر ما يمكن .

٣ - أثبت أن منحنى الطلب $p = m/(x + a) - b$ ، حيث m و b و a موجبة ، يكون هابطاً ومقعراً لأعلى . هل نفس الشيء يكون صحيحاً لمنحنى الدخل الهامشى المناظر ؟

٤ - التكلفة بالدولار لانتاج x من المفردات فى اليوم لانتاج معين هى $2x^2 + 5x + 600$. كم ينبغى أن ينتج فى اليوم لكى تكون التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن ؟

٥ - اثبت أنه مع أن التكلفة الكلية تزداد ، التكلفة الهامشية تتناقص عندما تكون دالة التكلفة على الصورة $F(x) = \sqrt{ax + b} + c$ ، حيث $a > 0$.

٦ - اذا كانت $\psi(x) = a/x - b$ ، حيث b و a ثابتان موجبان ، أثبت أن الدخل الكلى يتناقص عندما يزداد الانتاج وأن الدخل الهامشى هو ثابت سالب .

٧ - اذا كانت F هى دالة التكلفة الكلية ، فان مرونة التكلفة الكلية تعرف بأنها $x F'(x)/F(x)$. أثبت أن لدالة التكلفة $F(x) = ax^2 + bx$ ، حيث $b > 0$ و $a > 0$ ، مرونة التكلفة الكلية أكبر من او أنها دالة تزايدية .

٨ - مصنع صلب دالة التكلفة له هى $\frac{1}{5}x^2 + 10x + 180$ دولار لانتاج x طناً من الصلب فى الأسبوع . السعر الثابت بالسوق هو p دولاراً للطن . عين الانتاج الاسبوعى x بدلالة p الذى

يجعل ربح المصنع أكبر ما يمكن ؟ ما هو السعر الذى يتقاضاه المصنع حتى ينتج المصنع ١٥٠ طناً أسبوعياً ويربح أكثر ما يمكن ؟ ما هو أقل ثمن يمكن المصنع أن يتقاضاه ولا يخسر ؟

٩ ـ صاحب مصنع يمكنه عمل x ثلاجة فى اليوم بتكلفة كلية $\frac{1}{5}x^2 + 11x + 600$ دولاراً . معادلة الطلب هى $5x = 750 - 3p$. بسبب امكانيات المصنع المحدودة ، لا يمكنه أن يصنع أكثر من 80 ثلاجة فى اليوم . كم ثلاجة ينبغى أن يصنعها فى اليوم وما هو ثمن بيع الوحدة الذى يجعل الربح أكبر ما يمكن ؟

١٠ ـ حل مسألة ٩ اذا كانت معادلة الطلب هى $5x = 1010 - 3p$.

١١ ـ التكلفة الكلية بالدولار لصنع أنابيب تليفزيون ملون عددها x فى اليوم هى $x^2/10 + 2x + 600$ معادلة الطلب للانتاج هى $x = 300 - 3p$ حيث p هو ثمن الوحدة بالدولار . أوجد عدد الوحدات التى ينبغى انتاجها فى اليوم لجعل الربح أكبر ما يمكن والثمن المناظر للوحدة .

١٢ ـ بالرجوع الى مثال ١١ ، نفرض أن الحكومة تضع ضريبة على صاحب المصنع قدرها t دولاراً لكل وحدة . صاحب المصنع يضيف هذا الى تكاليفه ثم يعين مستوى انتاجه والثمن لأكبر ربح . أثبت أن الثمن يزداد بأقل قليلا عن 40 فى المائة من الضريبة . للانتاج الذى يجعل ربح صاحب المصنع أكبر ما يمكن ، ما هى الضريبة الكلية بدلالة t ، التى تتسلمها الحكومة ؟ ما هى الضريبة التى ينبغى أن تضعها الحكومة على صاحب المصنع حتى تكون الضريبة الكلية أكبر ما يمكن ؟ أثبت أن بهذه الضريبة الثمن الذى يعطى صاحب المصنع أكبر ربح يزيد تقريباً بمقدار 30 فى المائة .

١٣ ـ التكلفة الكلية لانتاج x من الوحدات ، من سلعة ما ، فى الشهر الواحد هى $ax^2 + bx + c$ دولاراً ، يضاف اليها ضريبة حكومية موضوعة على صاحب المصنع قيمتها t دولاراً عن الوحدة . معادلة الطلب هى $p = d - ex$. الكميات a, b, c, d, e موجبة . اثبت أنه اذا كان صاحب المصنع لا يزال يرغب فى أن يجعل ربحه الكلى أكبر ما يمكن ، فانه يجب أن يمتص جزءاً من الضريبة . أى أن ، الزيادة فى الثمن بسبب الضريبة يجب أن تكون أقل من الضريبة . أثبت أنه اذا كان صاحب المصنع يجعل ربحه الكلى أكبر ما يمكن ، فان الضرائب الكلية المتسلمة تكون أكبر ما يمكن عندما تضع الحكومة $t = \frac{1}{2}(d - b)$.

١٤ ـ صاحب مصنع يريد أن يعين عدد الوحدات x من انتاجه الذى ينبغى أن ينتجه كل أسبوع حتى يجعل ربحه أكبر ما يمكن . وهو يعلم أن دالة التكلفة الكلية فى أسبوع هى $F(x)$ ، وشروط السوق تثبت سعر الوحدة من انتاجه عند p . وضح له كيف يعين x .

١٥ ـ اذا كانت $\psi(x)$ هى ثمن الوحدة فى السوق لسلعة معينة عندما ينتج x من الوحدات ، أثبت أن الدخل الهامشى يساوى $\psi(x) + x\psi'(x)$ وأن للانتاج حيث الدخل الهامشى يكون صفراً ، يكون $\psi'(x) = -\psi(x)/x$.

١٦ ـ اعط تفسيراً هندسياً للتكاليف الهامشية والمتوسطة .

١٧ ـ يقال فى كتب الاقتصاد أن صافى الربح لصاحب المصنع يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مستوى انتاجه بحيث أن دخله الهامشى يساوى تكاليفه الهامشية . هل هذا صحيح ؟

١٨ ـ اذا كانت $\psi''(x) > 0$ لجميع x ، وبالتالى منحنى الطلب $p = \psi(x)$ مقعراً لأعلى ، اثبت أن منحنى الدخل الهامشى سيكون أيضاً مقعراً لأعلى اذا كانت $\psi'''(x) > -3\psi''(x)/x$.

١٩ ـ اذا كانت $F(x)$ ترمز الى تكلفة انتاج x من الوحدات من سلعة ما ، فاثبت أن التكلفة المتوسطة تكون أقل ما يمكن عندما تكون التكلفة المتوسطة والتكلفة الهامشية متساويتين، $F''(x) > 0$.

٢٠ ـ اذا كانت $x = \phi(p)$ هى معادلة الطلب ، فان مرونة الطلب η تعرف بأنها

$$\eta = -p\,\frac{\phi'(p)}{\phi(p)}$$

أثبت أن $dR/dx = p(1 - 1/\eta)$ ، حيث R دالة الدخل الكلى .

٤ ـ ١٤
العناصر التفاضلية

مشتقة دالة f عند x عرفت بأنها

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (١)$$

العدد h هو الفرق بين الاحداثيين السينيين للنقطتين $Q(x + h, f(x + h))$ و $P(x, f(x))$ على المنحنى $y = f(x)$ فى شكل ٤ ـ ٦١ . الرمز التقليدى لهذا الفرق هو Δx . وهى تمثل الكمية التى يجب اضافتها الى الاحداثى السينى للنقطة P لكى نحصل على الاحداثى السينى للنقطة Q . وهى تكون موجبة أو سالبة وفقاً لكون النقطة Q على يمين أو يسار النقطة P ، عندما تستبدل h بالرمز Δx ، (١) تصبح

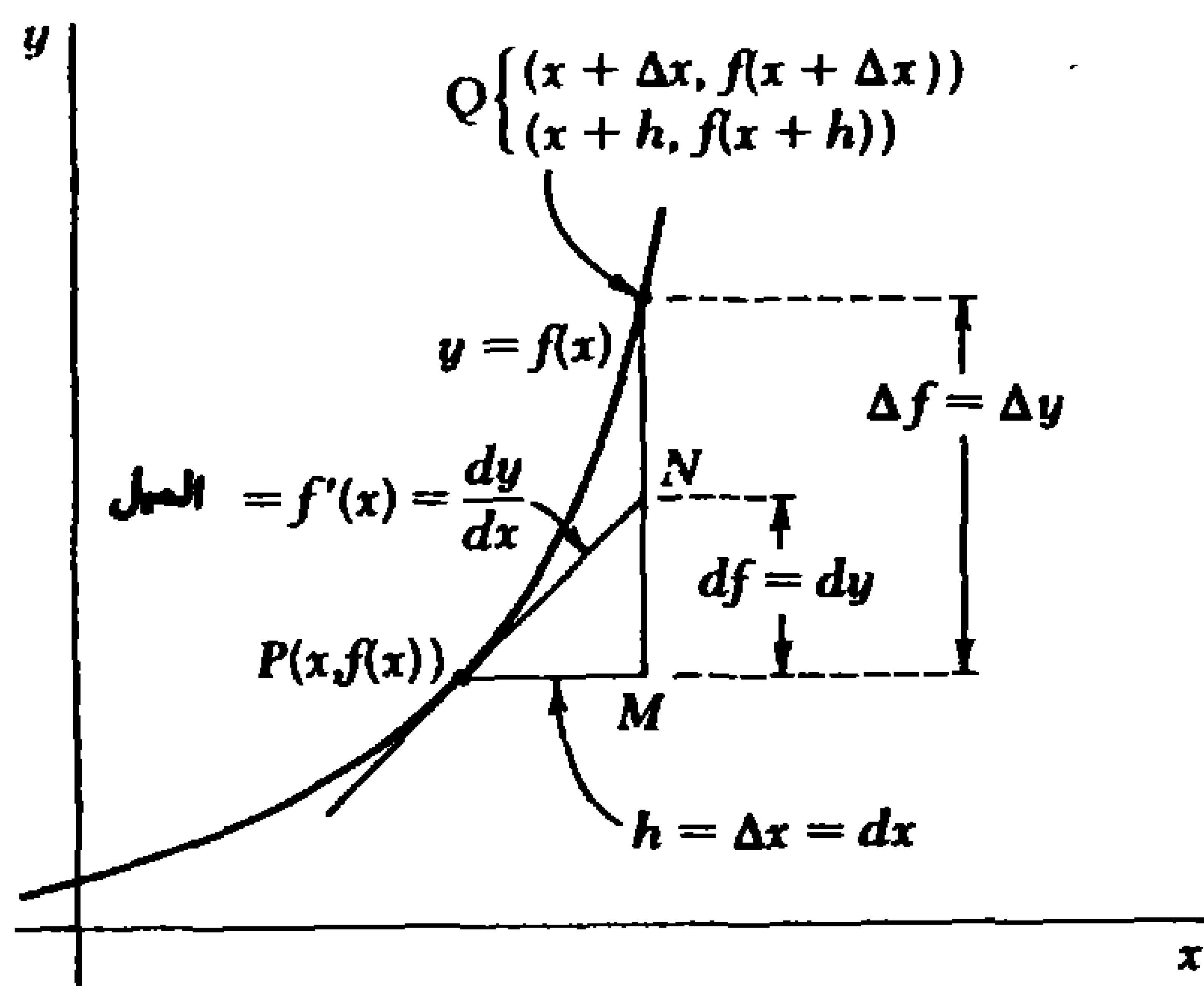
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (٢)$$

البسط فى (١) و (٢) هو المسافة الرأسية من P الى Q والمسافة الموجهة $\overline{MQ}$ فى الشكل ويرمز

لها عادة بالرمز Δy أو Δf

$$\Delta y = \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \overline{MQ}$$

هى الكمية التى يجب اضافتها الى الاحداثى الصادى للنقطة P للحصول على الاحداثى الصادى للنقطة Q وتكون موجبة أو سالبة تبعاً لكون النقطة Q أعلى أو أسفل النقطة P. عندما تتحرك نقطة



شكل ٤ ـ ٦١
لمقدار معطى Δx تكون df و Δf المسافتين الرأسيتين من M الى المنحنى والى المماس على الترتيب .

على المنحنى من P الى Q ، فان Δy و Δx هما التغيران الحادثان فى الاحداثيين السينى والصادى .

إذا كانت $y = f(x)$ فان العبارة $f'(x)\ \Delta x$ ، حيث Δx و x عددان ، تسمى العنصر التفاضلى لـ y أو f ويرمز لها بالرمز dy أو df . من المعتاد عند استخدام العناصر التفاضلية ، كتابة dx ، وتسمى العنصر التفاضلى لـ x ، بدلا من Δx ، وعليه فان $dy = f'(x)\ dx$.

٤ ـ ٢٤ تعريف : إذا كانت $y = f(x)$ ، فإن $dx = \Delta x$ ، والعنصر التفاضلى لـ y أو f هو

$$dy = df = f'(x)\ dx$$

فمثلا ، اذا كانت $y = f(x) = x^2$ فان

$$dy = df = f'(x)\ dx = 2x\ dx^{*} \quad (٣)$$

بما أن $\overline{MN}/\Delta x$ هو ميل المماس عند P فى شكل ٤ ـ ٦١ ، فإن

$$\frac{\overline{MN}}{\Delta x} = \frac{\overline{MN}}{dx} = f'(x)$$

وتكون

$$dy = f'(x)\ dx = \overline{MN}$$

أى dy هى المسافة الموجهة من M الى النقطة التى تقع مباشرة أعلى (أو أسفل) M على المماس عند P .

* حتى الآن فى دراستنا يمكن افتراض عدم وجود علاقة بين العنصر التفاضلى dx وال dx المستخدمة فى الرمز للتكامل . فيما بعد سنرى أنه توجد علاقة .

العنصر التفاضلى $dy = df$ لا يعتمد فقط على x لكن أيضاً على الزيادة $h = dx$. بمعنى آخر ، dy هى دالة لتغيرين هما h و x تعطى بالعلاقة

$$df(x,h) = dy(x,h) = f'(x)h$$

فمثلا ، اذا كانت $y = f(x) = x^2$ ، فان قيمة $dy(x,h)$ عندما $dx = 0.5$ و $x = 1$ تكون من (٣)

$$dy(1,0.5) = 2(1)(0.5) = 1$$

بالمثل ، نكتب $\Delta f(x,h)$ عندما نرغب تأكيد اعتماد Δf على h و x .

من التعريف ٤ ـ ٢٤ ، لدينا $dy/dx = f'(x)$ ، فالمشتقة يمكن اعتبارها النسبة بين العنصرين التفاضليين dy و dx ، هذا هو الأصل فى استخدام الرمز dy/dx للمشتقة .

بيانياً ، $dy(x, h)$ تقيس المسافة الرأسية MN من M الى المماس فى الشكل ٤ ـ ٦١ بهذا المعنى هى مقدار تقريبى للتغير فى y عندما تتغير x من x الى $x + h$. التغير الفعلى فى y هو المسافة الرأسية $\overline{MQ}$ من M الى المنحنى .

دع x تتغير من x_0 الى x . فتكون $h = dx = x - x_0$. الشكل البيانى للدالة g المعرفة بـ

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x_0) + f'(x_0)h \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

هو خط مستقيم يمر بالنقطة $(x_0, f(x_0))$ وميله $f'(x_0)$ ومن ثم فهو الخط المماس للشكل البيانى للدالة f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$. اذا كانت $h = 0.5$ و $x_0 = 1$ و $f(x) = x^2$ ، فان

$$g(x) = 1 + 2(x - 1)$$

الفرق بين التغير الفعلى والتغير التقريبى فى f هو

$$r(h) = [f(x_0 + h) - f(x_0)] - f'(x_0)h \qquad (٤)$$

لدينا

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = 0 \qquad (٥)$$

أى أن $r(h)$ يجب أيضاً أن تقترب من الصفر عندما تقترب h من الصفر . بما أن $x = x_0 + h$ ، فيكون لدينا من (٤)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(h) = g(x) + r(h)$$

حيث $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ الدالة g يقال أنها تقريب من الرتبة الأولى (أو خطى) لـ f فى جوار x_0. هذه الفكرة ستعمم فى الفصل السادس عشر عندما ندرس نظرية تايلور . معادلة (٥) توضح أن $r(h)$

ليست فقط صغيرة عندما تكون h صغيرة بل هى صغيرة بالمقارنة بـ h . ومن ثم Δy تكون مقربة الى حد بعيد بـ dy . فمثلا ، اذا كانت $h = 0.1$ و $x_0 = 1$ و $y = f(x) = x^2$ فإن

$$dy(x_0,h) = 2x_0h = 0.2$$

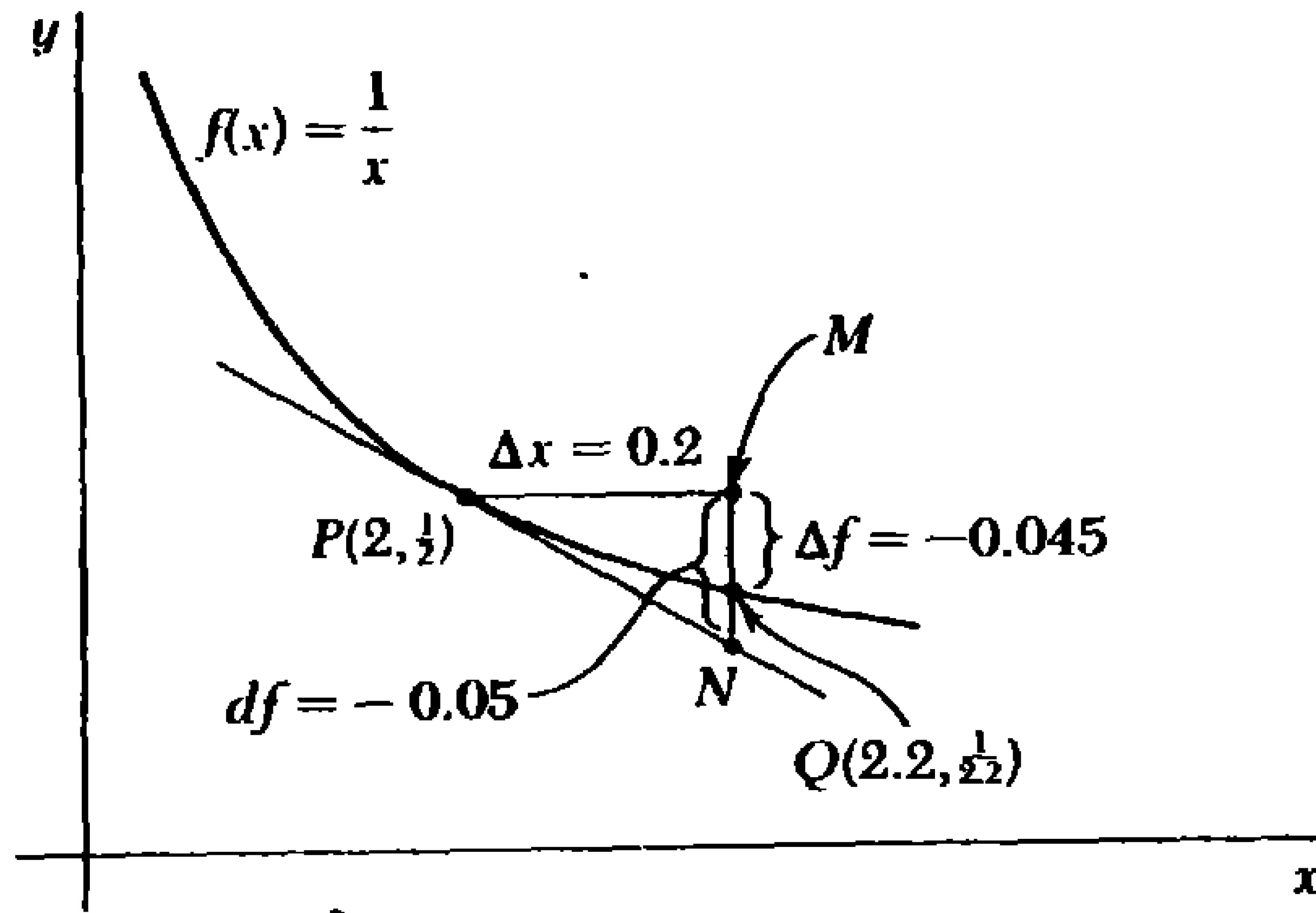
$$\Delta y(x_0,h) = f(x_0 + h) - f(x_0) = 1.1^2 - 1^2 = 0.21$$

وتكون

$$r(h) = 0.21 - 0.2 = 0.01$$

ليس نادراً أن يتحتم علينا ايجاد التغير فى قيمة الدالة $f(x)$ الذى يناظر تغيراً صغيراً Δx فى قيمة x . التغير المضبوط فى f يعطى بالرمز Δf ، لكن اذا كانت Δx صغيرة وكنا لا نتطلب دقة عالية ، فان Δf يمكن تقريبها بـ df التى يمكن ايجادها بسهولة .

مثال ١ . استخدم العناصر التفاضلية لايجاد التغير بالتقريب فى قيمة الدالة $f(x) = 1/x$ عندما تزداد x من 2 الى 2.2 .



شكل ٤ - ٦٢
عندما تزداد x من 2 الى 2.2 ، التغير $\overline{MQ} = \Delta f$
فى $f(x)$ يقرب بـ $\overline{MN} = df$

التغير المضبوط فى f يعطى بالعلاقة

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

عندما $\Delta x = 0.2$ و $x = 2$ هذه هى المسافة MQ فى شكل ٤ - ٦٢ . وهو يقرب بالعنصر التفاضلى

$$df = f'(x)\ dx = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

لنفس قيم $dx = \Delta x$ و x هذه هى المسافة MN فى الشكل . عندما $dx = 0.2$ و $x = 2$ ، التغير فى f هو بالتقريب

$$df = -\tfrac{1}{4}(0.2) = -0.05$$

الاشارة السالبة تبين أن قيمة الدالة تنقص . للمقارنة ، ستوجد أيضاً التغير المضبوط فى f. هذا التغير هو

$$\Delta f = f(2.2) - f(2) = \frac{1}{2.2} - \frac{1}{2} = -0.045$$

لثلاثة أرقام عشرية . حساب df أسهل ويختلف عن Δf بمقدار 0.005 فقط .

مثال ٢ . حوض للسباحة دائرى نصف قطره 20 ft محاط بمشاية حجرية عرضها 1.5 ft . أوجد باستخدام العناصر التفاضلية المساحة التقريبية للمشاية .

مساحة الدائرة التى نصف قطرها x هى $f(x) = \pi x^2$. مساحة المشاية هى الكمية التى تتغير بها f عندما تزداد x من 20 الى 21.5 (شكل ٤ - ٦٣) . التغير يعطى بالضبط بـ

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

وبالتقريب بـ

$$df = f'(x)\ dx$$

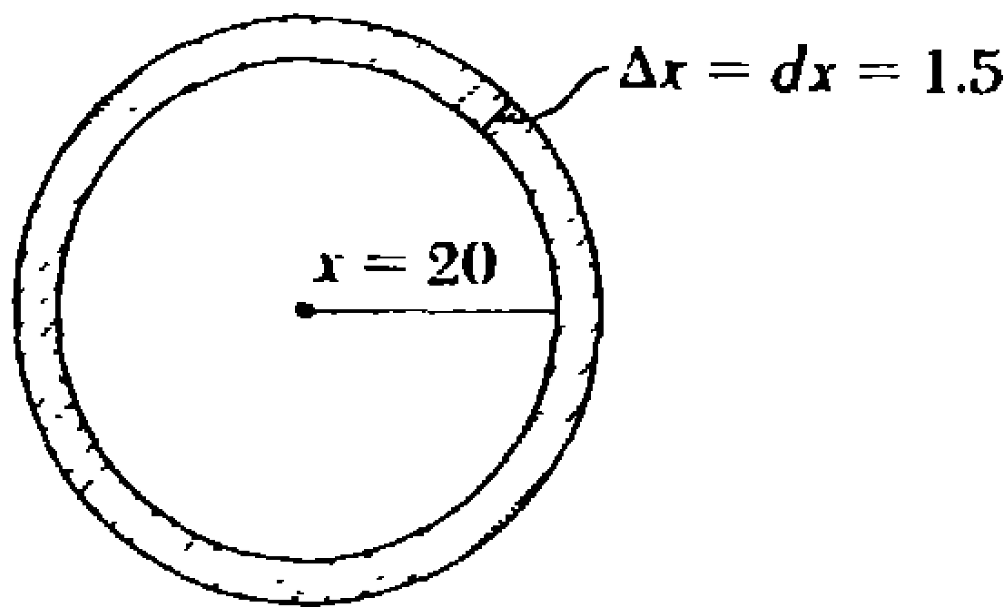
وذلك عندما $x = 20$ و $\Delta x = dx = 1.5$. العنصر التفاضلى df لأى dx و x هو

$$df = 2\pi x\ dx$$

وعندما $dx = 1.5$ و $x = 20$ ، يكون

$$df = 2\pi(20)(1.5) = 60\pi \text{ sq ft.}$$

هذه هى المساحة التقريبية للمشاية . كان فى امكاننا أيضاً أن نأخذ $dx = -1.5$ و $x = 21.5$ ونحصل على التقريب $df = -64.5\pi$ ، لكن الحساب يكون أصعب .



شكل ٤ - ٦٣

لتكن $f(x) = \pi x^2$. مساحة الحلقة تعطى بالضبط بـ $\Delta f = \pi (x + \Delta x)^2 - \pi x^2$ وبالتقريب بـ $df = 2\pi\ x dx$.

مثال ٣ . أوجد تقريباً عشرياً للمقدار $\sqrt{35}$.

الجذر التربيعى للعدد 35 قريب من 6 ، وسنوجد تقريباً له بايجاد التصحيح التقريبى الذى يجب تطبيقه على العدد 6 ليعطى $\sqrt{35}$. دع $f(x) = \sqrt{x}$. التصحيح هو التغير فى f عندما x تنقص من 36 الى 35 . هذا يعطى بالتقريب بـ df عندما $dx = -1$ و $x = 36$. لدينا

$$df = f'(x)\ dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$$

عندما $dx = -1$ و $x = 36$ تكون $df = -\frac{1}{12}$. الآن نضيف التصحيح $-\frac{1}{12}$ الى 6 لنحصل على القيمة التقريبية لـ $\sqrt{35}$. بما أن

$$df \approx f(x + \Delta x) - f(x) = f(35) - f(36) = \sqrt{35} - \sqrt{36},$$

$$\sqrt{35} \approx \sqrt{36} + df = 6 - \tfrac{1}{12} = 5.9167$$

قيمة $\sqrt{35}$ صحيحة الى أربعة أرقام عشرية هى 5.9161 . فلدينا خطأ حوالى 0.0006 .

نجاح العناصر التفاضلية فى تقريب $\sqrt{35}$ الى حد بعيد يرجع الى وجود مربع كامل قرب 35 اذا طلب منا ايجاد $\sqrt{31}$ ، فالتقريب سوف لا يكون جيداً .

لتكن $h(x)$ و $g(y)$ دالتين قابلتين للتفاضل بالنسبة x و y . المعادلة

$$g(y) = h(x) \tag{٦}$$

تعرف y ضمنياً كدالة لـ x : $y = f(x)$ من الممكن ايجاد العنصر التفاضلى dy بدون حل (٦) صراحة لـ y . باجراء التفاضل الضمنى لـ (٦) بالنسبة الى x ، يكون

$$g'(y)\,\frac{dy}{dx} = h'(x)$$

$$dy = \frac{h'(x)}{g'(y)}\,dx \tag{٧}$$

ومنها $g'(y)dy = h'(x)\,dx$. الطرفان الأيسر والأيمن لهذه المعادلة هما العنصران التفاضليان لـ h و g . واذن لايجاد dy ، يمكننا ايجاد العنصرين التفاضليين $h'(x)dx$ و $g'(y)dy$ لـ h و g ، ثم نساويهما ونحل هذه المعادلة لـ dy ، كما فى (٧) . لتوضيح ذلك ، سنوجد dy بهذه الطريقة للدالة $y = f(x)$ المعرفة ضمنياً بالمعادلة

$$y^3 - 2y = x^2 - x + 3$$

بأخذ العناصر التفاضلية لكلا الطرفين والحل لـ dy ، يكون

$$(3y^2 - 2)\,dy = (2x - 1)\,dx,$$

$$dy = \frac{2x - 1}{3y^2 - 2}\,dx$$

مسائل

أوجد العنصر التفاضلى لـ y أو f لما يأتى :

١ - $y = 3x^2 - 5x$

٢ - $f(t) = 6t^4 + 6t^2 - t + 10$

٣ - $y = \sqrt{u} + u^2$

٤ - $f(x) = x/(x + 1)$

٥ - $y = \sqrt[3]{x^7 + x^5 + 1}$

٦ - $f(w) = w\sqrt{w^2 - 1}$

٧ - $x^2 - x = y^3 + y - 6$

٨ - $(2y + 1)/(y^2 - 1) = x$

أوجد قيمة dy أو df للقيم المعطى لـ x, dx أو Δx :

٩ - $f(x) = 3x - 5;\ x = 3,\ \Delta x = \frac{1}{2}$

١٠ - $f(x) = x^2 - 2;\ x = -2,\ dx = 0.3;\ x = -2,\ dx = 0.1$

١١ ـ $f(x) = x^3 - x^2 + 3;\ x = 1,\ \Delta x = -0.1;\ x = 1,\ \Delta x = 0.2$

١٢ ـ $y = x^5 + 6x^4 + x^3 + 3;\ x = 1,\ dx = -0.001$

١٣ ـ $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2};\ x = 5,\ \Delta x = -0.001$

١٤ ـ $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1};\ x = 2,\ \Delta x = 1$

١٥ ـ $y = \dfrac{x + 1}{x - 1};\ x = 7,\ dx = 0.01$

١٦ ـ $y^2 + 3y - \frac{5}{4} = \dfrac{x^3}{x + 1};\ x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ dx = \frac{1}{2}$

استخدم العناصر التفاضلية لايجاد التغير التقريبى فى القيمة لكل من الدوال الآتية للتغير المعطى فى المتغير المستقل :

١٧ ـ $f(x) = x^2 - 6x + 10;\ x = 0$ to $x = 0.1$

١٨ ـ $g(t) = t^3 - 2t;\ t = 1$ to $t = 0.95$

١٩ ـ $F(s) = -\sqrt{s + 1};\ s = 0.96$ to $s = 0.94$

٢٠ ـ $f(x) = \sqrt[3]{z};\ z = 27$ to $z = 26.98$

٢١ ـ $F(x) = \sqrt{x^2 + 7};\ x = -3$ to $x = -3.01$

٢٢ ـ $G(u) = 1/(u^2 + 1);\ u = 2$ to $u = 2.02$

٢٣ ـ على الشكل البيانى للدالة $y = 1/x$ وضح المسافتين اللتين تمثلان df و Δf عندما $dx = 0.5$ و $x = -1$.

٢٤ ـ ميدان قروى على هيئة مربع طول ضلعه 500 ft ، محاط بمشاية جانبية عرضها 5 ft . أوجد بالتقريب مساحة الطريق .

٢٥ ـ كرة من الصلب قطرها 4 in. غطيت بالسيراميك بسمك $\frac{1}{16}$ in أوجد بالتقريب كمية السيراميك اللازمة .

٢٦ ـ نصف دائرة قيس نصف قطرها فوجد 6 in. بخطأ محتمل $\frac{1}{32}$ in . ما هو الخطأ التقريبى المحتمل فى حساب المساحة .

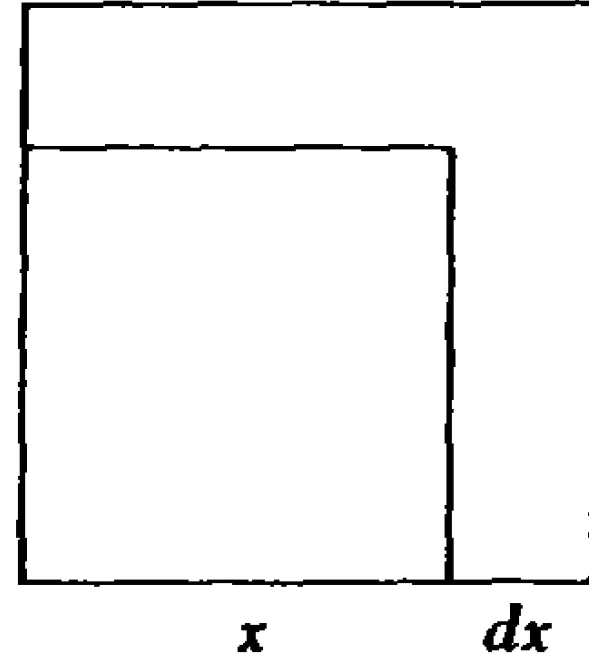
٢٧ ـ صندوق على هيئة مكعب عمل ليسع 1728 cu in. . أوجد بالتقريب الدقة التى يجب أن يعمل بها طول ضلعه حتى يكون الحجم صحيحاً الى 5 cu in. ؟

٢٨ ـ أوجد تعبيراً جبرياً يعطى بالتقريب حجم قشرة اسطوانية نصف قطرها الداخلى r ، وارتفاعها h ، وسمكها d .

٢٩ ـ المسافة s ft التى يسقطها جسم فى t sec تعطى بالعبارة $s = \frac{1}{2}gt^2$. أوجد بالتقريب كيف يؤثر خطأ صغير فى قياس t على حساب المسافة والسرعة .

٣٠ ـ اذا كانت $f(x) = x^2/(x + 1)$ ، أوجد بالتقريب كم تختلف x عن 3 ومع ذلك لا تؤثر فى $f(x)$ بأكثر من $\frac{1}{4}$.

٣١ ـ اذا كانت A هى مساحة المربع الأصغر الذى طول ضلعه x فى شكل ٤ ـ ٦٤ ، ما هما المنطقتان المناظرتان لـ dA و ΔA عندما تزداد x بمقدار dx ؟



شكل ٤ - ٦٤

٣٢ - تبعاً لقانون Boyle ، العلاقة بين الضغط p والحجم v لغاز فى اناء مقفل هى $pv = k$ ، حيث k ثابت . باستخدام العناصر التفاضلية ، أوجد تعبيراً جبرياً يعطى بالتقريب التغير فى الضغط الذى يناظر تغيرات صغيرة فى الحجم اذا كانت $p = 20$ grams/ square centimeter عندما $v = 8000$ cu cm ، أوجد k واستخدم تعبيرك لايجاد التغير التقريبى فى p اذا كانت v تتناقص الى 7900 cu cm .

٣٣ - كميتان متغيرتان t و s ترتبطان بالمعادلة $st^2 = c$ ، حيث c ثابت . اذا كانت $s = 5$ عندما $t = 10$ ، أوجد c. باستخدام العناصر التفاضلية ، أوجد التعبير الذى يعطى بالتقريب التغير فى s الذى يناظر تغيراً صغيراً فى t . استخدم تعبيرك لتقريب s عندما $t = 10.2$.

٣٤ - القانون الادياباتى الذى يحكم العلاقة بين الضغط p والحجم v لغاز فى إناء مغلق هو : $pv^{1.4} = k$ ، حيث k ثابت . اذا كانت $p = 25$ grams/ sq. centimeter عندما $v = 5000$ cu cm ، أوجد الضغط بالتقريب عندما v تزداد الى 5200 cu cm .

٣٥ - ارسم الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ جوار النقطة $(36, 6)$ بمقياس y أربعة أمثال مقياس x . وضح مثال ٣ بتعليم المسافتين اللتين تمثلان df و Δf عندما $\Delta x = -1$ و $x = 36$. أى المسافتين تمثل $\sqrt{35}$ وأيهما تمثل التقريب الى $\sqrt{35}$ الذى أوجدناه .

٣٦ - أوجد تقريباً عشرياً لـ $\sqrt{31}$ بنفس الطريقة المستخدمة فى مثال ٣ لايجاد $\sqrt{35}$. وضح أن التقريب الى $\sqrt{31}$ ليس جيداً مثل التقريب الى $\sqrt{35}$. وضح على الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ لماذا يكون ذلك .

استخدم العناصر التفاضلية لايجاد تقريب عشرى للآتى :

٣٧ - $\sqrt{51}$ ٣٨ - $\sqrt{0.17}$ ٣٩ - $\sqrt{97.4}$ ٤٠ - $\sqrt[3]{123}$ ٤١ - $\frac{1}{102}$ ٤٢ - $\sqrt[3]{28}$

٤٣ - $\frac{1}{\sqrt{60}}$ ٤٤ - 1.9^5 ٤٥ - $\sqrt[5]{0.99}$ ٤٦ - $27.1^{2/3}$

٤٧ - اذا كانت $f(x) = x^5 - 3x + 7$ ، فأوجد بالتقريب $f(2.01)$. هل هذا التقريب أكبر أو أصغر عن القيمة الحقيقية ؟

٤٨ - أوجد تقريباً عشرياً لـ $3.98^3 + 7\sqrt{3.98} - \frac{3}{3.98}$. (إرشاد : أوجد دالة f بحيث أن $f(3.98)$ هو التعبير المعطى .

٤٩ - اثبت أن نسبة التغير فى x^r إلى x^r ، حيث r كسر ، الذى يناظر تغيراً بسيطاً فى x يكون بالتقريب r من المرات لنسبة التغير فى x الى x .

٥٠ - قوة الجذب بين جسمين سماويين كتلتاهما m و m' وعلى بعد r تعطى بالعلاقة $F = Gmm'/r^2$ ، حيث G ثابت . أوجد بالتقريب التغير فى القوة الذى ينشأ عن تغير بسيط فى r وبين أن النسبة لهذا التغير إلى F هو ، باستبعاد الإشارة ، تقريبياً ضعف النسبة للتغير فى r إلى r .

٥١ - مدة الدورة للبندول هى الزمن المطلوب لتردد كامل ذهاباً ومجيئاً . الزمن t بالثانية لبندول بسيط يعطى بالعلاقة $t = 2\pi\sqrt{l/g}$ ، حيث l طول البندول بالقدم و g عجلة الجاذبية ($g = 32$ ft/ sec/ sec) ، (أ) أوجد طول البندول الذى زمن دورته 1 sec (ب) اذا كان طول البندول فى (أ) يتزايد بمقدار 0.0001 فى يوم حر ، كم بالتقريب يؤثر ذلك على زمن الدورة ؟ اذا كان هذا البندول فى ساعة، كم تقدم أو تأخر هذه الساعة فى اليوم؟ (ج) قيمة g ليست ثابتة بل تتغير طفيفاً عند النقط المختلفة على سطح الأرض. البندول الذى زمن دورته 1 sec عند نقطة حيث $g = 32$ ft/ sec/ sec نقل إلى نقطة حيث $g = 32.1$ ft/ sec/ sec . كم يتأثر زمن الدورة بهذا التحرك ؟

٥٢ - لأى دوال تكون df و Δf متساويتين لجميع Δx و x ؟

٤ - ١٥
المعادلات التفاضلية القابلة للفصل*

للآن المعادلات التفاضلية التى درسناها كانت على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (١)$$

حيث $g(x)$ ترمز إلى تعبير يعتمد على x فقط . لكن مسائل فيزيائية كثيرة تؤدى إلى معادلات تفاضلية حيث الطرف الأيمن (١) يشتمل على y أيضاً كما يشتمل على x ، مثل

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \qquad (٢)$$

باعتبار المشتقة dy/dx النسبة بين العنصرين التفاضليين dx و dy من الممكن أحياناً كتابة مثل هذه المعادلات فى صورة فيها كل الكميات المشتملة على y تكون مع dy ، على طرف واحد للمعادلة وجميع الكميات المشتملة على x تكون مع dx على الطرف الآخر . مثل هذه المعادلات تسمى قابلة للفصل . المعادلة (٢) قابلة للفصل إذ يمكن كتابتها فى هذه الصورة :

$$\frac{1}{y^2}\,dy = x\,dx \qquad (٣)$$

* هذا البند يمكن تأجيله إلى ما قبل البند ٧ - ٦ .

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل يمكن حلها . نوضح الطريقة بحل المعادلة (٢) وحل بعض الأمثلة الأخرى . فى نهاية هذا البند نشرح لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة .

لحل المعادلة ، نفصل أولا المتغيرين ، كما فى (٣) . الآن نجرى تكامل الطرف الأيسر من (٣) بالنسبة إلى y والطرف الأيمن بالنسبة إلى x ، فيكون

$$\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int x\, dx$$

فنحصل على

$$-y^{-1} = \tfrac{1}{2}x^2 + C \qquad (٤)$$

لأى ثابت C . سنشرح فيما بعد لماذا لا يلزم إضافة ثابت للطرف الأيسر أيضاً . حل هذه المعادلة لـ y يعطينا

$$y = \frac{-2}{x^2 + 2C} \qquad (٥)$$

نذكر القارىء بأن حل المعادلة التفاضلية هو دالة f بحيث أن عندما تعوض $f'(x)$ لـ dy/dx فى المعادلة التفاضلية وكذلك $f(x)$ لـ y ، إذا كانت موجودة ، فإن المعادلة الناتجة تكون صحيحة لجميع x حيث الكميات المشتملة تكون معرفة . ندعى أن الدالة f المعرفة بالطرف الأيمن من (٥) وهى

$$f(x) = \frac{-2}{x^2 + 2C}$$

حل لـ (٢) لأى ثابت C . لنرى ذلك ، نوجد مشتقة f

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 2C)^2}$$

ونعوض الطرفين الأيمنين لهذه وللمعادلة (٦) لـ dy/dx و y فى (٢) :

$$\frac{4x}{(x^2 + 2C)^2} = x\left(\frac{-2}{x^2 + 2C}\right)^2$$

وهذا صحيح لأى ثابت C ولجميع x حيث المقامات لا تساوى صفراً .

قد أوجدنا عدداً لا نهائياً من الحلول لكن لا نضمن أنه لا توجد حلول أخرى . فى الواقع ، $f(x) = 0$ هو حل لا يمكن إيجاده بإعطاء C فى (٥) قيمة خاصة .

طريقة مماثلة ستحل أى معادلة تفاضلية متغيراها قابلان للفصل ، بفرض أن التكاملات يمكن إجراؤها .

مثال ١ . أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x(x^2+1)^2}{\sqrt{y-1}} \quad (٧)$$

الذى يحقق $y = 5$ عند $x = 0$

لدينا ، عند فصل المغيرين ،

$$\int \sqrt{y-1}\, dy = \int 4x(x^2+1)^2\, dx$$

ومن ثم

$$\tfrac{2}{3}(y-1)^{3/2} = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^3 + C$$

أو

$$(y-1)^{3/2} = (x^2+1)^3 + C' \quad (٨)$$

حيث $C' = \frac{3}{2}C$. الشرط الحدى $y = 5$ عند $x = 0$ يتضمن ، عند التعويض فى (٨) ، أن $8 = 1 + C'$ اذن $C' = 7$ ، والمعادلة (٨) تصبح

$$(y-1)^{3/2} = (x^2+1)^3 + 7 \quad (٩)$$

تعبير صريح لـ y بدلالة x يمكن إيجاده بحل هذه المعادلة لـ y ، لكن من الممكن أيضاً إعتبار المعادلة كتعريف ضمنى للحل $y = f(x)$ ونتركها على ذلك . إذا اخترنا هذه الطريقة فانه يمكننا أيضاً أن نحقق أن الدالة المعرفة ضمنياً هى حل كما يلى . لتكن $f(x)$ هى الدالة المعرفة ضمنياً بـ (٩) . عندئذ تكون المعادلة

$$[f(x)-1]^{3/2} = (x^2+1)^3 + 7$$

صحيحة لجميع x فى فترة ما . نوجد $f'(x)$ باجراء التفاضل الضمنى :

$$\tfrac{3}{2}[f(x)-1]^{1/2} f'(x) = 3(x^2+1)^2 2x,$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1)^2}{[f(x)-1]^{1/2}}$$

بتعويض هذه القيمة لـ $f'(x)$ عن dy/dx فى (٧) وتعويض $f(x)$ عن y ، يكون لدينا

$$\frac{4x(x^2+1)^2}{[f(x)-1]^{1/2}} = \frac{4x(x^2+1)^2}{\sqrt{f(x)-1}}$$

وهذه صحيحة لجميع x حيث $f(x) > 1$ لقد اثبتنا أن f هى حل للمعادلة (٧) .

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(1+2y+5y^4)y' - 4x = 0$$

لدينا

$$(1+2y+5y^4)\, dy = 4x\, dx$$

ومن ثم

$$y + y^2 + y^5 = 2x^2 + C \quad (١٠)$$

هنا من المستحيل أن نحل لـ y ، ويجب أن نعتبر حل المعادلة التفاضلية معرفاً ضمنياً بواسطة (١٠) .

فى حل المعادلة التفاضلية ، ثابت التكامل يجب اضافته مباشرة بعد التكامل ، وليس فى وقت متأخر . فمثلا ، ليس صحيحاً عند حل (٣) كتابة $-y^{-1} = x^2/2$ مكان (٤) والحل لـ y ، فتكون $y = -2/x^2$ ، ثم اضافة C ، لنحصل على

$$y = \frac{-2}{x^2} + C$$

المعادلة الثانية صحيحة وهى حل لـ (٢) لكن الثالثة ليست حلا ما لم تكن $C = 0$.

مثال ٣ . صهريج على هيئة متوازى مستطيلات ارتفاعه 10 ft وقاعدته مربعة وطول الضلع 6 ft ، ملىء بالماء . فتح صمام فى أسفل الصهريج . ما الزمن الذى ينقضى ليفرغ الصهريج ؟

سنحل المسألة بإيجاد تعبير للحجم V للماء المتبقى فى الصهريج بعد t min وسنفعل بأن نوجد أولا المعادلة التفاضلية التى تربط t و V . هذه المعالجة هى الأكثر مباشرة لأن الفيزيائيين يعلمون بعض الشىء عن معدلات انسياب السوائل . النظرية الفيزيائية والقياسات المعملية تبين أن المعدل الذى يتدفع به الماء من الصهريج يتغير ، وعند أى لحظة يكون متناسباً مع الجذر التربيعى لعمق الماء المتبقى فى الصهريج عند هذه اللحظة . هذا أمر معقول لأن المعدل يكون أكبر عند الابتداء ، حيث يكون الضغط على الثقب أكبر ، وأقل عندما يهبط مستوى الماء . وصحيح أيضاً أن المعدل لا يعتمد على شكل أو حجم قاعدة الصهريج . اذا كان V هو حجم الماء فى الصهريج عند الزمن t ، فان V تكون دالة لـ t . المعدل الذى يتدفق به الماء هو معدل تغير V عند الزمن t ، وهذا يعطى بالمشتقة dV/dt . افتراضنا هو أن

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h} \qquad (١١)$$

حيث h هو العمق عند الزمن t و k ثابت التناسب وهو غير معلوم بعد . نفس القانون يحكم تدفق السوائل الأخرى ، وثابت التناسب k يعتمد على السائل الخاص وحجم الثقب ، فهو يكون أقل لسائل لزج مثل العسل الأسود عنه للماء . لحل (١١) يجب أولا التعبير عن h بدلالة V . العلاقة هى $h = V/36$ ، و (١١) تصبح

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{6}\sqrt{V} \qquad (١٢)$$

هذه هى المعادلة التفاضلية التى تربط t و V . نحل (١٢) بفصل المتغيرين واجراء التكامل .

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = \frac{k}{6}\,dt$$

$$2V^{1/2} = \frac{k}{6}t + C \qquad (١٣)$$

لايجاد C ، نبحث عن قيمة للزمن t حيث V تكون معلومة . نعلم أن $V = 36(10)$ عند $t = 0$.
اذن $C = 2\sqrt{36(10)} = 12\sqrt{10}$، (١٣) تصبح

$$2V^{1/2} = \frac{k}{6}t + 12\sqrt{10} \qquad (١٤)$$

لايجاد k ، يجب أن نعرف قيمة V لقيمة أخرى للزمن t . والا أننا لا نعلم ، فيجب أن نرجع الى الجداول الفيزيائية التى تعطى قيم k لسوائل متنوعة وسعات مختلفة للثقوب أو نقيس الحجم عند زمن ما . لنفرض أن بعد 1 min مستوى الماء انخفض 1 ft . فيكون $V = 36(9)$ عندما $t = 1$ ، وبتعويض هذه القيم فى (١٤) ، يكون لدينا

$$2[36(9)]^{1/2} = \frac{k}{6} + 12\sqrt{10}$$

ومن ثم $k = 72(3 - \sqrt{10})$. بابدال k فى (١٤) بهذه القيمة والحل لـ V نحصل على

$$V = 36[(3 - \sqrt{10})t + \sqrt{10}]^2 \qquad (١٥)$$

وبذلك نكون قد أوجدنا تعبيراً جبرياً لكمية الماء المتبقية بعد t min . يمكننا الآن الاجابة عن السؤال الأصلى . بوضع $V = 0$ فى ١٥ والحل (t) ، نرى أن الصهريج سيكون فارغاً عند $t = \sqrt{10}/(\sqrt{10} - 3) \approx 19.5$ min

الطريقة المستخدمة فى الأمثلة السابقة يمكن تطبيقها لمعظم المعادلات التفاضلية التى تظهر فى النواحى العملية حيث تكون المتغيرات قابلة للفصل . بفصل المتغيرين يمكن كتابة المعادلة فى الصورة

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx \qquad (١٦)$$

حيث $h(x)$ و $g(y)$ تشتملان فقط على x و y على الترتيب . هذا يعنى أن المعادلة التفاضلية الأصلية يمكن التعبير عنها فى الصورة .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)} \qquad (١٧)$$

اذا كانت $h(x)$ و $g(y)$ متصلتين ، يمكننا اجراء تكامل طرفى (١٦)

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx \qquad (١٨)$$

لنحصل على

$$G(y) = H(x) + C \qquad (١٩)$$

حيث $H(x)$ و $G(y)$ هما أى معكوسين تفاضليين خاصين لـ $h(x)$ و $g(y)$ وحيث C أى ثابت .
بالطبع ، يوجد أيضاً ثابت C' يأتى من تكامل $g(y)$ ، لكن هذا يمكن نقله إلى الطرف الأيمن وإعادة

تسمية $C - C'$ بالاسم C . عادة يمكن حل (١٩) لـ y وبالتالى يمكن التعبير عن الحل كدالة صريحة فى x ، $y = f(x)$ ، أما إذا لم يمكن حل (١٩) لـ y ، فيمكننا أن نعتبر (١٩) تعريفاً ضمنياً للحل .

الطريقة المستخدمة لحل المعادلة التفاضلية القابلة للفصل (١٧) بكتابة (١٦) ، وعندئذ تكون (١٩) لها مظهر سطحى للصلاحية ، تحتاج إلى تبرير . هذا يرجع إلى أن dx و dy فى (١٦) هما عنصران تفاضليان نحصل عليهما من المشتقة dy/dx ، لكن فى (١٨) هما جزء من رمز التكامل دون شخصية منفصلة . عند حل المعادلة $dy/dx = xy^2$ ومرة أخرى فى مثال ١ تحققنا بالتعويض أن الاجابات التى حصلنا عليها كانت حلولا . لتجنب إجراء ذلك فى كل مرة ، سنثبت أن الطريقة التى شرحناها لحل المعادلات القابلة للفصل دائماً تعطى إجابة صحيحة ، وذلك بإثبات أن الدالة $y = f(x)$ المعرفة ضمنياً بـ (١٩) هل حل للمعادلة التفاضلية (١٧) .

الطريقة هى مثل تلك التى استخدمت لتحقيق الحل فى مثال ١ . يمكن اثبات ، وسنفترض ، أن المعادلة (١٩) تعرف ضمنياً دالة لـ x قابلة للتفاضل $y = f(x)$. هذا يعنى أن : $G(f(x)) = H(x) + C$ لجميع x فى فترة ما . نوجد $f'(x)$ بتفاضل طرفى هذه المعادلة ، باستخدام قاعدة السلسلة (فى الواقع ، تفاضل ضمنياً) :

$$G'(f(x))f'(x) = H'(x),$$

أى

$$f'(x) = \frac{H'(x)}{G'(f(x))}$$

بما أن

$$G'(y) = g(y) \quad \text{و} \quad H'(x) = h(x)$$

فإن

$$f'(x) = \frac{h(x)}{g(f(x))}$$

بتعويض هذه القيمة لـ $f'(x)$ عن dy/dx فى (١٧) وتعويض $f(x)$ عن y ، يكون لدينا

$$\frac{h(x)}{g(f(x))} = \frac{h(x)}{g(f(x))}$$

التى هى صحيحة لجميع x حيث تكون الكميات المشتملة معرفه . هذا يوضح أن f المعرفة بـ (١٩) هى حل لـ (١٧) .

من المفهوم ، طبعاً ، أنه عند حل المعادلة التفاضلية بطريقة فصل المتغيرين ، نقيد أنفسنا بقيم x التى تجعل الحدود المحتوية على y وأيضاً الحدود المحتوية على x معرفة . أننا لا ندعى أن

(١٩) للقيم المختلفة لـ C تعطى جميع الحلول (١٧). مسألة إيجاد جميع حلول المعادلة التفاضلية يمكن أن تكون صعبة، وهى مدروسة فى كتب عن الموضوع.

مسائل

أوجد حلولا للمعادلات التفاضلية الآتية

١ - $\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{y}$ ٢ - $\frac{dy}{dx}=y^2$ ٣ - $\frac{ds}{dt}=\frac{t^2+3}{s^3}$

٤ - $(y+y^2)y'=x^2-3$ ٥ - $\frac{dy}{dx}=3y^{2/3}$ ٦ - $\frac{2}{y^2}\frac{dy}{dx}=x^2$

٧ - $\theta^2 r\frac{dr}{d\theta}=1+\theta^2$ ٨ - $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{(x+a)^4}$ ٩ - $(1+x)\frac{dx}{dt}=tx^3$

١٠ - $y'=\frac{3}{y+\sqrt{y}}$ ١١ - $y\sqrt{2x^2-3}\frac{dy}{dx}+x\sqrt{6+y^2}=0$ ١٢ - $y''=\frac{2}{\sqrt{y'}}$

١٣ - $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2$

للمعادلات التفاضلية الآتية، أوجد حلا يحقق الشرط الحدى المعطى :

١٤ - $\frac{dy}{dx}=y^2;\ y=5$ عند $x=2$ ١٥ - $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y};\ y=-3$ عند $x=0$

١٦ - $x^2(3+2y)y'=1;\ y=1$ عند $x=-2$ ١٧ - $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{(x^2-1)^2y};\ y=5$ عند $x=0$

فى المسائل الآتية عين الثابت k بحيث أن المعادلة التفاضلية يكون لها حل يحقق الشروط الحدية المعطاة وأوجد الحل :

١٨ - $dV/dt=k\sqrt{V};\ V=10$ عند $t=0$ و $V=9$ عند $t=3$

١٩ - $h^2\,dh/dt=k\sqrt{h};\ h=1$ عند $t=0$ و $h=\frac{1}{4}$ عند $t=8$

٢٠ - $f'(t)=4k/f(t);\ f(0)=0,\ f(-1)=2$

٢١ - $dy/dx=kxy^3;\ y=-4$ عند $x=0$ و $y=-\frac{1}{2}$ عند $x=1$

٢٢ - حقق أن التعبير لـ V فى (١٠)، مثال ٣، هو حل للمعادلة التفاضلية (١٢) عندما $k=72(3-\sqrt{10})$.

٢٣ - أوجد صيغة صريحة للحل فى مثال ١ وحقق بالتعويض المباشر أنه حل للمعادلة التفاضلية (٧).

٢٤ - أثبت أن الدالة $f(x)$ المعرفة ضمنياً بالمعادلة $y^2+(x-a)^2=a^2$ هى حل للمعادلة التفاضلية

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\left(\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}\right)^2$$

٢٥ ـ حل المعادلة التفاضلية $y' = (3x^4 - 4)/(y^2x^2 + 4x^2)$ وحقق أن الاجابة هى حل .

٢٦ ـ أوجد معادلة منحنى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو x/y ويمر بالنقطة $(4, 2)$.

٢٧ ـ أوجد معادلة المنحنى الذى ميله عند أى نقطة (x, y) عليه هو $(y/x)^2 - 5xy^2$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$.

٢٨ ـ أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 3\sqrt{y'}$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقطة $(0, 3)$ بميل 4 هناك .

٢٩ ـ أوجد المعادلة $y = g(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 6x$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقط $(-1, 2)$ و $(2, 6)$ و $(1, 3)$.

٣٠ ـ أوجد المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى بحيث أن $y'' = 2/\sqrt[3]{x}$ عند كل نقطة (x, y) عليه ويمر بالنقط $(-1, 0)$ و $(1, 2)$ و $(0, 1)$.

٣١ ـ سرعة نقطة تتحرك على خط الاحداثيات تتناسب مع مربع بعدها s عن نقطة الأصل . اذا كانت $5 = 2$ عند $t = 0$ وكانت $s = 4$ عند $t = 5$ ، ما هى المسافة s عند $t = 9$ ؟ ما هى السرعة عند $t = 9$ ؟

٣٢ ـ قارب مزود بمحرك يسير فى خط مستقيم يبطل محركه على مسافة ما قبل الرصيف حيث يريد الوقوف . بعد ابطال المحرك تكون سرعة القارب تساوى $\frac{1}{4}\sqrt{100 - s}$ ft/sec حيث s هى المسافة التى قد أبحرها . اذا كان القارب مجرد يصل الى الرصيف ، ما الزمن الذى يأخذه ليفعل ذلك ؟

٣٣ ـ صهريج زيت اسطوانى قائم نصف قطره 3 ft وارتفاعه 8 ft يفرغ خلال ثقب فى القاع . اذا كان فى الأصل الصهريج مليء بالزيت وبعد 15 min فرغ لنصفه ، ما مقدار الزيت الذى يبقى بعد 30 min ؟ متى يكون الصهريج فارغاً ؟

٣٤ ـ صهريج بيولوجى بحرى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته 3×4 ft وعمقه 3 ft . الصهريج ، فى الأصل كان مليئاً ، ويفرغ خلال ثقب فى القاعدة . عندما يصل مستوى الماء العلامة 2-ft وذلك يستغرق 15 min ، يترك الثقب مفتوحاً ويضاف ماء جديد بمعدل ثابت ليحتفظ بمستوى الماء عند هذه العلامة ، ما هو هذا المعدل ؟

٣٥ ـ ينسكب الرمل من قادوس مخروطى من ثقب فى القاعدة . ارتفاع القادوس هو 6 ft ، ونصف قطر قمته هو 3 ft . اذا كان فى الأصل القادوس ملآن وهبط مستوى الرمل 2 ft فى الدقيقتين الأوليين ، فمتى يكون القادوس فارغاً ؟ (ارشاد : الحل يكون أسهل اذا اخترنا الارتفاع وليس الحجم كمتغير مستقل .)

٣٦ ـ دن (وعاء ضخم) نصف كروى نصف قطره 4 ft ينزح خلال ثقب فى القاع . اذا كان الوعاء فى الأصل مليء بالماء وبعد 20 min كان عمق السائل 3 ft ، متى يصبح الوعاء فارغاً ؟ (ارشاد : حجم القطعة الكروية التى ارتفاعها h هى $\pi h^2(3a - h)/3$ حيث a نصف قطرة الكرة .)

٣٧ ـ نصف القطر r لدائرة ، الذى كان أولا 2 ft بدأ فجأة فى الزيادة بمعدل $\sqrt{r}$ ft/ min . ما معدل زيادة مساحة الدائرة بعد 8 min ؟

٣٨ ـ طبقاً لقانون نيوتن للجاذبية ، يكون الجسم الساقط فى الفراغ نحو الأرض عجلة تتناسب عكسياً مع s^2 ، حيث s هى بعده عن مركز الأرض . بفرض أن الجسم بدأ من السكون بعيداً فى الفراغ ، اثبت أن سرعته تتناسب عكسياً مع $\sqrt{s}$.

ارشاد : $\left(\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} \right)$.

٣٩ ـ طبقاً لقانون نيوتن للجاذبية ، يتجاذب جسمان كرويان متجانسان كتلتاهما M و m بقوة تساوى GmM/r^2 ، حيث r هى المسافة بين مركزيهما وحيث G هى الثابت العام للجاذبية ، الذى تعتمد قيمته على الوحدات المستخدمة فقط . بفرض أنه لا توجد مقاومة للهواء ، أثبت أن أقل سرعة تقذف بها قذيفة كتلها m من الأرض الى الفراغ ولا ترجع أبداً هى $\sqrt{2gR}$ ، حيث g هى عجلة الجاذبية وحيث R نصف قطر الأرض . هذه السرعة ، التى هى حوالى 7 miles/ sec تسمى سرعة الافلات

(ارشاد : $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$ ، عند سطح الأرض قوة الجذب بين القذيفة والأرض هى mg . واذن G يمكن تعيينها بدلالة R و g وكتلة الأرض M . اذا كانت القذيفة لا ترجع ثانية ، فالسرعة يجب أن تكون دائماً موجبة .)

الفصل الخامس

التكامل المعين

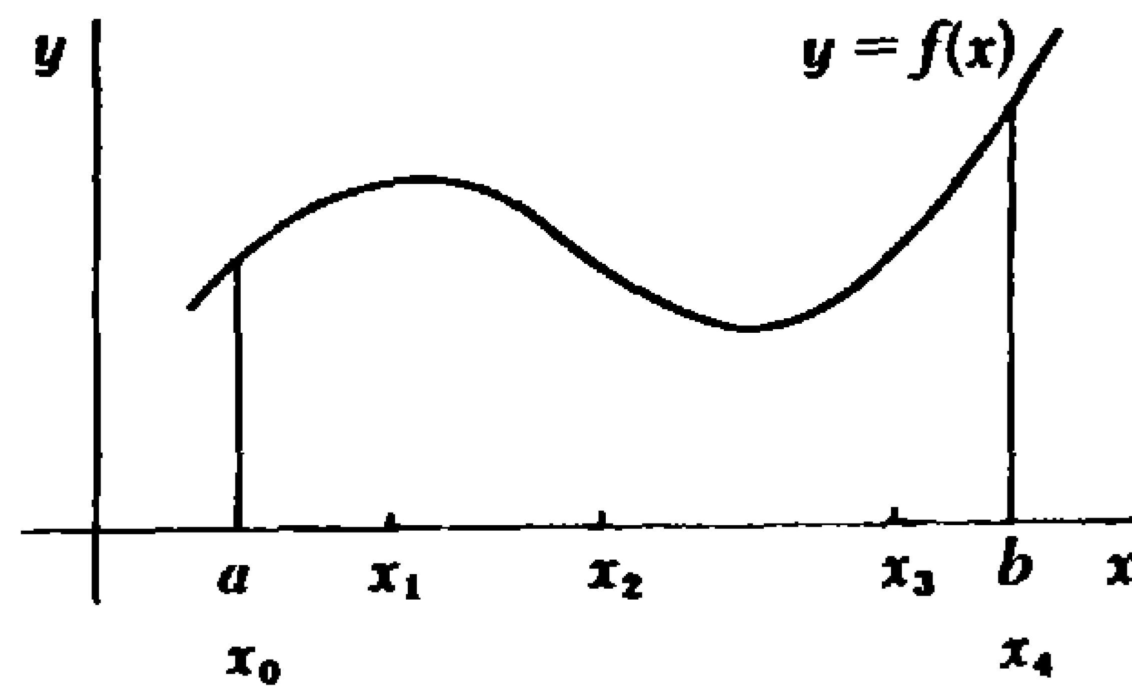
٥ ـ ١

التكامل المعين

الآنَ ننتقل من النهايات والمشتقات الى موضوع مختلف تماماً هو ايجاد مساحة منطقة . نبدأ بالحالة البسيطة للمنطقة تحت الشكل البيانى للدالة $y = f(x)$ وفوق المحور السينى وبين الخطين المستقمين الرأسيين $x = b$ و $x = a$ (شكل ٥ ـ ١) للتبسيط ، سنشير الى هذه المنطقة بأنها « المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين b و a »

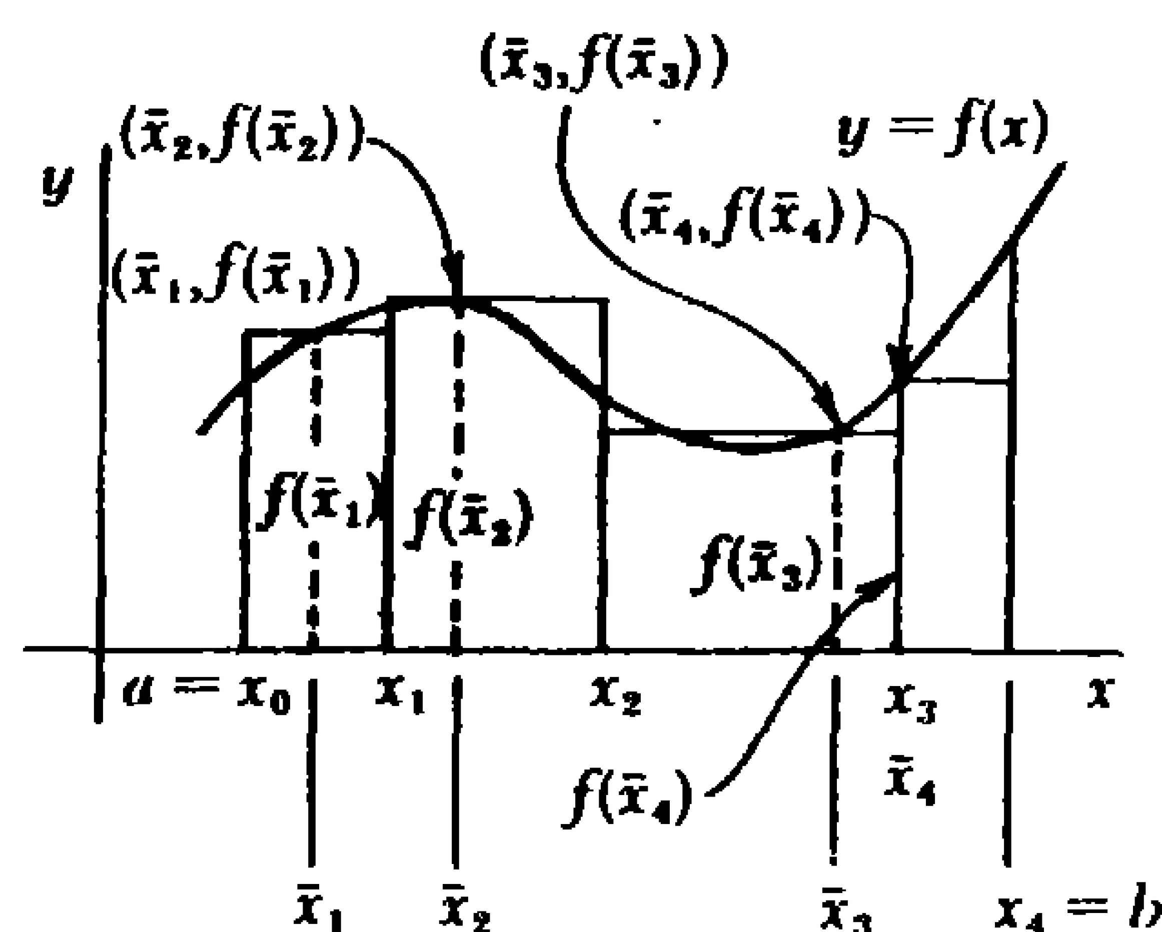
نعالج المسألة لايجاد مساحة المنطقة بأن نوجد أولا تقريباً الى المساحة . من الطبيعى أن هذا سيؤدى الى المساحة المضبوطة . نقسم الفترة $[a, b]$ الى أربع فترات جزئية باختيار النقط x_1, x_2, x_3 على المحور السينى بين b و a ، كما هو موضح فى شكل ٥ ـ ١ . ليس من الضرورى أن تكون على مسافات متساوية . من الملائم أن نأخذ $b = x_4$ و $a = x_0$. نقط التقسيم x_1, x_2, x_3 تقسم $[a, b]$ الى الفترات الجزئية الأربع

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4]$$



شكل ٥ ـ ١

اختر أى نقطة $\bar{x}_1$ فى الفترة الجزئية $[x_0, x_1]$ وكون المستطيل الذى قاعدته هى القطعة $[x_0 x_1]$ وارتفاعه هو $f(\bar{x}_1)$ ، كما هو موضح فى شكل ٥ ـ ٢ . طول القاعدة هو $x_1 - x_0$ ومساحة المستطيل هى $f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0)$. فى الفترة الجزئية الثانية $[x_1, x_2]$ اختر نقطة $\bar{x}_2$ وكون المستطيل الذى قاعدته هى القطعة $[x_1 x_2]$ وارتفاعه هو $f(\bar{x}_2)$. مساحة هذا المستطيل هى $f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1)$. كرر هذه العملية مع الفترتين الجزئيتين الباقيتين ، فنحصل فى الجملة على أربعة مستطيلات . كل نقطة $\bar{x}_i$ يمكن أن تكون عند أى مكان فى فترتها الجزئية وقد تكون احدى النقطتين الطرفيتين . فى الشكل ٥ ـ ٢ $\bar{x}_4$ هى عند النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_3, x_4]$.



شكل ٥ ـ ٢
حاصل جمع مساحات المستطيلات هو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى

مساحة كل مستطيل هى تقريب لمساحة المنطقة تحت ذلك الجزء من المنحنى . حاصل جمع مساحات المستطيلات هو

$$r = f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0) + f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1) + f(\bar{x}_3)(x_3 - x_2) + f(\bar{x}_4)(x_4 - x_3) \quad (١)$$

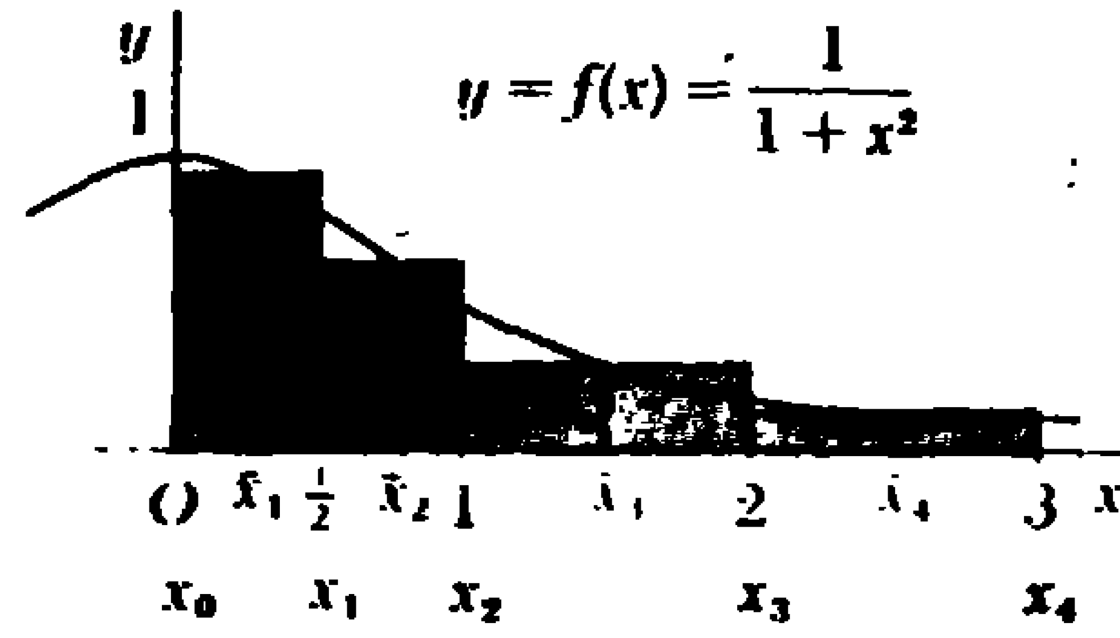
وهو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى بين b و a . دقة التقريب تعتمد على مدى اختصار مساحات المثلثات المنحنية الصغيرة الواقعة بين المنحنى وأعلى المستطيلات ، بعضها مع بعض . هذا بدوره يتعين باختيار نقطة التقسيم x_1, x_2, x_3. والنقط x_1, x_2, x_3, x_4 .

نوضح ذلك بأن نقرب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/(1 + x^2)$ بين 3 و 0 . المنحنى مخطط فى الشكل ٥ ـ ٣ . نستخدم أربعة مستطيلات مقربة تعين بالنقط

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \tfrac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3$$

النقط $\bar{x}_i$ يمكن اختيارها فى أى مكان داخل فتراتها الجزئية الخاصة ، لكن يبدو من الشكل البيانى أننا نحصل على تقريب جيد باختيارهم النقط المنصفة للفترات الجزئية . لذلك نختار

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{4}, \quad \bar{x}_2 = \tfrac{3}{4}, \quad \bar{x}_3 = \tfrac{3}{2}, \quad \bar{x}_4 = \tfrac{5}{2}$$



شكل ٥ـ٣

الدالة المناظرة للمنحنى هى $f(x) = 1/(1+x^2)$ ، ويكون حاصل الجمع (١) لمساحات المستطيلات هو

$$r=f(\tfrac{1}{4})\tfrac{1}{2}+f(\tfrac{3}{4})\tfrac{1}{2}+f(\tfrac{3}{2})1+f(\tfrac{5}{2})1$$
$$=\tfrac{16}{17}(\tfrac{1}{2})+\tfrac{16}{25}(\tfrac{1}{2})+\tfrac{4}{13}(1)+\tfrac{4}{29}(1)=1.236.$$

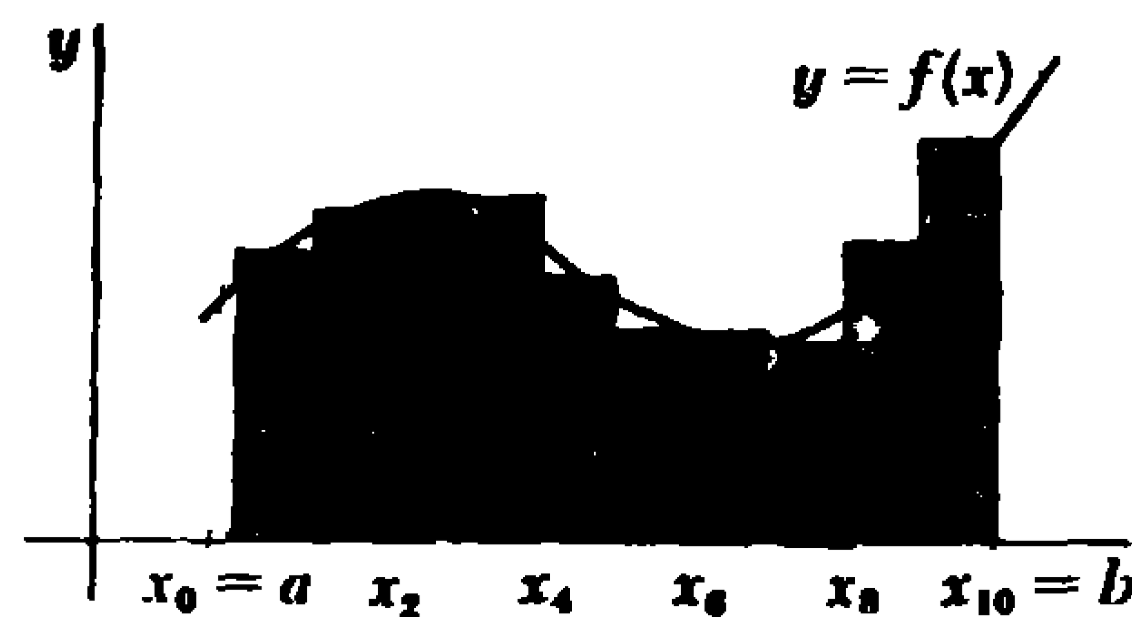
فيما بعد ستتعلم كيف نوجد المساحة المضبوطة للمنطقة . المساحة صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية هى 1.249 . التقريب جيد للغاية .

نعود الى المنطقة فى الشكل ٥ ـ ١ . من الواضح أن دقة التقريب يمكن تحسينها باستخدام مستطيلات أكثر بقواعد أضيق . التقسيمات الجزئية للمنطقة باستخدام 10 مستطيلات موضحة فى الشكل ٥ ـ ٤ .

باختيار عدد كبير كبراً كافياً من المستطيلات ، كل له قاعدة ضيقة جداً ، يمكننا الحصول على تقريب للمساحة دقيق كما نرغب بصرف النظر عن مواضع $\bar{x}_i$.

تقسيم الفترة $[a, b]$ الى عدد محدود من الفترات الجزئية بالنقط

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$



شكل ٥ ـ ٤
التقريب الى المساحة يمكن تحسينه باستخدام مستطيلات أكثر وأضيق

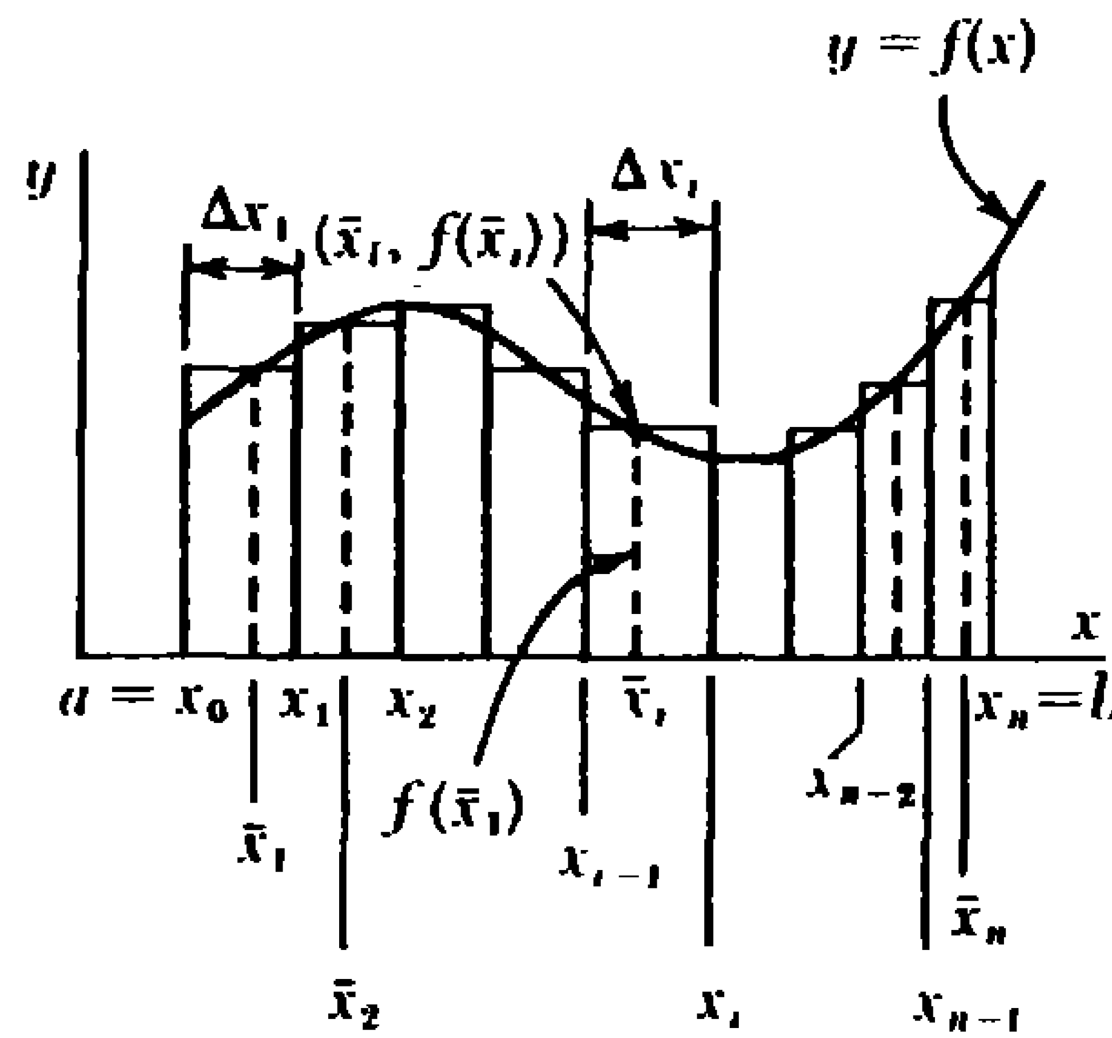
يسمى تجزيئاً للفترة . الرمز لمثل هذا التجزىء هو

$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] \qquad (٣)$$

فمثلا ، تجزىء الفترة $[0, 3]$ المعطى بـ (٢) يرمز له بالرمز $[0,\frac{1}{2},1,2,3]$. حاصل جمع تقريبى للتجزىء المعين بـ (٣) هو

$$r = f(\bar{x}_1)(x_1 - x_0) + f(\bar{x}_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)(x_n - x_{n-1}), \qquad (٤)$$

حيث $\bar{x}_1$ نقطة ما فى الفترة الجزئية الأولى أو احدى نقطتيها الطرفيتين ، $\bar{x}_2$ نقطة فى الفترة الجزئية الثانية أو احدى نقطتيها الطرفيتين ، وهكذا (شكل ٥ ـ ٥) .



شكل ٥ ـ ٥

يمكننا تبسيط الرموز بكتابة $x_1 - x_0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_1 = \Delta x_2$ وبوجه عام $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. عندئذ (٤) تصبح

$$r = f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\bar{x}_n)\,\Delta x_n. \qquad (٥)$$

حاصل جمع على الصورة (٤) أو (٥) التى فيها كل $\bar{x}_i$ تقع فى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ يسمى حاصل جمع *Riemann* للدالة f ، تيمناً بالرياضى الألمانى ج ريمان **G.Riemann** (١٨٢٦ ـ ١٨٦٦) ، الذى كان أول من قام بدراسة دقيقة للتكامل المعين .

حواصل الجمع التى حدودها لها نموذج متكرر ، كما فى (٥) ، تظهر كثيراً فى الرياضيات ، لذلك يستخدم لها عادة رمز مختصر . لشرحه ، يجب الاستطراد .

الرمز $\sum_{i=1}^{5} \frac{i^2}{i+3}$ يقوم مقام حاصل الجمع الذى نحصل عليه باستبدال i فى $i^2/(i+3)$ بالاعداد $1, 2, 3, 4, 5$ على الترتيب ثم جمع الأعداد الناتجة . أى أن ،

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{i^2}{i+3} = \frac{1^2}{1+3} + \frac{2^2}{2+3} + \frac{3^2}{3+3} + \frac{4^2}{4+3} + \frac{5^2}{5+3}$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{9}{6} + \tfrac{16}{7} + \tfrac{25}{8}.$$

الرمز $\sum_{i=3}^{10} i(2i-1)$ يقوم مقام حاصل الجمع الذى نحصل عليه باستبدال i فى $i(2i-1)$ بالاعداد $3, 4, 5, \ldots, 10$ ثم جمع الأعداد الناتجة ، أى أن ،

$$\sum_{i=3}^{10} i(2i-1) = 3(5) + 4(7) + 5(9) + \cdots + 10(19)$$

بالمثل

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

الرمز $\sum_{i=1}^{n} a_i$ يقرأ « حاصل الجمع لـ a_i من $i = 1$ الى n » . حاصل الجمع فى (٥) يمكن كتابته فى الصورة الرمزية لحاصل الجمع هكذا .

$$r = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

الحرف i أو j فى هذه الأمثلة يسمى دليل الجمع . الدليل يأخذ جميع القيم الصحيحة مبتدئاً بالعدد أسفل علامة الجمع Σ ومنتهياً بالعدد أعلى علامة الجمع . لاحظ أن حاصل الجمع يكون مستقلا عن الحرف المستخدم للدليل . مثال ذلك .

$$\sum_{i=3}^{10} i(2i-1) = \sum_{j=3}^{10} j(2j-1)$$

دقة التقريب فى (٥) تعتمد على عرض المستطيلات ، أى على دقة التجزىء . وهذا يمكن التحكم فيه بأن نحدد أن طول أكبر فترة جزئية يكون أقل من كمية معينة . طول أكبر فترة جزئية يسمى **معيار التجزىء** .

نشعر بالبداهة أننا يمكننا التقريب الى المساحة ، بالدقة التى نريدها ، باستخدام حاصل جمع ريمان بأخذ تجزىء معياره صغير صغراً كافياً . من الطبيعى أى معيار معطى لا يعين نظاماً وحيداً من المستطيلات . لأى معيار معطى توجد تجزيئات كثيرة ممكنة ، ولكل منها توجد اختيارات كثيرة لـ $\bar{x}_i$ واذن توجد تقريبات كثيرة ممكنة لأى معيار معطى . لكن اذا كان المعيار صغيراً ، فان هذه التقريبات سوف لا تختلف كثيراً بعضها عن بعض ، ويقل الاختلاف كلما كان المعيار أصغر . فى الواقع ، يوجد عدد c ، نتوقع أنه المساحة ، تتجمع حوله التقريبات وتقترب منه أكثر فأكثر كلما صغر المعيار . نشير الى هذا بالرمز

$$c = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

حيث w هى المعيار . بسبب وجود حواصل جمع ريمان كثيرة $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ لكل معيار ، فهذه لا تكون نهاية بالمعنى العادى وهى تحتاج لشرح .

٥ ـ ١ . تعريف لتكن f دالة ولتكن $[a, b]$ فترة . الرمز

$$c = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

يعنى أن لكل جوار V للعدد c ، يوجد عدد δ بحيث أن كل حاصل جمع ريمان $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ لـ f على الفترة $[a, b]$ مبنى على تجزىء معياره w أقل من δ يقع فى V مثل هذا العدد c ، اذا كان موجوداً ، يسمى عدد تجمع لحواصل جمع ريمان .

مع أنه قد يبدو أن عدد التجمع هذا يجب أن يوجد ، لكن هذا غير مؤكد على الاطلاق . هذه الصعوبة هى أننا لم نعرف ما نقصد بالمساحة . مساحة المستطيل يمكن تعريفه كحاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه . لكن كيف نعرف مساحة منطقة حدودها منحنية ؟ احدى الطرق المستخدمة بكثرة فى حساب التفاضل الأولى هى تعريف المساحة بانها عدد التجمع c هذا تعريف معقول ، لكن يجب أولا أن نثبت وجود عدد التجمع . من الممكن تصور أنه لبعض الدوال والمعايير صغيرة جداً حواصل جمع ريمان المقربة لا تتجمع لكن تنتشر فوق فترة صغيرة . بتذكر هذا ، التعريف الآتى له صلة بالموضوع .

٥ ـ ٢ تعريف . الدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ اذا كانت $\lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ موجودة ، أى اذا وجد عدد التجمع . النهاية (عدد التجمع) تسمى التكامل المعين للدالة f من a الى b ويرمز لها بالرمز $\int_a^b f(x)\ dx$. أى أن ،

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل فان التكامل المعين للدالة f يقال أنه موجود .

التكامل المعين يجب ألا يلتبس مع التكامل غير المعين بالرغم من تشابه الرمزين . التكامل المعين هو عدد ، النهاية لحاصل جمع معين ، التكامل غير المعين هو دالة ، المعكوس التفاضلى للدالة f . يوجد ارتباط بين الاثنين ، لكن هذا سيأتى فيما بعد . ينبغى أن نعتبر $\int_a^b f(x)\ dx$ رمزاً ، ولو ثقيلا ، لعدد التجمع c . فى البند ٥ ـ ٣ سوف نتعلم كيف نوجد عدد التجمع وبذلك نوجد المساحة المضبوطة للمنطقة .

لقد قدمنا التكامل المعين كمسألة فى المساحة ، لكن حواصل جمع ريمان يمكن تكوينها لأى دالة f وأى فترة $[a, b]$ حتى ولو كانت حواصل الجمع لا يمكن تفسيرها كتقريبات لمساحة . بوجه خاص ، ليس من الضرورى أن تكون $f(x)$ موجبة لجميع x فى الفترة $[a, b]$. نختار تجزيئاً للفترة ، نختار نقطة $\bar{x}_i$ فى كل فترة جزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، ثم نكون حاصل الجمع $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$

قد يكون موجباً أو سالباً . يمكننا أن نسأل عما إذا كان يوجد عدد تجمع لحواصل الجمع هذه . إذا وجد ، فالتكامل المعين للدالة f يكون موجوداً .

الشروط التى تجعل الدالة قابلة للتكامل معلومة ، إلا أن من المسهب جداً إعطاؤها هنا فى الصورة العامة . لكن يمكننا إعطاء شرط يكفى جداً لاحتياجاتنا .

٥ ـ ٣ نظرية . إذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a, b]$ ، فإنها تكون قابلة للتكامل على الفترة .

برهان هذه النظرية الهامة صعب ، لذلك نؤجله إلى البند ٥ ـ ٩ .

b و a فى الرمز $\int_a^b f(x)\, dx$ تسميان **الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل** . الحرف x يسمى متغير التكامل . يمكن تغييره دون تأثير على قيمة التكامل .
أى أن

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(u)\ du = \int_a^b f(t)\ dt$$

الرمز $\int$ تطويل للحرف S وقد أدخله ليبنز Leibniz ليقوم محل حاصل الجمع *(sum)* .

لتكن f دالة متصلة . من بين جميع حواصل الجمع المرتبطة بالتجزىء المعطى اثنان لهما أهمية خاصة . إذا كانت كل $\bar{x}_i$ تختار بحيث أن $f(\bar{x}_i)$ تكون أكبر قيمة للدالة f فى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، فإن حاصل جمع ريمان المناظر يسمى **حاصل الجمع الأعلى** للدالة f فوق الفترة $[a,b]$ للتجزىء المعطى.مناظراً لذلك ، إذا كانت كل $\bar{x}_i$ تختار بحيث أن $f(\bar{x}_i)$ تكون أصغر قيمة للدالة f فى الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ ، فان حاصل جمع ريمان هو **حاصل الجمع الأدنى** . المستطيلات المرتبطة بحاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى لتجزىء نمطى موضحة فى الشكل ٥ ـ ٤٢ (ببند ٥ ـ ٩) . حاصل الجمع الأعلى u_p وحاصل الجمع الأدنى m_p هما القيمتان القصويان لحواصل جمع ريمان المرتبطة بالتجزىء المعطى p ، وكل حاصل جمع r_p لذلك التجزىء يقع بينهما . أى أن ،

$$m_p \leqslant r_p \leqslant u_p$$

وصحيح أيضاً ، رغم أن البرهان ليس سهلا ، أن .

$$m_p \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant u_p$$

لكل تجزىء p . عندما تكون $f(x)$ موجبة ، وبالتالى التكامل يمثل مساحة ، هذا يكون مقبولا هندسياً .

مثال ١ . أوجد حاصل الجمع الأعلى u_p وحاصل الجمع الأدنى m_p للدالة $f(x) = 9 - x^2$ على الفترة $[-2, 3]$ للتجزىء $p = [-2, -1, 2, 3]$.

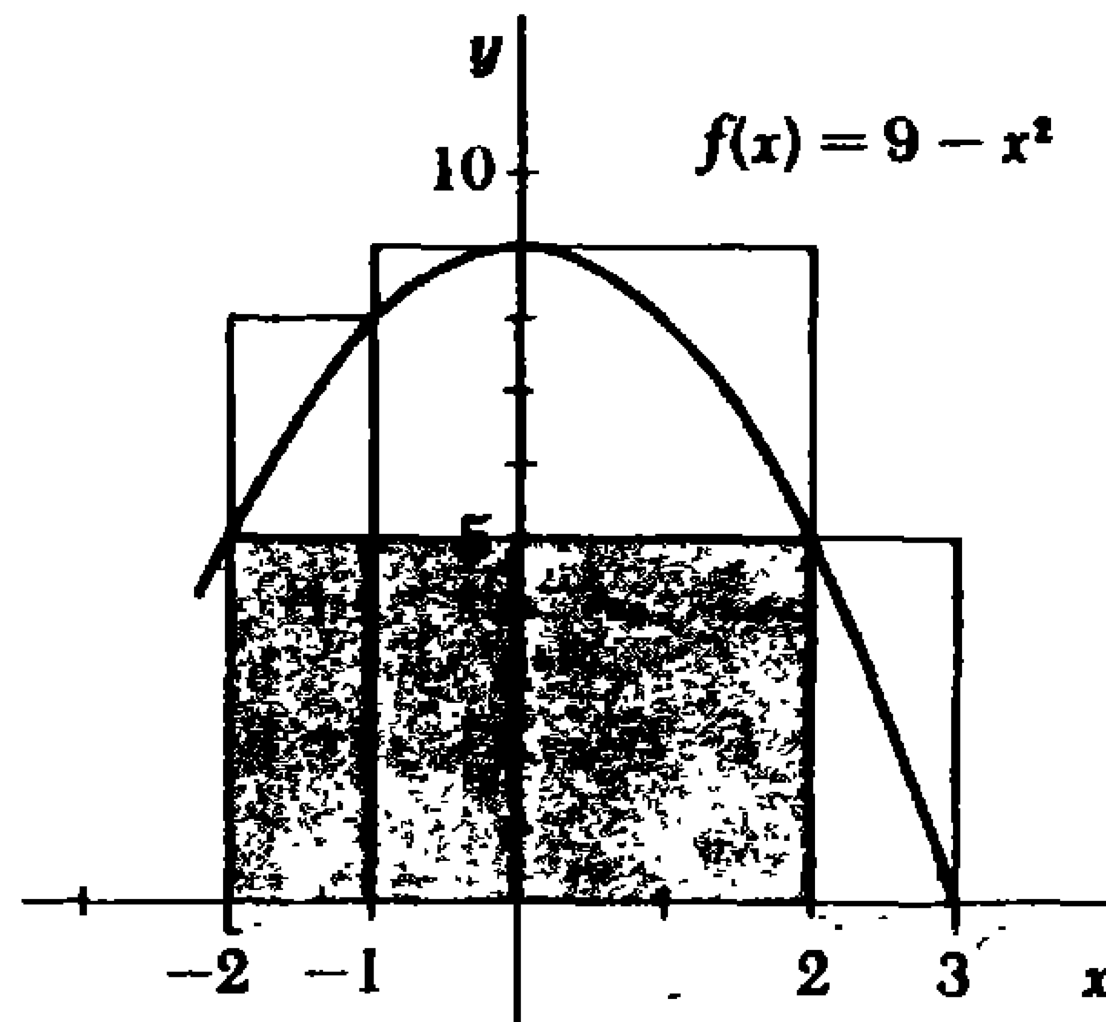
الدالة مخططة فى الشكل ٥ ـ ٦ . القيم الكبرى للدالة فى الفترات الجزئية : $[2, 3]$: و$[-1, 2]$ و$[-2, -1]$ المعينة بالتجزىء تحدث عند $-1, 0, 2$ على الترتيب . إذن

$$u_p = f(-1)(1) + f(0)(3) + f(2)(1)$$
$$= 8(1) + 9(3) + 5(1) = 40.$$

حاصل الجمع الأدنى يوجد باستخدام القيم الصغرى للدالة f فى الفترات الجزئية :

$$m_p = f(-2)(1) + f(2)(3) + f(3)(1)$$
$$= 5(1) + 5(3) + 0(1) = 20.$$

القيمة الصحيحة لـ $\int_{-2}^{3} f(x)\, dx$ هى $33\frac{1}{3}$. هذا هو عدد التجمع لحواصل جمع ريمان لجميع التجزيئات للفترة $[-2, 3]$. لاحظ أنها تقع بين حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للتجزىء p .



شكل ٥ ـ ٦

مسائل

جدول الجذور والمقلوبات فى التذييل ب يفيد فى حساب قيم الدوال فى المسائل أدناه

أوجد مفكوك حواصل الجمع الآتية :

١ - $\sum_{i=1}^{n} i$

٢ - $\sum_{i=3}^{m} i^2$

٣ - $\sum_{j=0}^{6} (3j^2 - 5j + 1)$

٤ - $\sum_{i=1}^{5} (ai + b)^2$

٥ - $\sum_{a=1}^{5} (ai + b)^2$

٦ - $\sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

أكتب حواصل الجمع الآتية فى الصورة الرمزية لحواصل الجمع

٧ - $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}$

٨ - $1(2)+2(3)+3(4)+\cdots+n(n+1)$

٩ - $z^2+\frac{z^3}{2}+\frac{z^4}{3}+\cdots+\frac{z^{11}}{10}$

١٠ - $2+4+6+\cdots+14+16$

١١ - $4+7+10+13+\cdots+22$

١٢ - $\frac{3(2)}{4(2)+1}+\frac{3(3)}{4(3)+1}+\frac{3(4)}{4(4)+1}+\cdots+\frac{3m}{4(m)+1}$

١٣ - بسط حاصل الجمع $\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})$

١٤ - أثبت أن $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$

١٥ - أثبت أن $\sum_{i=1}^{n}ka_i=k\sum_{i=1}^{n}a_i$

١٦ - أثبت أن $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\leqq\sum_{i=1}^{n}|a_i|$

١٧ - أوجد قيمة $\sum_{i=1}^{n}a$

أوجد تجزيئاً للفترات الآتية إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول ، للعد المعطى n :

١٨ - $[-6,12];\ n=6$ ١٩ - $[-10,-8];\ n=6$ ٢٠ - $[1,12];\ n=7$

٢١ - $[-2,7];\ n=5$ ٢٢ - $[0.3,0.5];\ n=4$ ٢٣ - $[\sqrt{2},5];\ n=3$

٢٤ - احسب حاصل جمع ريمان للدالة $f(x)=x-x^2$ على الفترة $[0,3]$ للتجزىء $[0,1,1.5,2,3]$ ، آخذاً $\bar{x}_1=0.6,\ \bar{x}_2=1.3,\ \bar{x}_3=2,\ \bar{x}_4=2.7$

للدوال الآتية ، أوجد ثلاثة حواصل جمع لريمان للتجزىء المعطى باختيار كل $\bar{x}_i$ بحيث أن (أ) $\bar{x}_i$ هى النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_{i-1},x_i]$ ، (ب) $\bar{x}_i$ هى النقطة الطرفية اليمنى للفترة الجزئية $[x_{i-1},x_i]$ ، (ج) $\bar{x}_i$ هى النقطة المنصفة للفترة الجزئية $[x_{i-1},x_i]$.

٢٥ - $g(x)=9-x^2;\ [-3,-1,1,2,3]$ ٢٦ - $f(x)=1/(x-1);\ [-2,-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2},0]$

٢٧ - $f(x)=\sqrt{t+1};\ [-1,0,1,3,4]$ ٢٨ - $f(x)=1/x^2;\ [-2,-1.6,-1.4,-1.2,-1]$

٢٩ - $h(u)=2/(1+u^2);\ [0,1,2,3,4,5,6]$

خطط الشكل البيانى للدول الآتية على الفترة المشار اليها . أوجد حواصل الجمع الأعلى والأدنى المرتبطة مع التجزىء المعطى ووضح المستطيلات المناظرة على الشكل التخطيطى . قارن

حواصل الجمع الأعلى والأدنى بقيمة التكامل . يجب أن تقع بينهما ، إذا كانت $f(x)$ موجبة ومتصلة فى الفترة ، فإن التكامل يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى .

٣٠ - (أ) $f(x) = \frac{1}{x};\ [1,2,3,4];\ \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = 1.386$

(ب) $f(x) = \frac{1}{x};\ [1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4];\ \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = 1.386$

٣١ - $g(x) = x^2 + 1;\ [-2,-1,0,2,3];\ \int_{-2}^{3} (x^2 + 1)\, dx = \frac{50}{3}$

٣٢ - (أ) $f(z) = \sqrt{z};\ [0,1,2,4,5];\ \int_0^5 \sqrt{z}\, dz = 7.454$

(ب) $f(z) = \sqrt{z};\ [0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,4,5];\ \int_0^5 \sqrt{z}\, dz = 7.454$

٣٣ - $f(x) = 8 + 2x - x^2;\ [-2,-1,2,3,4];\ \int_{-2}^{4} (8 + 2x - x^2)\, dx = 36$

٣٤ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2;\ [1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2];\ \int_1^2 (-\frac{1}{4}x^2 - 2)\, dx = -\frac{31}{12}$

٣٥ - $h(x) = x^2 + x - 6;\ [-1,0,1,3,4];\ \int_{-1}^{4} (x^2 + x - 6)\, dx = -\frac{5}{6}$

٣٦ - $f(x) = x^3 - 9x;\ [0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3];\ \int_0^3 (x^3 - 9x)\, dx = -\frac{81}{4}$

٣٧ - $u(x) = \frac{x}{1 + x^2};\ [0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3];\ \int_0^3 \frac{x}{1 + x^2}\, dx = 1.151$

٣٨ - (أ) $f(x) = [x];\ [1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3];\ \int_1^3 [x]\, dx = 3$

(ب) $f(x) = [x];\ [1,1.5,1.9,2.5,3];\ \int_1^3 [x]\, dx = 3$

٣٩ - لأى تجزىء ، حاصل الجمع الأدنى يعطى تقييماً أقل لمساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى يعطى تقييماً أكبر . كيف يمكن استخدام هذين التقييمين لايجاد تقييم آخر ، عادة أفضل ، للمساحة ؟

٤٠ - خطط الشكل البيانى للدالة $g(x) = 5x - x^2$ فى الفترة $[0, 5]$. أوجد حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للتجزىء $[0, 1, 2, 3, 4, 5]$ للفترة ووضع المستطيلات المناظرة على الشكل التخطيطى . قيم مساحة المنطقة تحت المنحنى بين 5 و 0 .

قرب إلى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية ، بين القيمتين المعطاتين b و a ، بحاصل جمع ريمان . عين من الشكل التخطيطى ، على قدر ما يمكنك ، ما اذا كان تقريبك أكبر أو أقل من المساحة :

٤١ ـ $y = x^2 - 4x + 6; a = 0, b = 3$ ٤٢ ـ $y = x(x-2)^2; a = 1, b = 2$

٤٣ ـ $y = x + 1/x; a = \frac{1}{2}, b = 3$ ٤٤ ـ $y = \sqrt{9 - x^2}; a = 0, b = 3$

٤٥ ـ قرب إلى مساحة المنطقة تحت القطع المكافىء $y = -(x^2 + 4x)$ وفوق المحور السينى .

٤٦ ـ قرب إلى مساحة المنطقة تحت قوس واحد للمنحنى $y = \sin x$ ، (يجب استخدام القياس بالتقدير الدائرى .)

٤٧ ـ أوجد تقريباً لمساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x^2 - 2x + 2$ بين 1 و 0 ويكون صحيحاً إلى 0.1 .

٤٨ ـ أوجد قيمة $\int_0^7 \frac{x}{2}\,dx$ باعتبار التكامل مساحة المنطقة تحت المنحنى .

٤٩ ـ خطط الشكل البيانى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ لقيم x فى الفترة $[-2, 3]$. الفترة يمكن اعتبارها تجزيئاً لنفسها بفترة جزئية واحدة $[-2, 3]$. أوجد حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى للدالة f لهذا التجزيء ووضحهما على الشكل البيانى .

٥٠ ـ مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ من 0 الى 4 تقيم بحساب حاصل الجمع الأدنى لتجزيء الفترة $[0, 4]$ بثمان فترات جزئية . كيف ينبغى اختيار الفترات الجزئية للحصول على تقييم جيد ؟

٥١ ـ لأى دوال تكون مساحة المنطقة تحت الشكل البيانى تعطى بالضبط بكل حاصل جمع أدنى وأعلى ؟

٥٢ ـ لتكن g و f دالتين ولتكن k مقداراً ثابتاً . ضع

$$v(x) = kf(x) \text{ و } u(x) = f(x) + g(x)$$

لأى تقسيم للفترة $[a, b]$ واختيار $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$

لتكن $r(f), r(g), r(u)$ و $r(v)$ حواصل جمع ريمان لـ f, g, u, v . أثبت أن $r(u) = r(f) + r(g)$ و $r(v) = kr(f)$ وأنه إذا كانت $f(x) \leq g(x)$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $r(f) \leq r(g)$.

٥٣ ـ إذا كانت الدالة f مطردة الزيادة فى الفترة $[a, b]$ فأثبت أن لأى تجزيء p للفترة $[a, b]$ ، يكون

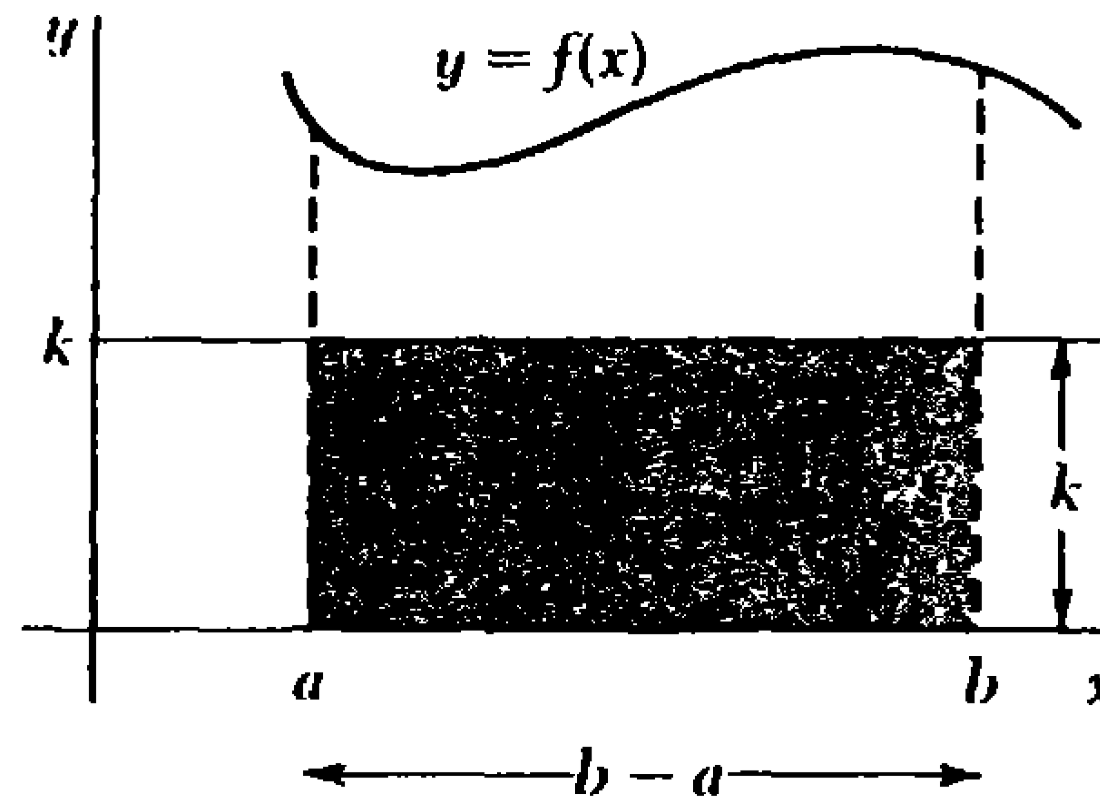
$$u_p - m_p \leq [f(b) - f(a)]w$$

حيث m_p و u_p هما حاصلا الجمع الأعلى والأدنى للدالة f للتجزيء وحيث w هى معيار التجزيء .

٥ ـ ٢
نظريات التكامل

رغم أن قيمة التكامل المعين يمكن إيجادها أحياناً بحساب مباشر للتعبير $\lim_{w\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i$، فإن هذا ممل ومحدود لدوال بسيطة . توجد طريقة ممتازة وعامة لحد بعيد ، لكن لدراستها نحتاج الى نظريتين . لأن هاتين النظريتين تعكسان أفكارنا البديهية عن المساحة ، فهما تعطيان توضيحاً إضافياً على أن التكامل المعين هو فعلا يقيس مساحة منطقة . النظرية الأولى تنص على أنه إذا كان المنحنى يقع فوق خط أفقى ، فإن مساحة المنطقة تحت المنحنى تكون أكبر من مساحة المنطقة تحت الخط المستقيم (شكل ٥ ـ ٧) .

مساحة المنطقة تحت المنحنى $\int_a^b f(x)\, dx$



مساحة المستطيل = $k(b - a)$

شكل ٥ ـ ٧
مساحة المنطقة تحت المنحنى أكبر من مساحة المستطيل

٤ ـ ٥ . تمهيدية لتكن f دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، حيث $a < b$ ، ولتكن k مقداراً ثابتاً .

(أولا) إذا كانت $f(x) \geqslant k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فعندئذ يكون

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant k(b-a)$$

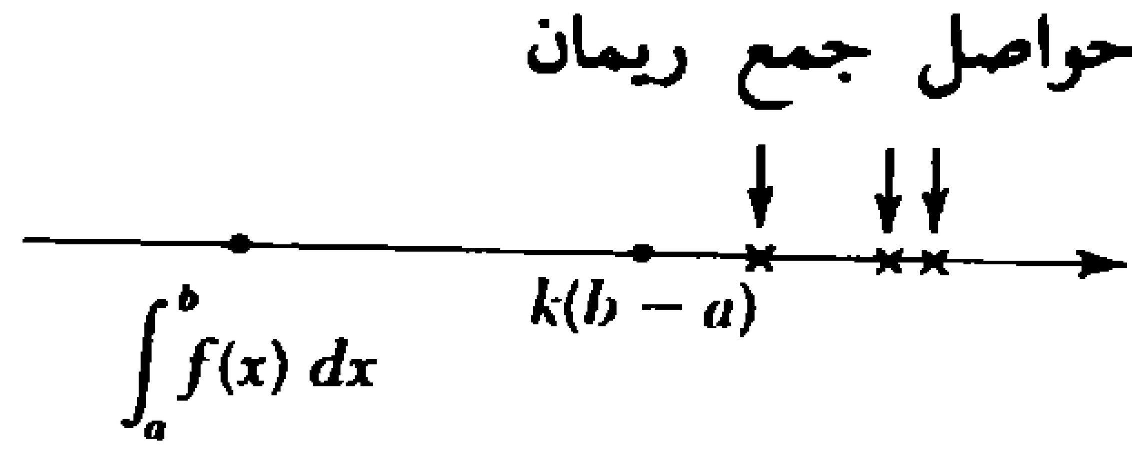
(ثانياً) إذا كانت $f(x) \leqslant k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ فعندئذ يكون

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqslant k(b-a)$$

البرهان . (أولا) بما أن $f(x) \geqslant k$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ فإن $f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i \geqslant k\, \Delta x_i$ لأى تجزىء للفترة $[a, b]$ ولأى اختيار لـ $\bar{x}_i$ ، إذن

$$f(\bar{x}_1)\,\Delta x_1 + f(\bar{x}_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\bar{x}_n)\,\Delta x_n$$
$$\geqslant k\,\Delta x_1 + k\,\Delta x_2 + \cdots + k\,\Delta x_n$$
$$= k(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_n) = k(b-a),$$

حيث التساوى الأخير يكون صحيحاً لأن حاصل جمع أطوال الفترات الجزئية يساوى طول الفترة $[a, b]$. المتباينة تنص على أن كل حاصل جمع ريمان يكون أكبر من أو يساوى $k(b-a)$. هذا يدل على أن $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant k(b-a)$. لأنه إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx$ أقل من $k(b-a)$ ، فإن حواصل جمع ريمان ، وهى أكبر من أو تساوى $k(b-a)$ ، لا يمكنها أن تتجمع حول التكامل (شكل ٥ ـ ٨) . برهان (ثانياً) مماثل .



شكل ٥ ـ ٨

إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx$ أقل من $k(b-a)$ ، فإن حواصل
جمع ريمان لا يمكن أن تتجمع حول التكامل

٥ ـ ٥ نتيجة . لتكن f دالة متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، حيث $a < b$.

(أولا) اذا كانت $f(x) \geqslant 0$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

(ثانياً) إذا كانت $f(x) \leqslant 0$ لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$

باعتبار تفسير التكامل كمساحة ، فمن المعقول تعريف

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

أيضاً إذا كانت $a < b$ ، فمن المفيد تعريف

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

ومن ذلك ، يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

وبالتالى (١) تكون صحيحة لجميع b و a .

النظرية الآتية تنص على أنه إذا كانت $a < b < c$ ، فإن مساحة المنطقة تحت المنحنى بين c و a . تساوى مجموع مساحتى المنطقة بين b و a والمنطقة بين c و b . الا أن النظرية صحيحة ، لجميع ترتيبات c و b و a وليس ضرورياً أن تكون الدالة $f(x)$ موجبة .

٥ ـ ٦ . الخاصية الجمعية للتكامل. إذا كانت الدالة f متصلة فى فترة تحتوى الأعداد c و b و a ، فعندئذ يكون

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

البرهان . بما أن f متصلة ، فلا يوجد سؤال عن وجود التكاملات الثلاثة . علينا فقط توضيح صحة السؤال .

نبرهن أولاً الحالة $a < b < c$. الحالات الأخرى ستتبع منها بسهولة . لتكن ϵ أى عدد موجب .

بما أن $\int_a^c f(x)\, dx$ موجود ، فحواصل جميع ريمان للدالة f على $[a, c]$ تتجمع حول التكامل . طبقاً للتعريف ٥ ـ ١ ، هذا يعنى وجود عدد δ_1 بحيث أن كل حاصل ريمان R_{ac} للدالة f على $[a, c]$ مبنى على تجزىء معياره أقل من δ_1 يقع فى الجوار

$$\left(\int_a^c f(x)\, dx - \frac{\epsilon}{3}, \int_a^c f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{3}\right)$$

لـ $\int_a^c f(x)\, dx$. أى أن ،

$$\int_a^c f(x)\, dx - \frac{\epsilon}{3} < R_{ac} < \int_a^c f(x)\, dx + \frac{\epsilon}{3}$$

الذى يدل على أن

$$\left|R_{ac} - \int_a^c f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (٢)$$

بالمثل ، يوجد عدد δ_2 بحيث أن كل حاصل جمع ريمان R_{ab} للدالة f على الفترة $[a, b]$ مبنى على تجزىء معياره أقل من δ_2 يحقق المتباينة

$$\left|R_{ab} - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (٣)$$

وأخيراً ، يوجد عدد δ_2 بحيث أن تحت شروط مشابهة يكون

$$\left|R_{bc} - \int_b^c f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (٤)$$

لتكن δ أصغر الأعداد δ_3 و δ_2 و δ_1 . اختر تجزيئين للفترتين $[b, c]$ و $[a, b]$ معيار كل منهما أقل

من δ . معاً يكونان تجزيئاً للفترة $[a, c]$ معياره أقل من δ . ليكن R_{bc} و R_{ab} حاصلا جمع ريمان للدالة f على الفترتين $[b, c]$ و $[a, b]$ للتجزيئين المشار إليهما . حاصل الجمع لهما هو حاصل جمع ريمان R_{ac} للدالة f على الفترة $[a, c]$ ، ويكون

$$R_{ac} = R_{ab} + R_{bc} \qquad (٥)$$

ولكل حواصل جمع ريمان هذه ، المتباينات فى (٢) و (٣) و (٤) تظل صحيحة . من (٥) ، يكون $R_{ac} - R_{ab} - R_{bc} = 0$ ، وإذن

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \left[R_{ac} - \int_a^c f(x)\,dx\right] - \left[R_{ab} - \int_a^b f(x)\,dx\right] - \left[R_{bc} - \int_b^c f(x)\,dx\right]$$

القيمة المطلقة لحاصل جمع أو فرق أعداد أقل من أو يساوى حاصل جمع القيم المطلقة (المسألة ٣٦ ، بند ١ ـ ٥) . وبناء على ذلك ، من (٢) و(٣) و(٤) يكون

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right| \leq \left|R_{ac} - \int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|R_{ab} - \int_a^b f(x)\,dx\right| + \left|R_{bc} - \int_b^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad (٦)$$

العدد الممثل بالسطر الأول من (٦) ليس سالباً ، والمتباينة تقول أنه أقل من كل عدد موجب ϵ . فهو يجب أن يكون صفراً . ومن ثم يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = 0$$

والنتيجة فى النظرية تتبع للحالة $a < b < c$.

نفرض الآن أن $a < c < b$. بما أن c بين a و b ، لدينا بالحالة المبرهنة حالا أن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

باستخدام (١) ، هذا يمكن كتابته

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

والنتيجة تتبع . الترتيبات الأخرى لـ c و b و a تعالج بالمثل .

مسائل

١ ـ اثبت أن $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ لأى ثابت k . اعط تفسيراً هندسياً لهذه المعادلة عندما k تكون موجبة .

٢ ـ أثبت التمهيدية ٥ ـ ٤ (ثانياً)

٣ ـ استخدم الحالة $a < b < c$ التى سبق إثباتها لاثبات الخاصية الجمعية للتكامل ٥ ـ ٦ إذا كانت $b < c < a$.

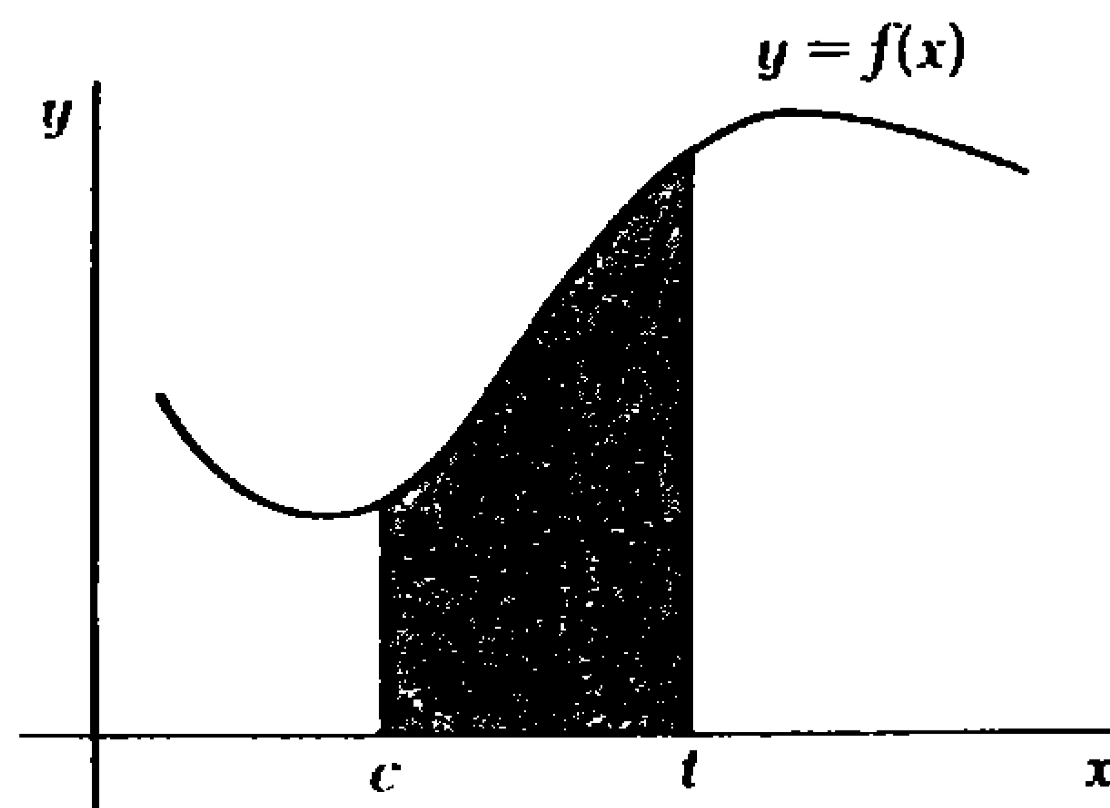
٥ ـ ٣
النظرية الأساسية للتكامل

لتكن f دالة متصلة فى الفترة I ، التى قد تكون لا نهائية ، ولتكن c أى عدد فى I. لجميع t فى I ، الدالة f تكون متصلة فى الفترة الجزئية $[c, t]$ (أو $[t, c]$ إذا كانت $t < c$) ، وبالنظرية ٥ ـ ٣ التكامل $\int_c^t f(x)\,dx$ يوجد . توجد قيمة للتكامل لكل t ، التى إذا كانت $f(x)$ موجبة لكانت $t > c$ ، تمثل مساحة المنطقة تحت الشكل البيانى بين t و c (شكل ٥ ـ ٩) . بما أنه يعتمد على t ، فهو دالة لـ t نرمز لها بالرمز F :

$$F(t) = \int_c^t f(x)\,dx$$

فمثلا اذا كانت

$$F(t) = \int_{-1}^t x^2\,dx$$



شكل ٥ ـ ٩

لكل $t > c,\ F(t) = \int_c^t f(x)\,dx$

هى مساحة المنطقة تحت المنحنى بين t و زلا

فكما سنرى بعدما نتعلم كيف نوجد قيم التكاملات المعينة

$$F(t)=\int_{-1}^{t} x^2\,dx=\tfrac{1}{3}t^3+\tfrac{1}{3}$$

ومن ذلك يكون

$$F(3)=\int_{-1}^{3} x^2\,dx=\tfrac{28}{3},\qquad F(-1)=\int_{-1}^{-1} x^2\,dx=0$$

و

$$F(-2)=\int_{-1}^{-2} x^2\,dx=-\tfrac{7}{3}$$

خاصية هامة للدالة F هى أنها لها مشتقة فى كل مكان فى I وأن $F'(t)=f(t)$. هذه الخاصية سوف تمكننا من ايجاد قيم التكاملات المعينة .

٥ ـ ٧ . نظرية لتكن f دالة متصلة فى الفترة I ولتكن c أى عدد فى I . كون الدالة $F(t)=\int_c^t f(x)\,dx$ ، المعرفة لجميع t فى I . فيكون F لها مشتقة وهذه المشتقة هى

$$F'(t)=\frac{d}{dt}\int_c^t f(x)\,dx=f(t)$$

البرهان . يجب اثبات أن

$$F'(t)=\lim_{z\to t}\frac{F(z)-F(t)}{z-t}=f(t)$$

لكل t و z فى I ، لدينا بالخاصية الجمعية للتكامل ٥ ـ ٦

$$\begin{aligned}F(z)=\int_c^z f(x)\,dx&=\int_c^t f(x)\,dx+\int_t^z f(x)\,dx\\&=F(t)+\int_t^z f(x)\,dx\end{aligned}$$

ومن ثم

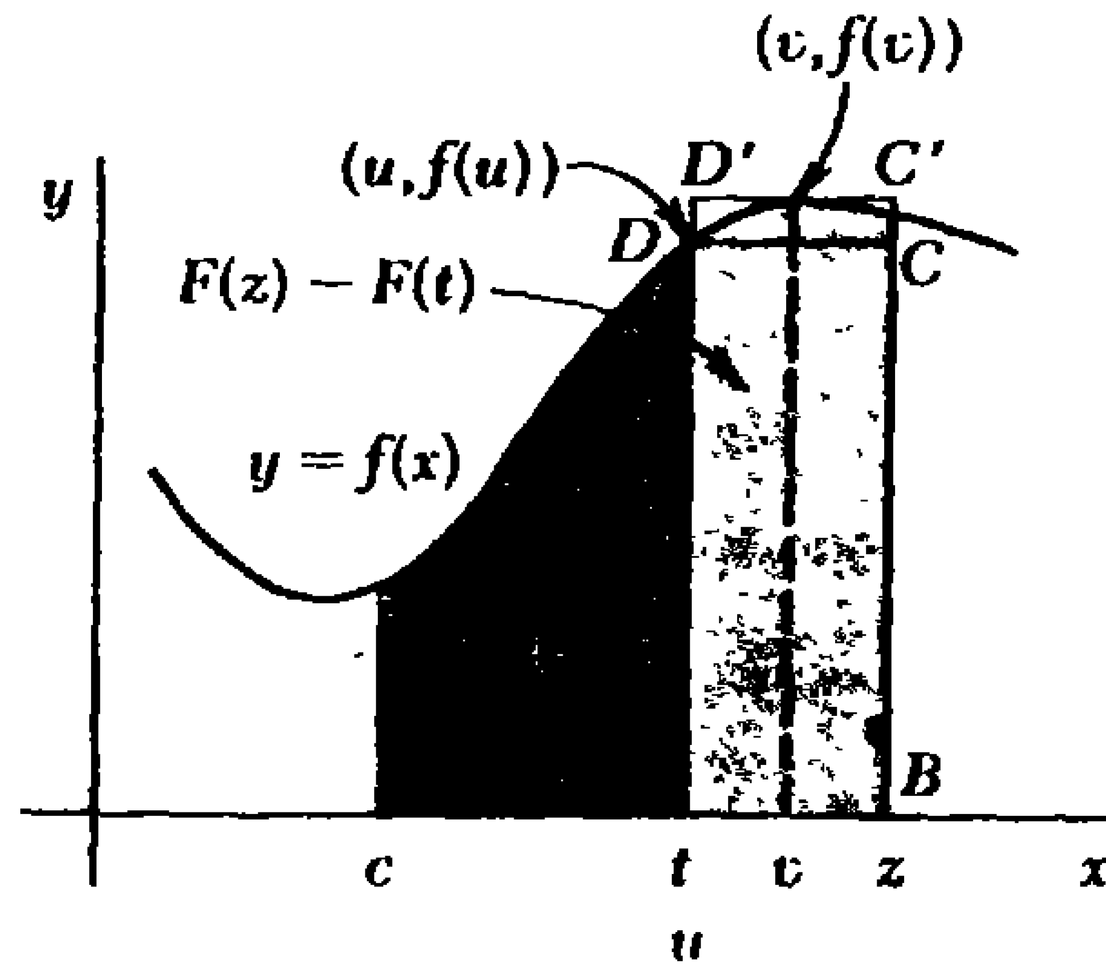
$$F(z)-F(t)=\int_t^z f(x)\,dx \qquad (١)$$

يمكننا أن نرى من الشكل ٥ ـ ١٠ أن $F(z)-F(t)$ تمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى بين z و t اذا كانت $f(x)$ موجبة وكان $c<t<z$ الا أن المعادلة (١) صحيحة ، لأى دالة متصلة f وأى z و t فى I.

لتكن القيمتان الصغرى والعظمى للدالة f فى الفترة $[t, z]$ تحدثان عند v و u ، فيكون

$$f(u)\leqslant f(x)\leqslant f(v)$$

لجميع x فى $[t, z]$ ، حيث $t\leqslant u\leqslant z,\ t\leqslant v\leqslant z$ ، واذن من التمهيدية ٥ ـ ٤ (أولا) و (ثانياً) ، يكون



شكل ٥ ـ ١٠
$F(t)$ و $F(z)$ هى مساحتا المنطقتين تحت المنحنى بين t و c و z و c.

$$f(u)(z-t) \leqslant \int_t^z f(x)\, dx \leqslant f(v)(z-t)$$

باستبدال التكامل بـ $F(z) - F(t)$ ، كما هو معطى فى (١) ، يكون

$$f(u)(z-t) \leqslant F(z) - F(t) \leqslant f(v)(z-t) \qquad (٢)$$

هذا يخبر بأن المساحة تحت المنحنى فى الشكل ٥ ـ ١٠ بين z و t تقع بين مساحتى المستطيلين $ABC'D'$ و $ABCD$.

من (٢) لدينا

$$f(u) \leqslant \frac{F(z) - F(t)}{z-t} \leqslant f(v) \qquad (٣)$$

لقد افترضنا ضمنياً أن $z > t$ ، لكن استدلال مماثل يوضح أن (٣) هى صحيحة أيضاً اذا كانت $z < t$. العددان v و u يعتمدان على z وواضح أنهما يقتربان من t كلما تفعل z ذلك . حيث أن f متصلة عند t فيكون

$$\lim_{z\to t} f(u) = f(\lim_{z\to t} u) = f(t)$$

$$\lim_{z\to t} f(v) = f(\lim_{z\to t} v) = f(t)$$

حينئذ بنظرية الحصر ٢ ـ ٢٤ ، نهاية الكمية الوسطى فى (٣) توجد وتساوى $f(t)$. وبناء على ذلك ، يكون

$$F'(t) = \lim_{z\to t} \frac{F(z) - F(t)}{z-t} = f(t)$$

جزء من هذه النظرية من وجهات نظر مختلفة يستوجب النص عليه .

٥ ـ ٨ نتيجة . الدالة المتصلة فى فترة لها معكوس تفاضلى عند كل نقطة بالفترة .

البرهان . لقد أثبتنا حالا أن الدالة $F(t) = \int_c^t f(x)\ dx$ هى معكوس تفاضلى للدالة المتصلة f .

رغم أن النتيجة تقول أن الدالة المتصلة لها معكوس تفاضلى ، الا أنها لا تقل أن هذا المعكوس له صورة جميلة . عندما نتذكر أن الدالة هى تناظر ، القاعدة الخاصة به قد لا تكون معطاة بمعادلة ، فهذا لا يثير الدهشة . فى الواقع ، توجد دوال كثيرة معروف أن معكوسها التفاضلى لا يمكن التعبير عنه بدلالة الدوال المألوفة . أحدها هو المعكوس التفاضلى لـ $1/\sqrt{(1-x^2)(4-x^2)}$. النظرية القادمة تمدنا بطريقة عملية لقييم التكاملات المعينة .

٥ ـ ٩ النظرية الأساسية للتكامل . لتكن f دالة متصلة فى الفترة I ولتكن b و a عددين فى I . لتكن G أى معكوس تفاضلى لـ f ، فيكون

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(a)$$

البرهان لقد رأينا أن الدالة

$$F(t) = \int_a^t f(x)\ dx \qquad (٤)$$

هى معكوس تفاضلى لـ f . لذلك يوجد ثابت C بحيث أن $F(t) = G(t) + C$ لجميع t فى الفترة $[a,b]$. من (٤) ، يكون

$$F(a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0 \quad \text{و} \quad F(b) = \int_a^b f(x)\ dx$$

وبالتالى

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx &= F(b) = F(b) - F(a)\\ &= [G(b)+C] - [G(a)+C] = G(b) - G(a)\end{aligned}$$

النظرية الأساسية للتكامل تربط التكامل المعين بالتكامل غير المعين . العلاقة الشديدة بينهما تبرر التشابه بين أسميهما ورمزيهما . النظرية تقول أنه لايجاد قيمة $\int_a^b f(x)\ dx$ نأخذ أى معكوس تفاضلى G للدالة f ونوجد العددين $G(a)$ و $G(b)$. قيمة التكامل هى $G(b) - G(a)$.

مثال ١ . أوجد التكامل المعين $\int_{-1}^3 x^2\ dx$ نأخذ أى معكوس تفاضلى لـ x^2 وليكن $G(x) = x^3/3$ ونوجد $G(-1)$ و $G(3)$. قيمة التكامل هى

$$\int_{-1}^3 x^2\ dx = G(3) - G(-1) = 9 - (-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{28}{3}$$

الرمز $G(x)\Big|_a^b$ أو $\Big[G(x)\Big]_a^b$ يمكن استخدامه للاشارة الى أننا سنعوض b و a فى $G(x)$ ثم نطرح . أى أن ،

$$G(x)\Big|_a^b = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

بهذه الرموز يكون

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = 9 - (-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{28}{3}$$

لتوضيح أن هذا الجواب لا يعتمد على اختيار المعكوس التفاضلى ، نوجد قيمة التكامل مرة أخرى ، هذه المرة باستخدام المعكوس التفاضلى $x^3/3 + C$ ، حيث C أى ثابت .

$$\int_{-1}^{3} x^2\,dx = \Big[\frac{x^3}{3} + C\Big]_{-1}^{3} = (9 + C) - (-\tfrac{1}{3} + C) = \tfrac{28}{3}$$

مثال ٢ . أوجد قيمة $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\,dx$

نوجد أولا معكوساً تفاضلياً لـ $3x/\sqrt{1 + 2x^2}$ أبسط معكوس هو $\tfrac{3}{2}\,(1 + 2x^2)^{1/2}$ ويكون

$$\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{1 + 2x^2}}\,dx = \tfrac{3}{2}(1 + 2x^2)^{1/2}\Big|_0^1$$

$$= \tfrac{3}{2}(3^{1/2}) - \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

مثال ٣ . أوجد قيمة $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ ، حيث

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \leqslant 0 \\ 4 - 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

الدالة المراد تكاملها متصلة ، فالتكامل موجود . بما أن وصف الدالة f يتغير عند 0 ، فاننا نفصل التكامل الى تكاملين ، باستخدام الخاصية الجمعية .

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx$$

لقيم x بين 0 و -1 تكون $f(x) = 4 - x^2$ ، لكن لقيم x بين 2 و 0 تكون $f(x) = 4 - 2x$ ، واذن

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (4 - x^2)\,dx + \int_0^2 (4 - 2x)\,dx$$

$$= \Big[4x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{0} + \Big[4x - x^2\Big]_0^2$$

$$= -(-4 + \tfrac{1}{3}) + (8 - 4) = \tfrac{23}{3}$$

النظرية الأساسية تكون صحيحة حتى لو كان الحد الأعلى للتكامل أقل من الحد الأدنى . فمثلا

$$\int_2^1 3x^2\,dx = x^3\Big|_2^1 = 1-8=-7$$

هذا يتفق مع النتيجة التى نحصل عليها بعكس الحدين :

$$\int_2^1 3x^2\,dx = -\int_1^2 3x^2\,dx = -\Big[x^3\Big]_1^2 = -(8-1) = -7$$

واذن لدينا الآن وسيلة لتقييم التكاملات فانه يمكننا اعطاء توضيح للمعادلة

$$\frac{d}{dt}\int_c^t f(x)\,dx = f(t)$$

فى النظرية ٥ ـ ٧ ، الذى قد يعطيها معنى أدق . لتكن $f(x) = x^2$ ولتكن $c = -1$ ، فيكون

$$\int_c^t f(x)\,dx = \int_{-1}^t x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^t = \frac{t^3}{3}+\frac{1}{3}$$

لاحظ أن التكامل هو دالة لـ t ، كما سبق أن شرحنا فى الفقرة الافتتاحية لهذا البند . التفاضل يعطينا

$$\frac{d}{dt}\int_c^t f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{1}{3}\right) = t^2 = f(t)$$

برهانا النظريتين الآتيتين سيتركان للقارىء (المسائل ٤٨ الى ٥٠) .

٥ ـ ١٠ نظرية . اذا كانت الدالتان f و g متصلتين فى $[a, b]$ ، فان

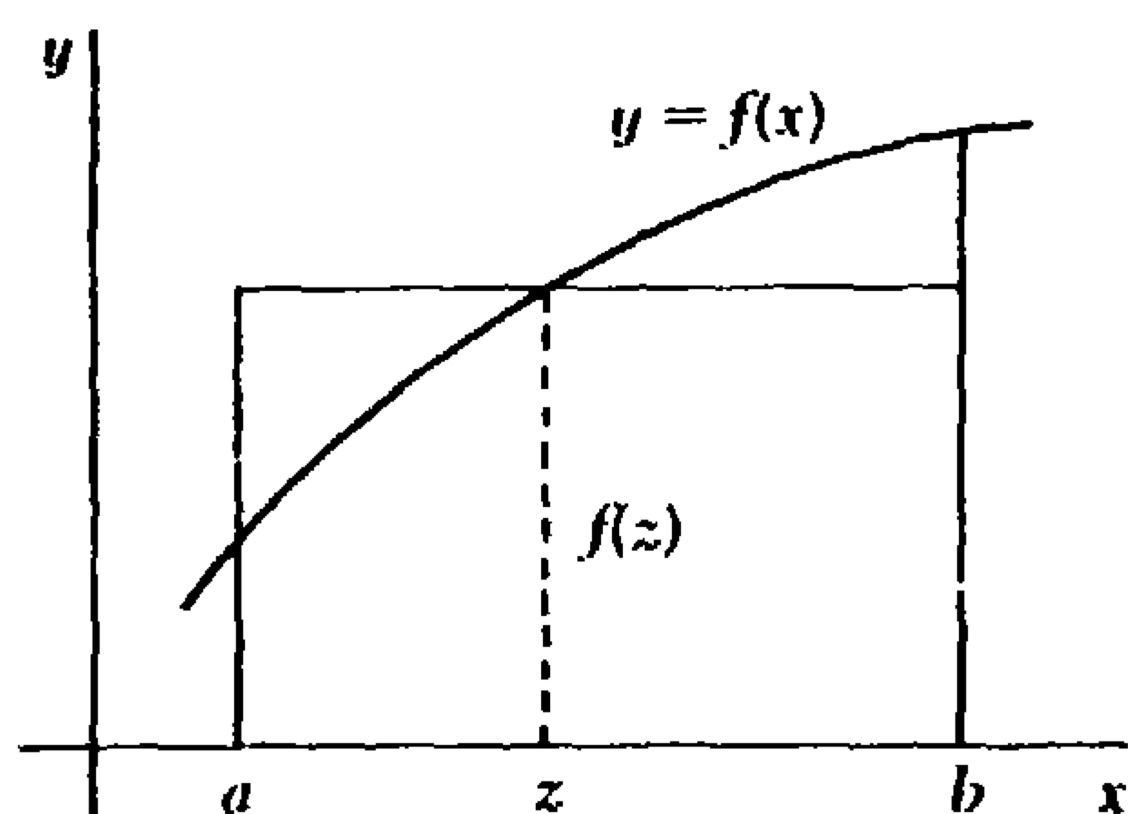
$$(i)\quad \int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$(ii)\quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$ لأى ثابت k

٥ ـ ١١ نظرية . اذا كانت الدالتان f و g متصلتين فى $[a, b]$ وكان $f(x) \leqslant g(x)$ لجميع x فى $[a, b]$ ، فان

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

عندما تكون $f(x) > 0$ ، التكامل المعين $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى بين a و b فى الشكل ٥ ـ ١١ . يبدو على صواب ، أنه توجد نقطة z فى الفترة (a, b) بحيث أن مساحة المستطيل الذى قاعدته $[a, b]$ وارتفاعه $f(z)$ يساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى . هذا هو التفسير الهندسى للنظرية القادمة ، لكن النظرية صحيحة لأى دالة متصلة سواء أكانت موجبة أو سالبة .



شكل ٥ - ١١
توجد نقطة z فى الفترة (a, b) بحيث أن مساحة المستطيل تساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى بين b و a .

٥ - ١٢ نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات . اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، فانه توجد نقطة z فى (a, b) بحيث أن

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)f(z)$$

البرهان . كون الدالة

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

لقد رأينا أن هذه الدالة قابلة للتفاضل فى الفترة $[a, b]$ وأن $F'(t) = f(t)$. نطبق نظرية القيمة المتوسطة عليها ، فنحصل على

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(z)$$

لنقطة z فى (a, b) النتيجة المطلوبة فى النظرية تتبع الآن على الفور اذ أن $F'(z) = f(z)$ و $F(a) = 0$ و $F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

١ - $\int_1^6 x\, dx$

٢ - $\int_{-3}^{-1} (2x+6)\, dx$

٣ - $\int_0^1 4\, dx$

٤ - $\int_{-4}^{4} 5y^3\, dy$

٥ - $\int_{-2}^{-1} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$

٦ - $\int_0^9 \sqrt{z}\, dz$

٧ - $\int_0^{-1} \sqrt[3]{w+1}\, dw$

٨ - $\int_4^2 x\left(\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$

٩ - $\int_0^b (b^2x - b^3)\, dx$

١٠ - $\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

١١ - $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ حيث $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+1, & x\le 0,\\ x^2+1, & x\ge 0.\end{cases}$

١٢ - $\int_{-2}^{2} f(u)\,du$ حيث $f(u)=\begin{cases}u^3, & u\le 0,\\ u, & 0\le u\le 1,\\ 2-u^2, & u\ge 1.\end{cases}$

١٣ - $\int_{1}^{5} |x|\,dx$ ١٤ - $\int_{-2}^{0} x|x+1|\,dx$ ١٥ - $\int_{-3}^{3} |t^2-1|\,dt$.

١٦ - $\int_{2}^{2.8} [x]\,dx$ ، حيث $[x]$ دالة أكبر عدد صحيح ١٧ - $\int_{-1}^{2} |x^3-x|\,dx$

١٨ - أثبت أن $\int_{0}^{2} (t^2-3t+1)\,dt=\int_{0}^{2} (x^2-3x+1)\,dx$

١٩ - أوجد قيمة $\int_{-1}^{1} (4x^2+6x-10)\,dx$ مرتين ، مستخدماً معكوسات تفاضلية مختلفة للدالة المكاملة .

٢٠ - أوجد عدد موجب a بحيث أن $\int_{0}^{a} (x^2-4x+5)\,dx=6$. فسر ذلك كمساحة وارسم شكلا .

٢١ - اذا كانت $F(t)=\int_{0}^{t} \frac{x}{2}\,dx$ فأوجد قيم $F(0)$ و $F(7)$ و $F(2)$. اختبر اجابتك بتفسير $F(t)$ كمساحة .

٢٢ - أوجد القيمة الصغرى للدالة G المعرفة بـ $G(u)=\int_{0}^{1} (xu^2-x^2+u)\,dx$

٢٣ - خطط الشكل البيانى للدالة H المعرفة بـ $H(x)=\int_{0}^{x} |t|\,dt$.

أوجد مشتقة ما يأتى بطريقتين : (١) بايجاد قيمة التكامل ثم اجراء التفاضل بعد ذلك ، (٢) باستخدام النظرية ٥ - ٧ :

٢٤ - $F(t)=\int_{0}^{t} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ ٢٥ - $G(x)=\int_{1}^{x} \frac{y^2+2}{y^2}\,dy$ ٢٦ - $F(x)=\int_{-1}^{x} \sqrt{1-3t}\,dt$

أوجد مشتقة ما يأتى :

٢٧ - $F(t)=\int_{-1}^{t} \frac{dx}{1+x^4}$ ٢٨ - $H(x)=\int_{1}^{x} \frac{dz}{z}$ ٢٩ - $g(x)=\int_{0}^{x} \sqrt{a^2-u^2}\,du$

٣٠ - $f(u)=\int_{1}^{u} \sin(9x^2)\,dx$ ٣١ - $F(t)=\int_{t}^{2} \sqrt{1+y^2}\,dy$

٣٢ - أين تحدث النهايات القصوى الموضعية للدالة F المعرفة بـ $F(x)=\int_{-1}^{x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\,du$ وهل هى نهايات عظمى أو نهايات صغرى موضعية ؟

٣٣ ـ اذا كانت f دالة قابلة للتفاضل ، فأوجد $\int_a^b Df(x)\, dx$

٣٤ ـ اذا كانت f لها معكوس تفاضلى F ، استخدم النظرية الأساسية لتحقيق أن

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

٣٥ ـ أثبت أن $\Big[G(x) + H(x)\Big]_a^b = G(x)\Big|_a^b + H(x)\Big|_a^b$ و $\Big[cG(x)\Big]_a^b = c\Big[G(x)\Big]_a^b$

لأى ثابت c . وضح بـ

$$G(x) = x^2 - 3x + 5,\ H(x) = x^4 + 1,\ c = 3,\ a = 1 \quad \text{و} \quad b = 2$$

٣٦ ـ اذا كانت $F(t) = \int_t^c f(x)\, dx$ أثبت أن $F'(t) = -f(t)$.

٣٧ ـ اذا كانت $f(x)$ متصلة وموجبة لجميع x فى الفترة $[a, b]$ أثبت أن الدالة

$$G(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

تكون متزايدة فى $[a, b]$.

٣٨ ـ الدالة $f(x) = x$ متصلة فى كل مكان . أوجد أحد معكوساتها التفاضلية .

٣٩ ـ أثبت التعميم الآتى للنظرية ٥ ـ ٧ . لتكن u دالة قابلة للتفاضل اذا كانت

$$F(t) = \int_c^{u(t)} f(x)\, dx \quad \text{فان}$$

$$F'(t) = f(u(t))u'(t) \qquad (٥)$$

[ارشاد : ضع $z = u(t)$ ودع $g(z) = \int_c^z f(x)\, dx$. ليكون $(F(t) = g(u(t)))$] حقق الصيغة (٥) بايجاد مشتقة $F(t) = \int_1^{t^2} (x + 5)\, dx$ واستخدامها وأيضاً بحساب قيمة التكامل ثم اجراء التفاضل .

أوجد مشتقة ما يأتى . (ارشاد : انظر المسألة ٣٩)

٤٠ ـ $F(t) = \int_0^y \frac{dx}{1 + x^2}$

٤١ ـ $F(x) = \int_0^{1/x} \sqrt{5 - z^2}\, dz$

٤٢ ـ $G(y) = \int_1^{\sqrt{2y}} \frac{dx}{x}$

٤٣ ـ $f(x) = \int_{3x-2}^{2} y\sqrt{y + 1}\, dy$

٤٤ ـ الدالة $F(t) = \int_c^t f(x)\, dx$ هى معكوس تفاضلى للدالة f ، الدالة $F_1(t) = \int_{c_1}^t f(x)\, dx$ هى معكوس تفاضلى آخر للدالة f. أوجد الثابت C حيث $F_1(t) = F(t) + C$ وضح هذه المعادلة

هندسياً بتفسير $F_1(t)$ و $F(t)$ كمساحتى منطقتين تحت منحن . (ارشاد : استخدام الخاصية الجمعية للتكامل) .

٤٥ ـ أثبت أن السرعة المتوسطة لنقطة تتحرك على خط الاحداثيات للفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هى $\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$ ، حيث $v(t)$ هى السرعة عند الزمن t .

٤٦ ـ نقطة تتحرك على خط الاحداثيات . اذا كان بعدها s عن نقطة الأصل هو s_0 عند $t = 0$ ، أثبت أن موضع النقطة عند الزمن t' يعطى بالعبارة $s(t') = s_0 + \int_0^{t'} v(t)\, dt$ حيث $v(t)$ هى السرعة .

٤٧ ـ لقد أثبتنا أن المعادلة (٣) فى برهان النظرية ٥ ـ ٧ صحيحة اذا كانت $z < t$ أثبت أنها صحيحة اذا كانت $z \leqslant t$.

٤٨ ـ (أ) أثبت النظرية ٥ ـ ١٠ (أولا) . [ارشاد : خذ $G(x)$ و $F(x)$ معكوسين تفاضليين لـ $g(x)$ و $f(x)$] . (ب) عمم النتيجة فى (أ) لحاصل جمع ثلاث دوال .

٤٩ ـ أثبت النظرية ٥ ـ ١٠ (ثانياً)

٥٠ ـ أثبت النظرية ٥ ـ ١١ [ارشاد : أثبت أن $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \leqslant 0$.] اعط تفسيراً هندسياً لهذه النظرية .

٥١ ـ أثبت أن $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x} \leqslant \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^2}$

٥٢ ـ هل النتيجة المناظرة عن المشتقة ، للنظرية ٥ ـ ١١ ، صحيحة ؟ أى هل اذا كانت : $f(x) \leqslant g(x)$. لجميع x فى الفترة $[a, b]$ ، يكون $f''(x) \leqslant g'(x)$ ؟

٥٣ ـ أثبت أن $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$. هذه هى المتباينة الخاصة بالتكاملات المناظرة للنظرية

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

[ارشاد : $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$].

أوجد z التى تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل لما يأتى من تكاملات وارسم شكلا مماثلا للشكل ٥ ـ ١١

٥٤ ـ $\int_0^5 (2x + 3)\, dx$ ٥٥ ـ $\int_0^3 u^2\, du$ ٥٦ ـ $\int_{-a}^{o} (a^2 - x^2)\, dx$

٥٧ ـ حيث أن $1/x^2 > 0$ ، فان النتيجة ٥ ـ ٥ تتضمن أن $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} \geqslant 0$ لكن

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2 < 0$$

اشرح التعارض .

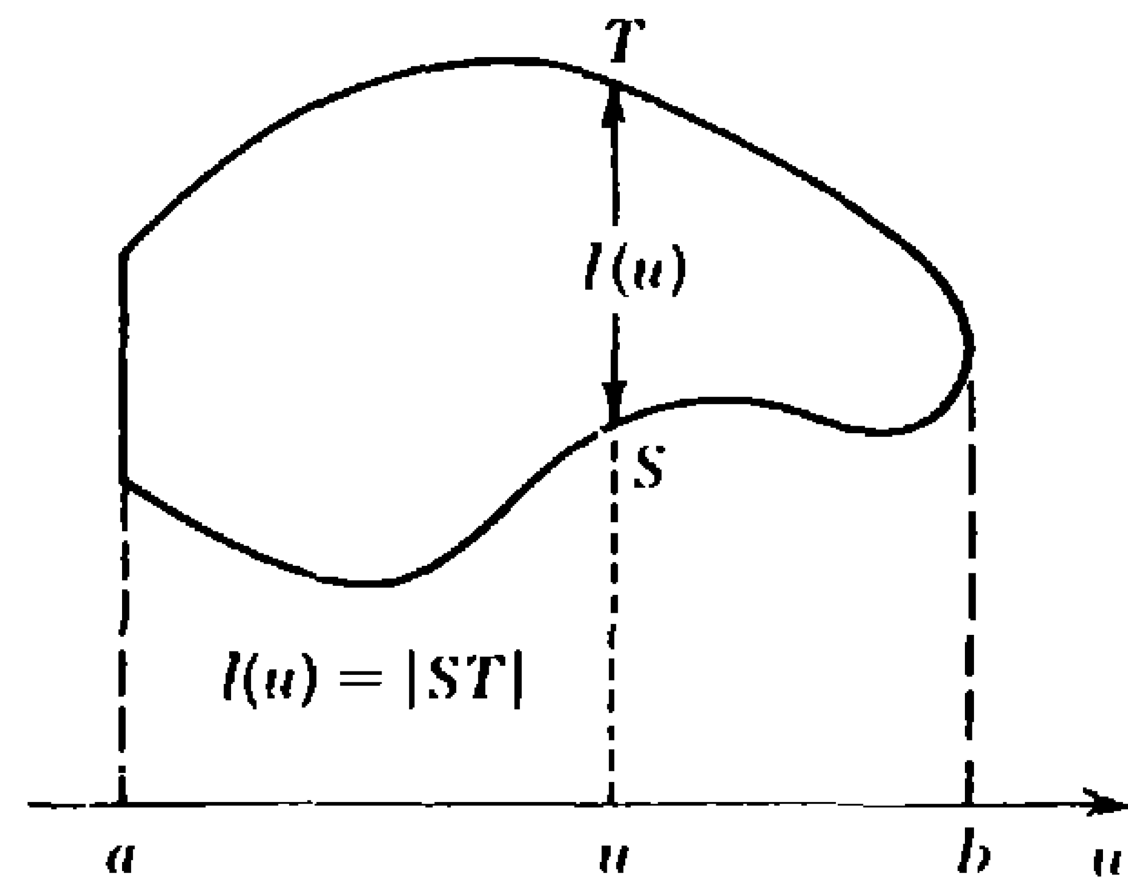
٥ ـ ٤
المساحات

الآن لدينا طريقة لحساب قيمة التكامل المعين ، يمكننا دراسة بعض استخداماته . قد رأينا من قبل أحد الاستخدامات وهو ايجاد مساحة المنطقة تحت منحنى . سندرس الآن مناطق أعم ، وبمساعدة النظرية الأساسية للتكامل سوف نكون قادرين على إيجاد اجابات عددية للمساحة . من الصعب فى كتاب على هذا المستوى اعطاء تعريف مقنع لمساحة منطقة منطقياً ، يجب أولا أن نحدد ما هو المقصود بمساحة منطقة قبل أن نحاول ايجادها ، لكن ، اذ أن اهتمامنا هو بالتطبيق أكثر مما هو بالنظرى ، فسوف لا نحاول اعطاء تعريف ، بل سنستمر على أساس منطقى كما كنا نفعل .

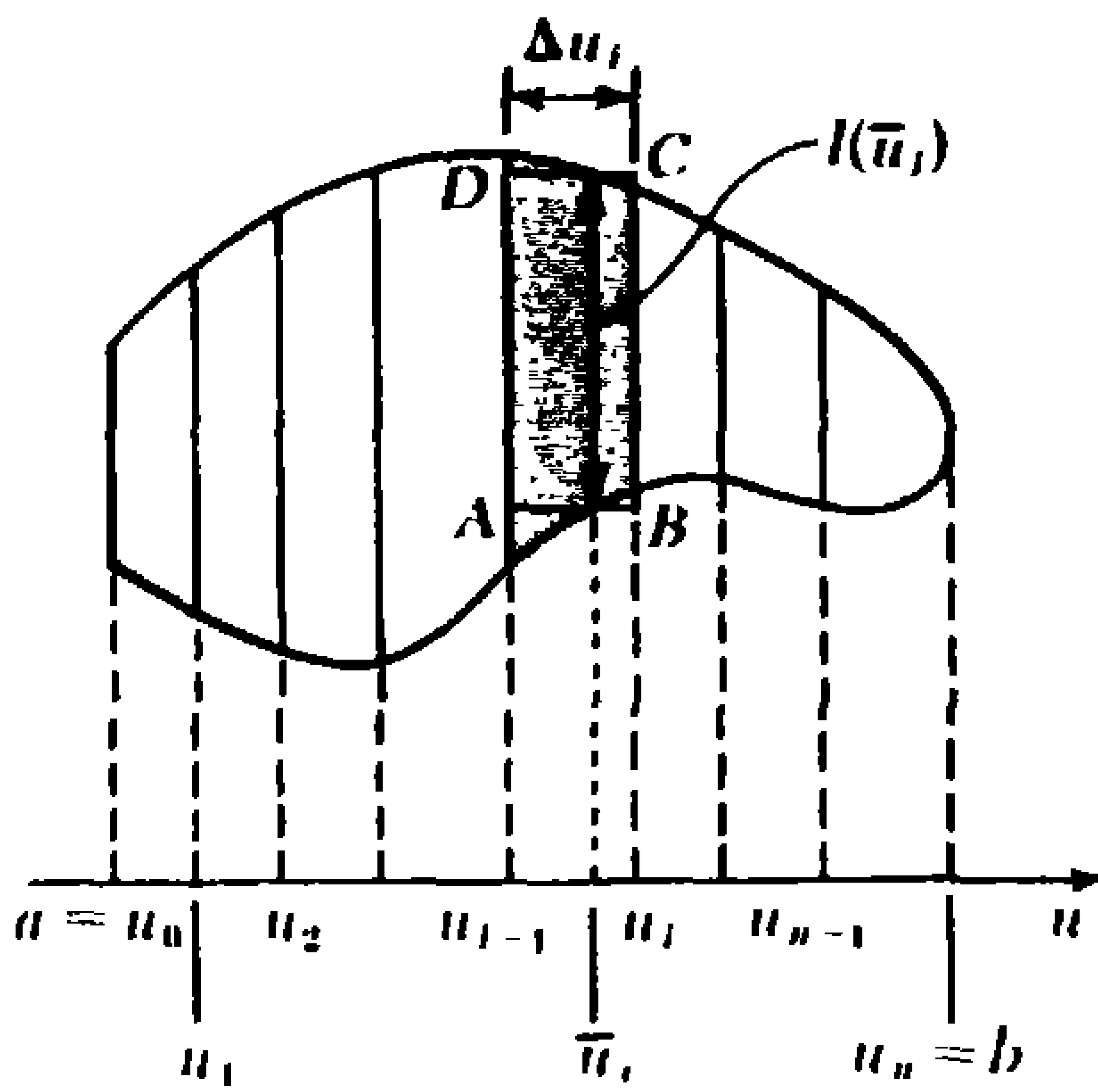
نفرض أننا نريد ايجاد مساحة منطقة مستوية مثل التى فى الشكل ٥ ـ ١٢ . ليكن u خط الاحداثيات فى المستوى ، نشير الى هذا الخط بأنه المحور u . لتكن b و a ، حيث $a < b$ ، إحداثيى طرفى مسقط المنطقة على المحور u . الخط العمودى على المحور u عند نقطة u بين b و a يقطع حدود المنطقة فى نقطتين T و S . ولأن العرض $|ST|$ للمنطقة يعتمد على u ، ترمز له بالرمز الدالى $l(u)$ أى أن ، $l(u) = |ST|$. نقسم المنطقة الى شرائط ضيقة بخطوط عمودية على المحور u (شكل ٥ ـ ١٣) . سوف نقرب مساحة كل شريط . حاصل جمع هذه التقريبات سيكون تقريباً لمساحة المنطقة ، سوف يمكننا منه ايجاد المساحة المضبوطة للمنطقة . التقاطعات مع المحور u للخطوط المكونة للشرائط تعين تجزئياً

$$[a = u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n = b]$$

للفترة $[a, b]$.



شكل ٥ ـ ١٢
العرض $|ST|$ للمنطقة هو دالة لـ u .



شكل ٥ ـ ١٣

اختر نقطة $\bar{u}_i$ فى الفترة الجزئية رقم i ، $[u_{i-1} - u_i]$ وكون المستطيل $ABCD$ الموضح فى الشكل ٥ ـ ١٣ . اذا كان الشريط ضيقاً ، فان المستطيل ينطبق على الشريط ما عدا قرب القمة والقاع ، وكلما ضاق الشريط ، كلما كانا أكثر انطباقاً . طول المستطيل هو $l(\bar{u}_i)$ ، وعرضه هو $\Delta u_i = u_i - u_{i-1}$. مساحة المستطيل هى $l(\bar{u}_i) \Delta u_i$. هذه المساحة هى تقريب لمساحة الشريط رقم i . اذا كونا مستطيلات مماثلة لكل شريط ، فان حاصل جمع مساحاتها ،

$$\sum_{i=1}^{n} l(\bar{u}_i) \Delta u_i \qquad (١)$$

هو تقريب لمساحة المنطقة . حاصل الجمع هذا هو حاصل جمع ريمان لدالة العرض l . ندرس فقط المناطق واختيارات المحور u حيث الدالة l متصلة وحيث جميع المستقيمات العمودية على محور الاحداثيات بين b و a لا تقطع حدود المنطقة فى أكثر من نقطتين .

باستخدام تجزىء رقيق للغاية ، يمكننا التقريب لمساحة المنطقة الى أى حد نريد بحواصل جمع على الصورة (١) . واذن المساحة A تعطى بالضبط بعددها التجمعى ، نهاية حواصل الجمع هذه :

$$A = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

حيث w هى معيار التجزىء . النهاية موجودة لأننا افترضنا أن l متصلة . التكامل المعين $\int_a^b l(u)\, du$ هو مجرد رمز آخر لنهاية حاصل الجمع هذا . أى أن ، $A = \int_a^b l(u)\, du$ لأى دالة خاصة l ، التكامل المعين يمكن الآن ايجاد قيمته بالنظرية الأساسية للتكامل ، وبالتالى نحصل على القيمة العددية للمساحة . نظرياً المحور u يمكن اختياره فى أى اتجاه لكن عملياً ينبغى أن يكون موجهاً بحيث أن العرض $l(u)$ يمكن التعبير عنه بسهولة بدلالة u .

لاحظ التشابه بين الرمزين

$$\int_a^b l(u)\, du \qquad \text{و} \qquad \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} l(\bar{u}_i) \Delta u_i$$

$\lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n}$ تناظر $\int_a^b$، $l(\bar{u}_i)$ تناظر $l(u)$ و Δu_i تناظر du . كل حاصل جمع $\sum_{i=1}^{n} l(\bar{u}_i) \Delta u_i$ هو فقط تقريب للمساحة ، لكن التكامل $\int_a^b l(u)\, du$ يعطى المساحة بالضبط .

٥ ـ ١٣ مساحة منطقة . نختار خطاً مستقيما المحور u وليكن $l(u)\, du$ يرمز الى ارتفاع المنطقة المحدد بالخط المستقيم العمودى على المحور u . عند النقطة u . مساحة المنطقة تعطى بالعبارة

$$A = \int_a^b l(u)\ du \qquad (٢)$$

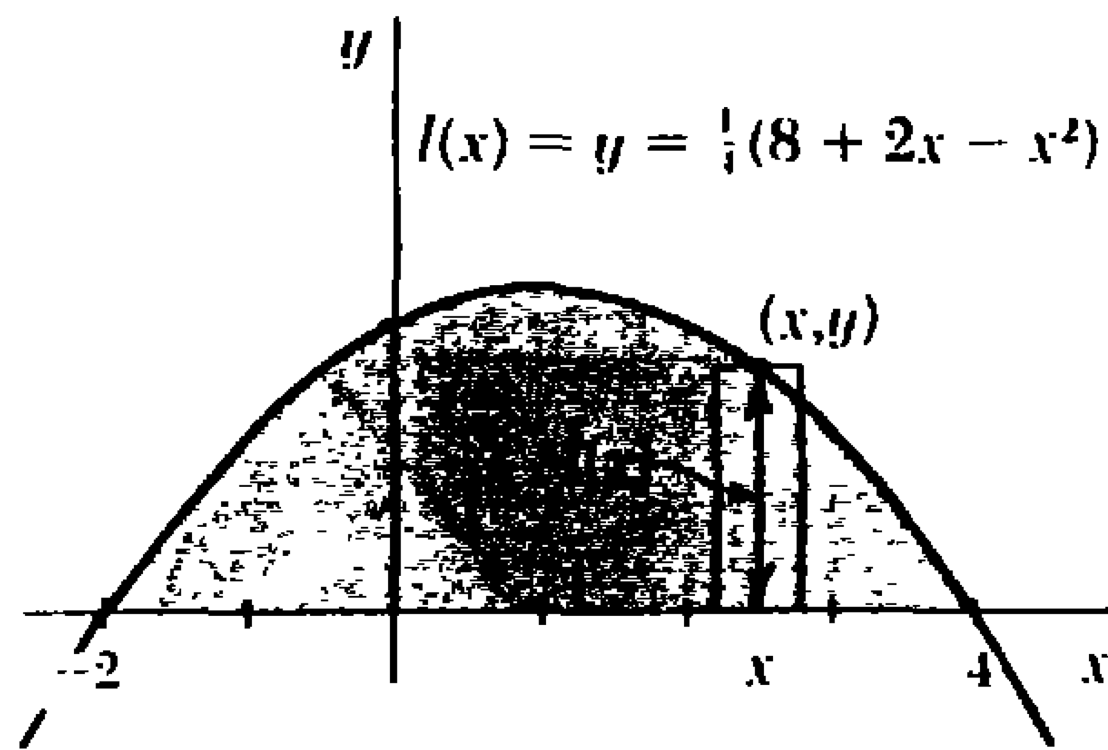
حدا التكامل b و a هما الاحداثيان u لموضعى العمودين الطرفيين . الارتفاع $l(u)$ يجب الا يكون سالباً لجميع u فى الفترة $[a, b]$.

بما أن التكامل المعين يعطينا قيمة معقولة لما نفكر أنه ينبغى أن يكون مساحة المنطقة ، يمكننا الآن التحويل ونعرف المساحة بأنها التكامل المعين (٢) . هذا التعريف يكفى لغرضنا الحالى لكن له عيب خطير . اذا اخترنا محور آخر u ينتج شرائط مختلفة ، دالة l مختلفة ، وحدين مختلفين b و a ، فلا يوجد ضمان بأننا سنحصل على نفس النتيجة للمساحة . بالاضافة الى ذلك توجد طرق أخرى لتقريب المساحة غير تقسيم المنطقة الى شرائط مستطيلة . فقد نستخدم مثلثات صغيرة أو قطاعات من دوائر . مثل هذه التقريبات أيضاً تعطينا تكاملات يمكن اعتبارها اجابات مختلفة للمساحة . هذه الأسئلة تدرس فى مقررات متقدمة . بمساعدة تعريف أعم للمساحة يمكن اثبات أننا نحصل على نفس النتيجة بصرف النظر عن طريقة التقسيم .

مثال ١ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء $y = \frac{1}{4}(8 + 2x - x^2)$ والمحور السينى .

من المفيد عادة أن نعمل تخطيطاً تقريبياً للمنحنى لكى نرى أين تقع المنطقة . يجب أن نتأكد أن المنطقة تكون محدودة تماماً بالمنحنيات المعطاة . القطع المكافىء فى الشكل ٥ ـ ١٤ . المنطقة موضع السؤال تقع تحت المنحنى وفوق المحور السينى . ليكن المحور السينى هو المحور u . مستطيل مقرب نمطى موضح فى الشكل . المعادلة (٢) للمساحة تصبح $A = \int_a^b l(x)\ dx$ ، حيث $l(x)$ هو ارتفاع المنطقة كما هو موضح فى الشكل . حدا التكامل هما الاحداثيان x لاقصى موضع على اليسار وأقصى موضع على اليمين lx ، أى الجزءان المقطوعان من المحور السينى 4 و 2 — .
بما أن $l(x) = y = \frac{1}{4}\ (8 + 2x - x^2)$ ، فان

$$A = \int_a^b l(x)\ dx = \int_{-2}^{4} \tfrac{1}{4}(8 + 2x - x^2)\ dx$$



شكل ٥ ـ١٤

الآن نوجد قيمة التكامل بالنظرية الأساسية :

$$A = \int_{-2}^{4} \tfrac{1}{4}(8 + 2x - x^2)\ dx = \tfrac{1}{4}\left[8x + x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4}$$
$$= \tfrac{1}{4}[(32 + 16 - \tfrac{64}{3}) - (-16 + 4 + \tfrac{8}{3})] = 9.$$

مثال ٢ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = -x(x-3)^2$ والمحور السينى والخط المستقيم $x = 2$.

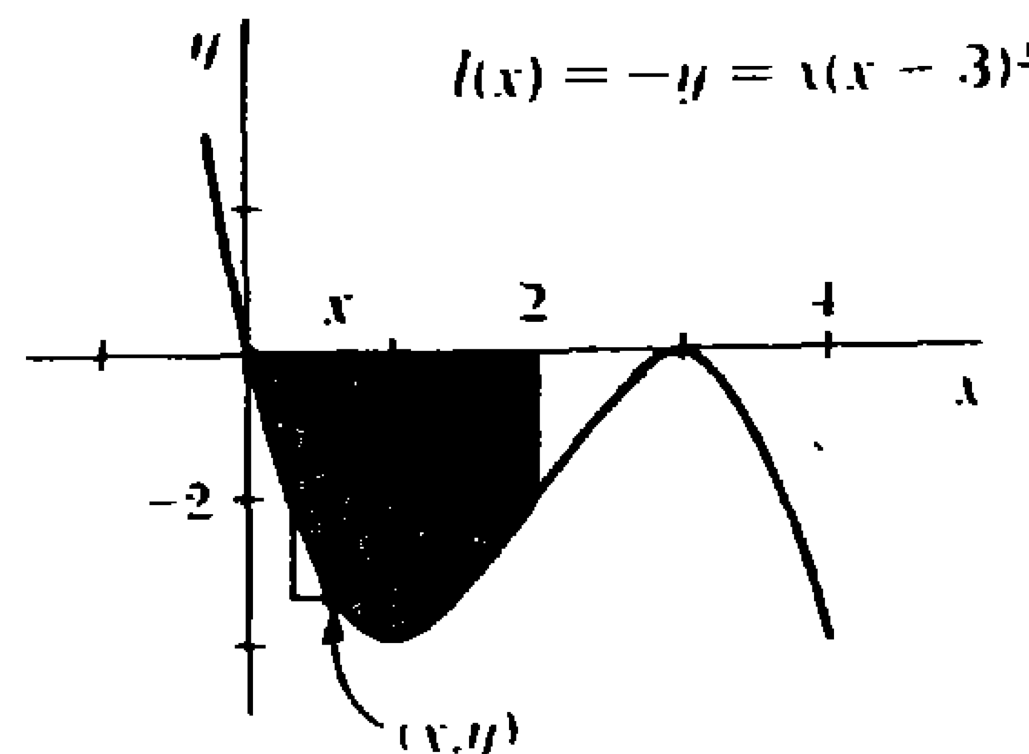
فى الفصل الرابع وضحنا كيف نخطط المنحنيات بسرعة . المنطقة المطلوب مساحتها موضحة فى الشكل ٥ ـ ١٥ مع مستطيل مقرب نمطى . سنختار المحور السينى المحور u . ارتفاع المنطقة عند النقطة x يعطى بالدالة $l(x)$ ، حدا التكامل b و a هما الاحداثيان x للموضع على أقصى اليسار والموضع على أقصى اليمين للمستقيم $l(x)$ ، أى هما 2 و 0 . بما أن $y \leqslant 0$ لـ x فى الفترة $[0,2]$ وبما أن $l(x)$ يجب أن تكون غير سالبة ، فان $l(x) = -y = x(x-3)^2$ ومن ثم

$$A = \int_a^b l(x)\ dx = \int_0^2 x(x-3)^2\ dx$$
$$= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 9x)\ dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \tfrac{9}{2}x^2\right]_0^2$$
$$= (4 - 16 + 18) - 0 = 6.$$

اذا أخذنا $f(x) = -x(x-3)^2$ فى هذا المثال ، فان $f(x) \leqslant 0$ لـ $0 \leqslant x \leqslant 2$ ويكون

$$\int_0^2 f(x)\ dx = -\int_0^2 x(x-3)^2\ dx = -6 \leqslant 0$$

هذا يوضح النتيجة ٥ ـ ٥ (ثانياً) ببند ٥ ـ ٢ . حاصل جمع اعداد سالبة هو عدد سالب ، وبما أن التكامل هو صورة فلسفية للجمع ، فانه ينبغى أن نتوقع أن التكامل لدالة سالبة القيمة يكون سالباً .



شكل ٥ ـ ١٥

مثال ٣ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيين $y = 6 - x^2$ و $y = x^2 - 2$.

المنحنيان مخططان فى الشكل ٥ ـ ١٦ . لتكن $g(x) = 6 - x^2$ و $f(x) = x^2 - 2$. ليكن المحور السينى هو المحور u . بما أن $f(x) \leqslant g(x)$ فان

$$l(x) = g(x) - f(x) = (6 - x^2) - (x^2 - 2) = 8 - 2x^2$$

الآن يجب تعيين حدى التكامل . الموضع الأقصى على اليسار والموضع الأقصى على اليمين للخط $l(x)$ هما النقطتان حيث المنحنيان يتلاقيان . الاحداثيان x لهاتين النقطتين هما b و a ويمكن ايجادهما بحل معادلتى المنحنيين معاً :

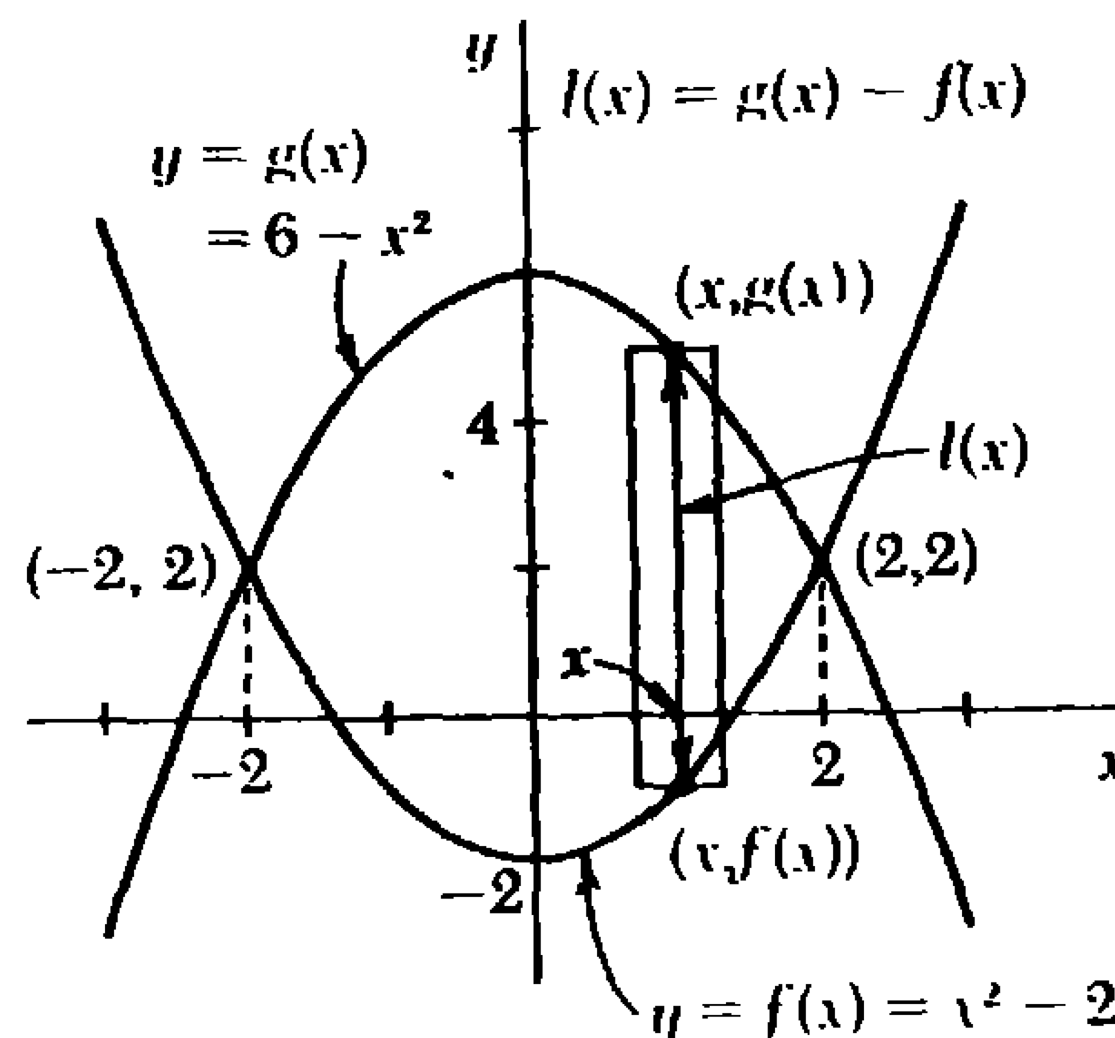
$$x^2 - 2 = 6 - x^2.$$
$$x^2 = 4,$$
$$x = \pm 2.$$

اذن $b = 2$ و $a = -2$. لدينا

$$A = \int_a^b l(x)\ dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\ dx$$
$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 2[(8 - \tfrac{8}{3}) - (-8 + \tfrac{8}{3})] = \tfrac{64}{3}$$

بما أن المنطقة متماثلة بالنسبة الى المحور السينى ، يمكننا ايجاد المساحة بايجاد مساحة النصف الأيمن وضرب النتيجة فى 2 ؛ اذا فعلنا ذلك يكون

$$A = 2\int_0^2 l(x)\ dx = 2\int_0^2 (8 - 2x^2)\ dx = 4\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4(8 - \tfrac{8}{3}) = \tfrac{64}{3}$$



شكل ٥ ـ ١٦

عند ايجاد مساحة منطقة محدودة بمنحنيين $y = g(x)$ و $y = f(x)$ ، من المهم أن نعرف أى المنحنيين يكون الأعلى بحيث أن $l(x)$ يمكن اختيارها الموجب من بين الزوجين $f(x) - g(x)$ و $g(x) - f(x)$.

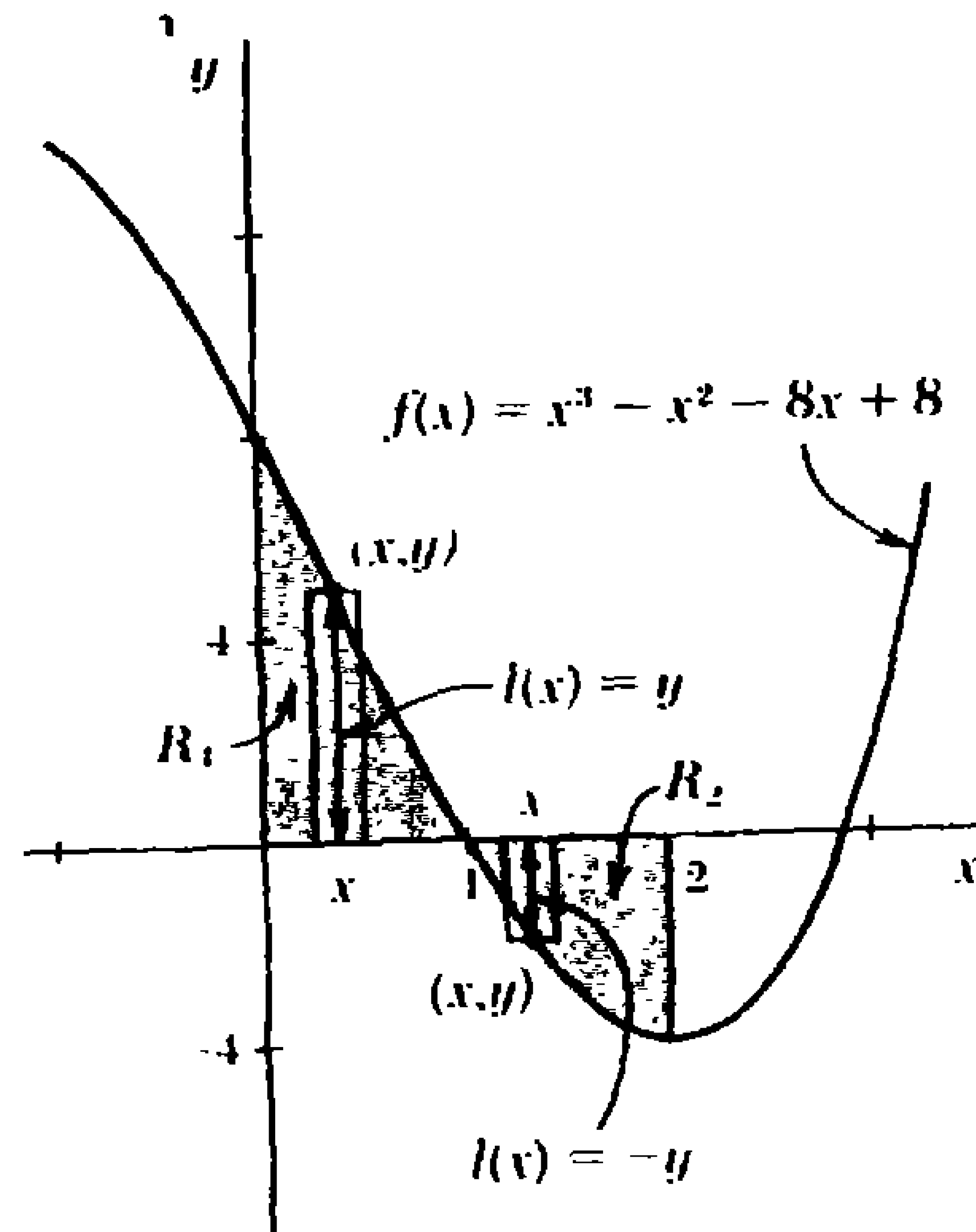
مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالشكل البيانى للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 8$ والمستقيمات $x = 2$ و $x = 0$ و $y = 0$.

الشكل البيانى وهو المخطط فى الشكل ٥ ـ ١٧ ، يقطع المحور السينى عند 1 . ليكن المحور السينى هو المحور u . طول $l(x)$ للمستطيل المقرّب ، الذى يجب أن يكون غير سالب ، يعطى بالعبارة $l(x) = y = f(x)$ عندما $0 \leqslant x \leqslant 1$ وبالعبارة $l(x) = -y = -f(x)$ عندما $1 \leqslant x \leqslant 2$. ولأن التعبير عن $l(x)$ يتغير أثناء فترة التكامل ، يجب ايجاد المساحة على جزءين ، هما مساحة المنطقة R_1 فوق المحور السينى ومساحة المنطقة R_2 تحت المحور . مساحة المنطقة R_1 هى

$$A_1 = \int_0^1 l(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - x^2 - 8x + 8)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 8x\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - 4 + 8 = \tfrac{47}{12}.$$

مساحة المنطقة R_2 هى

$$A_2 = \int_1^2 l(x)\,dx = \int_1^2 -f(x)\,dx = -\int_1^2 (x^3 - x^2 - 8x + 8)\,dx \qquad (٣)$$
$$= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 8x\right]_1^2$$
$$= -\left[(4 - \tfrac{8}{3} - 16 + 16) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3} - 4 + 8)\right] = \tfrac{31}{12}.$$



شكل ٥ ـ ١٧
المساحتان R_2 و R_1 يجب ايجادهما كل على حدة

مساحة المنطقة R_1 زائد المنطقة R_2 هى

$$A_1 + A_2 = \frac{47}{12} + \frac{31}{12} = \frac{13}{2}$$

التكامل $\int_0^2 f(x)\, dx$ لا يعطى المساحة الكلية فى المثال السابق . لأن $\int_1^2 f(x)\, dx = -A_2$ من (٣) ، فان

$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx = A_1 - A_2$$

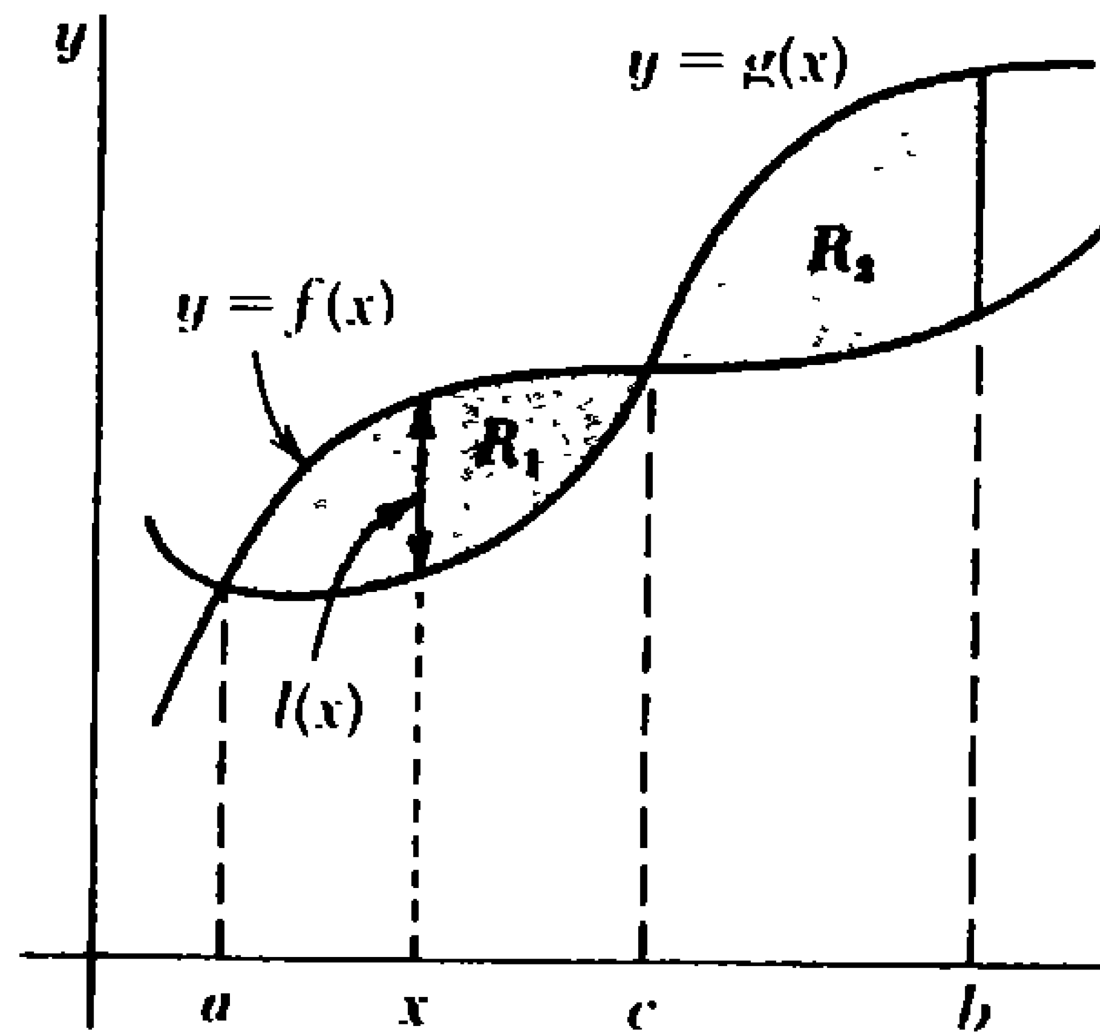
وهذا هو الفرق بين مساحتى R_2 و R_1 لأن $f(x) \leqslant 0$ عندما $1 \leqslant x \leqslant 2$ فاننا فى الواقع نأخذ حاصل جمع أعداد سالبة عندما نوجد $\int_1^2 f(x)\, dx$. بالمثل ، عند ايجاد مساحة منطقة مثل تلك التى فى الشكل ٥ ـ ١٨ يجب أن نحرص أن تكون $l(x)$ غير سالبة فى الفترة $[a, b]$. هذه المنطقة يجب تقسيمها الى منطقتين جزئيتين R_2 و R_1 ومساحة كل منهما توجد على حده . مساحة R_1 هى

$$A_1 = \int_a^c l(x)\, dx = \int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx$$

لأن $f(x) - g(x) \geqslant 0$ عندما $a \leqslant x \leqslant c$. مساحة R_2 هى

$$A_2 = \int_c^b l(x)\, dx = \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx$$

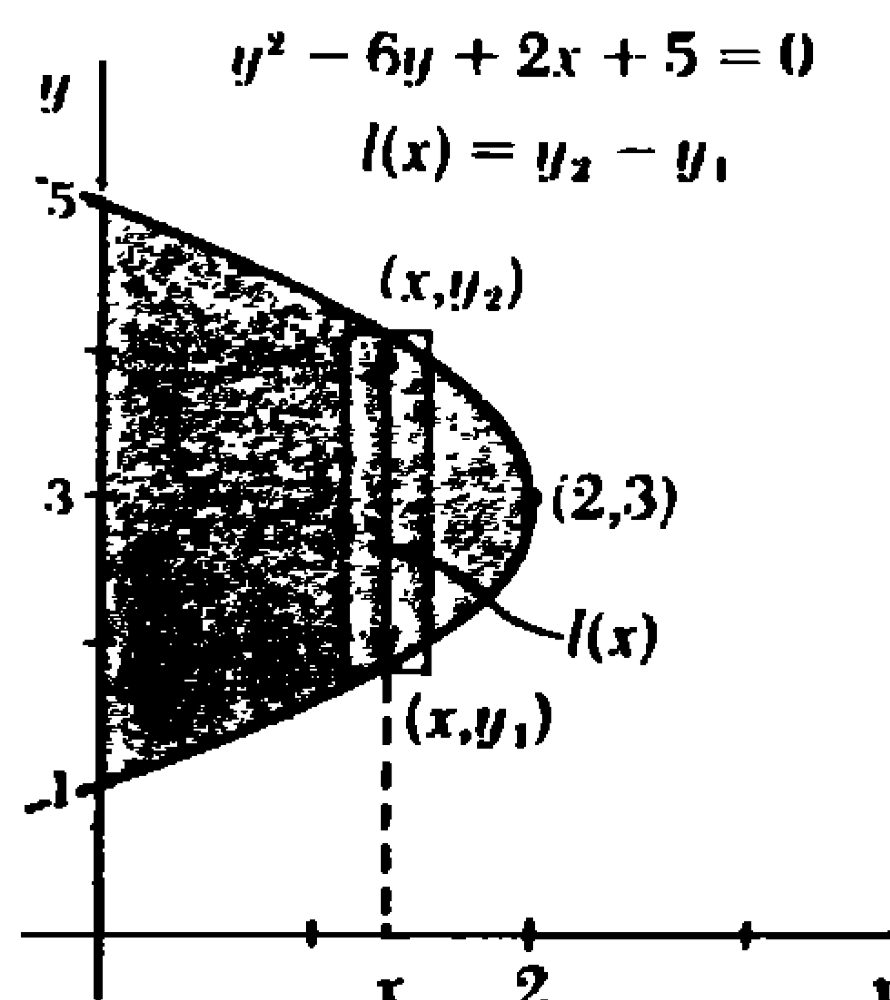
لأن $g(x) - f(x) \geqslant 0$ عندما $c \leqslant x \leqslant b$. مساحة المنطقة الكلية هى $A_1 + A_2$.



شكل ٥ ـ ١٨

مثال ٥ أوجد مساحة المنطقة بين المحور الصادى والقطع المكافىء $y^2 - 6y + 2x + 5 = 0$.

القطع المكافىء مخطط فى الشكل ٥ ـ ١٩ . ليكن المحور السينى هو المحور u . الطول $l(x)$ للمستطيل المقرب هو الفرق $y_2 - y_1$ لقيمتى y المناظرتين لكل x .



شكل ٥ - ١٩

نوجدهما بحل المعادلة بالنسبة الى y

$$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(2x+5)}}{2} = 3 \pm \sqrt{4 - 2x}$$

حيث أن y_2 ستكون القيمة الأكبر ، فان

$$y_2 = 3 + \sqrt{4 - 2x} \qquad \text{و} \qquad y_1 = 3 - \sqrt{4 - 2x}$$

ومن ثم

$$l(x) = y_2 - y_1 = 2\sqrt{4 - 2x}$$

الموضعان الأقصى على اليسار والأقصى على اليمين للخط $l(x)$ هما المحور الصادى حيث $x = 0$ ، ورأس القطع المكافىء ، حيث $x = 2$. واذن

$$A = \int_0^2 l(x)\, dx = \int_0^2 2\sqrt{4 - 2x}\, dx = -\tfrac{2}{3}(4 - 2x)^{3/2}\Big|_0^2 = \tfrac{16}{3}$$

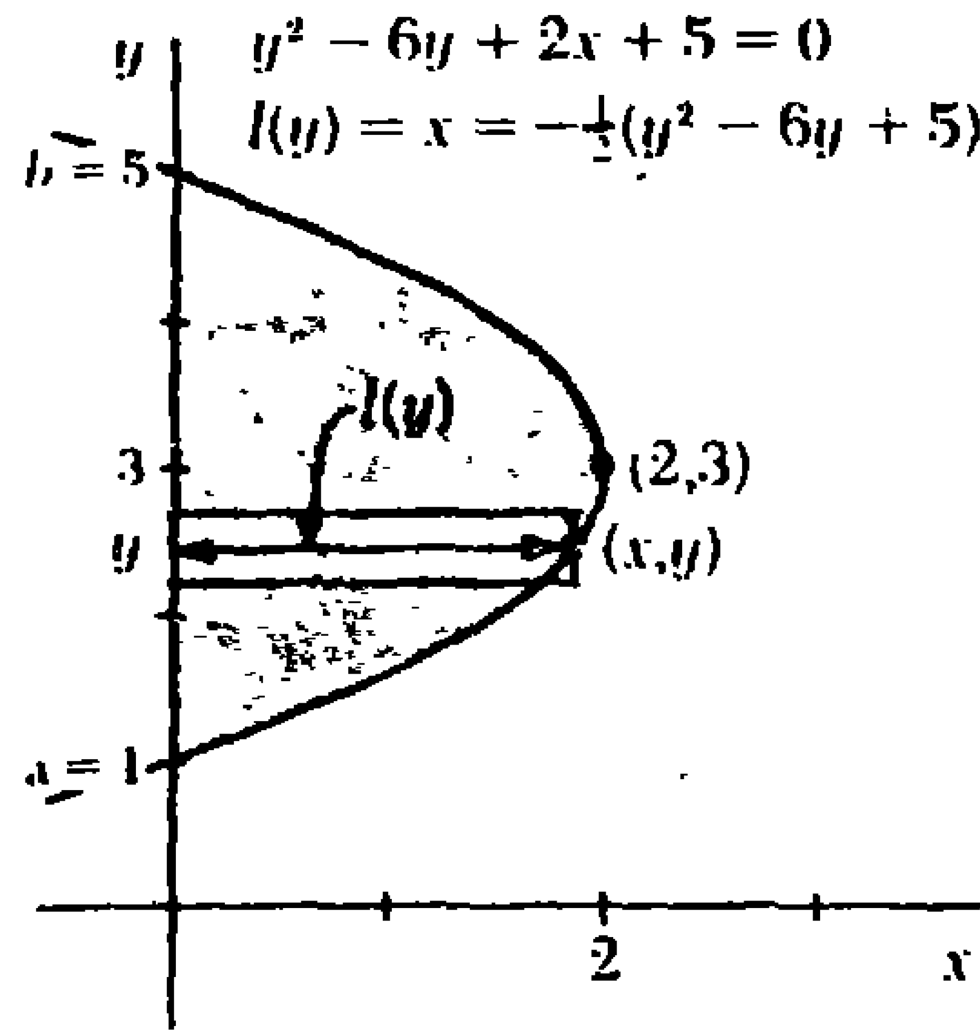
بدلا من مستطيلات رأسية ، يمكننا استخدام مستطيلات أفقية لتقريب المساحة ، كما هو موضح فى الشكل ٥ - ٢٠ . الآن المحور الصادى هو المحور u ، وطبقاً لـ (٢) المساحة تعطى بالعبارة $A = \int_a^b l(y)\, dy$. طول $l(y)$ للمستطيل المقرب هو ، باستخدام معادلة المنحنى ،

$$l(y) = x = -\tfrac{1}{2}(y^2 - 6y + 5)$$

حدا التكامل هما الاحداثيان y للموضعين المتطرفين للخط $l(y)$ ، واذن هما $b = 5$ و $a = 1$ واذن

$$A = \int_1^5 l(y)\, dy = -\frac{1}{2}\int_1^5 (y^2 - 6y + 5)\, dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - 3y^2 + 5y\right]_1^5$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\tfrac{1}{3} - 3 + 5\right)\right] = \tfrac{16}{3}.$$



شكل ٥ ـ ٢٠

مسائل

أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين قيم x المعطاه ، حقق بطريقة التخطيط أو بطريقة أخرى أن المنحنى يقع فوق المحور السينى بين قيم x المعطاه .

١ ـ $y = 5 - \frac{1}{2}x;\ x = -6,\ x = 0$.

٢ ـ $y = \frac{1}{2}x^2;\ x = 0,\ x = 3$.

٣ ـ $y = x^2 + 3;\ x = -2,\ x = 2$.

٤ ـ $y = 10x - x^2;\ x = 1,\ x = 10$.

٥ ـ $y = \sqrt{x};\ x = 0,\ x = 4$.

٦ ـ $y = 2\sqrt{x-1};\ x = 1,\ x = 10$.

٧ ـ $y = x(x-5)^2;\ x = 0,\ x = 2$.

٨ ـ $y = (x+1)^3 + 1;\ x = -2,\ x = 0$.

٩ ـ $y = 2x + \dfrac{1}{x^2};\ x = 1,\ x = 3$.

١٠ ـ $y = \dfrac{5}{\sqrt{x+2}};\ x = 0,\ x = 5$.

١١ ـ $y = x\sqrt{4x^2+1};\ x = 0,\ x = 2$.

١٢ ـ $y = \dfrac{x}{c}\sqrt{c^2 - x^2};\ x = 0,\ x = c$ حيث $c > 0$

١٣ ـ $y = \begin{cases} (x+1)^3, & -1 \le x \le 0, \\ 1 - \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2;\ x = -1,\ x = 2 \end{cases}$.

١٤ ـ $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3), & -3 \le x < 1, \\ 3 - x, & 1 \le x \le 3;\ x = -3,\ x = 3 \end{cases}$.

١٥ ـ $y = |x|;\ x = -2,\ x = 5$.

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات الآتية باستخدام مستطيلات مقربة رأسية (محور u موازياً للمحور السينى) ومرة أخرى باستخدام مستطيلات أفقية (محور u موازياً للمحور الصادى) :

١٦ ـ $y = 8 - x^3,\ x = 0,\ y = 0$.

١٧ ـ $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 3$.

١٨ ـ $y = 2x + 2,\ y = 2 - x^2,\ y = 0$ (المنطقة على يمين الخط وعلى يسار القطع المكافىء)

١٩ ـ $y = 6x - x^2,\ y = 2x$

٢٠ ـ $y = 1 - x^2,\ x - 2y + 4 = 0,\ x = 0,\ y = 0$

خطط المنحنيات الآتية وأوجد مساحة المنطقة أو المناطق المحدودة بهما :

٢١ ـ $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$

٢٢ ـ $y = x^2 + 4x,\ y = 0$

٢٣ ـ $y = x^2 - 4x + 2,\ x + y - 6 = 0$

٢٤ ـ $y = -x^2 - 6x,\ y = 2x$

٢٥ ـ $y = x^2 - 6,\ y = 6 - x^2$

٢٦ ـ $y = x^3,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 3$

٢٧ ـ $y = x(x - 2)^2,\ y = 0$

٢٨ ـ $y = x(x + 3)^2,\ y = 0,\ x = -3,\ x = -1$

٢٩ ـ $y = \sqrt{4 + x},\ x = 0,\ y = 0$

٣٠ ـ $y = x^3 - x^2 - 6x,\ y = 0$

٣١ ـ $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12,\ y = 0$

٣٢ ـ $y = 9 - x^2,\ x - y + 7 = 0$

٣٣ ـ $y = 2\sqrt{x},\ y = -2x + 12,\ y = 0$

٣٤ ـ $y = 2\sqrt{x},\ y = -2x + 12,\ x = 0$

٣٥ ـ $y = -x^3 + 2x^2 + 3x,\ y = -5x$

٣٦ ـ $x^2y = 3,\ 4x + 3y - 13 = 0$

٣٧ ـ $y^2 - 4y - 2x = 0,\ x = 0$

٣٨ ـ $y^2 = x + 1,\ y^2 = 7 - x$

٣٩ ـ $y^2 = x + 4,\ x - 2y + 1 = 0$

٤٠ ـ $x = 4y - y^2,\ x + y = 4$

٤١ ـ $x = y(y - 3)^2,\ x = 0$

٤٢ ـ $x = y^3 - 4y^2 - y + 4,\ x = 0$

٤٣ ـ $x = y^2 - y^3,\ x = 0$

٤٤ ـ $y^2 = x^3,\ x = 0,\ x = 1$

٤٥ ـ $y^2 = ax,\ x^2 = by$, where $a > 0$ and $b > 0$

٤٦ ـ $y = x^4 - 3x^2,\ y = x^2$

٤٧ ـ $y^2 = x^2(x^2 - 1),\ x = 3$

٤٨ ـ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0$

٤٩ ـ أوجد مساحات المناطق بين المحور السينى وذلك الجزء من المنحنى $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ بين $x = 2$ و $x = -3$.

٥٠ ـ أوجد مساحة المثلث القائم المتكون بالخط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة $(4, 6)$ ، المحور السينى ، والخط المستقيم $x = 4$.

٥١ ـ أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x(3 - x)^2$ بين النهاية العظمى الموضعية والنهاية الصغرى الموضعية .

٥٢ ـ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء $y^2 = 3x$ والمماس عند $(3, 3)$ والمحور السينى .

٥٣ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل عروة المنحنى $y^2 = x(x - 3)^2$.

٥٤ ـ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء ووتره البؤرى العمودى .

٥٥ ـ أثبت أن مساحة قطعة القطع المكافىء المقطوعة بخط عمودى على محوره هى ثلثا مساحة المستطيل المحيط بها. أرشميدس (٢٨٧ ـ ٢١٢ قبل الميلاد) عرف ذلك . لقد كان أحد

الأوائل الذين قربوا الى مساحة المنطقة بحواصل جمع مساحات مستطيلات ، لكن بسبب افتقاره الى حساب التكامل استطاع فقط ايجاد مساحات عدد قليل من المناطق . بعد ألفى سنة تقريباً اكتشف نيوتن النظرية الأساسية .

٥٦ ـ حقق أن مساحة المثلث هى $\frac{1}{2}bh$ ، حيث b طول ضلع ، h الارتفاع من الرأس المقابل لذلك الضلع (ارشاد : أوجد أولا مساحة المثلث القائم المكون بالمستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (a, b) ، ومحور السينات ، والمستقيم $x = a$. أى مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين قائمين) .

٥٧ ـ اذا كانت $g(x) \geqslant f(x)$ فى الفترة $[a, b]$ أثبت أن مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = b$ و $x = a$ و $y = g(x)$ و $y = f(x)$ تعطى بالعبارة $\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$. اذا كان علاوة على ذلك $f(x) \geqslant 0$ فى الفترة $[a, b]$ ، فسر التكامل كفرق مساحتى المنطقتين تحت f و g بين b و a .

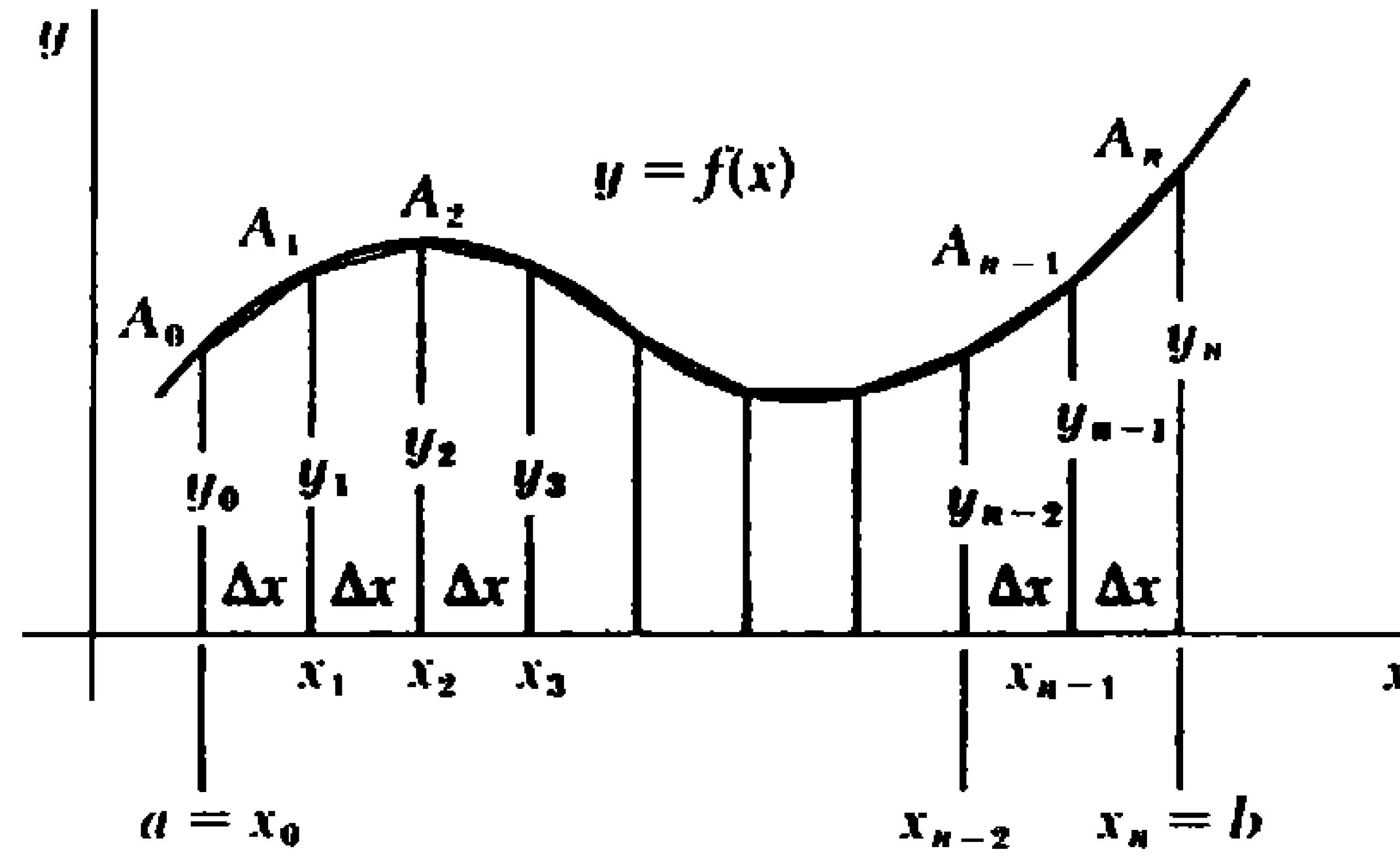
٥ ـ ٥

قاعدة شبه المنحرف وقاعدة سمسون

عندما لا يمكن ايجاد المعكوس التفاضلى للدالة f فان التكامل $\int_a^b f(x)\, dx$ لا يمكن إيجاد قيمته ويجب أن نقنع بقيمة تقريبية للتكامل . مع أن حاصل جمع ريمان هو تقريب للتكامل ، لكن فائدته نظرية أكثر منها عملية . توجد طرق أكثر كفاءة لتقريب التكامل ، سنعطى هنا اثنتين منهما .

فى اشتقاق الصيغة الأولى للتقريب سنفرض أن $f(x) \geqslant 0$ فى الفترة $[a, b]$ (شكل ٥ ـ ٢١) ، حتى أن التكامل يمكن تفسيره بأنه المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$. الصيغة ، مع ذلك ، صحيحة لأى دالة متصلة سواء كانت موجبة أولم تكن . برهان يصلح لجميع هذه الدوال مخطط فى المسألة ٢٦ . قسم الفترة $[a, b]$ الى n من الفترات الجزئية المتساوية بالتجزىء $[a = x_1, x_2, \ldots, x_n = b]$. مثل هذا التجزىء يسمى تجزيئاً منتظماً . ارسم خطاً رأسياً من كل x_i للمنحنى ، كما هو موضح فى الشكل ٥ ـ ٢١ ، ووصل بين نقط التقاطع المتعاقبة : $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ، بقطع مستقيمة المنطقة تحت كل قطعة مستقيمة تكون شبه منحرف مساحته تقريب لمساحة المنطقة تحت القطعة المناظرة من المنحنى . لتكن $y_0, y_1, \ldots, y_n$ هى أطوال القطع المستقيمة الرأسية ولتكن Δx هى الطول المشترك للفترات الجزئية ، فيكون $\Delta x = (b - a)/n$ مساحة شبه المنحرف الأول هى

$$\frac{\Delta x}{2}(y_0 + y_1)$$



شكل ٥ ـ ٢١

المنطقة تحت المنحنى تقرب بأشباه منحرفات .

مساحة شبه المنحرف الثانى هى

$$\frac{\Delta x}{2}(y_1 + y_2)$$

مساحة الثالث هى

$$\frac{\Delta x}{2}(y_2 + y_3)$$

وهكذا ، الى أن مساحتى شبهى المنحرفين الآخيرين هما

$$\frac{\Delta x}{2}(y_{n-2} + y_{n-1}) \quad \text{و} \quad \frac{\Delta x}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

حاصل جمع هؤلاء

$$\frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \qquad (1)$$

هو تقريب لمساحة المنطقة تحت المنحنى بين b و a ، أى للتكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ وهذا التقريب يكون عادة أفضل من التقريب الذى نحصل عليه باستخدام مستطيلات . الصيغة (١) حسناً تسمى قاعدة شبه المنحرف . فى نصها المدون أدناه قد أبدلنا كل y_i بـ $f(x_i)$ وضربنا كل حد فى المعامل $\frac{1}{2}$.

٥ ـ ١٤ قاعدة شبه المنحرف . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة $[a, b]$. قسم الفترة الى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول بالتجزىء $[a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b]$ لتكن $\Delta x = (b - a) / n$ طول كل فترة جزئية .

فيكون
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \Delta x[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(x_n)]$$

يمكن اثبات أنه اذا كانت $f''(x)$ موجودة فى الفترة $[a, b]$ ، فان الخطأ فى تقريب التكامل بقاعدة شبه المنحرف يكون أقل من $[(b - a)(\Delta x)^2 M]/12$ ، حيث M هى أكبر قيمة لـ $|f''(x)|$ فى $[a, b]$.

مثال ١ . قرب الى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $y = 1/x$ بين 4 و 1 بقاعدة شبه المنحرف بست فترات جزئية .

هنا $n = 6$ و $b = 4$ و $a = 1$ و $f(x) = 1/x$ واذن

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{1}{2}$$
.

والتجزىء للفترة $[1, 4]$ هو $[1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4]$. قاعدة شبه المنحرف تعطى

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\, dx \approx \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}f(1) + f(\tfrac{3}{2}) + f(2) + f(\tfrac{5}{2}) + f(3) + f(\tfrac{7}{2}) + \tfrac{1}{2}f(4)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4})] \approx 1.405$$

بما أن $f''(x) = 2/x^3$ ، فأكبر قيمة لـ $|f''(x)|$ فى $[1, 4]$ هى $M = 2$ والخطأ فى التقريب أقل من $3(\tfrac{1}{2})^2(\tfrac{2}{12}) = 0.125$. يمكن اثبات أن قيمة المساحة صحيحة لثلاثة أرقام عشرية هى 1.386 .

التقريب للتكامل المعين يمكن تحسينه بطريقتين . احداهما باستعمال قاعدة شبه المنحرف بعدد أكثر من الفترات الجزئية . الطريقة الأخرى هى أن نحتفظ بعدد الفترات الجزئية كما هو ونقرب الى المنحنى ليس بقطع مستقيمة متعاقبة لكن بقطع من منحنيات بسيطة مناسبة تقترب أكثر الى المنحنى . المنحنى الأبسط التالى بعد الخط المستقيم هو القطع المكافىء لأن معادلته من الدرجة الثانية . اذا كانت أجزاء المنحنى المعطى تقرب بقطوع مكافئة ومساحات المناطق تحت القطوع المكافئة تجمع ، فاننا نحصل على قاعدة سمسون للقيمة التقريبية للتكامل .

٥ ـ ١٥ قاعدة سمسون . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة $[a,b]$. قسم الفترة الى عدد زوجى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول بالتجزىء $[a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b]$.

لتكن $\Delta x = (b - a) / n$ طول كل فترة جزئية . فيكون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

البرهان. نفضل أن نكتب $h = \Delta x$. يوجد منحنى على الصورة

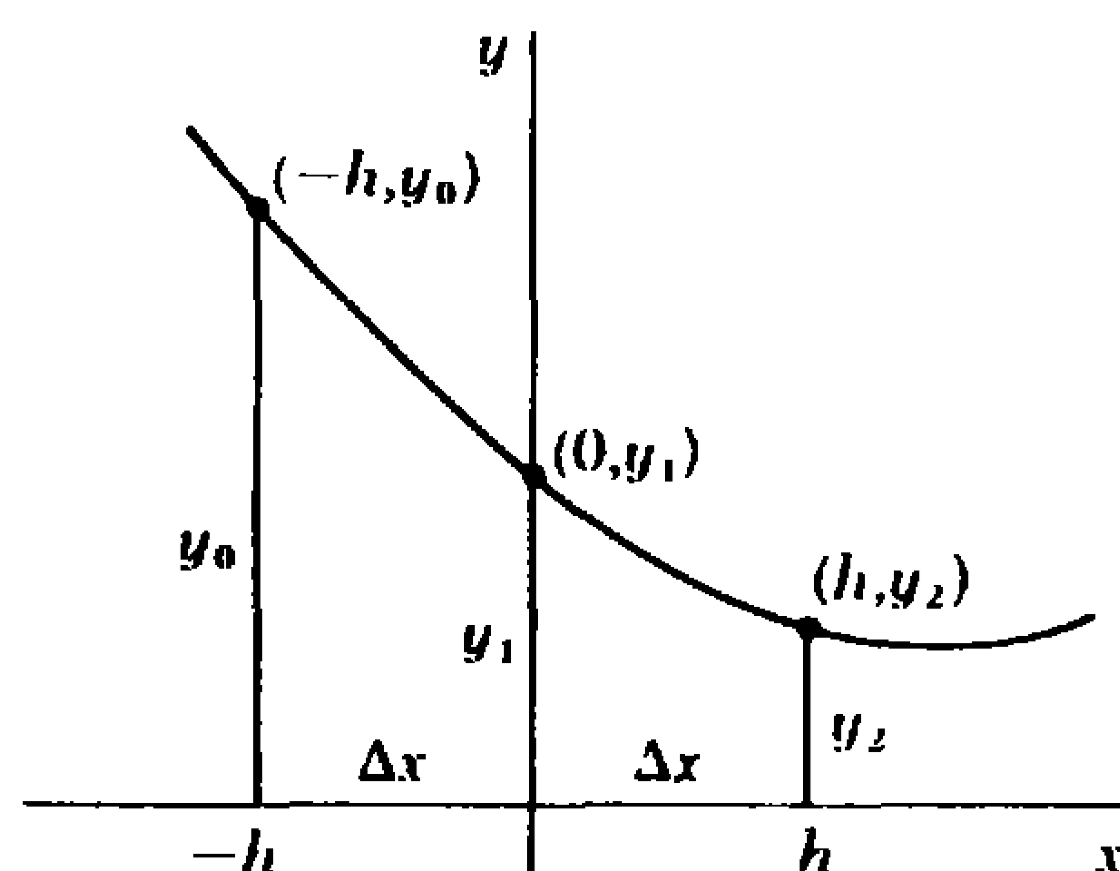
$$y = ax^2 + bx + c$$

يمر بالنقط الثلاث (h, y_2) و $(0, y_1)$ و $(-h, y_0)$ ، (شكل ٥ ـ ٢٢) . وهو قطع مكافىء اذا لم تكن النقط على خط مستقيم . يمكننا ايجاد المنحنى بحل المعادلات

$$y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c,$$

$$y_1 = c, \qquad (٢)$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$



شكل ٥ ـ ٢٢

فى آن واحد لـ c و b و a ، لكن هذا ليس ضرورياً لفرضنا . المساحة تحت المنحنى من $-h$ الى h هى

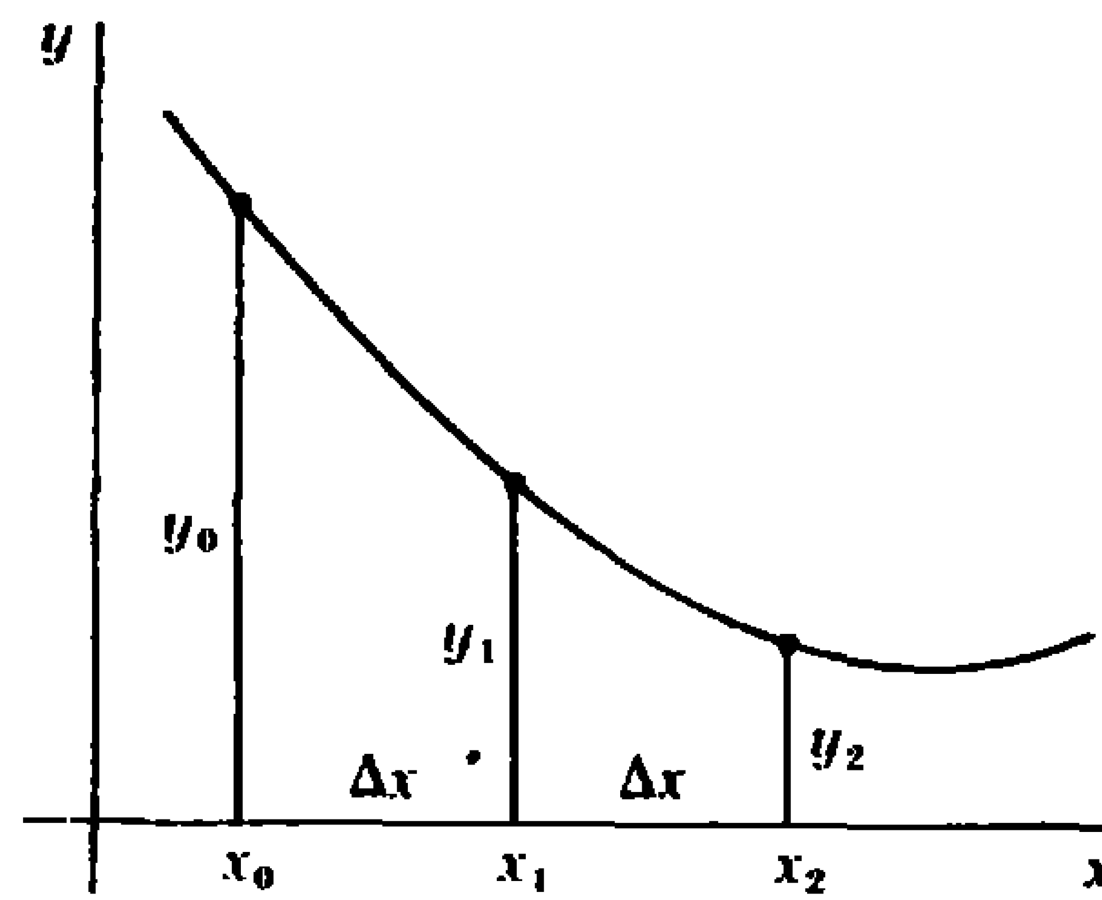
$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-h}^{h} = \frac{h}{3}\,(2ah^2 + 6c). \qquad (٣)$$

بضرب المعادلة الثانية من (٢) فى 4 ثم جمع المعادلات الثلاث نحصل على : $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c$. اذن من (٣) ، يكون

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

هذه المعادلة تعطينا مساحة المنطقة تحت القطع المكافىء بدلالة الاحداثيات الصادية للنقط الثلاث . اذا نقل القطع المكافىء موازياً للمحور السينى ، كما فى الشكل ٥ ـ ٢٣ ، فان الاحداثيات y لا تتغير ومساحة المنطقة تحت المنحنى من x_0 الى x_2 تعطى بنفس التعبير بالطرف الأيمن . أى أن ، باستبدال h بالرمز Δx ، يكون

$$\int_{x_0}^{x_2} (ax^2 + bx + c)\, dx = \frac{\Delta x}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (٤)$$



شكل ٥ ـ ٢٣

بهذا التمهيد ، لتكن $f(x)$ الدالة التى يراد تقريب تكاملها ، فيكون

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\, dx$$

اذا كان جزء الشكل البيانى للدالة f المعين بالفترة $[x_i, x_{i+2}]$ يقرب بالقطع المكافىء المار بنقطتيها الطرفيتين ونقطة المنتصف (شكل ٥ ـ ٢٤) ، فكل من التكاملات $\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\, dx$ يمكن التقريب اليه بتعبير مماثل للطرف الأيمن من (٤) ، ويكون

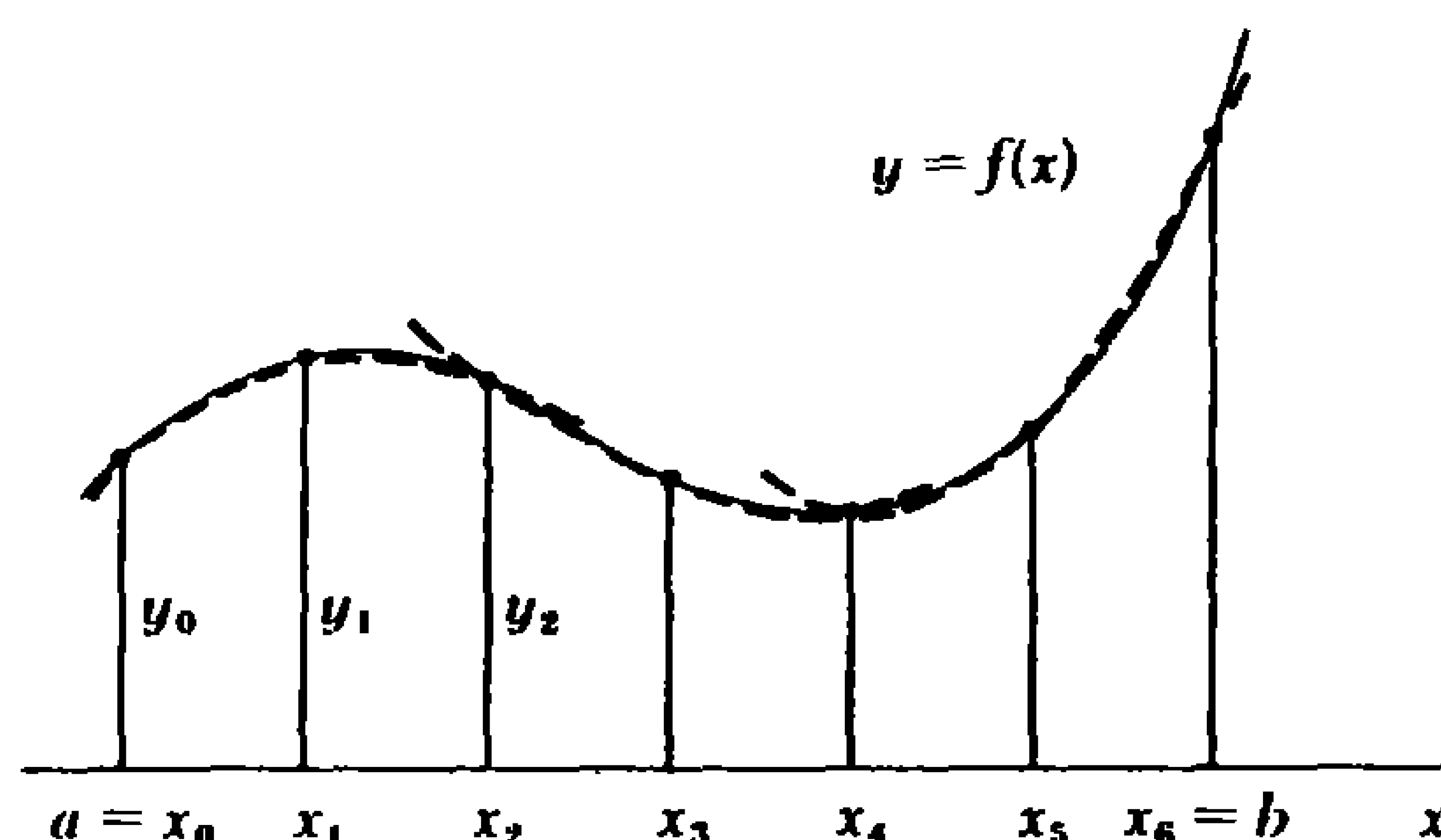
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$\int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,(y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2}),$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}\,(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n).$$

بجمع هذه وابدال كل y_i بـ $f(x_i)$ نحصل على قاعدة سمسون .



شكل ٩ - ٢٤

فى كل فترة مزدوجة يقرب المنحنى بقطع مكافىء .

مع أننا قد قدمنا البرهان بدلالة المساحات ، الا أن العمل جبرى ولم نفترض فى أى مرحلة أن $f(x)$ موجبة فقاعدة سمسون صحيحة لأى دالةمتصلة . ولأن كل قطع مكافىء مقرب يكتسح فترتين جزئيتين فان قاعدة سمسون يمكن استخدامها فقط مع عدد زوجي من الفترات الجزئية .

يمكن اثبات أنه اذا كانت $f^{(4)}(x)$ موجودة فى الفترة $[a, b]$ ، فان الخطأ فى تقريب التكامل بقاعدة سمسون يكون أقل من $[(b-a)(\Delta x)^4 M] / 180$ حيث M هى أكبر قيمة لـ $|f^{(4)}(x)|$ فى الفترة $[a, b]$.

مثال ٢ . قرب الى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $y = 1/x$ بين 1 و 4 بقاعدة سمسون مستخدماً ست فترات جزئية .

هذه المساحة قربت فى مثال ١ بقاعدة شبه المنحرف باستخدام ست فترات جزئية) . هنا $f(x)=1/x$ والأعداد $\Delta x = \frac{1}{2}$ و $n = 6$ و $b = 4$ و $a = 1$ هى نفسها كما هناك ، وهكذا أيضاً التجزىء $[1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4]$ للفترة $[1, 4]$. قاعدة سمسون تعطينا

$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx \approx \tfrac{1}{6}[f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + 2f(2) + 4f(\tfrac{5}{2}) + 2f(3) + 4f(\tfrac{7}{2}) + f(4)]$$
$$= \tfrac{1}{6}[1 + 4(\tfrac{2}{3}) + 2(\tfrac{1}{2}) + 4(\tfrac{2}{5}) + 2(\tfrac{1}{3}) + 4(\tfrac{2}{7}) + \tfrac{1}{4}] \approx 1.388.$$

بما أن $f^{4}(x) = 24x^{-5}$ ، فأكبر قيمة لـ $|f^{(4)}(x)|$ فى $[1, 4]$ هى $M = 24$ والخطأ فى التقريب يكون أقل من $3(\frac{1}{2})^4(\frac{24}{180}) = 0.025$. قيمة المساحة صحيحة لثلاثة أرقام عشرية هى 1.386 قاعدة سمسون تعطى تقريباً أفضل مما تعطيه قاعدة شبه المنحرف .

قاعدتا شبه المنحرف وسمسون يمكن استخدامهما لايجاد تقريبات ليس فقط لمساحات ، بل لأى تكامل معين سواء كان يمثل مساحة أم لا بما أن معظم العمل فى صيغ التقريب هو حساب قيم $f(x_i)$ ، فان قاعدة سمسون بمجهود بسيط أكبر تعطى لمعظم الدوال تقريباً أفضل مما تعطيه قاعدة شبه المنحرف .

مسائل

قرب الى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين b و a بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية . (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية .)

١ - $y = x^2;\ a = 1,\ b = 3;\ (a)\ n = 4,\ (b)\ n = 8$

٢ - $y = 1/(x + 1);\ a = -\frac{1}{2},\ b = 2,\ n = 5$

٣ - $y = -x^2 + 4x + 5;\ a = -1,\ b = 5,\ n = 6$

٤ - $y = x^3;\ a = 0,\ b = 1,\ n = 4$

٥ - $y = 1/x^2;\ a = -3,\ b = -1,\ n = 6.$

٦ - $y = \sqrt{x};\ a = 0,\ b = 4;\ (a)\ n = 4,\ (b)\ n = 8$

٧ - $y = \sqrt{x^2 - 4};\ a = 2,\ b = 6,\ n = 8$

قرب الى مساحة المنطقة تحت المنحنيات الآتية بين b و a بقاعدة سمسون مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية المعطاة . (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية) .

٨ - $b = 3$ و $a = 1$ و $y = x^2$ ، (أ) $n = 4$ ، (ب) $n = 8$. لماذا نحصل على نفس الاجابة فى (أ) و (ب) ؟

٩ - $y = -x^2 + 4x + 5;\ a = -1,\ b = 5,\ n = 6$

١٠ - $x^3;\ a = 0,\ b = 1,\ n = 4$

١١ - $y = 1/x^2;\ a = -3,\ b = -1,\ n = 6$

١٢ - $\sqrt{x};\ a = 0,\ b = 4;\ (a)\ n = 4,\ (b)\ n = 8$

١٣ - $y = \sqrt{x^2 - 4};\ a = 2,\ b = 6,\ n = 8$

قرب الى التكاملات المعينة الآتية بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً العدد المعطى n من الفترات الجزئية (الحسابات يجب اجراؤها الى ثلاثة أرقام عشرية) .

١٤ - $\int_{-5}^{-1.5} \frac{1}{x}\, dx;\ n = 7$

١٥ - $\int_0^4 \frac{3}{1 + x^2}\, dx;\ n = 4.$

١٦ - $\int_{-1}^{3} x^3\, dx;\ n = 8$

١٧ - $\int_0^{1.5} \frac{x}{2x + 1}\, dx;\ n = 6$

١٨ - $\frac{1}{8}\int_0^1 (-2 - x^2)\, dx;\ n = 10.$

١٩ - $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x}\, dx;\ n = 4$

٢٠ - $\int_1^3 \sqrt{28 - x^3};\ n = 4$

٢١ - استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{1 + x^2}$ بين 6 و 0 .

٢٢ - استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب مساحة المنطقة بين المنحنيين $x + y = 4$ و $y = 3/x$.

٢٣ - (أ) بفرض أن مساحة الدائرة هى πr^2 ، أوجد تقريباً عشرياً للعدد π بتقريب مساحة ربع دائرة نصف قطرها 1 بقاعدة شبه المنحرف مستخدماً أربع فترات جزئية .

(ب) أوجد تقريباً أفضل للعدد π باستخدام الطريقة المشروحة فى (أ) لكن بقاعدة سمسون . (ج) اذا كان من المتاح استخدام جهاز حاسب ، فأوجد تقريبات للعدد π باستخدام الطريقة المشروحة فى (أ) لكن بفترات جزئية عددها 100 و 50 و 20 .

٢٤ - ادرس الطريقة الآتية لتقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$. قسم الفترة $[a, b]$ الى عدد n من الفترات الجزئية متساوية الطول Δx بالنقط $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$. احسب أولا التقريب بحاصل جمع ريمان $s = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \Delta x$ حيث كل $\bar{x}_i$ هى النقطة الطرفية اليسرى للفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. احسب ثانياً التقريب بحاصل جمع ريمان آخر t حيث كل $\bar{x}_i$ هى النقطة الطرفية اليمنى للفترة الجزئية . وضح المستطيلات المقربة على الشكل البيانى للدالة f لكلا التقريبين . الآن خذ متوسط t و s . اشرح لماذا يكون هذا المتوسط عادة تقريباً من s أو t على حده . وأثبت أنه هو نفس التقريب الذى نحصل عليه بقاعدة شبه المنحرف .

٢٥ - الطرف الأيمن من المعادلة فى منطوق قاعدة شبه المنحرف ٥ - ١٤ ليس بحاصل جمع ريمان حتى اذا كانت Δx موزعة على كل حد فى حاصل الجمع . اشرح لماذا ؟

٢٦ - أعط تفصيلات البرهان المختصر المعطى أدناه لقاعدة شبه المنحرف ٥ - ١٤ بأنها تكون صحيحة للدوال المتصلة لكن ليست بالضرورة موجبة فى $[a, b]$. لدينا

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx$$

جزء المنحنى المعين بالفترة $[x_{i-1}, x_i]$ يقرب بالوتر الواصل بين $A_i(x_i, y_i)$: و $A_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ (شكل ٥ - ٢١) . معادلة هذا الوتر هى

$$y = m_i(x - x_i) + y_i$$

حيث m_i هى ميل الوتر . واذن كل من التكاملات $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx$ يمكن تقريبه بالعبارة

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [m_i(x - x_i) + y_i]\, dx = \frac{\Delta x}{2} [m_i(x_i + x_{i-1}) + 2(y_i - m_i x_i)] = \frac{\Delta x}{2} (y_{i-1} + y_i)$$

٢٧ - أثبت أن قاعدة سمسون تعطى القيمة المضبوطة للتكامل اذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة بصرف النظر عن عدد الفترات الجزئية .

٥ - ٦
حجوم الأجسام ذات المقاطع المنتظمة

يمكن استخدام التكامل أيضاً لايجاد حجم جسم . معظم الأجسام العامة صعبة جداً لمعالجتها الآن ، لكن يمكننا ايجاد حجوم الأجسام التى لها درجة ما من الانتظام . سوف لا نحاول تعريف حجم جسم ، لكن ، كما فى المساحات ، نستمر بالبداهة .

الاسطوانة جسم محدود بمنطقتين متطابقتين فى مستويين متوازيين ، والسطح الجانبى يتكون من القطع المستقيمة التى تصل بين النقط المتناظرة على حدود المنطقتين (شكل ٥ - ٢٥) . كل من المنطقتين المستويتين تكون قاعدة للاسطوانة ، وارتفاع الاسطوانة هو المسافة العمودية بين

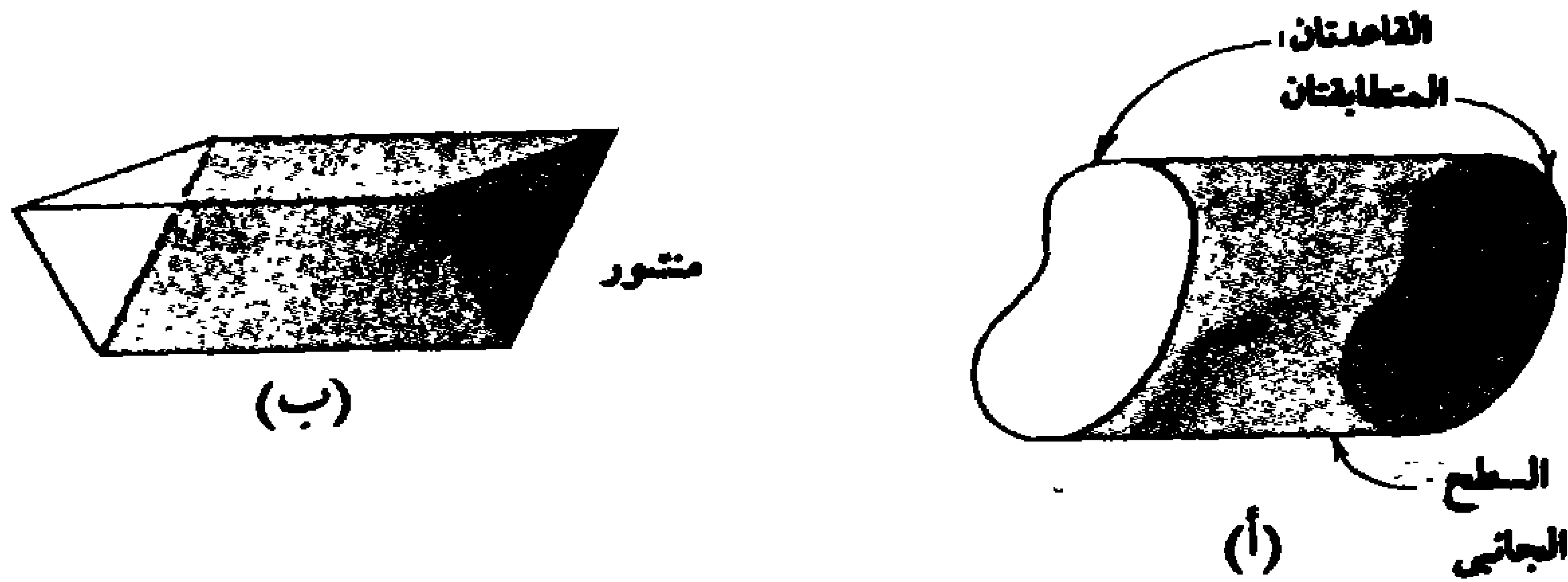
المستويين الأسطوانة الدائرية القائمة هى أسطوانة قاعدتها دائرة وخطوط سطحها الجانبى عمودية على القاعدة . المنشور هو مجرد أسطوانة حدود قاعدتها تكون مضلعاً (شكل ٥ ـ ٢٥ ب) حجم الاسطوانة هو مساحة القاعدة مضروبة فى الارتفاع .

لايجاد حجم جسم كما في شكل ٥ ـ ٢٦ ، أدخل خطاً للاحداثيات u ، يسمى المحور u لتكن $a < b$ و b و a هما احداثيا النقطتين المتطرفيتين لمسقط الجسم على المحور u . المستوى العمودى على المحور u عند نقطة u بين b و a يقطع الجسم فى مقطع مساحته تعتمد على u . نرمز لهذه المساحة بالرمز الدالى $A(u)$. نظرياً المحور يمكن اختياره فى أى اتجاه ، لكن عملياً ينبغى أن يكون موجهاً بحيث يعطى مقاطع للجسم يمكن ايجاد مساحاتها .

ليكن

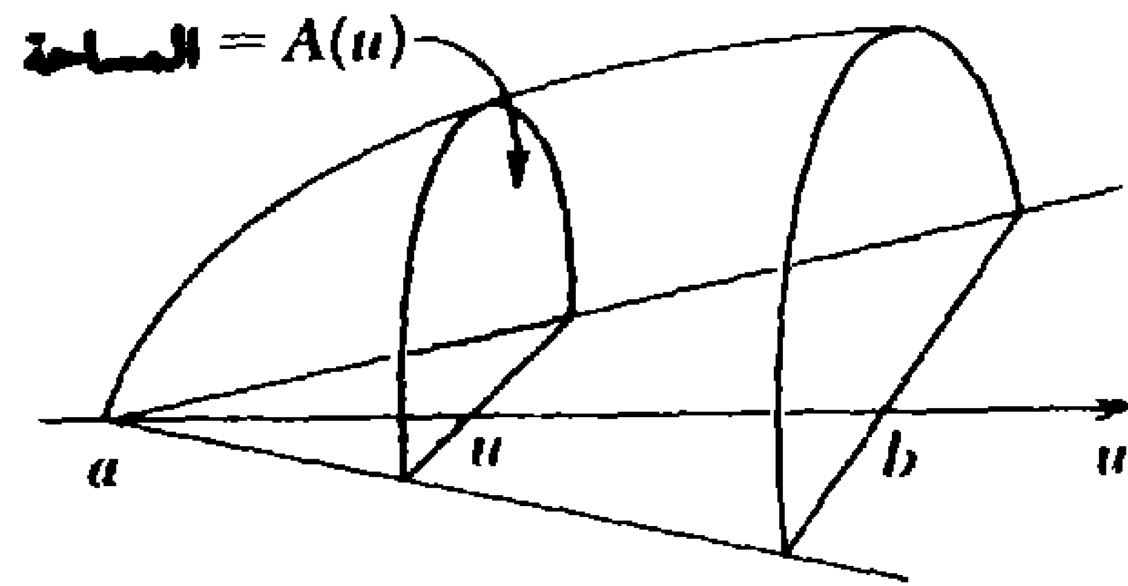
$$[a = u_0, u_1, u_2, \ . \ . \ . \ . \ , u_{n-1}, u_n = b]$$

تجزيئاً للفترة $[a, b]$. مرر مستوى ماراً بكل نقطة تجزىء عمودياً على المحور u (شكل ٥ ـ ٢٧) . هذه المستويات تقسم الجسم الى شرائح . سنقرب الى حجم كل شريحة . حاصل جمع هذه الشرائح سيكون تقريباً لحجم الجسم ، ومنه سوف نستطيع أن نوجد الحجم المضبوط للجسم .



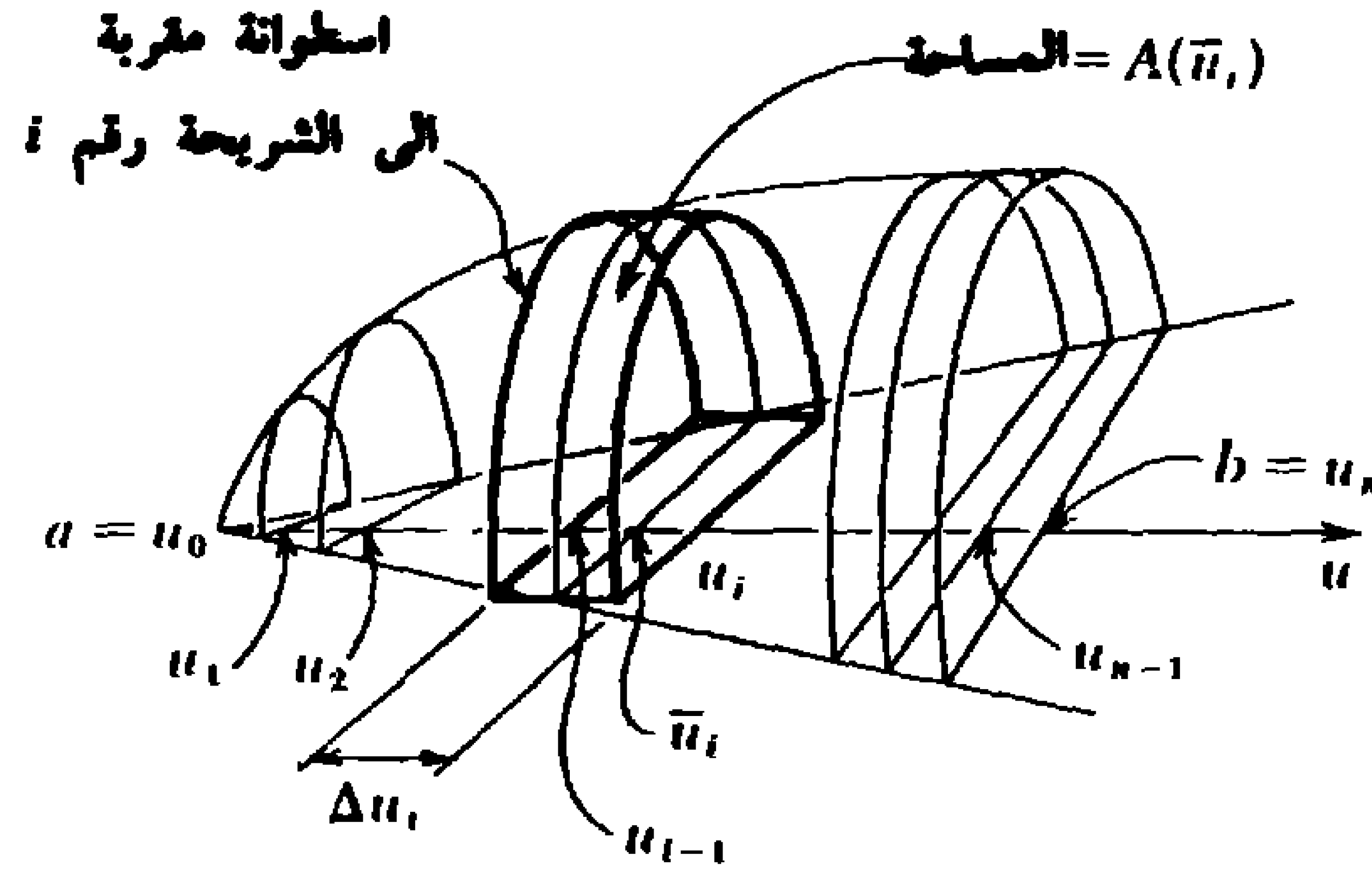
شكل ٥ ـ ٢٥

اسطوانتان . الحجم هو مساحة القاعدة مضروبة فى الارتفاع



شكل ٥ ـ ٢٦

اختر نقطة $\bar{u}_i$ فى الفترة الجزئية $[u_{i-1}, u_i]$. المستوى المار بهذه النقطة عمودياً على المحور u يقطع الجسم فى مقطع مساحته $A(\bar{u}_i)$. كون أسطوانة دائرية قائمة موازية للمحور u بهذا المقطع كمقطعها وبالمستويين المارين بالنقطتين u_i و u_{i-1} كنهايتيها . اذا كانت الفترة الجزئية صغيرة ، فان هذه الاسطوانة هى قرص رقيق ، الا أنه ليس بالضرورة دائرياً وهو ينطبق على الشريحة رقم i عدا بالقرب من سطح الجسم . كلما زادت رقة الشريحة ، كلما زاد انطباقهما . حجم الاسطوانة هو تقريب لحجم الشريحة رقم i.



شكل ٥ - ٢٧
حجم الاسطوانة هو $A(\bar{u}_i)\ \Delta u_i$.

حجم الاسطوانة هو المساحة $A(\bar{u}_i)$ للمقطع عند $\bar{u}_i$ مضروبة فى سمك الاسطوانة $\Delta u_i = u_i - \bar{u}_{i-1}$ أى $A(\bar{u}_i)\ \Delta\ u_i$. اذا كونا أسطوانات مقربة مماثلة لكل شريحة ، فان حاصل جمع حجومها

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{u}_i)\ \Delta u_i \qquad (١)$$

يكون تقريباً لحجم الجسم . هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة A . سندرس فقط أجساماً واختيارات للمحور u حيث كل مستوى عمودى يقطع الجسم فى مقطع مساحته $A(u)$ دالة متصلة لـ u .

حجم الجسم يمكن التقريب اليه كما نريد بحواصل جمع على الصورة (١) باستخدام تجزيئات رقيقة للغاية . واذن الحجم V يعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$V = \lim_{w\to 0} \sum_{i=1}^{n} A(\bar{u}_i)\ \Delta u_i$$

حيث w هى معيار التجزىء . التكامل المعين هو رمز آخر لحاصل الجمع هذا . ، ومن ثم

$$V = \int_a^b A(u)\ du$$

هذا هو كل ما نستطيع أن نصل اليه حالياً . فى مسألة خاصة ينبغى إيجاد تعبير صريح للمساحة $A(u)$ بدلالة u ثم إيجاد قيمة التكامل .

٥ ـ ١٦ حجم الجسم . اختر خطاً مستقيماً لمحور u ودع $A(u)$ ترمز لمساحة مقطع الجسم الناتج بالمستوى العمودى على المحور u عند النقطة u . حجم الجسم يعطى بالصيغة

$$V = \int_a^b A(u)\, du. \tag{٢}$$

حدا التكامل b و a هما الاحداثيان u للموضعين المتطرفين للمستوى العمودى . المساحة $A(u)$ يجب أن تكون غير سالبة لجميع u فى $[a, b]$.

بالتناظر مع المساحات ، يمكننا تعريف حجم جسم بالعدد $\int_a^b A(u)\, du$ ، لكن هذا التعريف معرض لنفس الانتقادات مثل تعريف المساحة كتكامل . يوجد تعريف للحجم يتغلب على هذه الاعتراضات ، لكن لا يمكن اعطاؤه هنا .

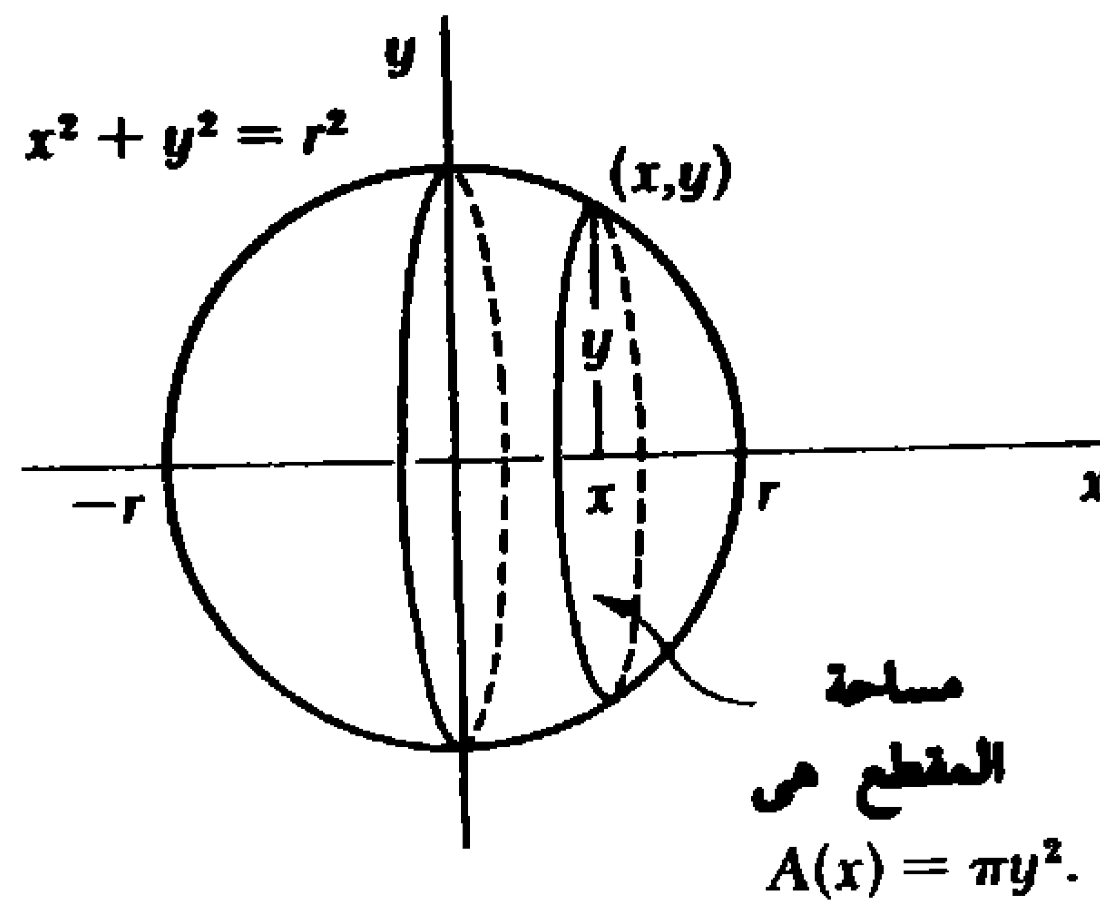
اذا دارات منطقة مستوية حول خط مستقيم ، فان الجسم الناتج يسمى جسماً دورانياً .

الاسطوانة الدائرية القائمة هى جسم دورانى ينشأ بدوران مستطيل حول أحد أضلاعه . الكعكة هى جسم دورانى ينشأ بدوران دائرة حول خط مستقيم فى مستواها خارج الدائرة .

مثال ١ . أوجد حجم الكرة .

الكرة يمكن اعتبارها جسماً دورانياً ينشأ بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ حول المحور السينى (شكل ٥ ـ ٢٨) . نختار المحور السينى المحور u لأن المستويات العمودية عليه تقطع الكرة فى دوائر ، وهى مناطق يمكن إيجاد مساحاتها . التكامل (٢) للحجم يصبح

$$V = \int_a^b A(x)\, dx \tag{٣}$$



شكل ٥ ـ ٢٨

حدا التكامل هما الاحداثيان x للموضعين المتطرفين الأيسر والأيمن للمستوى القاطع ، وهما r و $-r$. لتكن (x, y) نقطة على الدائرة المنشئة . مساحة المقطع عند النقطة x على المحور السينى هى $A(x) = \pi y^2$. بما أن $y^2 = r^2 - x^2$ ، فهذا يمكن التعبير عنه بدلالة x فى الصورة $A(x) = \pi (r^2 - x^2)$ ، والصيغة (٣) تصبح

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}$$
$$= \pi[\tfrac{2}{3}r^3 - (-\tfrac{2}{3}r^3)] = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

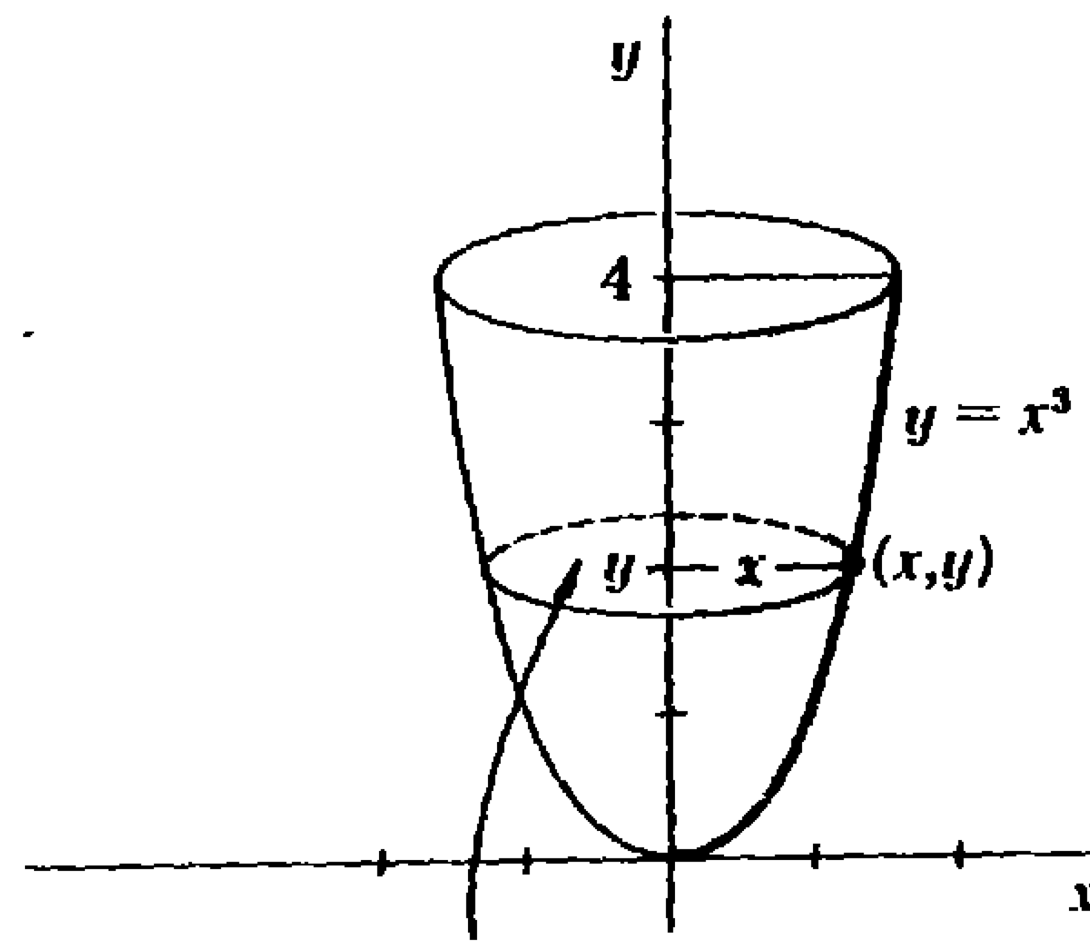
كان فى امكاننا أيضاً إيجاد حجم نصف الكرة بالتكامل من 0 الى r ثم ضرب الناتج فى 2 ؛ أيضاً كان فى إمكاننا اختيار المحور الصادى المحور u .

وحدات الحجم هى وحدات مكعبة . اذا كان فى المثال السابق r مقيسة بالقدم ، الحجم يكون $\frac{4}{3}\pi r^3$cu. ft . اذا قيست r بالسنتيمتر ، الحجم يكون $\frac{4}{3}\pi r^3$ cu. cm .

مثال ٢ . أوجد حجم الجسم الدورانى الناشىء بدوران المنطقة فى الربع الأول المحدود بالمنحنى
$y = x^3$ والمحور الصادى والخط المستقيم $y = 4$ حول المحور الصادى .

أولا اعمل تخطيطاً وحدد موقع المنطقة ، متأكداً أنها محدودة بأكملها بالمنحنيات المعطاة . المنطقة والجسم الدورانى الذى تنشئه موضحان فى الشكل ٥ ـ ٢٩ . خذ المحور الصادى المحور u لأن المستويات العمودية عليه تقطع الجسم فى دوائر يمكن ايجاد مساحاتها . حدا التكامل a و b هما الاحداثيان y للموضعين المتطرفين للمستوى القاطع ، أى 4 و 0 . واذن من (٢) ، يكون

$$V = \int_0^4 A(y)\, dy. \qquad (٤)$$



المساحة $= A(y) = \pi x^2$
شكل ٥ ـ ٢٩

اذا كانت (x, y) نقطة على المنحنى ، فان مساحة المقطع الدائرى عند النقطة y على المحور الصادى هى $A(y) = \pi x^2$. باستخدام معادلة المنحنى ، $x = y^{1/3}$ ، هذه يمكن التعبير عنها بدلالة y ، والتكامل (٤)يصبح

$$V = \int_0^4 A(y)\,dy = \int_0^4 \pi x^2\,dy = \pi \int_0^4 y^{2/3}\,dy = \pi \tfrac{3}{5} y^{5/3}\Big|_0^4 = \tfrac{3}{5}\pi 4^{5/3}$$

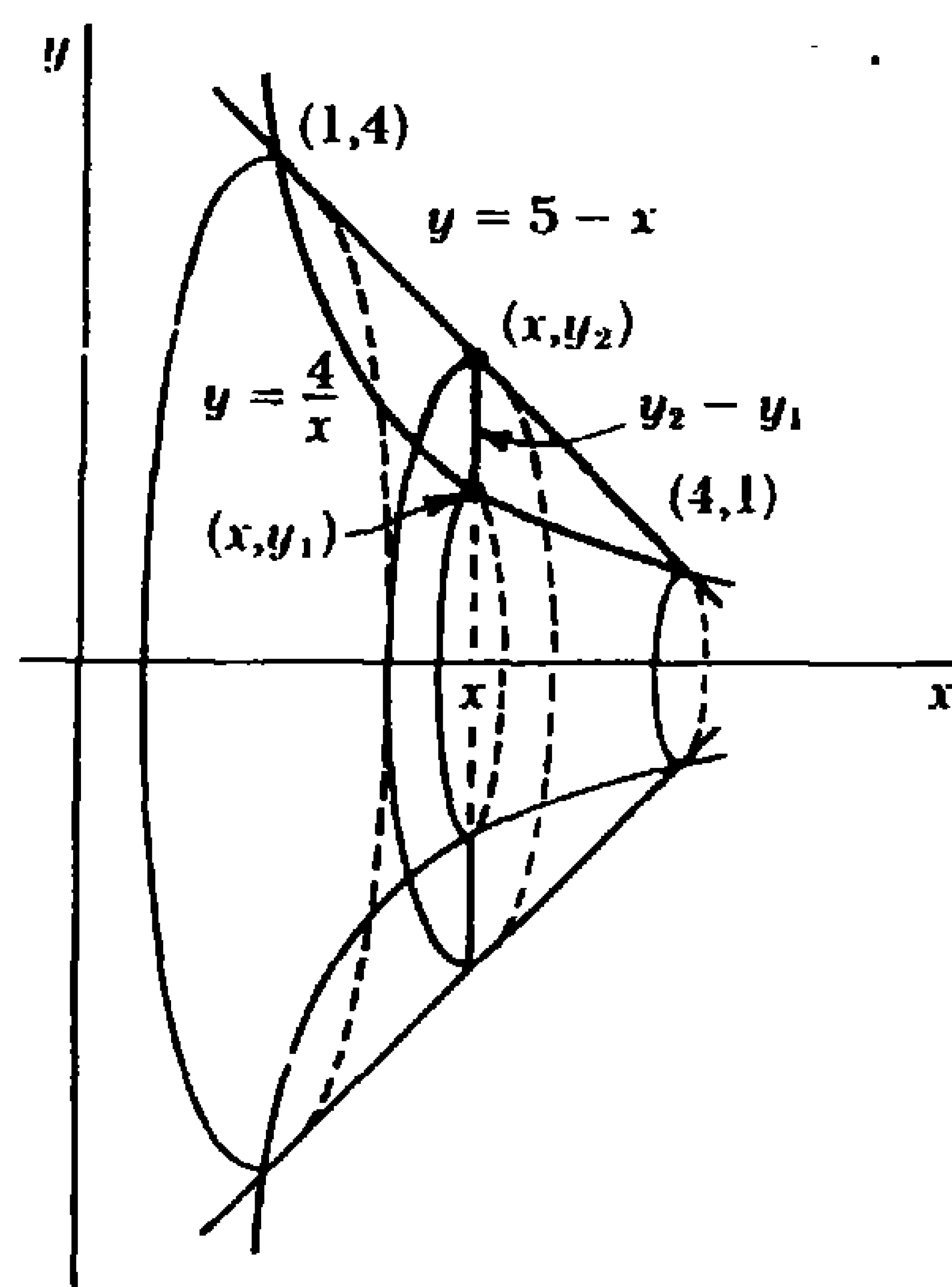
اختيار المحور السينى كمحور u فى المثال السابق مع أنه ممكن ، الا أنه غير عملى . مقاطع الجسم ستكون مناطق غير عادية مساحاتها من الصعب ايجادها .

مثال ٣ . أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 4/x$ والخط المستقيم $y = 5 - x$ ، حول المحور السينى .

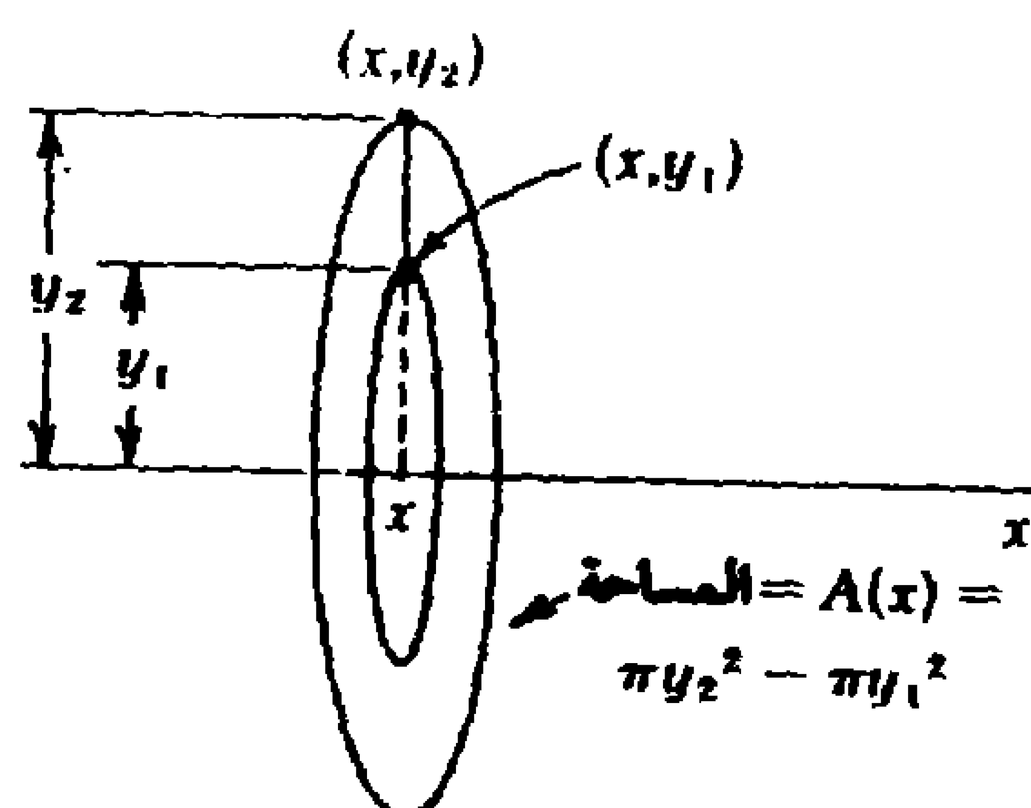
المنطقة والجسم الناشىء عنها موضحان فى الشكل ٥ ـ ٣٠ . أى مستوى عمودى على المحور السينى يقطع الجسم فى منطقة على شكل حلقة محدودة بدائرتين متحدتى المركز ، كما هو موضح الشكل ٥ ـ ٣١ . لذلك نأخذ المحور السينى المحور u . لتكن y_2 و y_1 نصفى قطرى الدائرة الداخلية والدائرة الخارجية . من معادلتى المنحنين يكون $y_2 = 5 - x$ و $y_1 = 4/x$. مساحة الحلقة عند النقطة x على المحور السينى هى الفرق بين مساحتى الدائرة الخارجية والدائرة الداخلية

$$A(x) = \pi y_2^2 - \pi y_1^2 = \pi\left[(5 - x)^2 - \frac{16}{x^2}\right]$$

حدا التكامل هما الاحداثيان x للموضعين المتطرفين للمستوى القاطع ، وهما النقطتان حيث المنحنى والخط المستقيم يتقابلان . بحل معادلتيهما معاً ، نرى أن حدى التكامل هما 4 و 1 .



شكل ٥ ـ ٣٠



شكل ٥ ـ ٣١

لذلك يكون

$$V = \int_a^b A(x)\ dx = \int_1^4 \pi \left[(5-x)^2 - \frac{16}{x^2}\right] dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(25 - 10x + x^2 - \frac{16}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[25x - 5x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \frac{16}{x}\right]_1^4 = 9\pi$$

مثال ٤ . أوجد حجم جسم على شكل بوق ناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = 1$ و $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ حول الخط المستقيم $x = 1$.

المنحنى هو النصف الأيمن للقطع المكافىء $y = 4x^2$. المنطقة والجسم الناشىء عنها موضحان فى الشكل ٥ ـ ٣٢ . أى مستوى عمودى على المحور y يقطع الجسم فى مقطع دائرى . اذا كانت (x, y) هى نقطة على المنحنى المنشىء ، فان نصف قطر الدائرة هو $1 - x$ ومساحة المقطع عند النقطة y على المحور الصادى هى

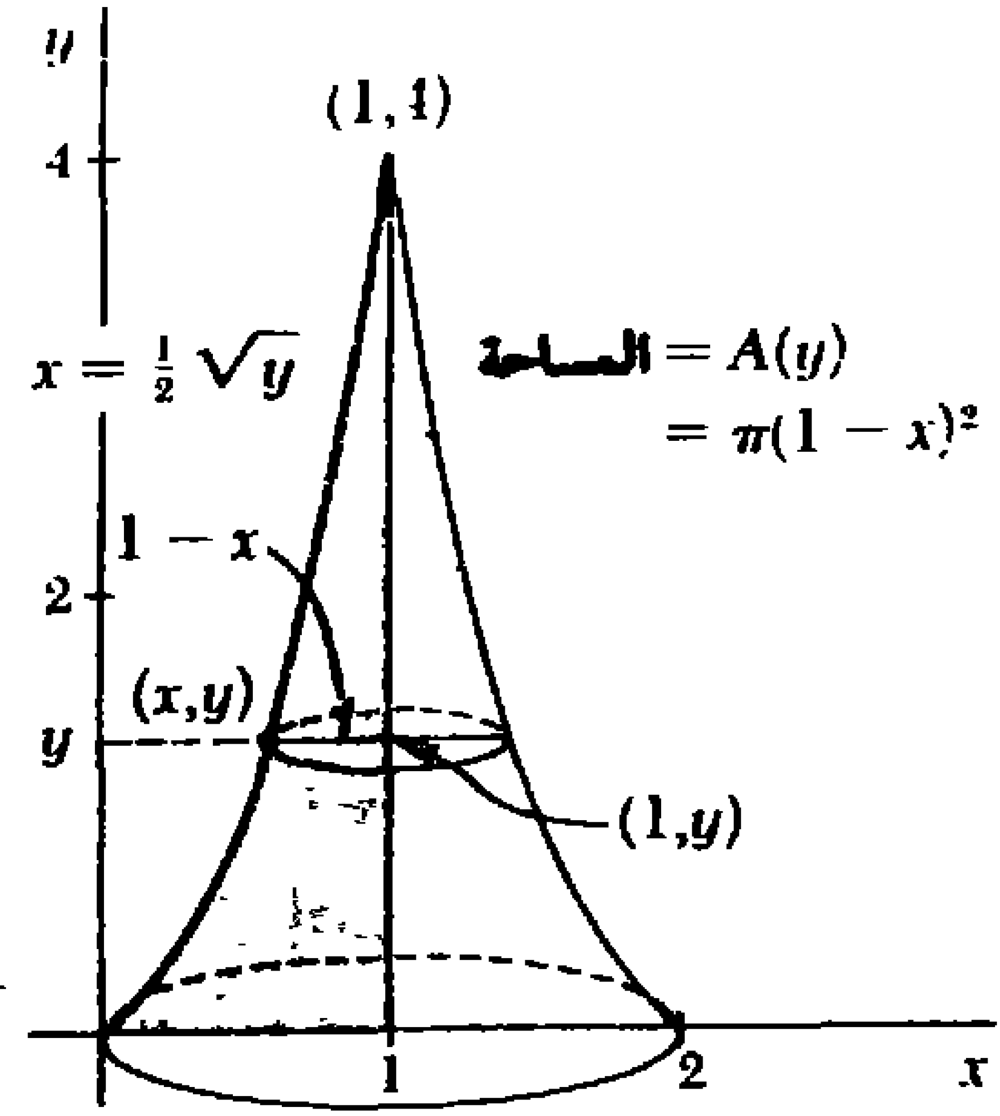
$$A(y) = \pi(1-x)^2 = \pi\left(1 - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2$$

النقطة على المنحنى $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$ التى احداثيها السينى 1 ، احداثيها الصادى 4 . لذلك حدا التكامل هما $y = 4$ و $y = 0$ ، ويكون

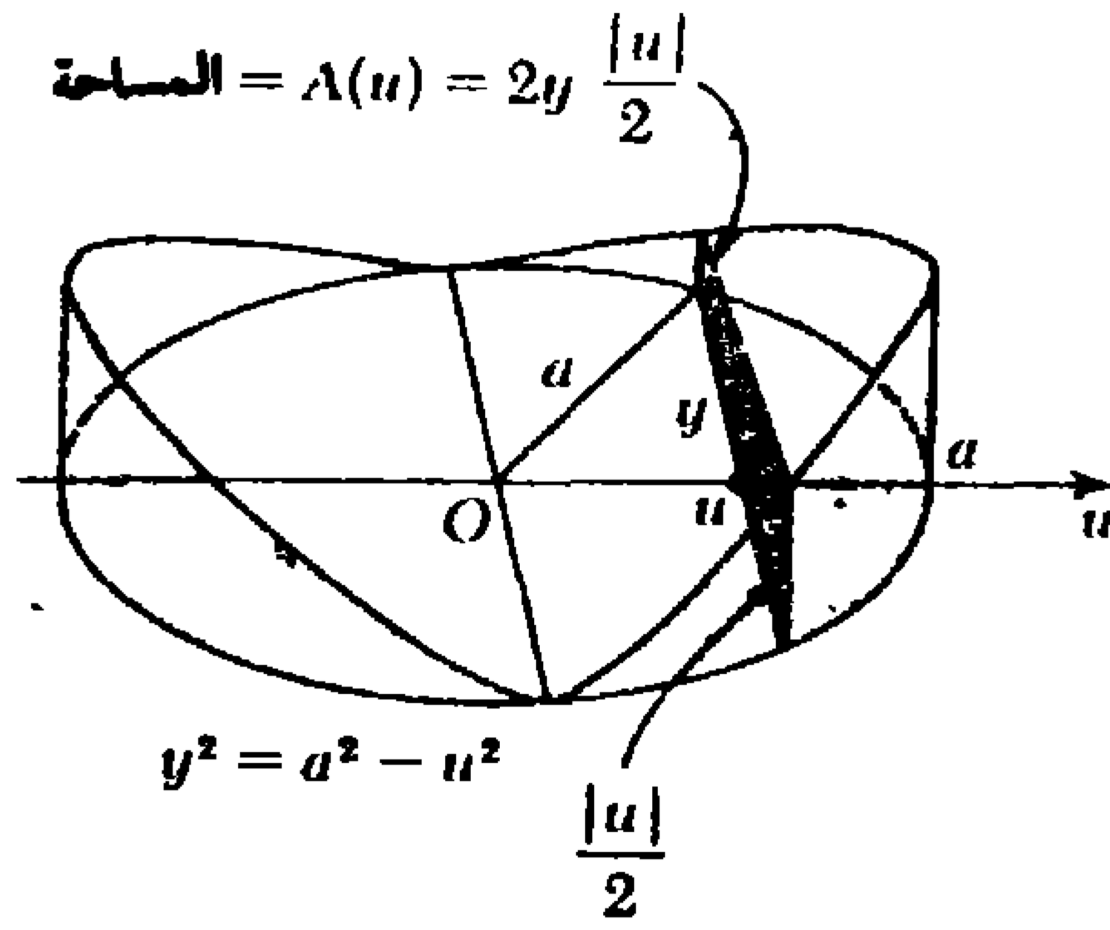
$$V = \int_a^b A(y)\ dy = \pi \int_0^4 \left(1 - \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 \left(1 - \sqrt{y} + \frac{y}{4}\right) dy = \pi \left[y - \tfrac{2}{3}y^{3/2} + \frac{y^2}{8}\right]_0^4 = \tfrac{2}{3}\pi$$

مثال ٥ . قاعدة جسم معين هى دائرة . كل مقطع عمودى على قطر ثابت للدائرة هو مستطيل ارتفاعه نصف بعد المقطع عن مركز الدائرة . أوجد حجم الجسم .



شكل ٥ ـ ٣٢



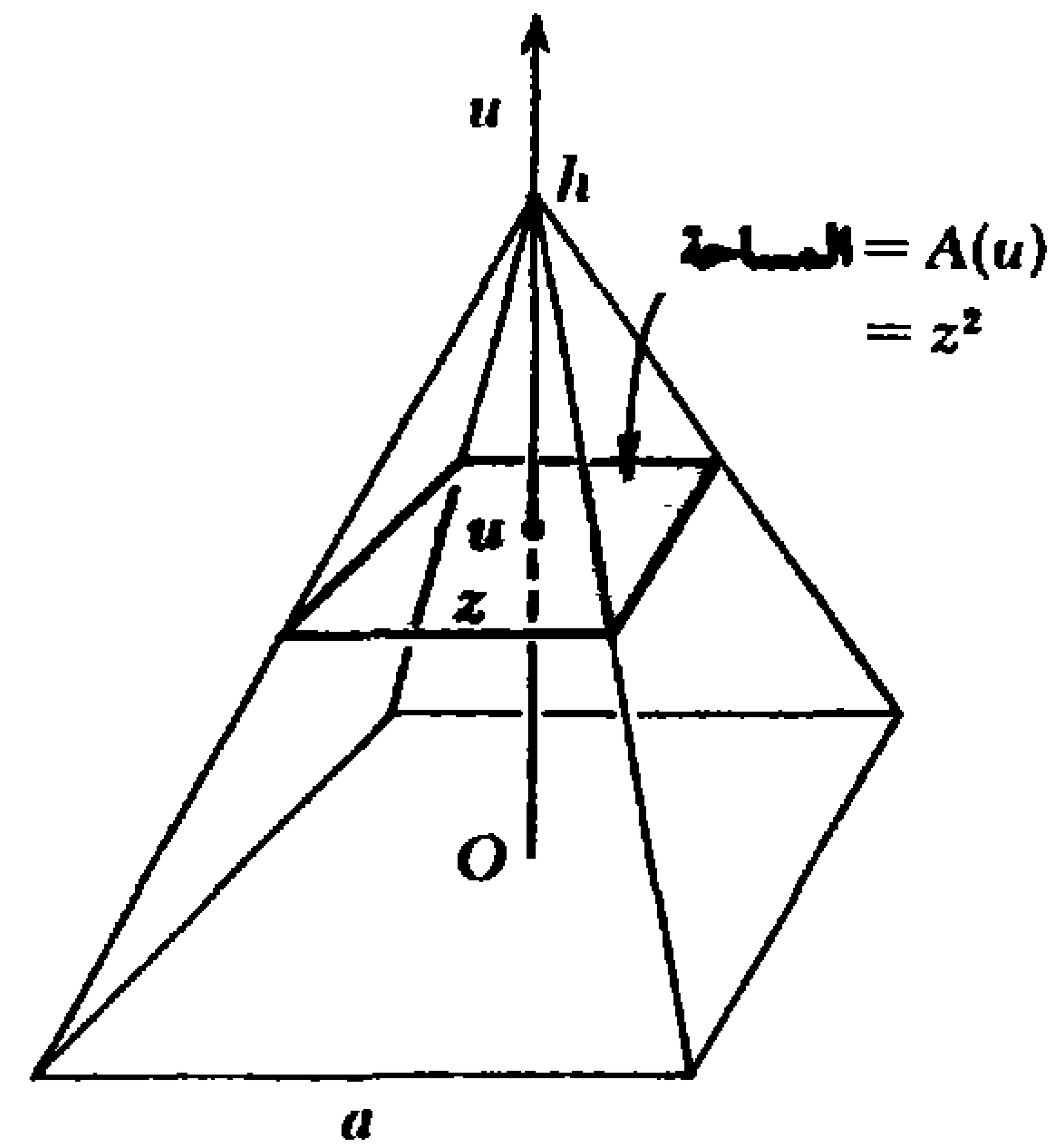
شكل ٥ ـ ٣٣

الجسم موضح فى الشكل ٥ ـ ٣٣ . ليكن المحور u هو خط القطر الثابت ولتكن نقطة الأصل عند مركز الدائرة . ليكن $2y$ طول قاعدة المستطيل عند النقطة u على المحور u . اذا كان a نصف قطر الدائرة ، فان $y^2 = a^2 - u^2$. بما أن u يمكن أن تكون سالبة ، ارتفاع المستطيل لا يكون $u/2$ ، لكن $|u|/2$ ، مساحة المستطيل هى

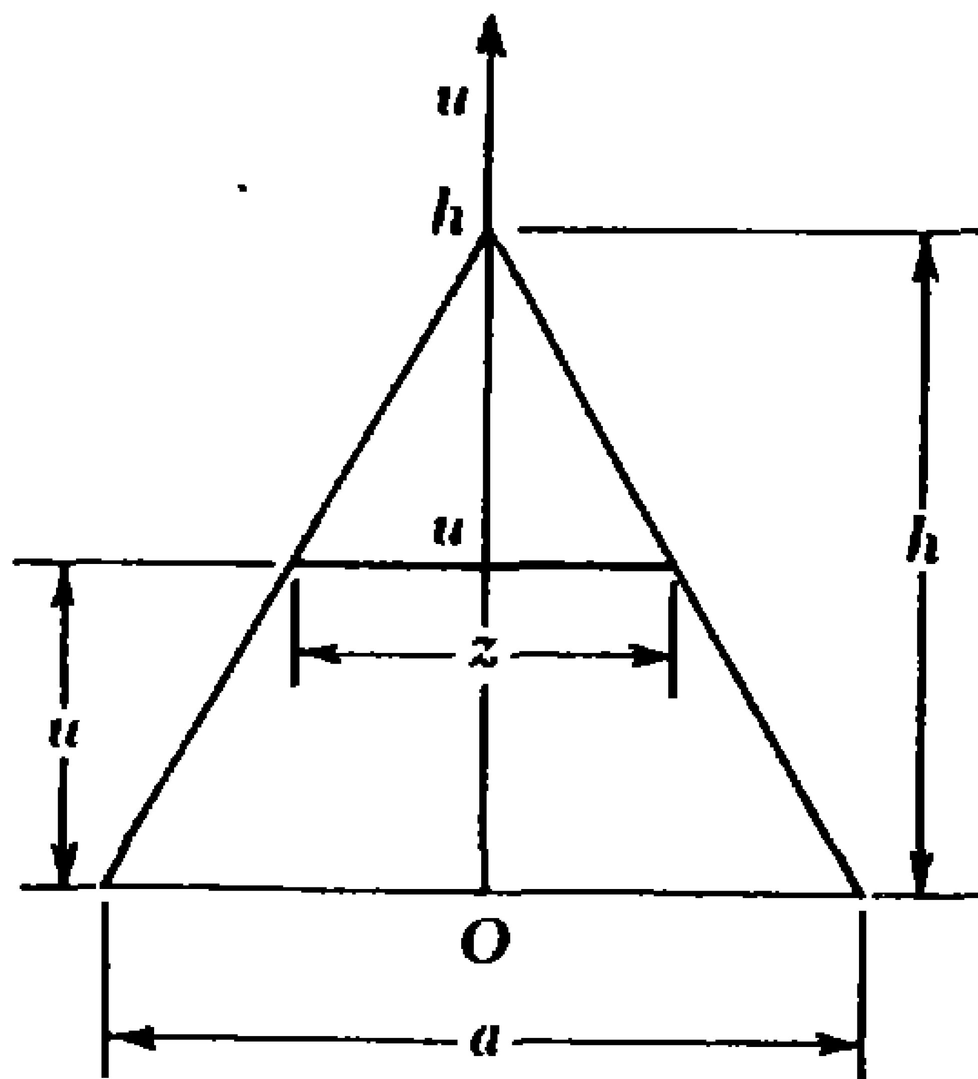
$$A(u) = 2y\,\frac{|u|}{2} = \sqrt{a^2 - u^2}\,|u|$$

سنوجد الحجم بالتكامل على النصف الأيمن للجسم ومضاعفة النتيجة . عندما $0 \leq u \leq a$ يكون $|u| = u$ ، والحجم V للجسم بأكمله يكون

$$V = 2\int_0^a A(u)\,du = 2\int_0^a \sqrt{a^2 - u^2}\,u\,du = -\tfrac{2}{3}(a^2 - u^2)^{3/2}\Big|_0^a = \tfrac{2}{3}a^3$$



شكل ٥ ـ ٣٤



شكل ٥ ـ ٣٥

مثال ٦ . أثبت أن حجم الهرم المنتظم الذى قاعدته مربعة الشكل هو $\frac{1}{3}Bh$ ، حيث B مساحة القاعدة ، h الارتفاع .

الهرم موضح فى الشكل ٥ ـ ٣٤ . المقاطع الموازية للقاعدة تكون مربعات . لذلك نأخذ المحور u متجهاً لأعلى ومنطبقاً على محور الهرم . ونقطة الأصل فى القاعدة . حجم الهرم يعطى بالتكامل $V = \int_0^h A(u)\,du$ ، حيث $A(u)$ هى مساحة المقطع الأفقى عند النقطة u على المحور u . يجب أن نوجد تعبيراً لـ $A(u)$ بدلالة u . المقطع الرأسى للهرم ، الناشىء بمستوى مار بالمحور ومواز لأحد أحرف القاعدة ، موضح فى الشكل ٥ ـ ٣٥ . لتكن z هى طول ضلع المقطع الأفقى المربع ، فيكون $A(u) = z^2$. اذا كانت a طول ضلع قاعدة الهرم ، فان من تشابه المثلثات يكون $(h-u)/h = z/a$. واذن $A(u) = z^2 = (a^2/h^2)(h-u)^2$ و $z = (a/h)(h-u)$ ويكون

$$V = \int_0^h A(u)\,du = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}(h-u)^2\,du$$

$$= -\frac{a^2}{3h^2}(h-u)^3\Big|_0^h = \tfrac{1}{3}a^2h = \tfrac{1}{3}Bh.$$

مسائل

أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول المحور السينى .

١ ـ $x + y = 3$ ، ومحورا الاحداثيات

٢ ـ $x = 2$ ، والمحور السينى ، $y = x^2$

٣ ـ $y^2 = 4 - x,\ x = 2$

٤ ـ $x^2 + y^2 = 25,\ x = -5,\ x = 3$

٥ ـ $y = x^2(x-3)$, x axis

٦ ـ $(x+1)y = 2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

٧ ـ $4x^2 + 9y^2 = 36$

٨ ـ $y = x,\ y = 2,\ x = 0$

٩ ـ $y = 4x - x^2,\ y = x$

١٠ ـ $x^2 = 4y,\ x^2 = 5 - y$

١١ ـ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ x = 0,\ y = 0$

١٢ ـ $y = 4x - x^2,\ y = x,\ y = 0$

أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول المحور الصادى .

١٣ ـ $y = 16 - x^2,\ y = 0$

١٤ ـ $y = x^{2/3},\ y = 4$

١٥ ـ $y = 2\sqrt{x+2},\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2$

١٦ ـ $x^2 = 4y,\ x^2 = 5 - y$

١٧ ـ $x^2 - y^2/2 = 1,\ y = 4,\ y = -4$

١٨ ـ $xy = 4,\ x = 2,\ y = 4$

١٩ ـ $y^2 = ax,\ y = 0,\ x = a\ (a > 0)$

٢٠ ـ المنطقة $x^2 + y^2 = 4,\ x + y = -2$

٢١ ـ $xy = 6,\ x + y = 7$

٢٢ ـ $y = 4x - x^2,\ y = x$

٢٣ ـ استخدم قاعدة شبه المنحرف للتقريب الى حجم جسم ناشىء بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{x}$ بين $x = 4$ و $x = \frac{1}{2}$ حول المحور السينى .

٢٤ ـ أوجد حجم الجسم الدورانى الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $x = 2$ و $y = 0$ و $y = x^2$ حول الخط المستقيم .

(أ) $y = 0$ ، (ب) $x = 0$ ، (ج) $x = 2$ ، (د) $y = 4$.

٢٥ ـ أوجد حجم الجسم الدورانى الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4$ و $x = 0$ و $y = x^2$ حول الخط المستقيم :

(أ) $x = 0$ ، (ب) $y = 0$ ، (ج) $y = 4$ ، (د) $x = 2$.

أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات المعطاة حول الخط المعطى :

٢٦ ـ $y = x^3$ ، المحور الصادى ، $y = 8$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = 8$.

٢٧ ـ $y = 4$ و $x = -2$ و $y = 1/x^2$؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = 4$.

٢٨ ـ $y^2 = x^3, x = 4$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 4$.

٢٩ ـ $y = x^2, y = 4$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $y = -2$.

٣٠ ـ $y = \sqrt{x-1}, y = 7 - x, x = 10$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 10$.

٣١ ـ $y = 2x, y = 3 - x, y = 0, x = 2$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 2$.

٣٢ ـ $y = x^3, y = 0, x = 1$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 2$.

٣٣ ـ $xy = 6, y = 0, x = 1, x = 2$ ؛ الدوران حول المحور الصادى .

٣٤ ـ $xy^2 = 1$ (الربع الأول) ، $x = 2$ و $x = 1$ و $y = 0$ ؛ الدوران حول الخط المستقيم $x = 1$.

٣٥ ـ الجسم الناشىء بدوران قطع ناقص حول أحد محوريه يسمى مجسم ناقص دورانى . أوجد حجم المجسم الناقص الدورانى الناشىء بدوران القطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ حول (أ) المحور السينى ، (ب) المحور الصادى . اختبر إجابتك بأخذ حالة خاصة للقطع الناقص .

٣٦ ـ (أ) القطعة المحدودة بالقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ والخط المستقيم $x = d$ حيث $d > a$ ، دارت حول المحور السينى . أوجد حجم الجسم الناشىء .

(ب) أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة فى (أ) حول المحور الصادى .

٣٧ ـ المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء ووتره البؤرى العمودى دارت حول الوتر البؤرى العمودى . أوجد حجم الجسم الناشىء .

٣٨ ـ المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء ووتره البؤرى العمودى دارت حول الدليل . أوجد حجم الجسم الناتج .

٣٩ ـ رسم مماس للقطع المكافىء $y^2 = 2(x - 1)$ عند نقطة احداثيها السينى 3 . أوجد حجم

الجسم الناشيء بالدوران حول المحور السينى للمنطقة المحدودة بالمماس ، المحور السينى ، والقطع المكافىء .

٤٠ ـ قطعة ارتفاعها h قطعت من كرة نصف قطرها r بمستوى . أثبت أن حجم القطعة هو $\pi h^2(r - h/3)$.

٤١ ـ أثبت أن حجم المخروط الدائرى القائم هو $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ، حيث r هو نصف قطر القاعدة ، h الارتفاع . [رشاد : أدر حول المحور السينى الخط المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (h, r)] .

٤٢ ـ أثبت أن حجم مخروط دائرى قائم ناقص هو $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$ ، حيث r_2 و r_1 هما نصفا قطرى القاعدتين ، h هى المسافة العمودية بينهما .

٤٣ ـ المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 7 - x^2$ والخط المستقيم $y = 6$ دارت حول الخط المستقيم . أوجد الحجم بالطريقة العادية وأيضاً بنقل المحاور بحيث أن الخط المستقيم $y = 6$ يصبح المحور السينى .

٤٤ ـ يصب الماء فى تجويف على شكل نصف كرة نصف قطرها 8 in بمعدل 3 cu in / sec . ما معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون (أ) فى منتصف المسافة الى القمة ، (ب) عند القمة ؟

٤٥ ـ جسم ناشيء بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين t و 0 حول المحور السينى . اذا كان حجم الجسم هو $t^2 + 3t$ ، لكل t ، فأوجد $f(x)$.

٤٦ ـ (أ) رسمت أوتار للقطع المكافىء $y^2 = x$ عمودية على محور السينات عند كل نقطة بالفترة $0 \leqslant x \leqslant 6$. على كل وتر أقيم مربع عمودى على مستوى القطع الناقص بضلع واحد فى المستوى . أوجد حجم الجسم المنشأ بهذه الكيفية .

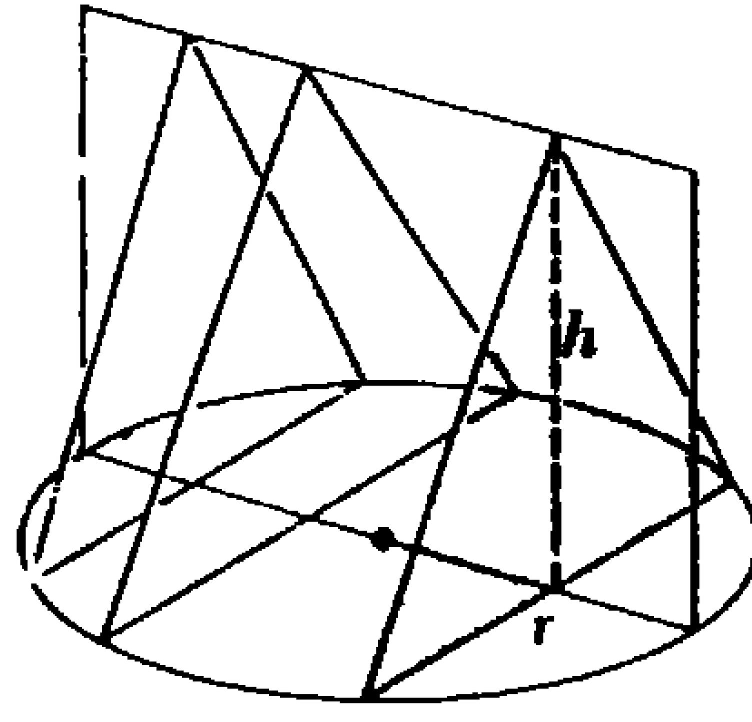
(ب) اذا كان بدلا من المربعات أقيمت مثلثات متساوية الأضلاع قاعدتها على أوتار القطع المكافىء فى (أ) ، أوجد حجم الجسم المنشأ بهذه الكيفية .

٤٧ ـ جسم قاعدته دائرية . أوجد حجمه اذا كان كل مقطع عمودى على قطر ثابت بالقاعدة هو (أ) مربع بضلع واحد فى القاعدة ، (ب) مثلث متساوى الساقين قاعدته فى قاعدة الجسم وارتفاعه مساو لطول قاعدته ، (ج) مثلث قائم متساوى الساقين وتره فى القاعدة ، (د) مثلث متساوى الأضلاع بضلع فى القاعدة .

٤٨ ـ قاعدة جسم هى قطع ناقص طولا محوريه الأكبر والأصغر 8 in و 12 . أوجد حجم الجسم اذا كان كل مقطع عمودى على المحور الأكبر هو (أ) مربع ، (ب) مثلث متساوى الساقين ارتفاعه نصف طول قاعدته ، (ج) مثلث متساوى الأضلاع .

٤٩ ـ مجسم شبه مخروطى هو جسم قاعدته دائرة نصف قطرها r وكل مقطع عمودى على قطر ثابت مثلث متساوى الساقين ارتفاعه h (شكل ٥ ـ ٣٦) . أوجد حجمه .

(ارشاد : $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2}$)



شكل ٥ ـ ٣٦
مجسم شبه مخروطى

٥٠ ـ جسم معين له القطعة المستقيمة AB محور تماثل . كل مقطع بمستوى عمودى على AB عند النقطة X يكون مربعاً طول ضلعه $2\sqrt{|AX|}$ ومركزة على AB. أوجد حجم الجسم اذا كانت القطعة AB طولها 9 in .

٥١ ـ على كل وتر للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ عمودى على المحور السينى أقيم مثلث قائم متساوى الساقين عمودى على مستوى القطع الناقص وطرفا وتره على القطع الناقص . أوجد حجم الجسم الناشىء بهذه الكيفية .

٥٢ ـ قطعة مستقيمة طولها 3 ft تقع فى مستوى معلوم . يتحرك مستطيل متغير بحيث يكون دائماً عمودياً على الخط بضلع واحد فى المستوى وركن واحد على الخط . ارتفاع المستطيل يساوى بعد المستطيل عن أول القطعة ، وطول الضلع فى المستوى مربع هذا البعد . أوجد حجم الجسم الناشىء بالمستطيل عند عبوره القطعة .

٥٣ ـ أوجد حجم خابور قطع من أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r بمستويين ، أحدهما عمودى على محور الاسطوانة والآخر يقطع المستوى الأول بزاوية $45°$ ماراً بقطر بالمقطع الدائرى الناشىء بالمستوى الأول .

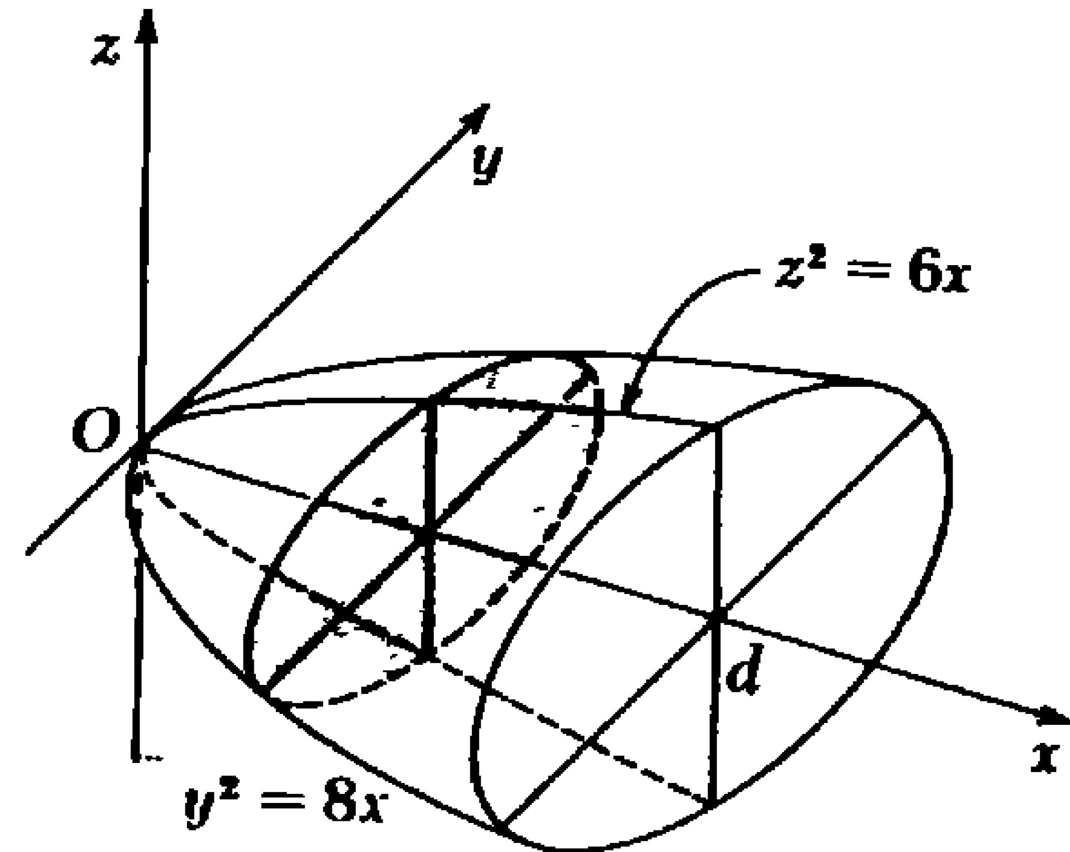
٥٤ ـ مجسم ناشىء من دائرة متغيرة تتحرك بحيث يكون مستواها عمودياً على المحور الصادى وطرفا قطر على المنحنيين $y = 4x^2$ و $y = x^2$ فى الربع الأول . تتحرك الدائرة من نقطة الأصل الى النقطتين حيث الاحداثى الصادى 4 . أوجد حجم المجسم .

٥٥ ـ جسم قاعدته القطعة من القطع المكافىء $y^2 = 4px$ المقطوعة بوتره البؤرى العمودى . كل مقطع عمودى على الوتر البؤرى العمودى هو مستطيل ارتفاعه ضعف مربع بعد المقطع عن محور القطع المكافىء . أوجد حجم المجسم .

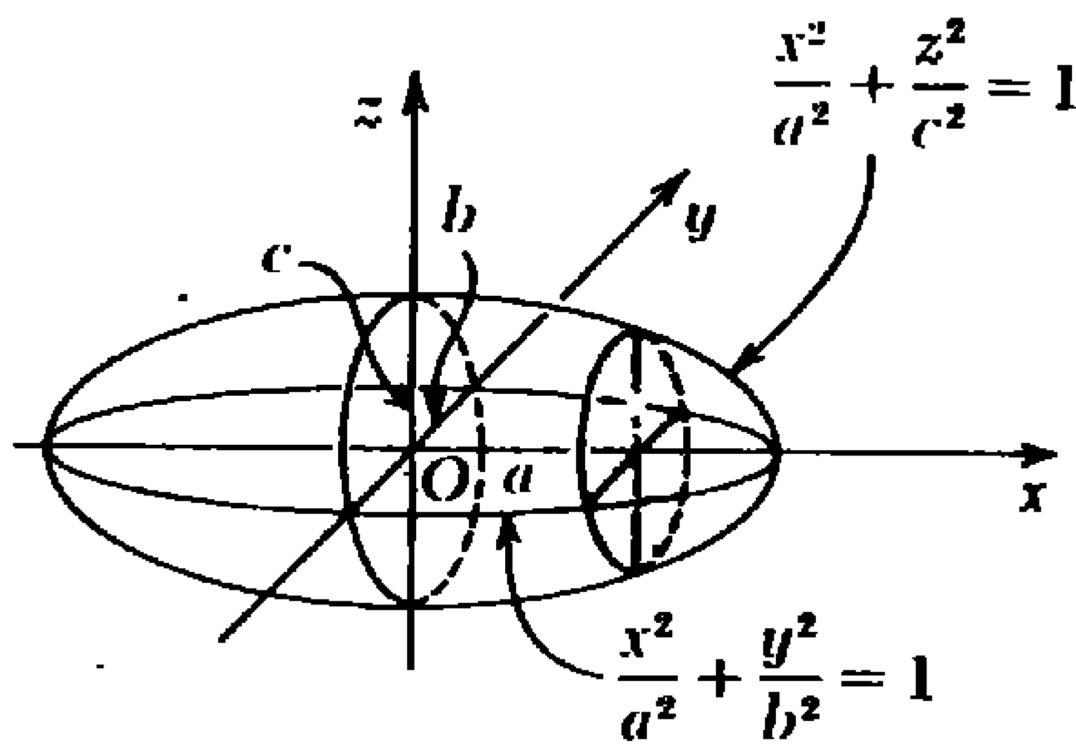
٥٦ ـ دائرتان لهما قطر مشترك وتقعان فى مستويين متعامدين . أوجد حجم الجسم المنشأ بمربع يتحرك عمودياً على القطر المشترك ورأسان متقابلان منه على دائرة والرأسان الآخران منه على الدائرة الأخرى .

٥٧ ـ ليكن المحور z مقاماً عمودياً على المحور السينى x والمحور الصادى y ونقطة الأصل عليه عند نقطة الأصل المشتركة بينهما (شكل ٥ ـ ٣٧) . قطع ناقص متغير يتحرك عمودياً على

المحور السينى بحيث يكون مركزه على المحور السينى وطرفا محوره الأكبر على القطع المكافىء $y^2 = 8x$ فى المستوى xy وطرفا محوره الأصغر على القطع المكافىء $z^2 = 6x$ فى المستوى xz . القطع الناقص يتحرك من نقطة الأصل الى النقطة $x = d$. الجسم الناشىء بهذه الكيفية مجسماً مكافئاً ناقصى . أوجد حجمه (ارشاد : مساحة القطع الناقص هى πab ، حيث b و a هما طولا نصف المحور الأكبر ونصف المحور الأصغر) .



شكل ٥ ـ ٣٧
المجسم المكافىء الناقصى



شكل ٥ ـ ٣٨
المجسم الناقصى

٥٨ ـ ليكن المحور z مقاماً عمودياً على المحور السينى x والمحور الصادى y ونقطة الأصل عليه عند نقطة الأصل المشتركة بينهما . يتحرك قطع ناقص متغير عمودياً على المحور x وطرفا محوره الأكبر على القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ فى المستوى xy وطرفا محوره الأصغر على القطع الناقص $x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ فى المستوى xz (شكل ٥ ـ ٣٨) . الجسم الناشىء بهذه الكيفية يسمى مجسماً ناقصياً . أوجد حجمه . (ارشاد : مساحة القطع الناقص هى πab ، حيث b و a هما طولا نصف المحور الأكبر ونصف المحور الأصغر .) اختبر اجابتك بملاحظة أنه عندما $a = b = c$ ، المجسم الناقصى يصبح كرة .

٥٩ ـ حفر ثقب أسطوانى نصف قطره a داخل كرة نصف قطرها $a < b$ على طول قطر . أوجد حجم الجزء المتبقى من الكرة .

٦٠ ـ غطاء لعمود بوسته يتكون من النصف الأعلى لاسطوانتين أفقيتين متقاطعتين نصفا قطريهما متساويان ومحوارهما متعامدان (شكل ٥ ـ ٣٩) . أوجد حجم الغطاء .

٦١ ـ جسم له قاعدة دائرية . كل مقطع عمودى على قطر ثابت هو قطع مكافىء بؤرته فى مستوى الدائرة . أوجد حجم الجسم .

٥ ـ ٧

التكامل بتغيير المتغير *

طريقة كثيراً ما تكون مفيدة فى تقييم التكاملات تتضمن تغيير المتغير . نشرح هذه الطريقة بالتكامل

$$\int \sqrt{5x+4}\,dx \qquad (١)$$

ونشرح فيما بعد لماذا تكون هذه الطريقة صحيحة . ضع $u = 5x + 4$ ، فيكون

$$x = \frac{u-4}{5} \quad و \quad dx = \tfrac{1}{5}du \qquad (٢)$$

شامل dx فى (١) كعنصر تفاضلى ، ومستخدماً المعادلتين فى (٢) عبر عن التكامل بدلالة du و u :

$$\int \sqrt{5x+4}\,dx = \int \sqrt{u}\,\tfrac{1}{5}\,du = \tfrac{1}{5}\int \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{15}u^{3/2}$$

نستبدل الآن u بـ $5x + 4$ لنحصل على الاجابة بدلالة x :

$$\int \sqrt{5x+4}\,dx = \tfrac{2}{15}(5x+4)^{3/2}$$

كان فى الامكان أيضاً حساب قيمة التكامل ، وربما بسهولة أكثر ، بطريقتنا الأسبق ، بملاحظة أنه على الصورة

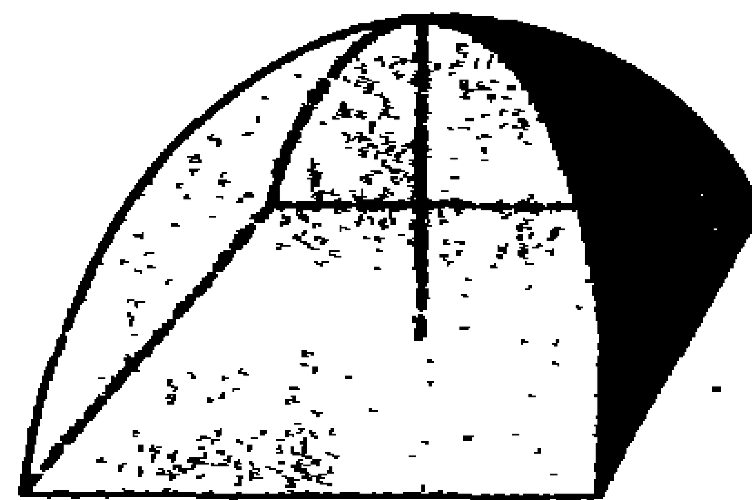
$$\int g^{1/2}(x)g'(x)\,dx$$

حيث $g(x) = 5x + 4$ ، ما عدا لعامل ثابت .

الطريقة لأى تكامل $\int f(x)\,dx$ مماثلة .

ضع

$$x = g(u). \qquad (٣)$$



شكل ٥ ـ ٣٩

حيث g يمكن أن تكون أى دالة قابلة للتفاضل لكن عملياً تختار بعين الاعتبار لتبسيط الدالة المكاملة . فى مثالنا نضع $x = g(u) = (u - 4)/5$ لأن بهذا الاختيار $\sqrt{5x+4}$ تصبح الجذر الأبسط $\sqrt{u}$ ، من (٣) ،

يكون

$$dx = g'(u)\,du \qquad (٤)$$

* نستخدم هنا المادة الداعمة عن العناصر التفاضلية بالجزء الأول من البند ٤ ـ ١٤

بمعاملة dx فى $\int f(x)\,dx$ كعنصر تفاضلى وباستخدام (٣) و (٤) ، نعبر عن $\int f(x)\,dx$ بدلالة du و u :

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(u))g'(u)\,du = \int s(u)\,du \qquad (٥)$$

حيث $s(u) = f(g(u))g'(u)$. بعد أن أجرينا تغيير المتغير ، نحسب قيمة التكامل الأخير فى (٥) ، اذا أمكننا ذلك ، فنحصل على

$$\int f(x)\,dx = \int s(u)\,du = S(u)$$

حيث S معكوس تفاضلى للدالة s . النتيجة الآن معبر عنها بدلالة u . من المرغوب فيه أنها تكون بدلالة x . هذا يكون ممكناً اذا كانت (٣) يمكن حلها لـ u بدلالة x ، لأنه عندئذ يمكننا استبدال u أينما تظهر فى $S(u)$ بقيمتها بدلالة x . فى مثالنا أمكننا عمل ذلك . هذه الطريقة تخبىء افتراضاً لم يبرر فى اشتقاق المعادلة (٥) . dx فى $\int f(x)\,dx$ عولجت كأنها عنصر تفاضلى بينما فى الواقع هى مجرد جزء من رمز المعكوس التفاضلى للدالة f . صحة المعادلة الأولى فى (٥) يجب اثباتها اذا كنا لنتأكد أن طريقة تغيير المتغير دائماً تعطى الاجابات الصحيحة . لتكن F معكوساً تفاضلياً لـ f ، فيكون $F'(x) = f(x)$. بقاعدة السلسلة ، يكون

$$D_u F(g(u)) = F'(g(u))g'(u) = f(g(u))g'(u)$$

وهذا يتضمن أن

$$F(g(u)) = \int f(g(u))g'(u)\,du \qquad (٦)$$

واذ أيضاً $F(g(u)) = F(x) = \int f(x)\,dx$ ، فالمعادلة (٥) صحيحة .

مثال ١ . اجر التكامل $\int x(1 + 2x^2)^3\,dx$.

رغم أن هذا التكامل يمكن اجراؤه بسهولة بملاحظة أنه على الصورة

$$\int h^3(x)h'(x)\,dx \qquad (٧)$$

فيما عدا لعامل ثابت ، الا أننا سنوجده باجراء تغيير المتغير . نضع $u = 1 + 2x^2$ ، اذ أن هذا يقدم تبسيطاً للدالة المكاملة . عندئذ يكون $du = 4x\,dx$. باستخدام ذلك ، نعبر عن التكامل بدلالة u و du ، نجريه ، ثم نعبر عن الجواب بدلالة x :

$$\int (1 + 2x^2)^3 x\,dx = \int u^3 \frac{du}{4} = \frac{1}{16}u^4 = \tfrac{1}{16}(1 + 2x^2)^4$$

مثال ٢ . أوجد قيمة $\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3}\,dx$

نجرى أولا التكامل غير المعين باجراء تغيير المتغير . نضع $u = 1 - 2x$ ، فيكون $x = (1-u)/2$ و $du = -2\,dx$ ، ويكون

(٨) $$\int \frac{x}{(1-2x)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1-u}{u^3}\,du = \frac{1}{4}\int (u^{-3}-u^{-2})\,du$$

(٩) $$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2u^2}+\frac{1}{u}\right) = \frac{1-2u}{8u^2}$$

لدينا الآن الاختيار بين طريقتين . الطريقة الأولى الواضحة هى أن نعبر عن المعكوس التفاضلى بدلالة x ثم نعوض حدى التكامل . الطريقة الثانية هى الاحتفاظ بالمعكوس التفاضلى بدلالة u لكن نغير حدى التكامل بحيث يشيران الى u .

الطريقة الأولى . فى التعبير الأخير فى (٩) نستبدل u بقيمتها $1-2x$ ونعوض حدى التكامل 1 و 2:

$$\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3}\,dx = \frac{1-2(1-2x)}{8(1-2x)^2}\Big|_1^2 = \frac{7}{8(9)} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{18}$$

الطريقة الثانية . نحتفظ بالتكامل غير المعين بدلالة u ونوجد حدين جديدين يشيران الى u . من العلاقة $u = 1-2x$ نرى أن $u=-1$ عندما $x=1$ وأن $u=-3$ عندما $x=2$. الحدان الجديدان هما -3 و -1 ، ويكون من (٨) و(٩)

$$\int_1^2 \frac{x}{(1-2x)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{-3} \frac{1-u}{u^3}\,du = \frac{1-2u}{8u^2}\Big|_{-1}^{-3} = \frac{7}{8(9)} - \frac{3}{8} = -\frac{5}{18}$$

ليس من الصعب اثبات صحة الطريقة الثانية لايجاد قيمة تكامل معين . لتكن $x = g(x)$ هى العلاقة بين u و x . نفرض أن $u=\alpha$ عندما $x=a$ وأن $u=\beta$ عندما $x=b$ وأن g تكون قابلة للتفاضل ومتزايدة أو متناقصة فى الفترة $[\alpha, \beta]$ لـ u . عندئذ α, β تتعينان بقيمة واحدة لكل منهما من b و a . اذا كانت F معكوس تفاضلى للدالة f ، فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ومن ناحية أخرى ، من (٦) ، يكون

$$\int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)\,du = F(g(u))\Big|_\alpha^\beta = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))$$
$$= F(b) - F(a).$$

ومن ثم ، باستخدام (٥) ، يكون

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)\,du = \int_\alpha^\beta s(u)\,du$$

مسائل

اجر التكاملات غير المعينة الآتية باستخدام تغيير للمتغير :

١ - $\int \sqrt{z-3}\, dz$

٢ - $\int (6s+4)^{10}\, ds$

٣ - $\int \sqrt{ax+b}\, dx$

5 $\int 4x\sqrt{2-x^2}\, dx$

٥ - $\int \frac{3t}{\sqrt{1+2t^2}}\, dt$

٦ - $\int u^2\sqrt{3u^3+2}\, du$

٧ - $\int \frac{x}{\sqrt[3]{5x^2-10}}\, dx$

٨ - $\int \frac{-y^2}{(3+4y^3)^2}\, dy$

٩ - $\int \frac{x^3}{(x^4+2)^{2/5}}\, dx$

١٠ - $\int g^n(x)g'(x)\, dx,\ n \neq -1$

١١ - $\int \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}\, dx$

١٢ - $\int \frac{1}{t^2}\sqrt{1-\frac{1}{t}}\, dt$

4 $\int 2x(2-4x)^{19}\, dx$

١٤ - $\int \frac{1+x}{(2-x)^3}\, dx$

١٥ - $\int x^2(1+x)^n\, dx,\ n \neq -1, -2, -3$

١٦ - $\int x\sqrt{x+1}\, dx$

١٧ - $\int \frac{y}{(a+by)^{3/2}}\, dy$

١٨ - $\int \frac{z^2}{(1-4z)^4}\, dz$

١٩ - $\int \frac{x^2}{(4x-3)^{2/3}}\, dx$

٢٠ - $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

٢١ - $\int x^3\sqrt[3]{20-x^2}\, dx$

٢٢ - $\int \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{r^4}\, dr,\ r>0$ (ارشاد . ضع $u = \frac{1}{r}$)

٢٣ - $\int \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4}\, dx$

٢٤ - $\int \sqrt{2-\sqrt{x}}\, dx$

٢٥ - اجر التكامل $\int x\sqrt{3x+2}\, dx$ بطريقتين : الأولى بوضع $u = 3x+2$ والثانية بوضع $u = \sqrt{3x+2}$.

أوجد التكاملات المعينة الآتية بالطريقتين المشروحتين فى مثال ٢ :

٢٦ - $\int_{-4}^{-2} \sqrt{2-3x}\, dx$

٢٧ - $\int_0^2 3y\sqrt{2y^2+1}\, dy$

٢٨ - $\int_0^2 x^2(8-x^3)^{3/2}\, dx$

٢٩ - $\int_1^2 v(1+v)^7\, dv$

٣٠ - $\int_0^1 \frac{2x}{(x+2)^3}\, dx$

٣١ - $\int_0^1 \frac{z}{\sqrt{2-z}}\, dz$

٣٢ - $\int_0^a \frac{x}{(x+a)^{2/3}}\, dx$

٣٣ - $\int_{-1}^2 (x-3)\sqrt{2x+3}\, dx$

٣٤ - $\int_{-1}^1 u^3(1+u^2)^n\, du$

٣٥ - $\int_1^9 \frac{\sqrt{1+\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}\, dy$

٣٦ ـ أوجد مساحه المنطقة فى الربع الأول بين المنحنين $y = 2x$ و $y = x^2(4x + 2)$.

٣٧ ـ المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = \sqrt{x+1} - x$ ، ومحور السينات ، والخطين المستقيمين $x = -1$ و $x = 0$ أديرت حول المحور السينى . أوجد حجم الجسم الناشىء بهذه الكيفية .

٥ ـ ٨

الحدود العليا الصغرى *

المادة فى هذا البند مفيدة فى برهان بعض خواص الأعداد الحقيقية وبعض النظريات الأساسية فى حساب التكامل .

٥ ـ ١٧ تعريف . لتكن S فئة من الأعداد . العدد a هو حد أعلى للفئة s اذا كانت $a \geqslant x$ لجميع x فى S فمثلا ، 3 هى حد أعلى للفئة

$$S = \{x | 1 \leqslant x < 2\} \qquad (1)$$

لأن 3 هى أكبر من كل عدد فى S . حدود عليا أخرى هى 2 و π و 2.4 . العدد 1.9 ليس حداً أعلى ، اذ يوجد عنصر بالفئة S هو 1.93 أكبر منه .

اذا كانت a حداً أعلى للفئة S ، فواضح أن أى عدد أكبر من a أيضاً يكون حداً أعلى . من الأهمية بمكان أن نعرف ما اذا كانت S لها حدود عليا أصغر من a وبوجه خاص ما اذا كان لها حد أعلى أصغر الجميع .

٥ ـ ١٨ تعريف . العدد u هو حد الحد الأعلى الأصغر S (يختصر الى l. u. b. S) اذا كانت u هى حداً أعلى للفئة S ولا يوجد حد أعلى للفئة S أصغر من u .

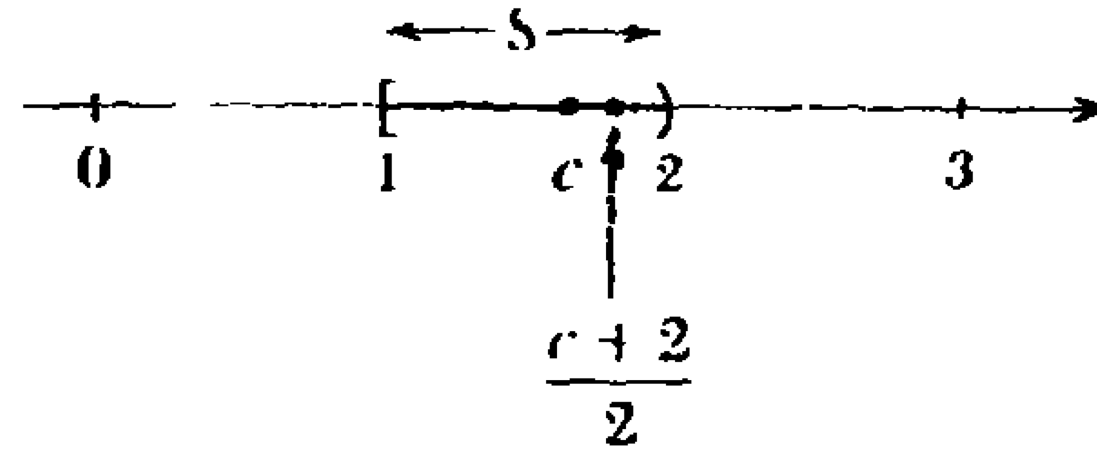
العدد 2 هو الحد الأعلى الأصغر للفئة $S = \{x | 1 \leqslant x < 2\}$. رغم أن هذا واضح تماماً بمجرد النظر الى S ، الا أننا سنعطى برهاناً قاطعاً لنوضح كيف يستخدم المفهوم الهام للحد الأعلى الأصغر . أولا ، 2 هى حد أعلى اذ أن $2 \geqslant x$ لجميع x فى S . سنثبت أن أى عدد أصغر لا يمكن أن يكون حداً أعلى . نجرى ذلك بأن نثبت أنه لأى عدد c أقل من 2 يوجد عدد فى الفئة S أكبر من c . ليكن c أى عدد أقل من 2 ، سواء كان فى الفئة S أو لم يكن (شكل ٥ ـ ٤٠) . اذا كان $1 \leqslant c < 2$ فان المتوسط $(c + 2)/2$ للعددين 2 و c يحقق العلاقة

$$1 \leqslant c < \frac{c+2}{2} < 2$$

---

* اذا كان بند ٥ ـ ٩ عن وجود التكامل المعين قد حذف ، فان هذا البند يمكن تأجيله الى ما قبل البند ٧ ـ ١ .

فهو عدد فى S أكبر من c ، بينما إذا كانت $c < 1$ ، فإن 1 هو عدد فى S أكبر من c . ومن ثم أى عدد أقل من 2 لا يمكن أن يكون حداً أعلى ، وتكون 2 هى الحد الأعلى الأصغر .



شكل ٥ ـ ٤٠

أى عدد c أقل من 2 لا يمكن أن يكون حداً أعلى للفئة S .

الفئة $T = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ ايضا لها الحد الأعلى الاصغر 2 ، هذه الفئة والفئة (١) توضحان أن الحد الأعلى الأصغر لفئة قد يكون أو لا يكون عنصرا فى الفئة . الفئة

$$\{-4, 8, -\sqrt{50}, 8.1, 0\} \qquad (٢)$$

لها العدد 8.1 كالحد الأعلى الأصغر .

توجد فئات بلا حد أعلى ومن ثم بلا حد أعلى أصغر . مثال ذلك ، فئة الأعداد الصحيحة الموجبة . لكن اذا كانت فئة من الأعداد الحقيقية لها حد أعلى فانه يكون لها حد أعلى أصغر .

٥ ـ ١٩ خاصية الحد الأعلى الأصغر . كل فئة ، غير خاوية ، من الأعداد الحقيقية ، لها حد أعلى ، يكون لها حد أعلى أصغر .

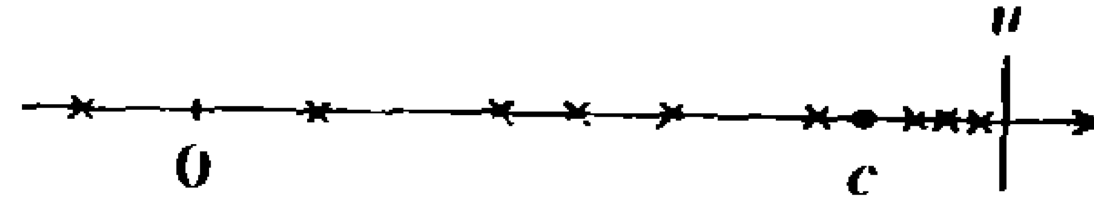
برهان ذلك لا يمكن اعطاؤه هنا ، وسنفترضه . خاصية الحد الأعلى الأصغر أساسية فى نظرية الأعداد الحقيقية . كثير من الخواص الهامة للأعداد الحقيقية يمكن برهنتها فقط باستخدام خاصية الحد الأعلى الأصغر ، أو ما يكافئها الحد الأعلى الأصغر للفئة ، عند وجوده ، يكون وحيداً .

القارىء سوف لا يجد صعوبة فى تعريف الفكرة المناظرة للحد الأدنى والحد الأدنى الأكبر (g.l.b) لفئة من الأعداد . كل ما ذكرناه عن الحدود العليا وعن الحد الأعلى الأصغر له ما يناظره ، مع تعديلات واضحة ، عن الحدود الدنيا والحد الأدنى الأكبر . الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$ لها كل من $\frac{1}{4}$ و 0 كحد أدنى . حدها الأدنى الأكبر هو $\frac{1}{2}$. لا يوجد حد أعلى . الفئة فى (٢) لها -78 $\sqrt{50}-$ كحدها الأدنى الأكبر . الفئة تكون محدودة اذا كان لها حد أعلى وحد أدنى .

لتكن u الحد الأعلى الأصغر لفئة S . اذا كانت c أى عدد أقل من u ، سواء كان عنصراً بالفئة S أو لم يكن فانه يجب أن يوجد عنصر s بالفئة S أكبر من c ، أى $c < s \leqslant u$. لأنه اذا كان لا يوجد مثل هذا العدد s ، فان c تكون حداً أعلى للفئة S أصغر من الحد الأعلى الأصغر . هذا موضح فى

الشكل ٥ ـ ٤١ ، حيث عناصر الفئة S مشار اليها بعلامات × . هذه الخاصية للحد الأعلى الأصغر كثيراً ما تستخدم .

الحد الأعلى الأصغر يمكن اعتباره كسياج (شكل ٥ ـ ٤١) . الأعداد فى الفئة لا يمكن ذهابها الى ما بعد السياج لكن تتضاغط مقتربة اليه من على اليسار . توجد أعداد بالفئة قريبة قرباً اختيارياً من ، أو تساوى ، الحد الأعلى الأصغر ، وأعداد أخرى قريبة قرباً اختيارياً ، أو تساوى ، الحد الأدنى الأكبر .



شكل ٥ ـ ٤١

اذا كانت c أقل من الحد الأعلى الأصغر u ، فيجب أن يوجد عنصر بالفئة أكبر من c .

مسائل

١ ـ عرف الحد الأدنى والحد الأدنى الأكبر لفئة .

أوجد الحد الأعلى الأصغر والحد الأدنى الأكبر للفئات الآتية . (لا تعط البراهين) .

٢ ـ $\{1,5,-3.5,2\pi,5.01\}$

٣ ـ فئة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية السالبة .

٤ ـ $\{3\}$.

٥ ـ $\{8\} \cup \{x|3 \leqslant x \leqslant 7\}$

٦ ـ $\{x|-3 \leqslant x < 5,$ كسريه $x\}$

٧ ـ $\{1,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ldots\}$

٨ ـ $\left\{\frac{n}{n+1}\right|$ عدد صحيح موجب ، $n\}$

٩ ـ $\left\{\frac{1}{1+x^2}\right|$ حقيقية و $x\}$

١٠ ـ $\left\{\frac{n-1}{n^2}\right|$ عدد صحيح ليس صفراً و $n\}$

١١ ـ $\{t|t^3 < 4$ كسريه و $t\}$

١٢ ـ $\{2^r|\, r < 3$ كسريه و $r\}$

١٣ ـ $\left\{\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3},\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5},\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7},\ldots\right\}$ (الحد الأعلى الأصغر فقط) .

١٤ ـ الحد الأعلى الأصغر للفئة $S = \{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\frac{31}{32},\ldots\}$ هو واحد صحيح . بما أن 0.999 أقل من 1 ، توجد عناصر بالفئة S أكبر من 0.999 أوجد احداها .

١٥ ـ اثبت أنه اذا كانت فئة لها حد أعلى أصغر ، فانها يكون لها واحد فقط . (ارشاد : افرض أن لها حدين أعلى أصغر) .

١٦ ـ أثبت أن 2 هى الحد الأدنى الأكبر للفترة $(2, 6)$.

١٧ ـ أثبت أن 0 هى الحد الأدنى الأكبر للفئة $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\}$

١٨ ـ أوجد الحد الأعلى الأصغر للفئة $\{0.9, 0.99, 0.999, \ldots\}$ وأثبت أنه هو الحد الأعلى الأصغر .

١٩ ـ فئة الأعداد الكسرية ليس لها خاصية الحد الأعلى الأصغر . نقصد بذلك أنه اذا أوجزنا عالم الأعداد بالأعداد الكسرية ، فانه توجد فئات من الأعداد الكسرية لها حد أعلى لكن ليس لها حد أعلى كسرى . أثبت أن الفئة $\{x|\ x^2 < 2$ و x كسرية$\}$ هى مثل هذه الفئة .

٢٠ ـ لتكن $S' = \{x|\ 1 \leqslant x < 2$ و x كسرية$\}$. صحيح أن 2 هى الحد الأعلى الأصغر للفئة S' ، لكن البرهان المعطى فى الكتاب للفئة $S = \{x|\ 1 \leqslant x < 2$ و x حقيقية$\}$ لا يصلح . لماذا لا يصلح ؟

٢١ ـ أثبت أن الحد الأدنى الأكبر لفئة S هو الحد الأكبر الأصغر للفئة المتكونة من سالب عناصر الفئة S .

٢٢ ـ لتكن U هى الفئة (غير الخاوية) للحدود العليا للفئة S . أثبت أن الحد الأعلى الأصغر للفئة S هو الحد الأدنى الأكبر للفئة U ، وبالعكس .

٢٣ ـ لتكن الدالة f متصلة فى الفترة المحدودة المقفلة I . f يكون لها قيمة عظمى فى الفترة قد تحدث عند أكثر من نقطة . لتكن S هى فئة جميع النقط فى I حيث تحدث القيمة العظمى . أى أن ، s تكون بالفئة اذا كانت $f(s) \geqslant f(x)$ لجميع x فى I . أثبت أن S تحوى حدها الأكبر الأصغر (ارشاد : افرض أن M هى القيمة العظمى لـ f فى I وأن $\bar{s}$ الحد الأعلى الأصغر لـ S ، فيكون $f(\bar{s}) \leqslant M$ العدد $\bar{s}$ سيكون فى S اذا كانت $f(\bar{s}) = M$. أفرض أن : $f(\bar{s}) < M$) .

٥ ـ ٩
وجود التكامل المعين

فى هذا البند سنثبت النظرية ٥ ـ ٣ عن وجود التكامل المعين لدالة متصلة . البرهان طويل وسيعطى فى سلسلة من البديهيات والنظريات . ورغم ذلك فهو ليس كاملا ، لأن عند نقطة معينة واحدة سوف نفترض خاصية للدوال المتصلة .

سنفرض أن الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a, b]$ وسنثبت أنه يوجد عدد تتجمع حوله حواصل جمع ريمان $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ نتذكر أنه لأى تجزىء p للفترة $[a, b]$ ، حاصل الجمع الأدنى وحاصل الجمع الأعلى لـ f هما حاصلا جمع ريمان الخاصان

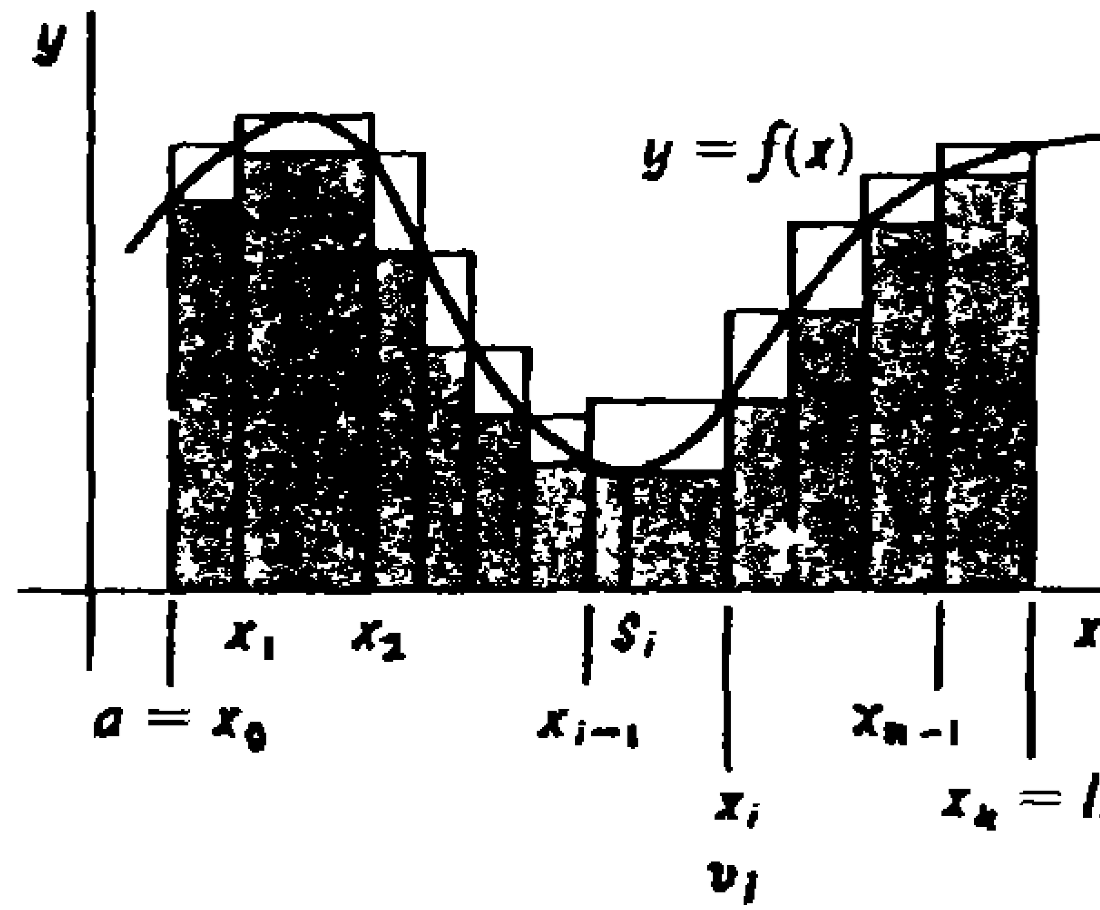
$$u_p = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\ \Delta x_i \quad \text{و} \quad m_p = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\ \Delta x_i$$

حيث $f(v_i)$ و $f(s_i)$ هما القيمتان الصغرى والكبرى للدالة f فى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$. اتصال الدالة f فى كل فترة جزئية يضمن وجود هاتين القيمتين الصغرى والكبرى . كل حاصل جمع ريمان

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

مرتبط بالتجزىء p يقع بين حاصل الجمع الأدنى وحاصل الجمع الأعلى : $m_p \leq r_p \leq u_p$.

رغم أن $f(x)$ ليس من الضرورى أن تكون موجبة ، لكن سوف نتجه بها هذا الاتجاه حتى نقتاد بتفسير التكامل كمساحة . للدالة الموجبة $f(x)$,m_p هى مساحة فئة من المستطيلات تقع تحت المنحنى بقليل ، وأيضاً u_p هى مساحة فئة من المستطيلات قممها تقع أعلى المنحنى بقليل (شكل ٥ـ٤٢) .



شكل ٥ـ٤٢

حاصل الجمع الأدنى أقل من قيمة مساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى أكبر منها

٥ ـ ٢٠ تمهيدية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a, b]$. اذا كان تجزىء p للفترة $[a$ و $b]$ ينقح الى تجزىء t بإدخال نقط تجزىء اضافية ، فان حاصل الجمع الأدنى يتزايد وحاصل الجمع الأعلى يتناقص ، اذا حدث شىء . أى أن $u_t \leq u_p$ و $m_p \leq m_t$.

البرهان . ليكن $p = [a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b]$ ولندرس أولا الحالة التى فيها t تتكون بزيادة نقطة واحدة فقط عن p . دع z النقطة التى أضيفت وافرض أنها تقع فى الفترة الجزئية الأولى $[x_0, x_1]$ للتجزىء p ، أى

$$t = [x_0, z, x_1, \ldots, x_n]$$

البرهان يكون مماثلا اذا كانت z تقع فى احدى الفترات الجزئية الأخرى . التعبيران لحاصل الجمع الأدنى للتجزئيين p و t هما

$$m_p = f(s_1)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} f(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

و

$$m_t = f(\bar{s}_1)(z - x_0) + f(\bar{\bar{s}}_1)(x_1 - z) + \sum_{i=2}^{n} f(s_i)(x_i - x_{i-1})$$

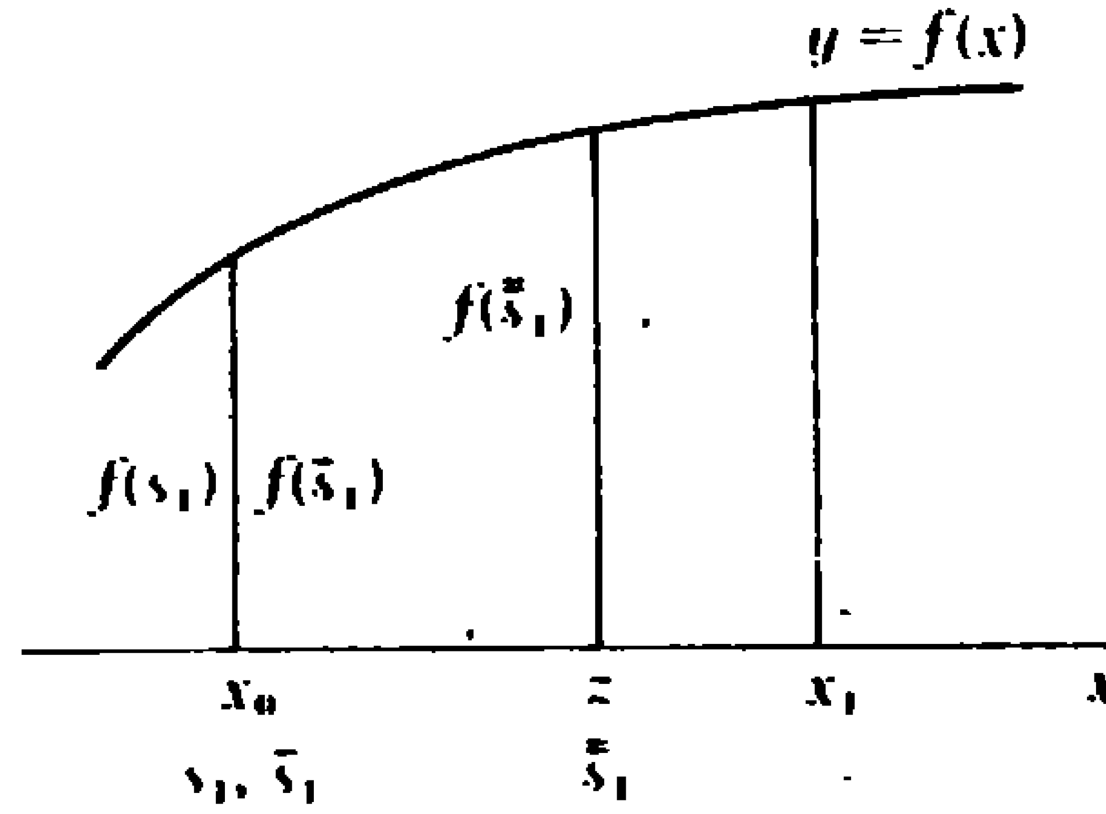
حيث $f(\bar{\bar{s}}_1)$ و $f(\bar{s}_1)$ و $f(s_1)$ هى القيم الصغرى للدالة f فى $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ و $[x_0, x_1]$ ، على الترتيب . الحد الأول فى التعبير لـ m_p يمكن كتابته على الصورة

$$f(s_1)(x_1 - x_0) = f(s_1)(z - x_0) + f(s_1)(x_1 - z)$$

القيمتان الصغريان للدالة f فى $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ أكبر من أو يساويان القيمة الصغرى فى $[x_0, x_1]$ (شكل ٥ ـ ٤٣) . اذن

$$f(s_1)(x_1 - x_0) \leq f(\bar{s}_1)(z - x_0) + f(\bar{\bar{s}}_1)(x_1 - z)$$

وبالتالى $m_p \leq m_t$. القيمتان العظميان للدالة f فى $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$ يقلان عن أو يساويان القيمة العظمى فى $[x_0, x_1]$ ، وبرهان مماثل يثبت أن $u_t \leq u_p$. نعود الى الحالة العامة حيث نفترض أن التجزىء t نحصل عليه من p بادخال أكثر من نقطة واحدة . باضافة النقط واحدة فى كل مرة ، نرى أن حاصل الجمع الأدنى ، اذا حدث شىء ، يزداد وحاصل الجمع الأعلى يتناقص . هذا يكمل البرهان .



شكل ٥ ـ ٤٣
القيمتان الصغريان للدالة f فى $[z, x_1]$ و $[x_0, z]$
أكبر من أو يساويان القيمة الصغرى فى $[x_0, x_1]$.

من الواضح جداً أن حاصل الجمع الأدنى يكون أقل من أو يساوى حاصل الجمع الأعلى المرتبط بنفس التجزىء . لكن حاصل الجمع الأدنى ينبغى أن يكون أقل من أو يساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى ، وحاصل الجمع الأعلى ينبغى أن يكون أكبر من أو يساوى المساحة (شكل ٥ ـ ٤٢) . ومن ثم كل حاصل جمع أدنى ينبغى أن يكون أقل من أو يساوى كل حاصل جمع أعلى . الآن سنوضح ذلك .

٥ ـ ٢١ تمهيدية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a, b]$. اذا كانت q و p أى تجزئيين للفترة $[a, b]$ ، فان $m_p \leq u_q$.

البرهان . كون تجزئياً جديداً فيه نقط التقسيم هى نقط التقسيم لـ p مضافاً اليها نقط التقسيم لـ q . عندئذ يكون t تنقيحاً لكل من q و p ، واذن بالتمهيدية ٥ ـ ٢٠ ، يكون $u_t \leq u_q$ و $m_p \leq m_t$. بما أن $m_t \leq u_t$ ، فيكون

$$m_p \leq m_t \leq u_t \leq u_q$$

الفئة M لحواصل الجمع الأدنى والفئة U لحواصل الجمع الأعلى لكل التجزئيات موضحتان على خط الاحداثيات فى الشكل ٥ ـ ٤٤ . قد أثبتنا حالا أن عناصر الفئة M تقع على يسار عناصر الفئة U . اختر أى تجزىء q . بما أن $m_p \leqslant u_q$ لجميع التجزيئات p ، فان M لها حد أعلى هو u_q ، واذن لها حد أعلى أصغر ، سنرمز له بالرمز m . اذن لجميع p ، يكون $m_p \leqslant m \leqslant u_q$. بما أن هذه المتباينة صحيحة لجميع q ، فان الفئة U لها m كحد أدنى ، واذن لها حد أدنى أكبر ، سنرمز له بالرمز u . وعلى ذلك يكون

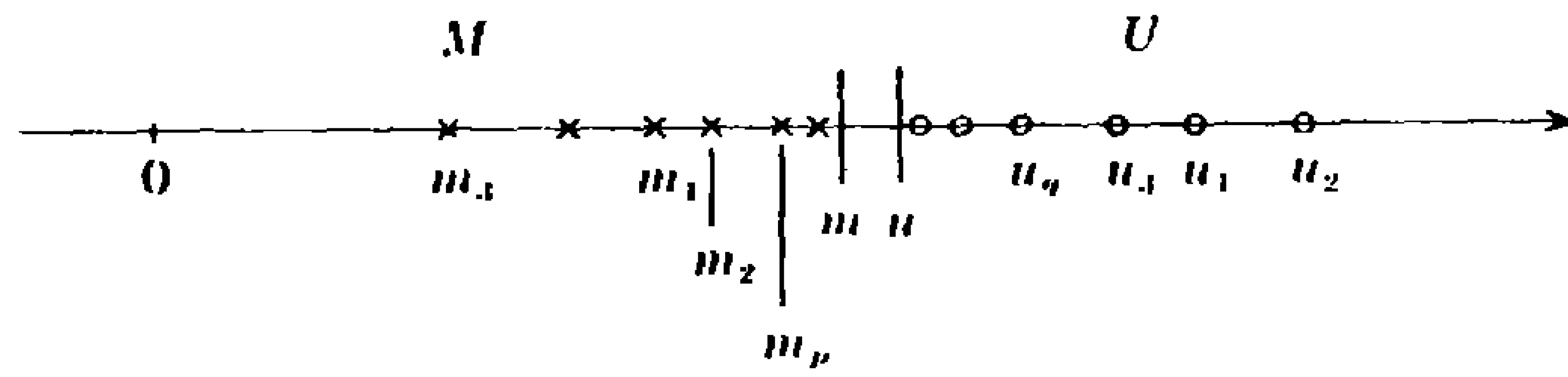
$$m_p \leqslant m \leqslant u \leqslant u_q \qquad (1)$$

لجميع التجزيئات q و p . من الشكل ٥ ـ ٤٢ ، نشعر بداهة بأن كلا u و m يمثلان مساحة المنطقة تحت المنحنى واذن ينبغى أن يتساويا . لاثبات ذلك نحتاج الى خاصية هامة للدوال المتصلة .

٥ ـ ٢٢ تعريف . الدالة f تكون متصلة بانتظام فى الفترة I اذا كان لكل $\epsilon > 0$ توجد δ بحيث أن

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$$

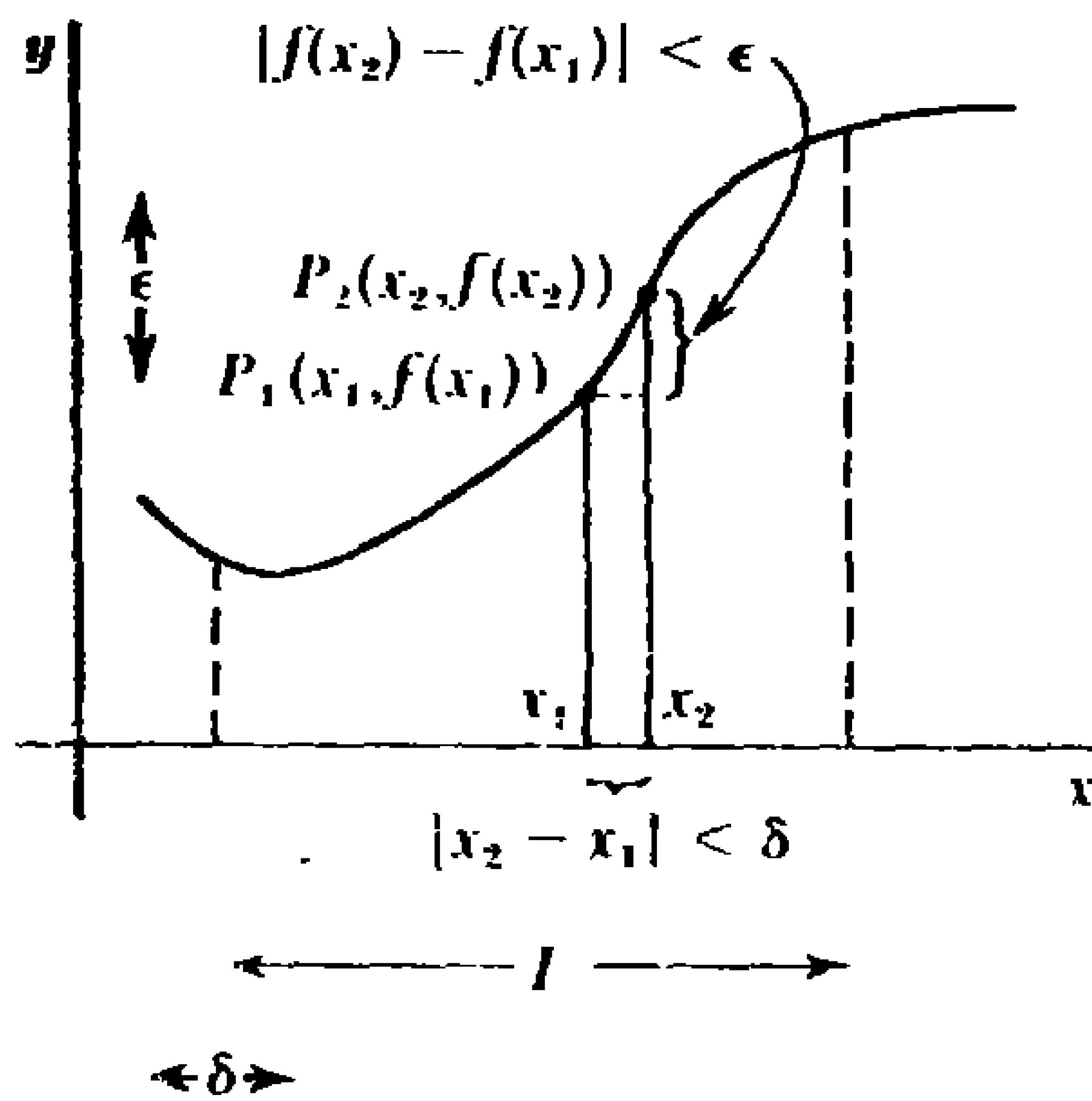
طالما كانت x_2 و x_1 تقعان فى الفترة I وكان $|x_2 - x_1| < \delta$.



شكل ٥ ـ ٤٤

m هى الحد الأعلى الأصغر لـ M ؛ u هى الحد الأدنى الأكبر لـ U

هندسياً هذا يعنى أنه اذا أعطينا ϵ ما فانه توجد δ بحيث أنه طالما كانت x_2 و x_1 فى الشكل ٥ ـ ٤٥ فى الفترة I وعلى مسافة بينهما أقل من δ ، فان الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_2 و P_1 يكون أقل من ϵ . الاتصال هى خاصية موضعية وتشير الى سلوك الدالة بالقرب من نقطة . لكن الاتصال المنتظم يكون دائماً بالنسبة الى فترة .

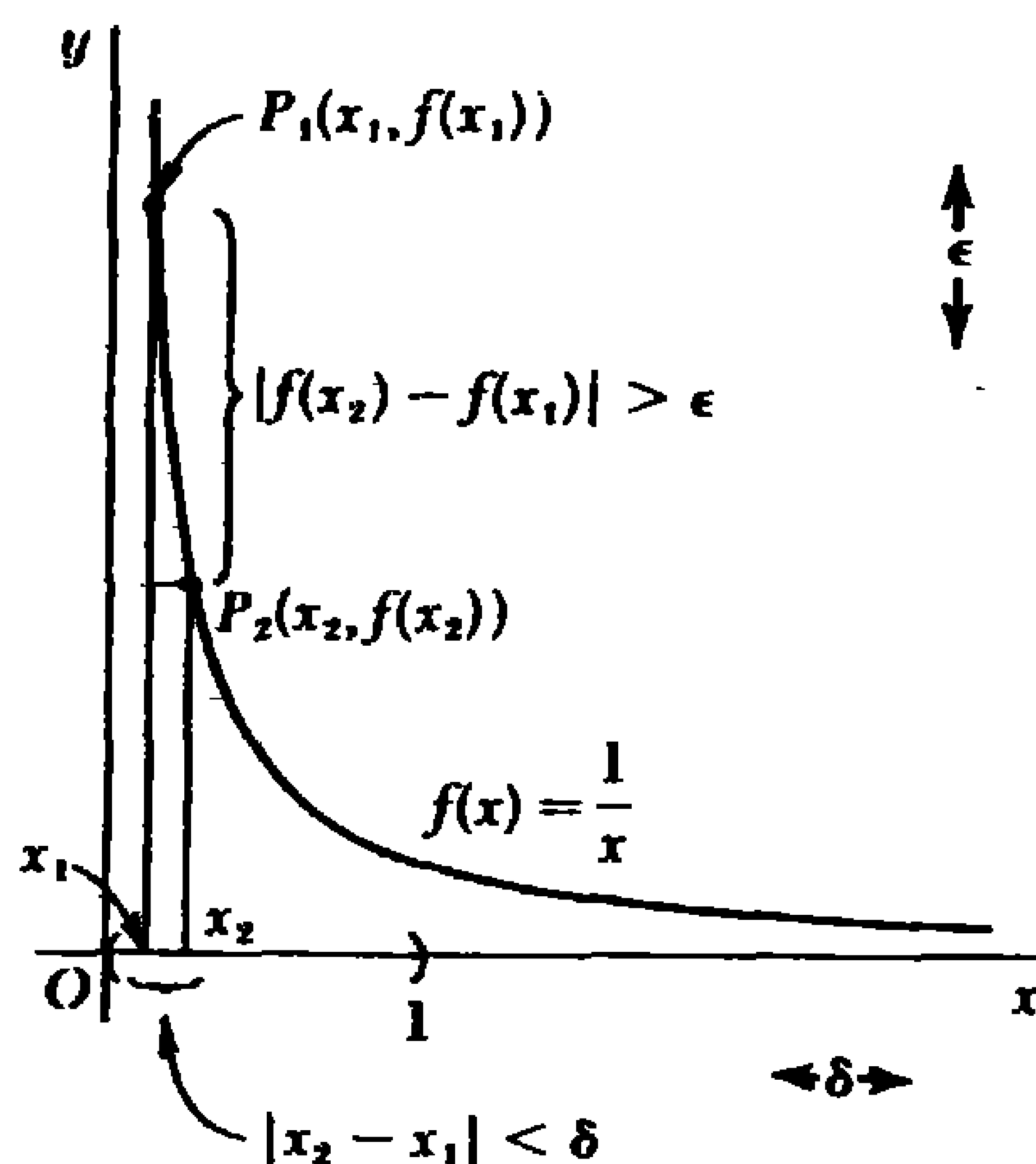


شكل ٥ ـ ٤٥

توجد δ بحيث أن طالما كانت x_2 و x_1 فى I وعلى مسافة بينهما أقل من δ ، فان الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_2 و P_1 يكون أقل من ϵ .

من الواضح أن الدالة يجب أن تكون متصلة فى فترة لكى تكون متصلة بانتظام هناك . لكن الاتصال غير كاف . الدالة $f(x) = 1/x$ فى الشكل ٥ ـ ٤٦ متصلة فى الفترة $(0, 1)$ لكن ليست متصلة بانتظام هناك . مهما كانت δ صغيرة ، فانه توجد x_2 و x_1 قريبتان من 0 ، وحتى مع أن $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فان الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_2 و P_1 يكون أكبر من ϵ . الا أنه اذا كانت الفترة مقفلة ومحدودة ، فان الدالة المتصلة تكون متصلة بانتظام فى الفترة .

٥ ـ ٢٣ نظرية . الدالة المتصلة فى فترة مقفلة محدودة تكون متصلة بانتظام هناك .



شكل ٥ ـ ٤٦

يمكن اختيار x_2 و x_1 بالقرب من 0 ، وحتى مع كونهما على مسافة بينهما أقل من δ ، فان الفرق بين الاحداثيين y للنقطتين P_2 و P_1 يكون أكبر من ϵ .

برهان ذلك صعب جداً لاعطائه هنا ، وسنفترض صحة النظرية . نعود الآن الى التكامل المعين .

٥ ـ ٢٤ تمهدية . لتكن الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a, b]$. لكل $\epsilon > 0$ ، توجد δ بحيث أن $u_p - m_p < \epsilon$ لجميع التجزيئات p للفترة $[a, b]$ التى معيارها أقل من δ .

البرهان . من النظرية ٥ ـ ٢٣ ، الدالة f تكون متصلة بانتظام فى الفترة $[a, b]$. ومن ثم ، بجعل $\epsilon/(b - a)$ تلعب دور ϵ فى التعريف ٥ ـ ٢٢ للاتصال المنتظم ، توجد δ بحيث أن

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{b - a} \qquad (٢)$$

طالما كانت x_2 و x_1 فى $[a, b]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$. لتكن p أى تجزىء للفترة $[a, b]$ معياره أقل من δ . حاصل الجمع الأعلى وحاصل الجمع الأدنى لـ p هما

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\ \Delta x_i, \quad و \quad u_p = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\ \Delta x_i$$

واذن

$$u_p - m_p = \sum_{i=1}^{n} [f(v_i) - f(s_i)]\ \Delta x_i$$

بما أن s_i و v_i هما فى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ ، التى يطولها أقل من δ ، فان $|v_i - s_i| < \delta$ ، واذن من (٢) يكون

$$|f(v_i) - f(s_i)| < \frac{\epsilon}{b-a} \qquad (٣)$$

ولأن $f(v_i) \geqslant f(s_i)$ ، أشارات القيمة المطلقة يمكن حذفها ، وباستبدالها $f(v_i) - f(s_i)$ فى (٣) بالعدد الأكبر $\epsilon / (b-a)$ نحصل على

$$u_p - m_p < \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = \epsilon$$

من السهل الآن اثبات أن حواصل جمع ريمان لها عدد تجمع .

٥ ـ ٢٥ نظرية . اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة المقفلة $[a,b]$ ، فان $u = m$ ، وهذا العدد هو عدد التجمع لحواصل جمع ريمان .

البرهان . لتكن ϵ أى عدد موجب . بالتمهيدية الأخيرة يوجد تجزىء p للفترة $[a$ و $b]$ بحيث أن $u_p - m_p < \epsilon$.

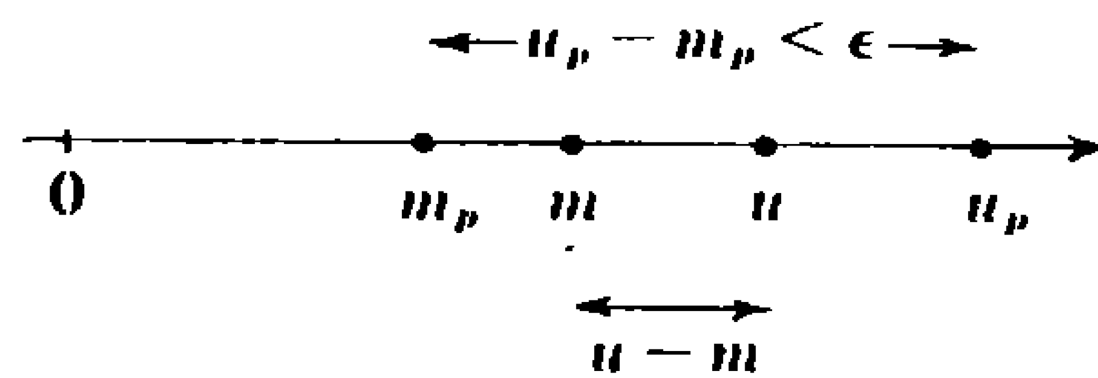
بما أن

$$m_p \leqslant m \leqslant u \leqslant u_p$$

فمن (١) ، يجب أن يكون

$$0 \leqslant u - m < \epsilon$$

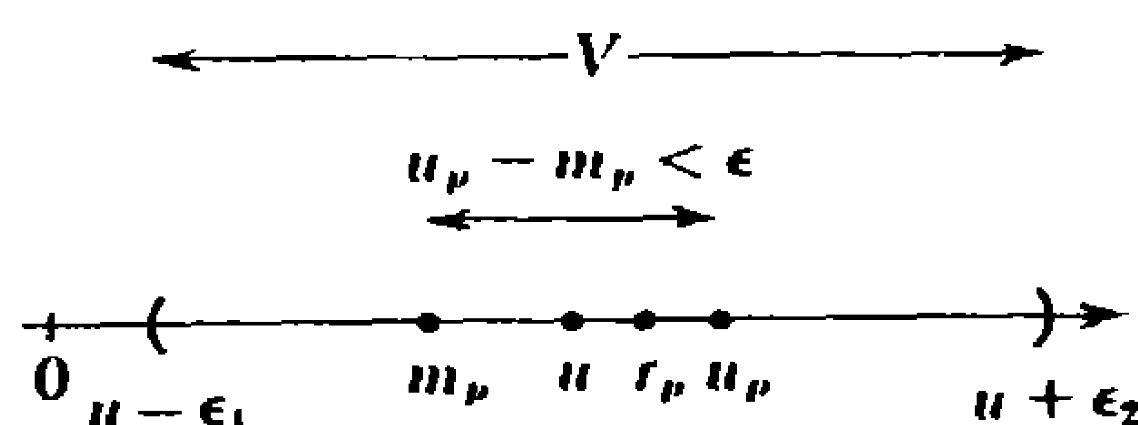
(شكل ٥ ـ ٤٧) . لان ϵ كانت اختيارية هذه المتباينة تنص على أن $u - m$ تكون غير سالبة وأقل من كل عدد موجب . اذن يجب أن تكون صفرا ، ويكون $u = m$.



شكل ٥ ـ ٤٧
لأن $u_p - m_p < \epsilon$
فان $u - m < \epsilon$

الآن نثبت أن u ، التى يمكننا اعتبارها مساحة المنطقة تحت المنحنى ، هى عدد التجمع لحواصل جمع ريمان . لتعريف ٥ ـ ١ لعدد التجمع ، يجب أن نثبت أنه لكل جوار V لـ u يوجد عدد δ بحيث أن كل حاصل جمع ريمان r_p مبنى على تجزىء p معياره أقل من δ ، يكون فى V . لذلك ، نأخذ $V = (u - \epsilon_1, u + \epsilon_2)$ ، حيث $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$ أى جوار لـ u (شكل ٥ ـ ٤٨) . لتكن ϵ أصغر العددين ϵ_1 , ϵ_2 ، بالتمهيدية ٥ ـ ٢٤ توجد δ بحيث أن $u_p - m_p < \epsilon$. لجمع التجزيئات p التى معيارها أقل من δ . بما أن $m_p \leqslant u \leqslant u_p$ ، فهذا يتضمن أن $u_p - u < \epsilon \leqq \epsilon_2$ و$u - m_p < \epsilon \leqq \epsilon_1$ ، الذى يثبت أن u_p و m_p تكونان فى V . لأن $m_p \leqq r_p \leqq u_p$ كل حاصل جمع ريمان r_p أيضا يجب أن يكون فى V ، هذا يثبت أن u هى عمود التجمع .

وجود عدد التجمع يعنى أن الدالة f تكون قابلة للتكامل على الفترة $[a , b]$ ، أو بمعنى آخر ، $\int_a^b f(x)\, dx$ يوجد . لأن عدد التجمع هو الذى ترمز له برمز التكامل . هذا يكمل برهان النظرية ٥ ـ ٣ عن وجود تكامل الدالة المتصلة .



شكل ٥ ـ ٤٨

للمعايير الصغيرة صغرا كافيا u_p و m_p يكونان فى V
واذن هكذا يكون جميع r_p ، لأن $m_p \leqslant r_p \leqslant u_p$

مسائل

١ ـ أوجد القيمتين العظمى والصغرى للدالة $f(x) = x^2 + 1$ فى الفترة $[-1 , 3]$ وفى كل من الفترتين الجزئيتين $[-1 , 2]$ و $[2,3]$. حقق أن القيمتين العظميين للدالة f فى الفترتين الجزئيتين أقل من أو تساويان القيمة العظمى فى $[-1 , 3]$ وأن القيمتين الصغريين أكبر من أو تساويان القيمة الصغرى فى $[-1,3]$.

أعمل تخطيطين للشكل البيانى للدوال الآتية على الفترات المشار اليها . وضح المستطيلات المناظرة لحواصل الجمع الأدنى والأعلى للتجزىء p على أحد التخطيطين ولمنقحه t على الآخر . احسب حواصل الجمع الأدنى والأعلى لـ t و p وحقق أن $u_t \leqslant u_p$ و $m_p \leqslant m_t$. لاحظ أن المساحة تحت المنحنى تقع بين حاصل الجمع الأدنى والأعلى من التجزئيين .

٢ - $f(x) = 2x + 1;\ p = [0,1,2,3,4],\ t = [0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2,3,\frac{7}{2},4]$; area = 20.

٣ - $g(x) = 9 - x^2;\ p = [-2,-1,0,1,3],\ t = [-2,-1,0,\frac{1}{2},1,2,3]$; area = $\frac{100}{3}$.

٤ - $f(z) = \frac{6}{z};\ p = [0.5, 1, 1.8, 2, 3],\ t = [0.5, 0.7, 1, 1.8, 2, 2.4, 2.7, 3]$; area = 10.751

٥ - $h(x) = \sqrt{x + 1};\ p = [-1,1,3,4],\ t = [-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,3,4]$; area = 7.454.

٦ ـ الدالة $f(x) = 1/x$ متصلة بانتظام فى الفترة $[0.1, 2]$ (لماذا ؟) اوجد δ بحيث أنه طالما كانت x_2 و x_1 فى الفترة $[0.1, 2]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فان $|f(x_2) - f(x_1)| < 0.01$.

٧ ـ لتكن $f(x) = x^3 - 16x$. أوجد δ بحيث أنه طالما كانت x_2 و x_1 فى الفترة $[-3, 3]$ وكان $|x_2 - x_1| < \delta$ ، فان $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{10}$.

٨ ـ أثبت أنه لمعيار صغير صغرا كافيا ، قاعدة شبه المنحرف تعطى تقريبا جيدا للتكامل (ارشاد : لتكن u_p و m_p حاصلى الجمع الأدنى والأعلى ولتكن t_p التقريب بقاعدة شبه المنحرف للتجزىء المنتظم p . فيكون $m_p \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant u_p$. أثبت أن $(m_p \leqslant t_p \leqslant u_p)$.

٩ ـ اذا كانت الدالة فى النظرية ٥ ـ ٣ مطردة ومتصلة فى $[a, b]$ ، فانه يمكن اثبات أنها قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ بدون استخدام الاتصال المنتظم . أثبت النظرية ٥ ـ ٣ تحت هذا الفرض الأشد قيدا بدون استخدام الاتصال المنتظم . (ارشاد : بما أن الاتصال المنتظم استخدم أولا فى برهان التمهيدية ٥ ـ ٢٤ ، فان كل شىء الى تلك النقطة لايزال قائما . افرض ، مثلا ، أن الدالة متزايدة باطراد في $[a, b]$ وأثبت التمهيدية ٥ ـ ٢٤ والنظرية ٥ ـ ٢٥) .

١٠ ـ الدالة تكون قطعا مطردة فى فترة اذا كانت الفترة يمكن تقسيمها الى عدد محدود من الفترات الجزئية فى كل منها تكون الدالة مطردة . الدالة فى الشكل ٥ ـ ١ على قطع مطردة فى $[a, b]$. عمم لمسألة ٩ بالبرهنة ، بدون استخدام الاتصال المنتظم ، على أن الدالة تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$ اذا كانت متصلة وقطعا مطردة هناك .

٥ ـ ١٠
مسائل متنوعة

هذه المسائل توضح تطبيقات أخرى للتكامل المعين . كثافة المادة هى كتلتها لوحدة الحجم . اذا كانت الكثافة ثابتة ، فان الكتلة هى الحجم مضروبا فى الكثافة .

١ ـ قضيب AB طوله 10 in ومقطعه مربع طول ضلعه 1 in ، كثافة القضيب عند أى نقطة تساوى ثلاثة أمثال بعد النقطة عن A . أوجد كتلة القضيب . (ارشاد : قسم القضيب الى قطع صغيرة وقرب الكتلة لكل قطعة .)

٢ ـ قضيب مقطعه دائرى ، طوله 10 in وقطره 1 in ، كثافته عند نقطة على بعد x in من الطرف الأخف يعطى بالصيغة $3 + 0.4x + 0.02x^2$ ، أوجد كتلة القضنيب .

٣ ـ لوح مثلثى متساوى الساقين سمكه 1 in وطول قاعدته 8 in وارتفاعه 12 in . كثافته عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن قاعدة المثلث . أوجد كتلة اللوح .

٤ ـ نقطة تتحرك على خط الاحداثيات ، سرعتها $v(t) \geqslant 0$ عند الزمن t ، أثبت أن المسافة المقطوعة بالنقطة بين الزمنين $t = a$ و $t = b$ تعطى بالتكامل $\int_a^b v(t)\,dt$. (ارشاد : قسم الفترة الزمنية $[a, b]$ الى فترات جزئية صغيرة وقرب المسافة التى تقطعها النقطة خلال كل من هذه الفترات الجزئية) اذا كانت $v(t) = t - 1$ وكانت النقطة عند $s = 1$ عندما $t = 2$.

فاحسب المسافة التى تقطعها النقطة فى الفترة الزمنية [5 , 2] باستخدام التكامل المعين أعلاه ، وأيضا بالطريقة السابقة لحل معادلة تفاضلية .

٥ ـ الكثافة عند أى نقطة على لوحة دائرية سمكها 2 in ونصف قطرها 3 in تتناسب مع مربع بعد النقطة عن محور اللوحة . أوجد كتلة اللوحة . (ارشاد : مساحة الحلقة الدائرية الرفيعة التى نصف قطرها الداخلى r ونصف قطرها الخارجى $r + h$ هى بالتقريب $2\pi\ rh$) .

٦ ـ الضغط بسبب الجاذبية يجعل الكثافة داخل نجم كروى أكبر منها عند سطحه . اذا كانت الكثافة عند أى نقطة تتناسب مع ثابت زائد بعد النقطة عن السطح ، فأوجد كتلة النجم . (انظر الارشاد فى المسألة ٥) .

٧ ـ مقدار الاضاءة عند نقطة P ، الناشئة عن مصدر ضوئى تساوى شدة الضوء مقسومة على مربع المسافة بين النقطة P والضوء . ضوء فلورسنت معين هو أنبوبة طولها 4 ft وشدته منتظمة وقدرها 30 قوة شمعة لكل قدم طولى . الانبوبة رفيعة لدرجة أنه يمكن اعتبارها خطا مستقيما . أوجد مقدار الاضاءة الناشئة عن الضوء عند نقطة P على خط الضوء تبعد عن أحد الطرفين . (ارشاد : قسم الاسطوانة الى مقاطع صغيرة وقرب مقدار الاضاءة عند P الناشئة عن كل مقطع .)

٨ ـ أحد قوانين الفيزياء هو أن أى جسمين لهما كتلة يجذب كل منها الآخر . اذا كان الجسمان صغيرين لدرجة أنه يمكن اعتبارهما نقطتين وكانت كتلتاهما m_1 و m_2 فان قوة الجذب تعطى بالصيغة $G\, m_1\, m_2\, /\, r^2$ ، حيث G ثابت ، r المسافة بين الجسمين . أوجد قوة الجذب بين قضيب متجانس كتلته 240 grams وطوله 24 cm وسمكه يمكن اهماله ، وبين نقطة P كتلتها 300 grams على استقامة القضيب وعلى بعد 3 cm من أحد الطرفين .

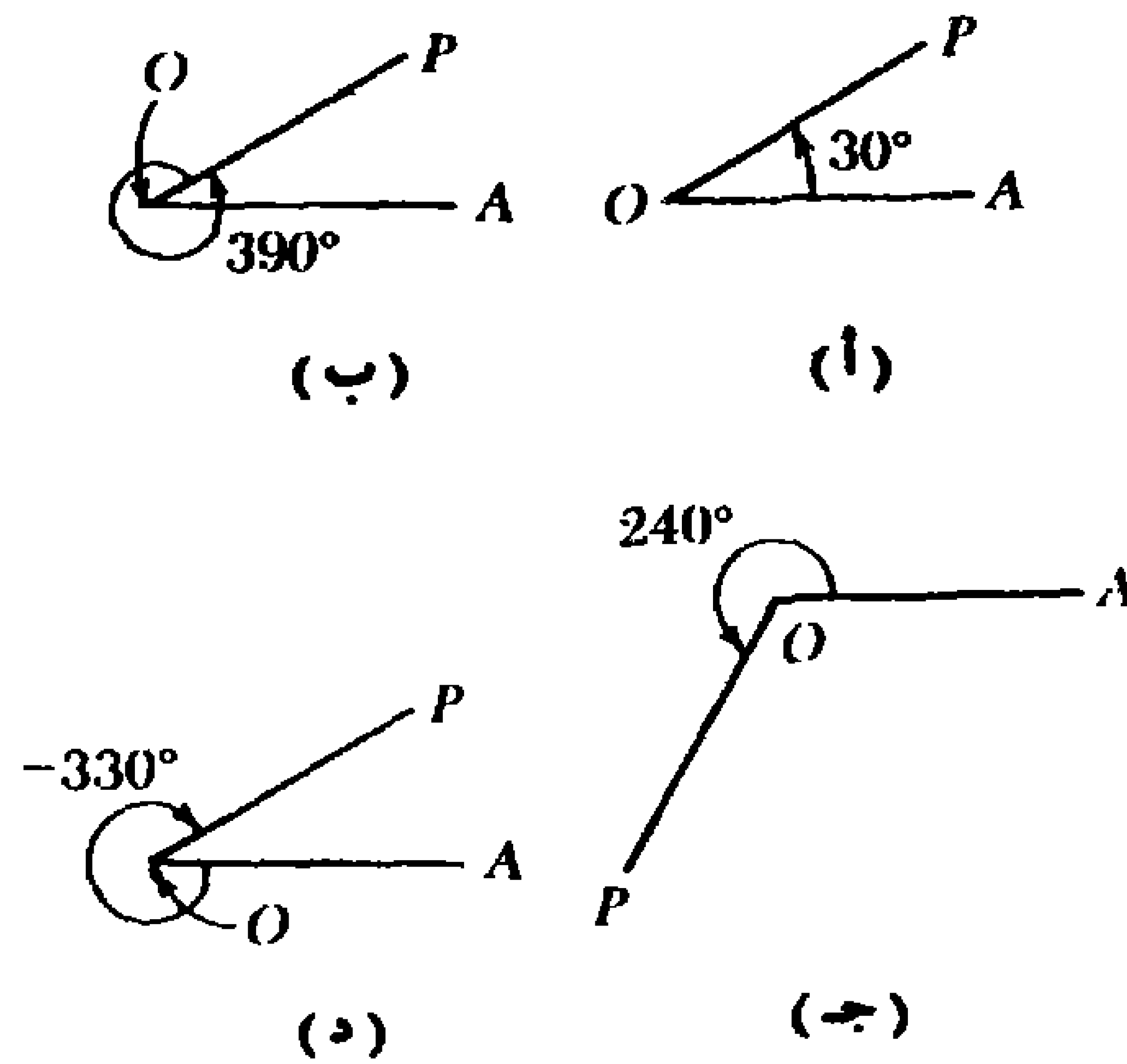
الفصل السادس

الدوال المثلثية

٦ - ١
الدوال المثلثية

الدوال الجبرية ، مع كونها مفيدة ، إلا أنها لاتكفى لرياضيات الفيزياء والكيمياء ، والعلوم الهندسية . فى هذا الفصل والفصل القادم . سندرس الدوال المثلثية ، والدوال الأسية ، والدوال اللوغاريتمية ، وجميعها لاغنى عنها فى العلم . نفترض أن القارىء ملم بعلم حساب المثلثات الأولى ، لكن نبدأ بموجز عن القياس الدائرى .

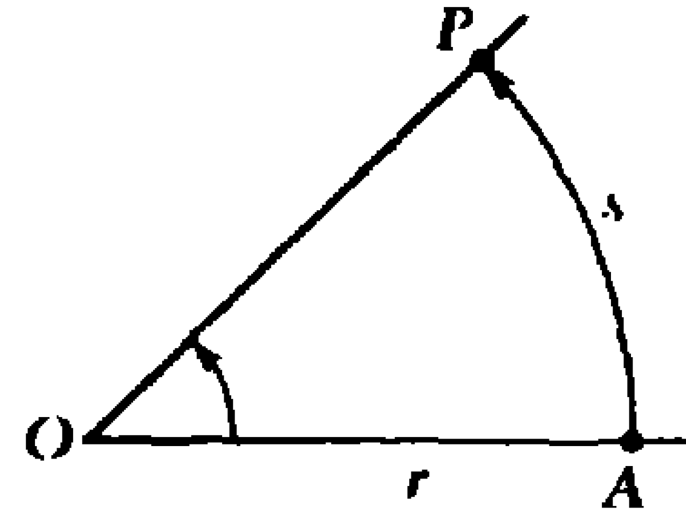
ليكن الشعاع OA ثابتا* . الشعاع OP فى الابتداء ينطبق على OA ، ثم يدور حول O لموضع ما ، الدوران قد يكون لأكثر من دورة واحدة . الزاوية المتكونة بواسطة الدوران يقال أنها موجبة أو سالبة طبقا لكون الدوران ضد اتجاه عقرب الساعة أو مع اتجاه عقرب الساعة . بعض الزوايا النمطية مع مقاييسها بالدرجات موضحة فى الشكل ٦ - ١ .



شكل ٦ - ١

كما أن المسافات يمكن قياسها بالأقدام ، بالأميال ، أو بالسنتيمترات ، كذلك توجد أنظمة متعددة لقياس مقادير الزوايا . أحدها القياس العادى بالدرجات ، وآخر هو القياس نصف القطرى (الدائرى) .

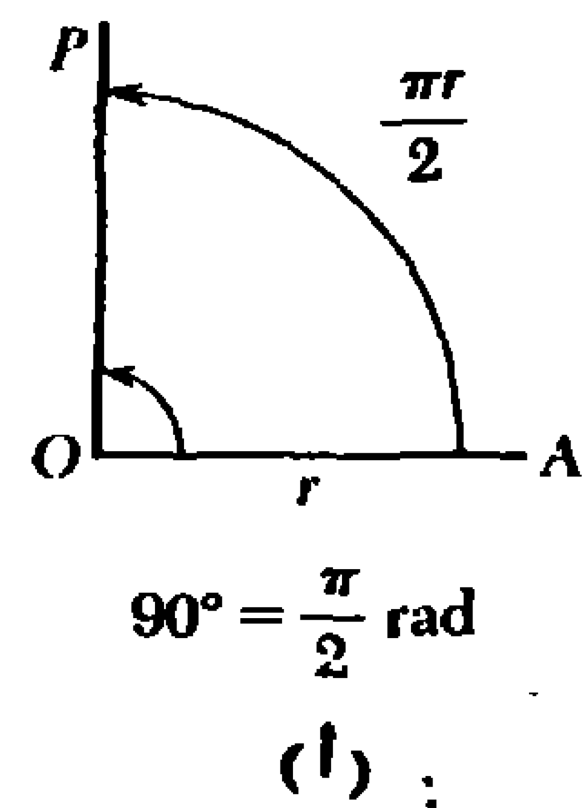
لتكن P أى نقطة على الشعاع OP غير O . عندما يدور OP من وضعه الابتدائى الى وضعه الأخير ليكون الزاوية AOP (شكل ٦ ـ ٢) ، P ترسم قوسا من دائرة . لتكن s هى المسافة التى تحركتها النقطة P ، مقيسة على القوس ، موجبة إذا كان الدوران ضد اتجاه عقرب الساعة ، وسالبا إذا كان مع اتجاه عقرب الساعة . سنفترض أن كل قوس من دائرة له طول متجه يتعين بهذه الطريقة ، وبالعكس أن لأى عدد حقيقى s ونقطة A على الدائرة ، توجد نقطة P على الدائرة بحيث أن s هو الطول المتجه للقوس $\widehat{AP}$. هذه الافتراضات يمكن برهنتها ، لكن إجراء ذلك يتطلب تعريف طول القوس ودراسة مفصلة لمسلمات الهندسة ، وهذا أكثر مما يمكننا مباشرته هنا . إذا كانت r نصف قطر الدائرة ، فالعدد s/r يعرف بأنه **القياس الدائرى** للزاوية AOP .



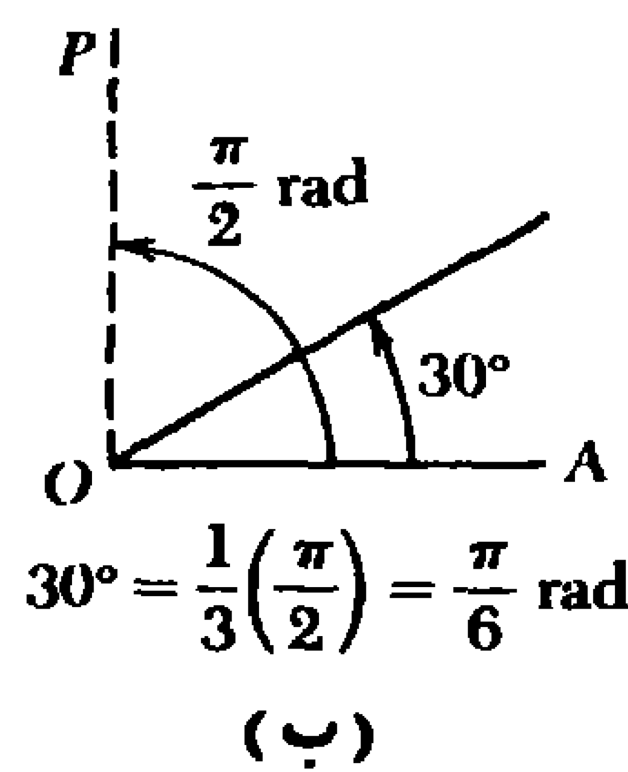
شكل ٦ ـ ٢

القياس الدائرى للـ$\measuredangle AOP$ هو s/r.

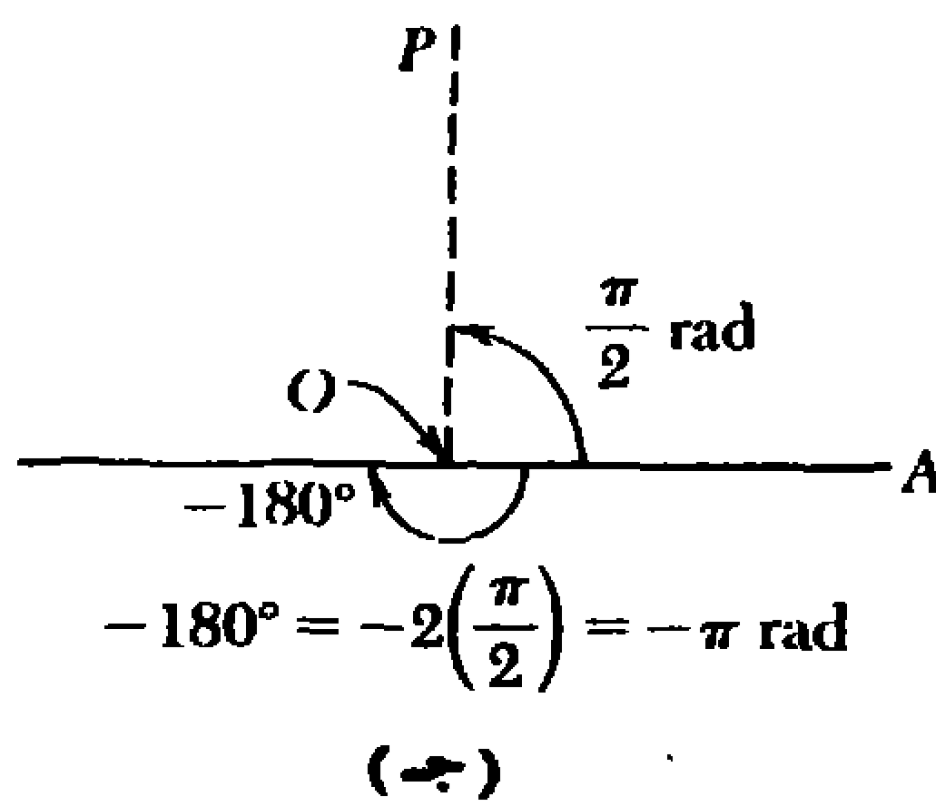
رغم أن اختيارا مختلفا للنقطة P سيعطى r و s مختلفتين ، لكن النسبة بينهما واحدة ، لذلك اختيار موضع P على الخط ليس له أهمية . الزاوية نصف القطرية قوسها يساوى نصف القطر وهى تقريبا 57.3° . للزاوية القائمة يكون طول القوس الذى ترسمه النقطة P هو $\pi r/2$. ومن ثم التقدير الدائرى للزاوية القائمة هو $(\pi r/2)/r = \pi/2$ (شكل ٦ ـ ٣أ) . الزاوية التى قياسها بالدرجات هو 30° يجب أن يكون قياسها الدائرى ثلث ذلك للزاوية القائمة ، ولذلك هو $\frac{1}{3}(\pi/2)$ ، أى $\pi/6$ زاوية نصف قطرية (شكل ٦ ـ ٣ ب) . الزاوية التى قياسها بالدرجات هو 180° — تقديرها الدائرى هو 2 — مضروبة فى تلك القيمة للزاوية القائمة ، فهو π — زاوية نصف قطرية (شكل ٦ ـ ٣ ج) . بوجه عام الزاوية التى قياسها بالدرجات هو ϕ تقديرها الدائرى هو $(\pi/180)\phi$.



(أ)



(ب)

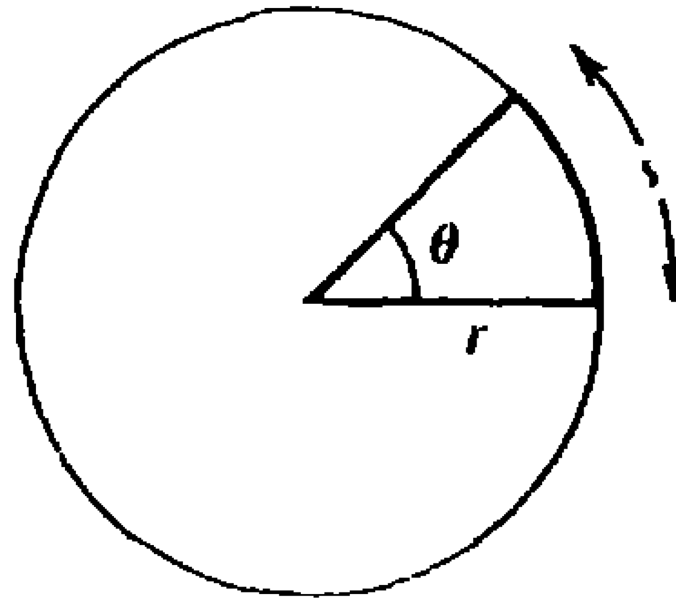


(جـ)

شكل ٦ ـ ٣

القياس الدائرى يستخدم فى معظم الأعمال العلمية لأن صيغ المشتقات لـ $\sin x$ وللدوال المثلثية الأخرى تكون أبسط عندما تقاس الزوايا بالتقدير الدائرى عن ما هى عليه عند استخدام القياس بالدرجات . اذا لم يشر الى الوحدة فيفهم أنها النصف قطرية .

من تعريف القياس الدائرى ، نرى أنه اذا كانت θ هى التقدير الدائرى لزاوية ، فان الطول s للقوس الدائرى الذى نصف قطره r ومقطوع بضلعى الزاوية هو $s = r\,\theta$ (شكل ٦ ـ ٤) . قطاع الدائرة هو المنطقة المحدودة بنصفى قطرين القوس المقطوع . المساحة A للقطاع تتناسب مع القياس θ لزاويته المركزية أى أن ، $A = k\,\theta$ لثابت ما k . يمكننا تعيين k لأننا نعلم أن عندما $\theta = 2\pi$ ، القطاع يكون الدائرة بأكملها وهذه مساحتها πr^2 . ومن ثم $\pi r^2 = k\,2\pi$ وإذن $k = \frac{1}{2}r^2$. لذلك $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.



شكل ٦ ـ ٤

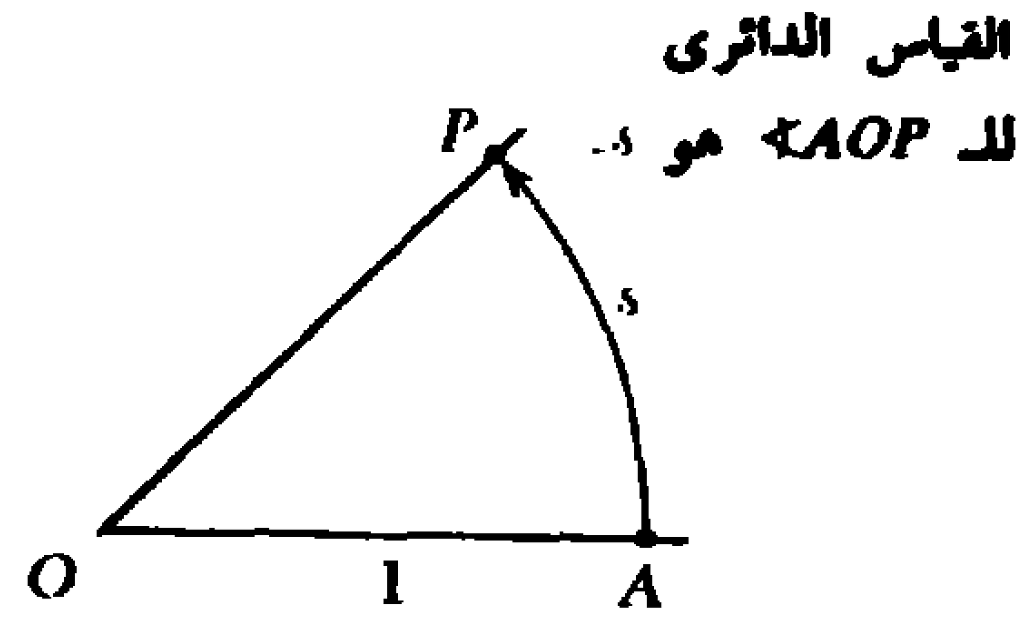
$s = r\theta$ مساحة القطاع $\frac{1}{2}r^2\theta$

٦ ـ ١٠ نظرية . طول قوس الدائرة التى نصف قطرها r ، المقطوع بزاوية مركزية تقديرها الدائرى θ هو $r\,\theta$. مساحة القطاع المناظر هى $\frac{1}{2}\,r^2\,\theta$.

لكى تكون نظرية ٦ ـ ١ صحيحة ، θ يجب أن تكون التقدير الدائرى للزاوية المركزية .

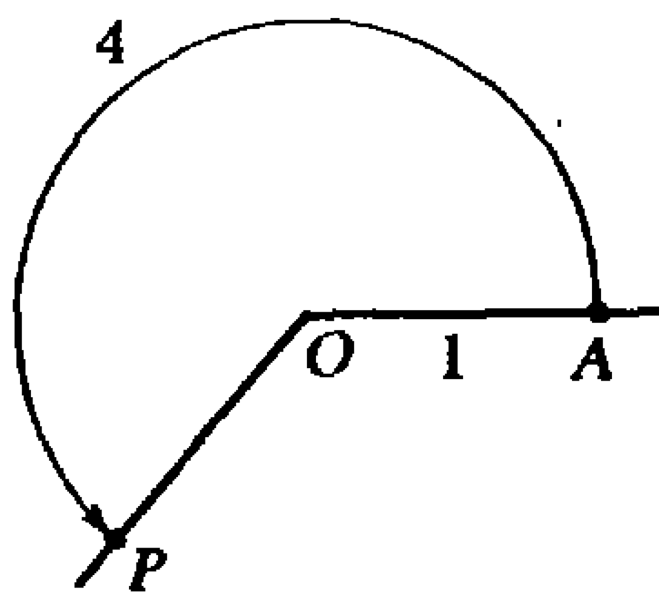
بالاضافة إلى جيب زاوية يمكننا أيضا التحدث عن جيب عدد ، مثال ذلك ، $\sin 4$ ، حيث 4 عدد صرف . لكل عدد s توجد زاوية AOP قياسها الدائرى هو s . وهى الزاوية المتكونة باختيار B و A فى الشكل ٦ ـ ٥ بحيث أن $|OA| = |OP| = 1$ ودوران الشعاع OP إلى أن يصبح طول القوس $\widehat{AP}$ مساويا s. الدوران يكون ضد اتجاه عقرب الساعة أو مع اتجاه عقرب الساعة حسب كون s موجبة أو سالبة ، وعندما تكون $s > 2\pi$ يكون الدوران لاكثر من دورة واحدة . نعرف جيب العدد s بأنه جيب هذه الزاوية ، ويكون

$$\sin s = \sin \measuredangle AOP$$



شكل ٦ ـ ٥

جيب العدد s هو جيب الزاوية التى قياسها الدائرى هو s .



شكل ٦ ـ ٦

أى أن جيب العدد s هو جيب الزاوية التى قياسها الدائرى هو s بالمثل ، $\cos s = \cos \measuredangle AOP,$ $\tan s = \tan \measuredangle AOP$ وهكذا . الزاوية المرتبطة بالعدد 4 موضحة فى الشكل ٦ ـ ٦ . قياسها الدائرى هو 4 ، وقياسها بالدرجات هو بالتقريب $229\ 11'$. ومن ثم

$$\sin 4 \approx \sin 229°11' \approx -0.75680$$

الطريقة التى شرحناها تخصص بدون ابهام عددا هو $\sin x$ لكل عدد حقيقى x ومن ثم تعرف دالة $f : f(x) = \sin x$. نطاق دالة الجيب f هو فئة جميع الأعداد الحقيقية ، ومداها هو الفترة المقفلة $[-1, 1]$ لأن جيب كل زاوية يقع بين هذين العددين . بالمثل ، توجد خمس دوال مثلثية أخرى : $h(x) = \text{sos}(x)$, $u(x) = \tan x$, $\upsilon(x) = \sec x$. وهكذا ، ليس جميعها معرفا لكل x .

من السهل تخطيط الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sin x$ بعمل جدول للقيم المناظرة لتلك الاعداد التى من السهل حساب جيوبها . لأن $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ، قيم دالة الجيب تتكرر لـ $x \geqslant 2\pi$. فاذا خططنا الشكل البيانى لقيم x بين $o, 2\pi$ ، فان الجزء بين 4π و 2π سيكون تكرارا لهذا (شكل ٦ ـ ٧) ، وبالمثل سيكون الجزء بين 6π و 4π ، وبين 0 و -2π ، وهكذا . لاحظ أن قيم الدالة f تقع بين 1 و -1 . الدالة g التى لها الخاصية أن $g(-x) = -g(x)$ لجميع x حيث الدالة g معرفة ، تسمى دالة فردية . بما أن $\sin(-x) = \sin(x)$ فدالة الجيب فردية . الشكل البيانى للدالة الفردية متماثل بالنسبة الى نقطة الأصل .

الطبيعة التكرارية للشكل البيانى هى نتيجة للعلاقة $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ لجميع x . الدالة F التى لها عدد p بحيث أن

$$F(x+p) = F(x) \qquad (١)$$

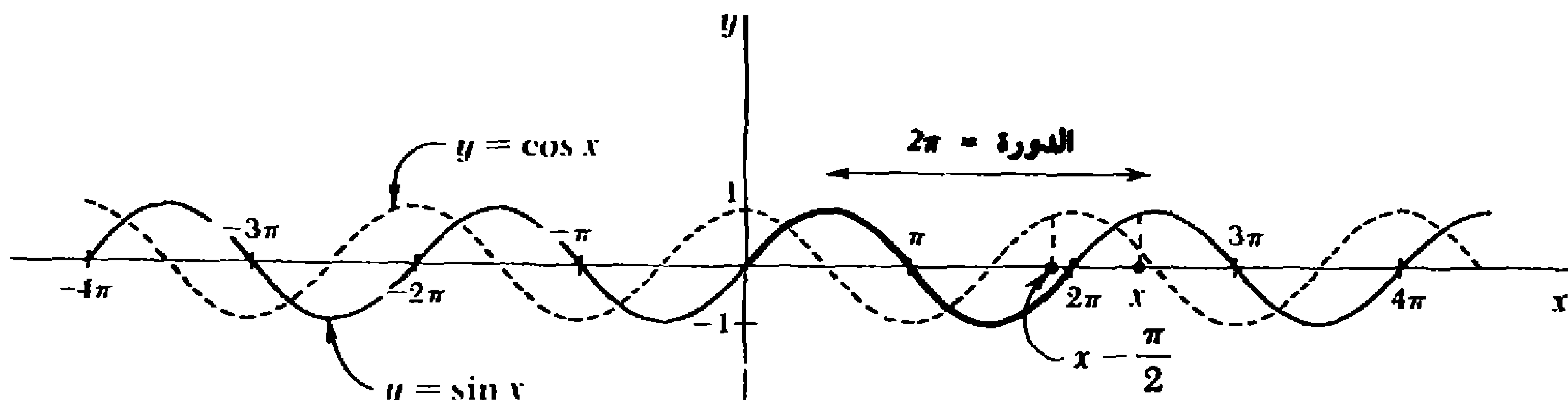
لجميع x حيث F معرفة يقال أنها دورية . فى حالة $\sin x$ قد رأينا أن 2π قيمة مناسبة لـ p . احتمالات أخرى لـ p هى -2π و $4\pi , 6\pi$. أصغر قيمة موجبة p تجعل (١) صحيحة لجميع x حيث F معرفة تسمى دورة الدالة F . على الشكل البيانى لدالة الجيب هى المسافة بين قمتى موجتين متتاليتين . يمكننا من الشكل البيانى أن نخمن أن دورة $\sin x$ هى 2π . سنبرهن على

x	$\sin x$
0	0
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$
$\pi/4$	$1/\sqrt{2} \approx 0.71$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.87$
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2 \approx 0.87$
$3\pi/4$	$1/\sqrt{2} \approx 0.71$
$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$
π	0
$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$
$5\pi/4$	$-1/\sqrt{2} \approx -0.71$
$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2 \approx -0.87$
$3\pi/2$	-1
$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2 \approx -0.87$
$7\pi/4$	$-1/\sqrt{2} \approx -0.71$
$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$
2π	0
$13\pi/6$	$\frac{1}{2}$

هذا . لتكن p عددا موجبا بحيث أن $\sin (x + p) = \sin x$ لجميع x . بوجه خاص هذا يكون صحيحا عند $x = 0$ ، وبالتالى $\sin p = \sin 0 = 0$ ، ومن ثم ، تكون الاحتمالات لقيم p الموجبة هى .... , $\pi , 2\pi , 3\pi$. بما أن $\sin (\pi / 4 + \pi) = \sin (\pi / 4)$ لايمكن أن تكون π دورة للدالة . لقد رأينا أن 2π هى دورة للدالة ، وبما أنها أصغر p موجبة فهى الدورة .

الشكل البيانى للدالة $y = h(x) = \cos x$ أيضا موضح فى الشكل ٦ ـ ٧ . وهو يتطابق مع الشكل البيانى لدالة الجيب مزاحا الى اليسار مسافة $\pi / 2$ ، ذلك لأن $\sin x = \cos (x - \pi / 2)$. بما أن $\cos (-x) = \cos (x)$ ، فاننا نرى أن $h(-x) = h(x)$ لجميع x حيث h تكون معرفة . الدالة بهذه الخاصية تسمى دالة زوجية ، وشكلها البيانى متماثل بالنسبة الى المحور الصادى .

$\sin x = \cos (x - \pi/2)$



شكل ٦ ـ ٧

مثال ١ . عين ما اذا كانت الدالة $f(x) = (x^2 - 6) / x$ زوجية أو فردية أو لا زوجية ولا فردية

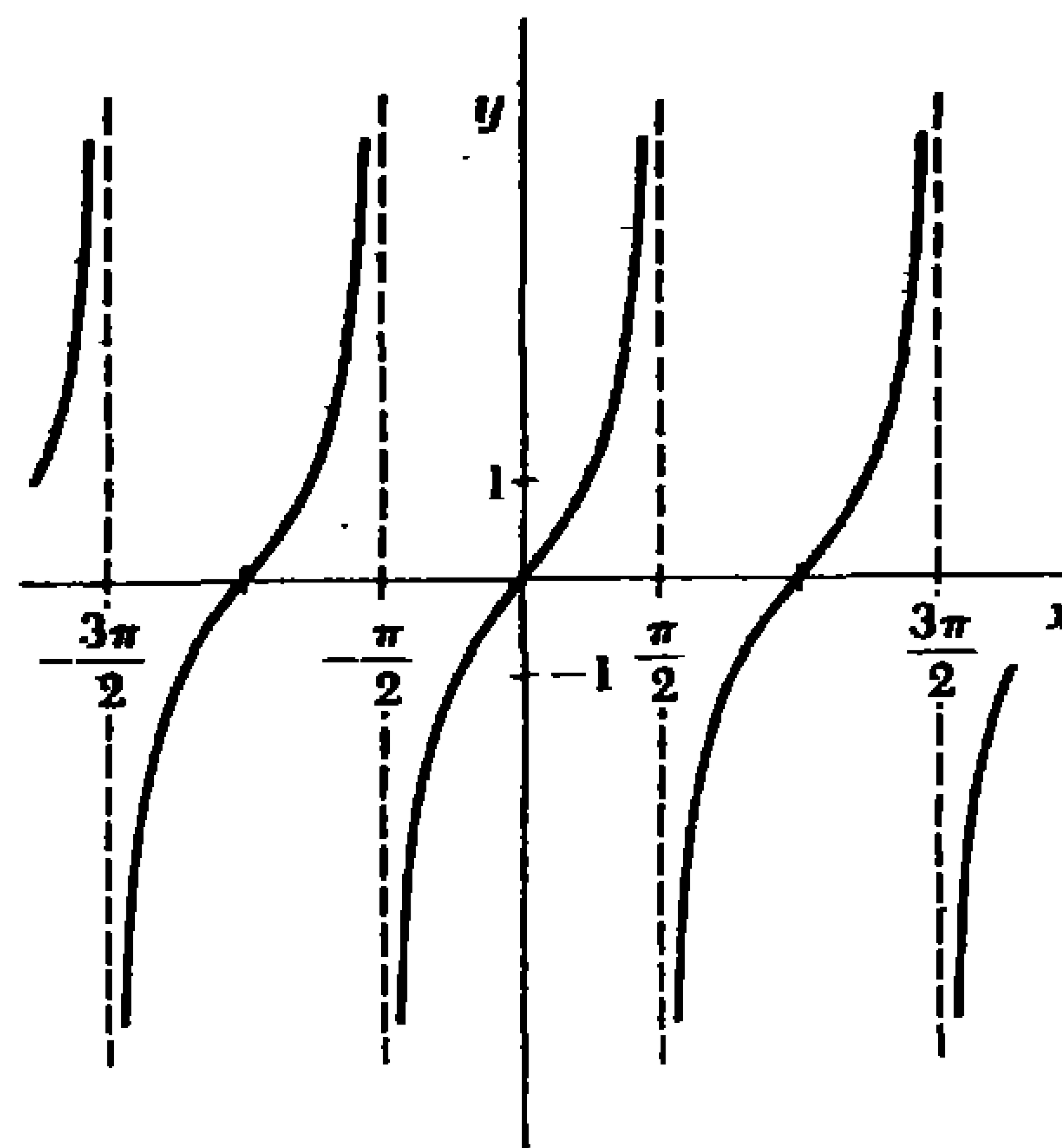
لدينا

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 6}{-x} = -\frac{x^2 - 6}{x}.$$

بما أن $f(-x) = -f(x)$ لجميع x حيث f تكون معرفة ، فان f دالة فردية .

ظواهر فيزيائية كثيرة تتضمن حركة موجية أو دورية مثال ذلك ، الصوت ، الضوء ، الماء ، وموجات الراديو ، تأرجح البندول ، حركة الكواكب حول الشمس ، وسريان التيار فى مذبذب كهربى . كما تشير صفتها الموجية والدورية ، فان دالتى الجيب وجيب التمام هما الوسيلتان الرياضيتان الطبيعيتان لدراسة هذه الظواهر . تطبيق نموذجى هو على اهتزاز السلك الحلزونى (الزنبرك) . الموضع بعد t sec لثقل فى نهاية زنبرك يهتز يعطى بالصيغة $a \cos bt$ ، حيث b مقدار ثابت قيمته تعتمد على صلابة الزنبرك وطوله غير المشدود وحيث a ثابت آخر . هنا t تمثل الزمن وليست لها علاقة بزاوية .

دالة الظل $f(x) = \tan x$ لها شكل بيانى مختلف تماما ، يمكن تخطيطه باستخدام جدول الظلال (شكل ٦ - ٨) . وهى غير معرفة عند $x = \pm \pi / 2, \pm 3\pi / 2, \pm 5\pi / 2, \ldots$. الشكل البيانى يكون مقاربا للخطوط الرأسية عند هذه الاعداد ، اذ أن $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty$ و $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$ رغم أن $\tan(x + 2\pi) = \tan x$ لجميع x حيث $\tan x$ تكون معرفة ، إلا أن 2π ليست الدورة لدالة الظل . هل يمكن للقارىء أن يخمن الدورة بالنظر إلى الشكل البيانى .



شكل ٦ - ٨ $y = \tan x$

مسائل

أوجد القياس الدائرى للزوايا التى قياسها بالدرجات معطى أدناه .

١ - $120°$ ، ٢ - $-45°$ ، ٣ - $-300°$ ، ٤ - $585°$ ، ٥ - $14°$ ، ٦ - $97°13$

أوجد القياس بالدرجات للزوايا التى قياسها الدائرى تعطى أدناه

٧ - $\pi/3$ ، ٨ - $-\pi$ ، ٩ - $-7\pi/2$ ، ١٠ - $\frac{1}{3}$ ، ١١ - 2.5 ، ١٢ - -0.1

أوجد الدوال المثلثية الآتية لاعداد حقيقية

١٣ - $\tan(\pi/4)$ ١٤ - $\sin(4\pi/3)$ ١٥ - $\sin(-\pi/2)$ ١٦ - $\cot 0$

١٧ - $\sin \frac{1}{2}$ ١٨ - $\tan 2$ ١٩ - $\cos(-1.3)$ ٢٠ - $\cos 10$

خطط الشكل البيانى للمنحنيات الآتية

٢١ - $y=2\sin x$ ٢٢ - $y=\sin 2x$ ٢٣ - $y=2\cos \frac{1}{2}x$ ٢٤ - $y=-\cos t$

٢٥ - $y=\sin(x+\pi/2)$ ٢٦ - $y=-\tan x$ ٢٧ - $y=|\sin x|$

٢٨ - $y=[\sin x]$ ، حيث $[a]$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى a .

٢٩ - $y=[\cos x]$

٣٠ - خطط الشكل البيانى لـ $y=\cot x$ ما هى خطوطه التقريبية ؟ هل تعتقد أن الدالة دورية ، وإذا كانت كذلك ، فبماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٣١ - ارسم الشكل البيانى لـ $y=\sec x$. هل تعتقد أن الدالة دورية ، وإذا كانت كذلك ، فبماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٣٢ - احصل على الشكل البيانى للمنحنى $y=\sin(x+b)$ حيث b مقدار ثابت ، من الشكل البيانى لـ $y=\sin x$ بنقل المحاور . احصل على الشكل البيانى للمنحنى $y=\cos x$ بهذه الطريقة .

٣٣ - قرب إلى المساحة تحت قوس واحد للمنحنى $y=\sin x$ بقاعدة شبه المنحرف مستخدما ثمانى فترات .

٣٤ - ولد صغير يريد قطعة من فطيره محيطها 16 inches . إذا كان فى امكانه اختيار الطبق الدائرى الذى تخبز عليه الفطيرة ، أى طبق يختار ليحصل على أكبر قطعة ؟ (ارشاد : عبر عن مساحة القطعة بدلالة الزاوية المركزية) .

٣٥ - أوجد دورة دالة الظل واثبت اجابتك .

خمن دورة كل من الدوال الآتية

٣٦ - $f(x)=\sin 2x$ ٣٧ - $f(x)=\sin 3x$ ٣٨ - $f(t)=\cos(t/2)$

٣٩ - $f(x)=\sin nx$ ، n عدد صحيح موجب ٤٠ - $g(x)=\tan 2x$ ٤١ - $g(z)=\sin 2z+2\cos z$

٤٢ ـ هل تعتقد أن الدالة $f(x) = \sin x + x$ تكون دورية ، واذا كانت كذلك ، بماذا تخمن ان تكون دورتها ؟

٤٣ ـ هل تعتقد أن أكبر الأعداد الصحيحة $f(x) = [x]$ تكون دورية ، واذا كانت كذلك ، بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٤٤ ـ الدالة المعرفة بـ $G(x) = (-1)^{[x]}$ دورية . بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟ أوجد دالة مماثلة لكن دورتها نصف دورة الدالة G .

٤٥ ـ الدالة $f(x) = x - [x]$ دورية . بماذا تخمن أن تكون دورتها ؟

٤٦ ـ اذا كانت F دالة دورية ودورتها p ، أثبت أن $F(x + 2p) = F(x)$ لجميع x حيث F تكون معرفة . (ارشاد : اكتب $2p$ فى الصورة $p + p$.) أثبت أن

$$F(x + np) = F(x) \qquad (٢)$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة وجميع x حيث F تكون معرفة . (ارشاد : استخدم الاستنتاج الرياضى) . عمم النتيجة فى (٢) لجميع الاعداد الصحيحة n [ارشاد : إذا كانت $n < 0$ ، اكتب x فى الصورة $(x + np) + (-n)p$] .

٤٧ ـ إذا كانت F و G دالتين دورتاهما q و p ، على الترتيب ، حيث q و p عددان صحيحان موجبان ، أثبت أن مجموعها $F + G$ يكون دالة دورية وأوجد دورتها . (ارشاد : حاول $g = 6$ و $p = 4$ ؛ انظر المسألة ٤٦) .

عين ما إذا كانت كل من الدوال الآتية زوجية أو فردية ، أو لا هذا ولا ذاك

٤٨ ـ $f(x) = x^2$ ٤٩ ـ $h(t) = 1/t$ ٥٠ ـ $g(t) = t^5 - \sqrt{2}$

٥١ ـ $f(x) = (x + x^3)/(x^2 + 1)$ ٥٢ ـ $F(u) = \sec u$ ٥٣ ـ $G(y) = \frac{2}{3} \sin y - \cos 2y$

٥٤ ـ لماذا يكون الشكل البيانى لدالة فردية متماثلا بالنسبة الى نقطة الأصل والشكل البيانى لدالة زوجية متماثلا بالنسبة إلى المحور الصادى ؟

٥٥ ـ اثبت أن حاصل جمع أى عدد من الدوال الزوجية هو دالة زوجية وأن حاصل جمع أى عدد من الدوال الفردية هو دالة فردية .

٥٦ ـ (أ) إذا كانت $f(x)$ أى دالة ، أثبت أن الدالة E المعرفة بـ $E(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ هى دالة زوجية . (ب) كون بكيفية مماثلة دالة فردية من f . (ج) أثبت أن أى دالة f يمكن التعبير عنه كحاصل جمع دالة زوجية وأخرى فردية . وضح ذلك بالدالة $f(x) = x/(x-1)$ (د) عبر عن x^2 كحاصل جمع دالة زوجية وأخرى فردية ، وأعمل نفس الشىء مع $\sin x$.

٥٧ ـ اذا كانت $f(x)$ دالة فردية ، أثبت أن $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ لأى $(a) > 0$. اعط شرحا هندسيا لهذه النتيجة . (ارشاد : $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{a} f(x)\, dx$ اجر تغيير المتغير $u = -x$ فى التكامل الأول على الطرف الأيمن للمعادلة)

٥٨ ـ اذا كانت $f(x)$ دالة زوجية ، اثبت أن $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ لأى $a > 0$ ، أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

٦ ـ ٢
النهايات المثلثية

سلاسة الأشكال البيانية للدوال المثلثية تشير الى أنه من المحتمل أن يكون لها مشتقات . فى الطريق الى ايجاد هذه المشتقات سنحتاج الى نهايتين ، نحسب قيمتها الآن لكى لايعاق البرهان فيما بعد .

نفرض ، كما يمكننا البرهنة عليه ، أن طول القوس $\widehat{AP}$ من دائرة (شكل ٦ ـ ٩) أكبر من طول الوتر AP وأقل من طول كل مسير من خط منكسر واصل بين P و A ويقع خارج أو مماس للدائرة . نثبت أولا أن $\lim_{t\to 0} \sin\ t = 0$ ، نتيجة ليست غير متوقعة . وحدة الدوائر هى الدائرة التى نصف قطرها 1 ومركزها عند نقطة الأصل . لأى عدد موجب t أقل من $\pi/2$ ، ليكن $\widehat{AP}$ القوس الذى طوله t على وحدة الدوائر الموضح فى الشكل ٦ ـ ١٠ ، فيكون $\sin t = \sin \measuredangle\ AOP$ من تعريف جيب العدد ، ويكون $|BP| < |AP| < t$ بافتراضنا الخاص بطول القوس . واذن

$$0 < \sin t = \sin \measuredangle AOP = \frac{|BP|}{|OP|} = |BP| < |AP| < t,$$

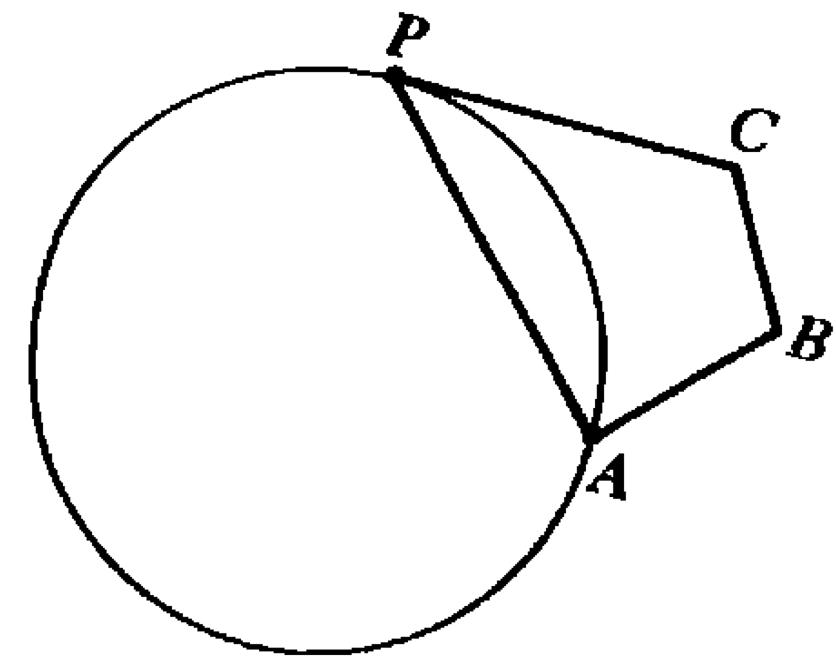
أى أن

$$0 < \sin t < t, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2} \qquad (١)$$

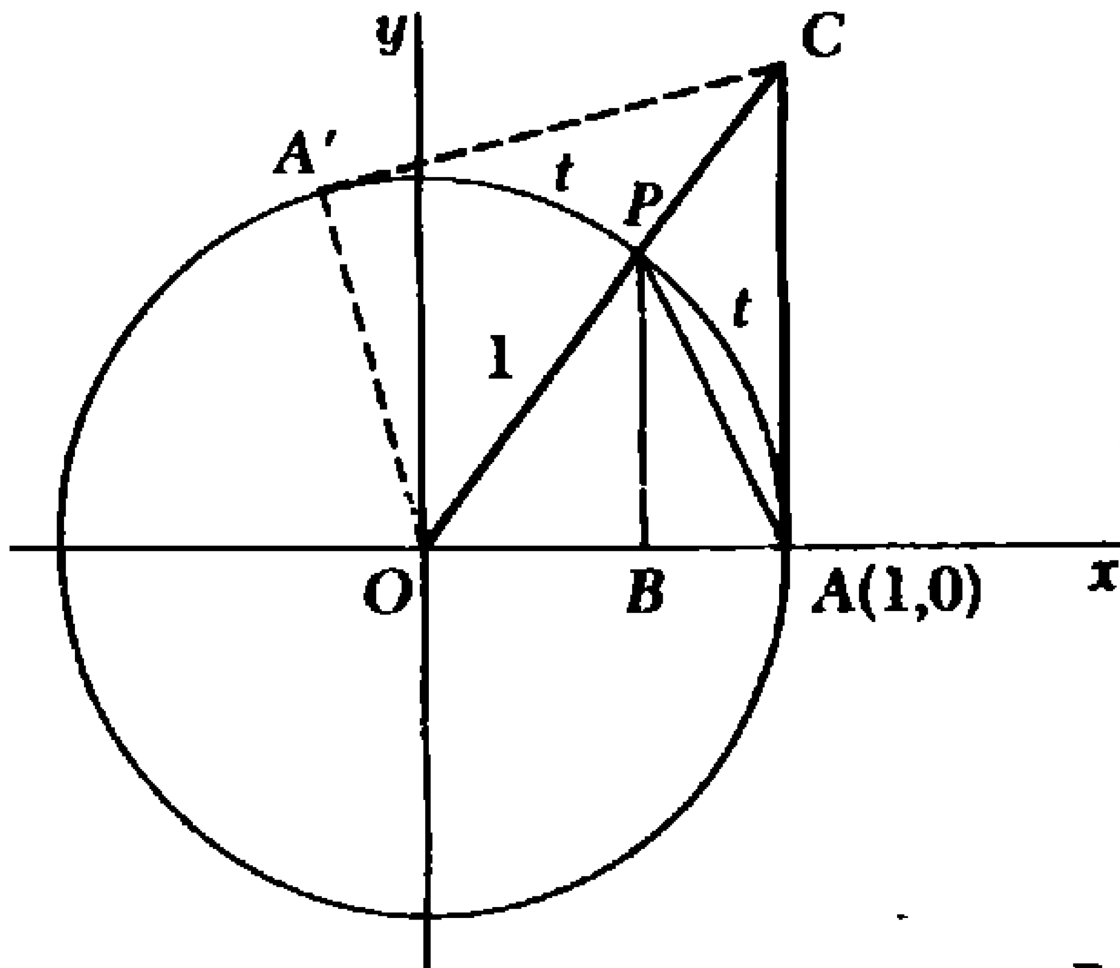
بتطبيق نظرية الحصر على (١) ، يكون

$$\lim_{t\to 0^+} \sin t = 0 \qquad (٢)$$

لايجاد النهاية اليسرى ، ضع $s = -t$ ، حيث $t < 0$ فتكون $s > 0$ ، عندما تقترب t من الصفر من جهة اليسار ، تقترب s من الصفر من جهة اليمين . ومن ثم ، باستخدام (٢) يكون



شكل ٦ ـ ٩



شكل ٦ ـ ١٠

$$\lim_{t\to 0^-} \sin t = \lim_{s\to 0^+} \sin(-s) = -\lim_{s\to 0^+} \sin s = 0$$

حيث قد استخدمنا الحقيقة أن $\sin(-s) = -\sin s$.هذه النهاية اليسرى و (٢) تتضمنان أن

$$\lim_{t\to 0} \sin t = 0 \qquad (٣)$$

للقيم $-\pi/2 < t < \pi/2$ ، $\cos t$ تكون موجبة وتساوى $\sqrt{1-\sin^2 t}$

واذن

$$\lim_{t\to 0} \cos t = \lim_{t\to 0} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\lim_{t\to 0} (1-\sin^2 t)} = 1$$

لقد أثبتنا اتصال الدالتين cosine و sine عند 0 كنتيجة لحصولنا على مشتقتيهما . فى البند القادم سنرى أنهما متصلتان فى كل مكان .

٦ - ٢ تمهيدية

(أولا) $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

(ثانيا) $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0.$

فى كلتا هاتين النهايتين ، كما فى (١) و (٣) ، t تكون عددان يمكن للقارىء تحقيقهما بفحص جدول جيوب وجيوب تمام زوايا مقيسة بالتقدير الدائرى وقريبة من الصفر .

البرهان . تثبت النهاية الأولى باثبات أن $(\sin t)/t$ تقع بين 1 و $\cos t$. بما أن $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$ فهذا سيثبت النتيجة . افترض أولا أن $0 < t < \pi/2$. لتكن C نقطة تقاطع OP فى الشكل ٦ - ١٠ مع المماس عند A وليكن $A'C$ المماس الآخر من C للدائرة ، فيكون $|AC| = |A'C|$ ، ويكون القوس $\widehat{PA'}$ أيضا له الطول t . لدينا

$$2t = |\widehat{AA'}| < |AC| + |A'C| = 2|AC|$$

ومن ثم $t < |AC|$. لكن

$$|AC| = \frac{|AC|}{|OA|} = \tan \measuredangle AOP = \tan t.$$

واذن

$$t < \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad (٤)$$

ومنها $\cos t < (\sin t)/t$. هذه مع (١) تعطى

$$\cos t < \frac{\sin t}{t} < 1, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2} \qquad (٥)$$

اذا كانت $-\pi/2 < t < 0$ ، فان $0 < -t < \pi/2$ ومن (٥) ، بوضع $-t$ مكان t ، يكون

$$\cos(-t) < \frac{\sin(-t)}{-t} < 1$$

لكن $\sin(-t) = -\sin t$ و $\cos(-t) = \cos t$ ، فهذا يختزل الى (٥) مبينا أن (٥) صحيحة أيضا عند $-\pi/2 < t < 0$ — ومن ثم لجميع $-\pi/2 < t < \pi/2$ حيث $t \neq 0$ ، بما أن $\lim_{t\to 0} \cos t = 1$، فان نظرية الحصر مطبقة على (٥) تثبت أن

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

النهاية الثانية فى التمهيدية ٦ ـ ٢ نحصل عليها بسهولة من الأولى :

$$\frac{\cos t - 1}{t} = \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{t(\cos t + 1)} = \frac{-\sin^2 t}{t(\cos t + 1)}$$

$$= \frac{\sin t}{t} \frac{-\sin t}{\cos t + 1}$$

واذن

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\right)\left(\lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{\cos t + 1}\right) = 1\left(\frac{0}{2}\right) = 0$$

التمهيدية ٦ ـ ٢ يمكن استخدامها لايجاد نهايات مثلثية أخرى .

مثال ١ . أوجد $\lim_{y\to 0} [(\sin 3y)/y]$.

دع $z = 3y$. ، فيكون $\frac{\sin 3y}{y} = 3\frac{\sin z}{z}$. عندما تقترب y من الصفر كذلك تفعل z ، واذن

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{y} = 3 \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 3(1) = 3$$

مثال ٢ . أوجد $\lim_{x\to 0} [(\tan 2x)/(x \sec x)]$

كل من البسط والمقام يقترب من الصفر . نكتب المقدار فى صورة فيها النهاية صفر فى المقام لا تكون مقلقة ،

$$\frac{\tan 2x}{x \sec x} = \frac{\sin 2x}{x \cos 2x \sec x} = 2\frac{\sin 2x}{2x}\frac{\cos x}{\cos 2x}$$

ومنها

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x \sec x} = 2 \lim \frac{\sin 2x}{2x} \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \cos 2x} = 2(1)\tfrac{1}{1} = 2$$

مسائل

١ - حقق التمهيدية ٦ - ٢ بحساب قيم $(\cos t - 1)/t$ و $(\sin t)/t$ لقيم t الموجبة والسالبة القريبة من 0 . (تذكر أن t هي قياس دائرى للزاوية AOP التى ترتبط بالعدد t فى الشكل ٦ - ١٠) .

٢ - احسب قيم $(\tan t)/t$ لقيم t القريبة من الصفر ، ومن ثم خمن قيمة $\lim_{t\to 0} [(\tan t)/t]$. أثبت تخمينك . (ارشاد : اكتب $\tan t$ فى صورة أخرى) .

أوجد النهايات الآتية . يمكن افتراض اتصال الدوال المثلثية .

٣ - $\lim_{x\to 0} \sec x$ ٤ - $\lim_{x\to \pi} \sin x$ ٥ - $\lim_{x\to \pi/2} \sec x$

٦ - $\lim_{t\to 0} t \sin t$ ٧ - $\lim_{t\to 0} t \sin t$ ٨ - $\lim_{t\to \pi} t \sin t$ $\lim_{u\to -\pi/2} \tan \frac{u}{2}$

٩ - $\lim_{y\to 0} \sqrt{1+\sin^2 y}$ ١٠ - $\lim_{\theta\to 0} \cos(\sin\theta)$ ١١ - $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z}{z}$

١٢ - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$ ١٣ - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x}$ ١٤ - $\lim_{t\to 0} 2t \csc t$

١٥ - $\lim_{\theta\to(\pi/2)} \frac{\tan\theta}{\theta}$ ١٦ - $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x}$ ١٧ - $\lim_{y\to 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{y}$

١٨ - $\lim_{u\to 0} \frac{\cos u}{u^2}$ ١٩ - $\lim_{\alpha\to 0} \frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}$ ٢٠ - $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

٢١ - $\lim_{x\to \infty} x \sin \frac{1}{x}$ (ارشاد : ضع $t = 1/x$)   ٢٢ - $\lim_{t\to 0^+} \frac{1-\cos t}{\sqrt{t}}$ ٢٣ - $\lim_{z\to 0} \frac{\tan 3z}{2z}$

٢٤ - $\lim_{z\to(\pi/2)^-} \frac{\tan 3z}{2z}$ ٢٥ - $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x}$ ٢٦ - $\lim_{\alpha\to 0} \alpha \cot \alpha$

٢٧ - $\lim_{u\to 0} \frac{\sin 3u}{\sin 2u}$ ٢٨ - $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x}{\cos 5x}$ ٢٩ - $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$

٣٠ - $\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{\cos\theta}{\theta - \pi/2}$ (ارشاد : ضع $x = \theta - \pi/2$)   ٣١ - $\lim_{y\to 0} \frac{y^2 - 2y}{\sin 2y}$ ٣٢ - $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 2x}{2x - \sin x}$

٣٣ - $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ (ارشاد : فك $\sin(x+h)$)

٣٤ - لأى القيم الصحيحة لـ n توجد $\lim_{t\to 0} [(1-\cos t)/t^n]$ ؟

٣٥ - خطط على نفس المحورين الأشكال البيانية للدوال t, $\sin t$ و $\tan t$ حيث $0 < t < \pi/2$ ، وحقق هندسيا المتباينة $\sin t < t < \tan t$ المكونة من (١) و (٤).

٣٦ - اثبت أن $\sin x$ متصلة عند كل عدد x . (ارشاد : أثبت أن $\lim_{h\to 0} \sin(x+h) = \sin x$ بفك $\sin(x+h)$) .

٣٧ ـ اختر b بحيث تكون الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2}, & x \neq 0. \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

متصلة عند 0.

٦ ـ ٣

مشتقات الدوال المثلثية

لأن دالة الجيب ليست دالة جبرية ، فصيغنا للمشتقة لاتساعد فى ايجاد مشتقتها . يجب أن نعود الى تعريف المشتقة وسنجد أنه من المناسب استخدام الصورة (٥) ببند ٣ ـ ١ . لتكن $f(x) = \sin x$ ، فيكون

$$D \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin (x+h) - \sin x}{h}$$

بفك $\sin (x + h)$ بصيغة الجمع ، يكون لدينا

$$\begin{aligned} D \sin x &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\sin x)(0) + (\cos x)(1) = \cos x \end{aligned}$$

حيث استخدمنا التمهيدية ٦ ـ ٢ فى حساب النهايات . هذا يثبت الصيغة الأولى من الصيغ المعطاه أدناه . الأخرى ستبرهن قريبا .

٦ ـ ٣

(أولا)	$D \sin x = \cos x$	(ثانيا)	$D \cos x = -\sin x$
(ثالثا)	$D \tan x = \sec^2 x$	(رابعا)	$D \cot x = -\csc^2 x$
(خامسا)	$D \sec x = \sec x \tan x$	(سادسا)	$D \csc x = -\csc x \cot x$

عند $x = 0$ يكون $D \sin x = \cos 0 = 1$. الشكل البيانى لدالة الجيب يمر بنقطة الأصل بزاوية $45°$ وله مماس أفقى حيثما $\cos x = 0$, أى عند ....., $x = \pm \pi / 2 , \pm 3 \pi / 2 , \pm 5 \pi / 2$. الاختبار الأول للمشتقة يبين أن $\sin x$ لها نهاية عظمى موضعية عند $\ldots , -3 \pi / 2 , \pi /2 , 5 \pi /$, ...

.... ,2 ونهاية صغرى موضعية عند .... , $-\pi/2$, ... , $7\pi/2$, $3\pi/2$, $\pi/2$. الشكل البيانى للدالة sin x المخطط فى الشكل ٦ - ٧ يوضح هذه الخواص .

لايجاد مشتقة $\sin 3x^2$ ، نحتاج الى تعميم للقاعدة ٦ - ٣ (أولا) للدالة التى على الصورة $\sin g(x)$. قاعدة السلسلة تمكننا من ايجاده ، بشرط أن $g'(x)$ تكون موجودة . الفكرة هى أن نعبر عن $\sin g(x)$ كدالة تركيبية لدالتين لهما مشتقات . لتكن $f(z) = \sin z$, $z = g(x)$. فيكون

$$\sin g(x) = f(g(x))$$

من القاعدة ٦ - ٣ (أولا) ، $f'(z) = \cos z$ ، واذن بقاعدة السلسلة

$$D \sin g(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) \qquad (1)$$
$$= (\cos z)g'(x) = [\cos g(x)]g'(x).$$

مثال ١ . أوجد $D \sin 3x^2$

من (١) حيث $g(x) = 3x^2$ ، يكون

$$D \sin 3x^2 = \cos 3x^2\, D(3x^2) = 6x \cos 3x^2$$

مثال ٢ . أوجد $\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10)$

بما أن المقدار المطلوب اجراء تفاضله هو قوة ، نبدأ بقاعدة القوة :

$$\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10) = 2 \sin (5x - 10) \frac{d}{dx} \sin (5x - 10)$$

لايجاد $\frac{d}{dx} \sin (5x - 10)$ ، نستخدم (١) ، فنحصل على

$$\frac{d}{dx} \sin (5x - 10) = \cos (5x - 10) \frac{d}{dx} (5x - 10)$$
$$= 5 \cos (5x - 10).$$

واذن

$$\frac{d}{dx} \sin^2 (5x - 10) = 10 \sin (5x - 10) \cos (5x - 10)$$

الجواب يمكن وضعه فى الصورة المختصرة $5 \sin (10x - 20)$ باستخدام المتطابقة $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$.

مع أن مشتقة دالة جيب التمام يمكن ايجادها مباشرة من تعريف المشتقة ، كما فعلنا بدالة الجيب ، الا أنه من الأسهل اتباع ما يأتى . لدينا المتطابقة المثلثية

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (٢)$$

لجميع x . مشتقة $\sin(\pi/2 - x)$ يمكن ايجادها باستخدام (١) حيث $g(x) = \pi/2 - x$ ،

$$D\cos x = D\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) D\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

باستخدام متطابقة زميلة لـ (٢) ، وهى $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ يكون $D\cos x = -\sin x$ ، وبذلك نكون قد أثبتنا القاعدة ٦ ـ ٣ (ثانيا) .

بالتعبير عن $\tan x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ واستخدام قاعدة خارج القسمة ، يمكننا ايجاد مشتقتها :

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\, D\sin x - \sin x\, D\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

مشتقة $\cos x$ نحصل عليها بالمثل . مشتقة $\sec x$ نحصل عليها بالتعبير عن $\sec x$ بدلالة $\cos x$:

$$D\sec x = D(\cos x)^{-1} = -(\cos x)^{-2} D\cos x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x.$$

مشتقة $\csc x$ نحصل عليها بالمثل ، فالقواعد الست التى فى ٦ ـ ٣ قد تم اثباتها .

قاعدة المتسلسلة يمكن استخدامها لتعميم جميع هذه الصيغ لمشتقات $\cos g(x)$, $\tan g(x)$ وهكذا ، الطريقة مماثلة للطريقة التى استخدمناها للحصول على $D\sin g(x)$. الصيغ معطاة أدناه .

٦ ـ ٤ اذا كانت $g'(x)$ موجودة ، فان

(أولا) $D\sin g(x) = \cos g(x) g'(x)$

(ثانيا) $D\cos g(x) = -\sin g(x) g'(x)$

(ثالثا) $D\tan g(x) = \sec^2 g(x) g'(x)$

(رابعا) $D\cot g(x) = -\csc^2 g(x) g'(x)$

(خامسا) $D\sec g(x) = \sec g(x)\, \tan g(x) g'(x)$

(سادسا) $D\csc g(x) = -\csc g(x)\, \cot g(x) g'(x)$

مثال ٣ . أوجد $(3 \tan 5x - 4 \sec 5x)$.

التعبير المراد إجراء تفاضله هو حاصل جمع . نبدأ بقاعدة حاصل الجمع ، ثم نستخدم القاعدتين ٦ ـ ٤ (ثالثا) و (خامسا)

$$\begin{aligned} D(3 \tan 5x - 4 \sec 5x) &= 3D \tan 5x - 4D \sec 5x \\ &= 3 \sec^2 5x\, D(5x) - 4 \sec 5x \tan 5x\, D(5x) \\ &= \frac{3(5)}{\cos^2 5x} - 4 \frac{1}{\cos 5x} \frac{\sin 5x}{\cos 5x} 5 \\ &= \frac{5(3 - 4 \sin 5x)}{\cos^2 5x} \end{aligned}$$

مثال ٤ . أوجد $\frac{d}{dx}\left(\cos \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}\right)$

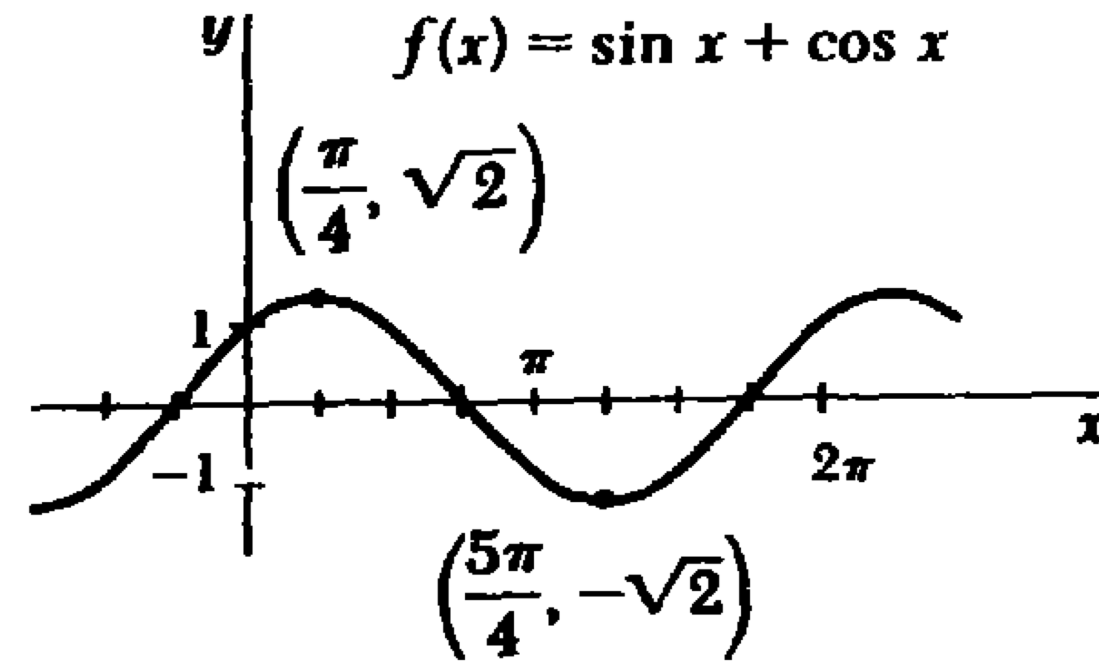
التعبير المراد اجراء تفاضله هو حاصل ضرب ، ويكون

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\cos \frac{x}{2} \cot \frac{x}{2}\right) &= \cos \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \cot \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2} \frac{d}{dx} \cos \frac{x}{2} \\ &= \cos \frac{x}{2}\left(-\csc^2 \frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} + \cot \frac{x}{2}\left(-\sin \frac{x}{2}\right)\frac{1}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2} - \tfrac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \\ &= -\tfrac{1}{2} \cos \frac{x}{2}\left(\csc^2 \frac{x}{2} + 1\right) \end{aligned}$$

مثال ٥ . خطط الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sin x + \cos x$.

بما أن $\cos x$ و $\sin x$ دالتان دوريتان ودورة كل منهما 2π ، فهكذا أيضا الدالة $f(x)$. واذن يكفى أن نخطط المنحنى فى فترة طولها 2π ، مثلا الفترة $[0, 2\pi]$ ، وباقى المنحنى سيكون تكرارات لهذا الجزء . الطريقة هى ذاتها التى استخدمت فى تخطيط كثيرات الحدود . المنحنى يقطع المحور الصادى عند 1 . الأجزاء المقطوعة من المحور السينى هى قيم x التى تجعل $\sin x = -\cos x$. لحل هذه المعادلة ، نقسم طرفى المعادلة على $\cos x$ ، لنحصل على $\tan x = -1$. واذن الأجزاء المقطوعة من المحور السينى فى الفترة $[0, 2\pi]$ هى $7\pi/4$ و $3\pi/4$ (شكل ٦ ـ ١١) . نوجد الآن الأعداد الحرجة للدالة f . من المشتقة

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$



شكل ٦-١١

نرى أن $f'(x) = 0$ اذا واذا فقط كان $\sin x = \cos x$. أى أن ، اذا واذا فقط كان $\tan x = 1$. الأعداد الحرجة للدالة f فى الفترة $[0 , 2\pi]$ هى $5\pi/4$ و $\pi/4$ ، والنقطتان المناظرتان على المنحنى هما $(5\pi/4, -\sqrt{2})$ و $(\pi/4, \sqrt{2})$. المنحنى يتزايد فى الفترة $[0 , \pi/4]$ ، يتناقص فى الفترة $[\pi/4 , 5\pi/4]$ ، ويتزايد فى الفترة $[5\pi/4 , 2\pi]$. باقى المنحنى يمكن تخطيطه بتكرار الجزء $[0 , 2\pi]$. نقط الانقلاب توجد من المشتقة الثانية للدالة f :

$$f''(x) = -(\sin x + \cos x).$$

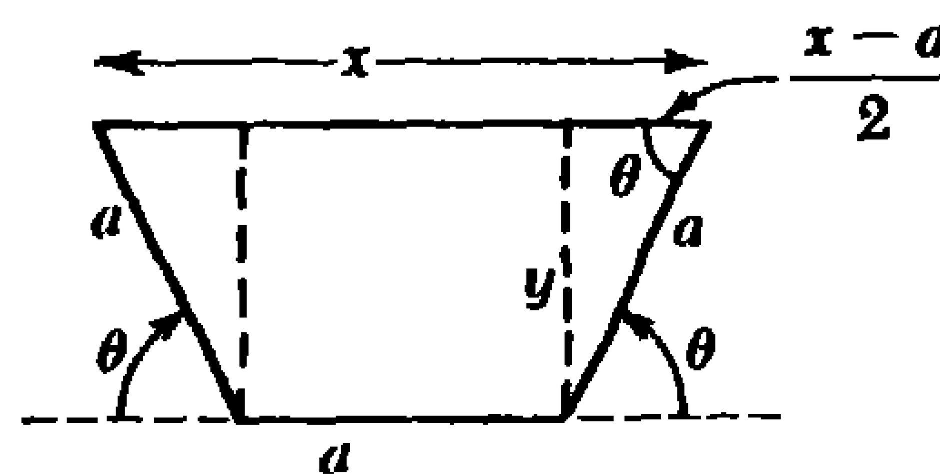
الاحتمالات الوحيدة فى الفترة $[0 , 2\pi]$ هما النقط $(7\pi/4 , 0)$ و $(3\pi/4 , 0)$. بما أن $f''(\pi/2) = -1$, $f''(\pi) = 1$ و $f''(2\pi) = -1$ فالمنحنى يكون مقعرا الى تحت فى الفترتين $[7\pi/4 , 2\pi]$ و $[0 , 3\pi/4]$ ومقعرا لأعلى فى الفترة $[3\pi/4 , 7\pi/4]$. كلتا النقطتين $(7\pi/4 , 0)$ و $(3\pi/4 , 0)$ نقطتا انقلاب .

مثال ٦ . مقطع حوض ما هو شبه منحرف متساوى الساقين ، طول كل من الضلعين والقاعدة هو a in ما هى الزاوية التى يعملها الضلعان مع القاعدة اذا كانت مساحة المقطع أكبر مايمكن ؟

لتكن θ هى الزاوية التى يعملها كل ضلع مع امتداد خط القاعدة ، كما هو موضح فى الشكل ٦-١٢ . واضح من الشكل أن $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$. نوجد أولا المساحة A لجميع أشباه المنحرفات الممكنة ونعبر عنها بدلالة θ . لتكن x طول القاعدة العليا ولتكن y الارتفاع ، فيكون

$$A = y\frac{x+a}{2} \qquad (٣)$$

الآن يجب أن نعبر عن y و x بدلالة θ . من الشكل ٦-١٢ ، $(x - a)/2 = a\cos\theta$ و $y = a\sin\theta$. من ثم $x = 2a\cos\theta + a$. بتعويض هذه القيم لـ y و x فى (٣) ، يكون



شكل ٦-١٢

$$A = a \sin \theta \frac{2a \cos \theta + a + a}{2}$$

$$= a^2 \sin \theta(\cos \theta + 1), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$$

مشتقة A هى

$$\frac{dA}{d\theta} = a^2[-\sin^2 \theta + \cos \theta(\cos \theta + 1)].$$

لايجاد قيم θ حيث $dA/d\theta = 0$ ، نعبر عن المشتقة بدلالة دالة مثلثية واحدة ، فى هذه الحالة $\cos \theta$ ، باستبدال $\sin^2 \theta$ بـ $1 - \cos^2 \theta$.

$$\frac{dA}{d\theta} = a^2[-1 + \cos^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta]$$

$$= a^2(2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0.$$

واذن اما $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، وفى هذه الحالة $\cos \theta = \pi / 3$ ، واما $\cos \theta = -1$ ، وفى هذه الحالة $\theta = \pi$. هـذه القيمة الأخيرة خارج نطاق A . واضح من الشـكل أن قيمتى A عند $\theta = 2\pi / 3$ و $\theta = 0$ النقطتان الطرفيتان للنطاق ، كلتاهما أقل من القيمة عند $\pi / 3$. ومن ثم الزاوية $\pi / 3$ تعطى أكبر قيمة للمساحة .

مثال ٧ . اجر التكامل $\int \cos 3x\, dx$.

المعكوس التفاضلى لـ $\cos 3x$ يجب أن يتضمن $\sin 3x$ نحاول هذا كأول تخمين . بمقارنة $\frac{d}{dx} \sin 3x = 3 \cos 3x$ بالدالة المكاملة ، نرى أن نعدل تخميننا الى

$$\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

وهذه نرى أنها صحيحة باجراء تفاضل الطرف الأيمن .

مثال ٨ . اجر التكامل $\int \cot^3 x \csc^2 x\, dx$

فيما عدا لعامل ثابت ، الدالة المكاملة هى على الصورة $g^3(x)\, g'(x)$ حيث $g(x) = \cot x$. هذا يوحى بأن نحاول $\cot^4 x$ كأول تخمين للمعكوس التفاضلى . بما أن

$$\frac{d}{dx} \cot^4 x = -4 \cot^3 x \csc^2 x$$

نعدل تخميننا الى

$$\int \cot^3 x \csc^2 x\, dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x + C$$

وهذا صحيح .

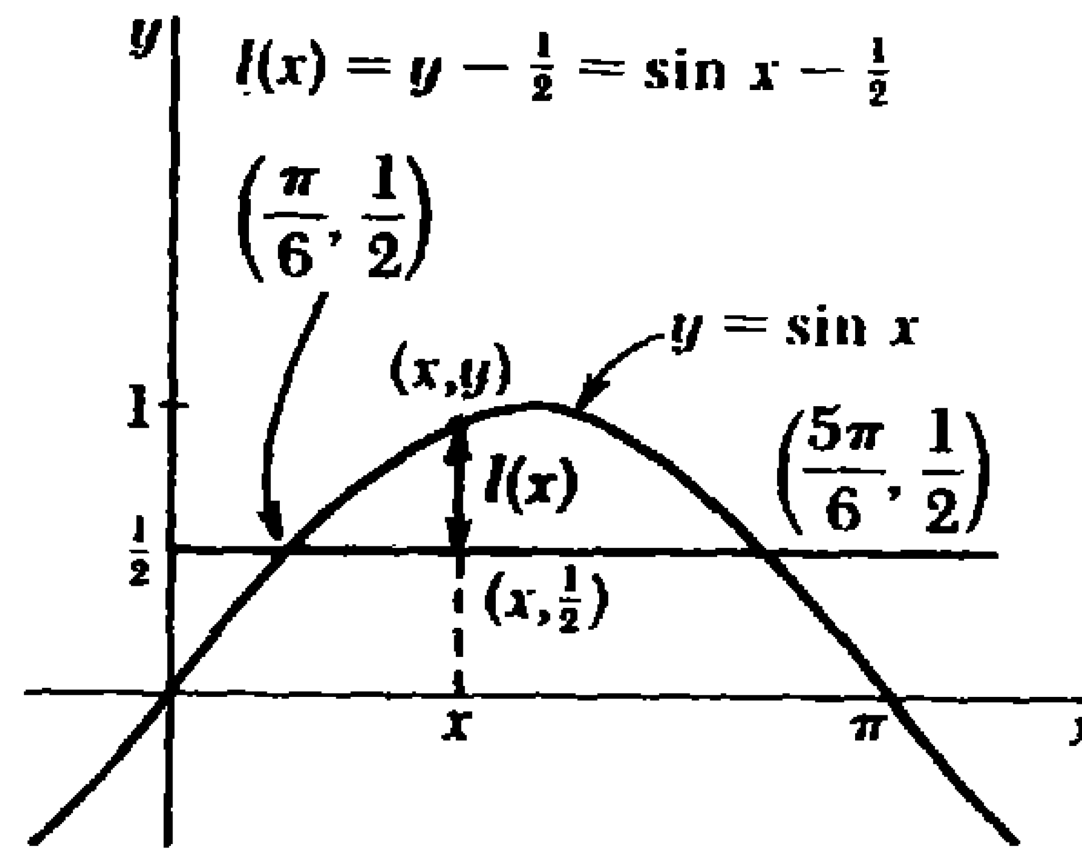
مثال ٩ . أوجد مساحة المنطقة فوق الخط $y = \frac{1}{2}$ وتحت القوس الأول فى الربع الأول للمنحنى $y = \sin x$.

المنطقة موضحة فى الشكل ٦ ـ ١٣ . حدا التكامل يتعينان بحل معادلتى الخط المستقيم والمنحنى معا . بما أن $\sin x = \frac{1}{2}$ عند $x = \pi/6, 5\pi/6$ ، فهاتان هما حدا التكامل . المسافة $l(x)$ بين المنحنى والخط المستقيم هى $l(x) = y - \frac{1}{2} = \sin x - \frac{1}{2}$. لذلك

$$\text{Area} = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} l(x)\, dx = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin x - \tfrac{1}{2})\, dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{x}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \left(-\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$



شكل ٦-١٣

مسائل :

أوجد مشتقة مايأتى :

١ ـ $\cos x + \tan x$	٢ ـ $\cos x + \sin 2x$	٣ ـ $\sec\theta + 5\cot\theta$
٤ ـ $\tan 3s$	٥ ـ $\sec 5\alpha$	٦ ـ $\cos(2 - 6x)$
٧ ـ $\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$	٨ ـ $\sin t \cos 2t$	٩ ـ $\cot 3x \cos x$
١٠ ـ $\cos^2(3x+7)$	١١ ـ $\cos(3x+7)^2$.	١٢ ـ $\sec^2 x - \tan^2 x$
١٣ ـ $\frac{3}{\sin 4x}$	١٤ ـ $\left(1 + 2\tan\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}$	١٥ ـ $\sqrt{1 - \cos x}$
١٦ ـ $3x\sin^2 3x$	١٧ ـ $t^2\csc^2\pi t$.	١٨ ـ $\sin(\phi + c)\cos(\phi - c)$
١٩ ـ $3z\sin\frac{1}{z}$	٢٠ ـ $\frac{\sin x + x}{2x}$	٢١ ـ $\sin^3 ax - x\cos bx$
٢٢ ـ $\tan^2 2\theta\cos 2\theta$	٢٣ ـ $\tan\frac{u}{1-u}$	٢٤ ـ $\frac{\sin w}{1 - \cos w}$
٢٥ ـ $\frac{1 + \cot 3x}{\csc 3x}$		

أوجد dy / dx لما يأتى :

٢٦ ـ $\sin y = x$

٢٧ ـ $\tan x + \tan y = 1$.

٢٨ ـ $y = \sin (x - y)$

٢٩ ـ $\cot (2x + y) = 1 + \csc y$

أوجد المشتقة الثانية لما يأتى :

٣٠ ـ $\sin ax$ ٣١ ـ $\tan u$ ٣٢ ـ $\frac{1}{2} \sin^2 \theta$ ٣٣ ـ $\sec 2x$ ٣٤ ـ $x \cos x$

للدوال الآتية أوجد تقريبا عشريا لـ $f'(a)$ عند a المعطاة

٣٥ ـ $f(x) = x + \cos x, a = 1\frac{1}{2}$

٣٦ ـ $f(x) = \sin 2x \cos x, a = 1.5$

٣٧ ـ $f(x) = \tan x, a = \pi/3, 2$.

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند النقطة المعطى احداثيها السينى

٣٨ ـ $y = \sin x - \cos x, x = 0$ ٣٩ ـ $y = x + \tan x, x = 0$ ٤٠ ـ $y = x^2 \sec x, x = \pi$

٤١ ـ اثبت أن $y = -\sin \sqrt{k}x$ هى حل للمعادلة التفاضلية $y'' = ky$ ، حيث k عدد ثابت . أوجد حلا آخر .

٤٢ ـ أثبت أن $\cos 2x$ و $\sin 2x$ هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y / dx^2 + 4y = 0$. اثبت أنه إذا كانت c_2 و c_1 أى عددين ثابتين ، فإن $c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ هو أيضا حل . أوجد حلا يمر بالنقطة $(\pi / 4, 3)$ وميله هناك يساوى 1 .

٤٣ ـ أوجد مشتقة $\cos x$ بالطريقة التى استخدمت فى الكتاب لايجاد مشتقة $\sin x$.

٤٤ ـ استخلص (أ) القاعدة ٦ ـ ١٣ (رابعا) ، (ب) القاعدة ٦ ـ ٣ (سادسا) .

٤٥ ـ بفرض أن $D \cos x = - \sin x$ ، أثبت أن $D \cos g(x) = - \sin g(x) g'(x)$.

٤٦ ـ بإجراء تفاضل طرفى المتطابقة $\sin (x + a) = \sin x \cos a + \cos x \sin a$ اشتق صيغة مفكوك $\cos (x + a)$.

٤٧ ـ أثبت أن $\frac{d}{dx} \cos^2 x = -\frac{d}{dx} \sin^2 x$. مستخدما هذا ، اثبت المتطابقة الشهيرة التى تربط $\cos^2 x$ و $\sin^2 x$.

خطط الشكل البيانى للدوال الآتية وأوجد نقط الانقلاب التى قد توجد :

٤٨ ـ $f(x) = 2 \cos x$ ٤٩ ـ $f(x) = 3 \sin \frac{1}{2}x$ ٥٠ ـ $g(t) = \cos \left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

٥١ ـ $g(x) = \cot x$ ٥٢ ـ $f(x) = \sec x$ ٥٣ ـ $f(\theta) = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$

٥٤ ـ $F(x) = \sin^2 x$ ٥٥ ـ $g(x) = 2 \sec x + \tan x$ ٥٦ ـ $h(x) = x + \sin x$

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدوال الآتية فى الفترة المعطاة :

٥٧ ـ $F(x) = x - \sin 2x, [0,\pi]$

٥٨ ـ $g(x) = \sin \pi x - \cos \pi x, [-1,1]$

٥٩ ـ $f(x) = \cos x + \cot x, (0,2\pi)$

٦٠ ـ $f(t) = \tan t - 2t - 1, (-\pi/2,\pi/2)$

٦١ ـ $f(x) = \sin^2 x - \cos x, [0,2\pi]$

٦٢ ـ اثبت أن القيمة العظمى لـ $a \sin t + b \cos t$ هى $\sqrt{a^2+b^2}$. ما هى القيمة الصغرى ؟

فى المسائل الآتية $s(t)$ هى الموقع عند الزمن t لنقطة تتحرك على خط للاحداثيات . أوجد سرعة النقطة عند الزمن t وصف الحركة .

٦٣ ـ $s(t) = 2 \sin t,\ [-2\pi, 2\pi]$

٦٤ ـ $s(t) = \sin 2t,\ [0, \pi]$

أجر التكاملات الآتية :

٦٥ ـ $\int \sin 2w\, dw$

٦٦ ـ $\int 3 \cos 3\theta\, d\theta$

٦٧ ـ $\int \sec^2 (-2y)\, dy$

٦٨ ـ $\int \sin (ax+b)\, dx,\ a \neq 0$

٦٩ ـ $\int_2^3 5 \cos \frac{2}{3}\pi t\, dt$

٧٠ ـ $\int b \csc^2 ax\, dx,\ a \neq 0$

٧١ ـ $\int_0^{\pi/2} \sec \frac{u}{2} \tan \frac{u}{2}\, du$

٧٢ ـ $\int_{\pi/3}^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}\, dt$

٧٣ ـ $\int \left(2 \sin \frac{4}{3} x + 4 \sec^2 \frac{x}{2}\right) dx$

٧٤ ـ $\int \sin at \cos at\, dt,\ a \neq 0$

٧٥ ـ $\int \sqrt{\cos x} \sin x\, dx$

٧٦ ـ $\int \tan ax \sec^2 ax\, dx,\ a \neq 0$

٧٧ ـ $\int x \sin x^2\, dx$

٧٨ ـ $\int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$

٧٩ ـ $\int \frac{\cos 3x}{\sin^2 3x}\, dx$

٨٠ ـ $\int \sec^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}\, d\alpha$

٨١ ـ $\int (1 - \cos^4 2t) \sin 2t\, dt$

٨٢ ـ $\int \sin x \cos x\ (\sin x + \cos x)\, dx$

٨٣ ـ $\int (1+\sin y)^2 \cos y\, dy$

٨٤ ـ $\int \sin^3 t\, dt$ (إرشاد : $\sin^3 t = \sin^2 t \sin t = (1-\cos^2 t) \sin t$.]

حل المعادلات التفاضلية الآتية

٨٥ ـ $\frac{dy}{dx} = \sec y$

٨٦ ـ $x^2 \frac{dy}{dx} = -\csc 2y$

٨٧ ـ $(s + \sin s) \frac{ds}{dt} + t = 0$

٨٨ ـ أوجد الزاوية بين المنحنيين $y = \cos x$ و $y = \sin x$ عند نقطة واحدة من نقط تقاطعهما .

٨٩ ـ يراد عمل حوض من شريحة نحاس عرضها 10 in بثنيها على شكل V ، ماذا ينبغى أن تكون الزاوية بين الضلعين حتى يكون الحجم أكبر ما يمكن ؟

٩٠ ـ جسم ثقيل وزنه m يجر على سطح أفقى بحبل صانعا زاوية θ مع الأفقى . القوة المطلوبة لعمل ذلك تعطى بالصيغة

$$F = \frac{mc}{c \sin \theta + \cos \theta}$$

حيث c معامل الاحتكاك . اثبت أن القوة تكون أقل ما يمكن عندما $\tan \theta = c$.

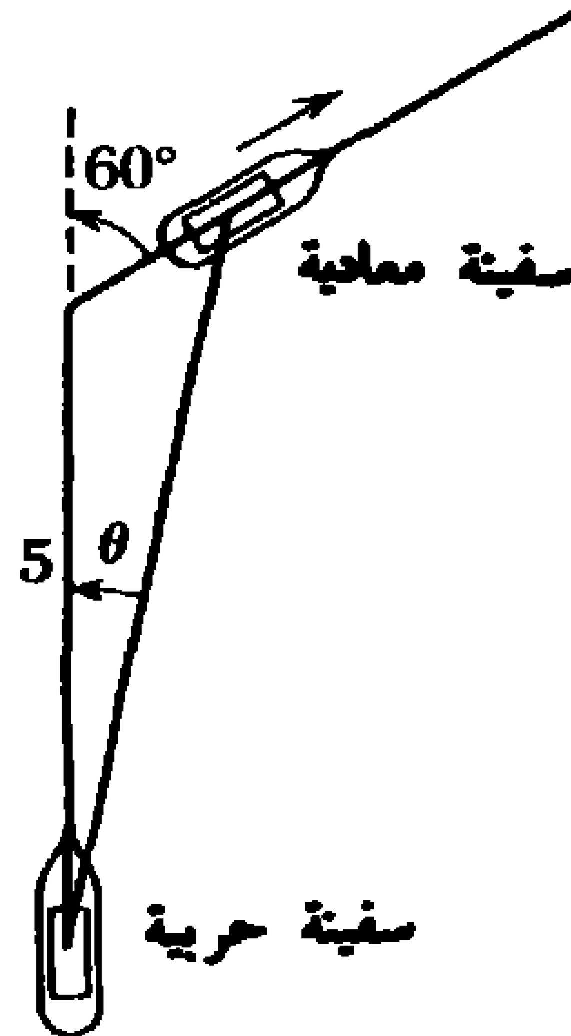
٩١ ـ مولدان للتيار الكهربائي يغذيان نفس الخط . كل يعطى *60* دورة لتيار متردد سعته *110* فولت . الجهدان عند الزمن t sec يعطيان بالصيغتين : $E_2 = 110 \cos (120 \pi t)$ و $E_1 = 110 \sin (120 \pi t)$ الجهد الكلى فى الخط عند أى زمن هو $E_1 + E_2$. أوجد أكبر قيمة وأصغر قيمة للجهد الكلى ، وأوجد متى يحدثان .

٩٢ ـ حائط ارتفاعة *8* ft يبعد *27* ft من منزل . أوجد اقصر سلك مستقيم يصل من المنزل إلى الأرض مارا فوق الحائط . (إرشاد : عبر عن طول السلك بدلالة الزاوية بين الأرض والسلك) .

٩٣ ـ سائق عربة برمائية يريد عبور بحيرة دائرية قطرها *4* miles إلى نقطة على الشاطىء المقابل فى نهاية القطر . سرعة العربة فى البر هى *16* mph وفى الماء *8* mph والعربة يمكنها أن تذهب إما حول البحيرة على الشاطىء ، أو مباشرة من جانب لجانب عبر الماء ، أو فى خط مستقيم عبر الماء إلى نقطة متوسطة على الشاطىء ثم على الشاطىء باقى الطريق . أوجد أقصر وأطول وقت للرحلة . (إرشاد : عبر عن الزمن بدلالة الزاوية بين القطر ومسير العربة عبر الماء) .

٩٤ ـ ضوء دوار فى منارة على بعد *1* mile من الشاطىء يعمل دورتين فى الدقيقة . ما سرعة شعاع يتحرك على طول الشاطىء عندما يكون على بعد $\frac{1}{2}$ mile من النقطة على الشاطىء التى هى أقرب نقطة من المنارة ؟

٩٥ ـ سفينة حربية ثابتة تراقب سفينة للعدو على بعد *5* أميال بحرية . سفينة العدو تتحرك بمعدل *25* عقدة (أميال بحرية فى الساعة) فى اتجاه يصنع زاوية $60°$ مع محور السفينة الحربية (شكل ٦ ـ ١٤) . جهاز تعيين المدى فى السفينة الحربية وجه لسفينة العدو . ما سرعة دوران جهاز تعيين المدى عندما الزاوية θ بين محور السفينة الحربية واتجاه جهاز تعيين المدى $30°$ (إرشاد : استخدم قانون الـ sines وأوجد $d\theta / dt$) .



شكل ٦ ـ ١٤

٩٦ ـ باستخدام جدول حساب المثلثات المعطى فى التذييل B ، أوجد بطريقة التقريب بالعناصر التفاضلية $\sin 15^\circ 20' \cos 15^\circ 20'$. هل هذه التقريبات عالية جدا أم منخفضة جدا ؟
(ارشاد : خذ فى الاعتبار الأشكال البيانية لـ $\sin x , \cos x$) .

٩٧ ـ أوجد مساحة المنطقة تحت قوس واحد للمنحنى $y = \sin x$.

٩٨ ـ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمحور الصادى والمنحنيين $y = \sin x$ و $y = \cos x$.

٩٩ ـ أوجد حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة تحت المنحنى $y = \tan x$ بين $x = \pi / 4$ و $x = 0$ حول المحور السينى . (إرشاد : استخدم متطابقة مثلثية) .

١٠٠ ـ ماهى المشتقة النونية للدالة $\sin x$ ؟

١٠١ ـ حقق أن التكامل $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$ بإجراء تفاضل الطريق الأيمن للمعادلة . من ناحية أخرى ، باستخدام المتطابقة $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. يكون

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \tfrac{1}{2} \sin 2x \, dx = -\tfrac{1}{4} \cos 2x$$

يوفق بين الاجابتين .

٦ ـ ٤
الحركة التوافقية البسيطة

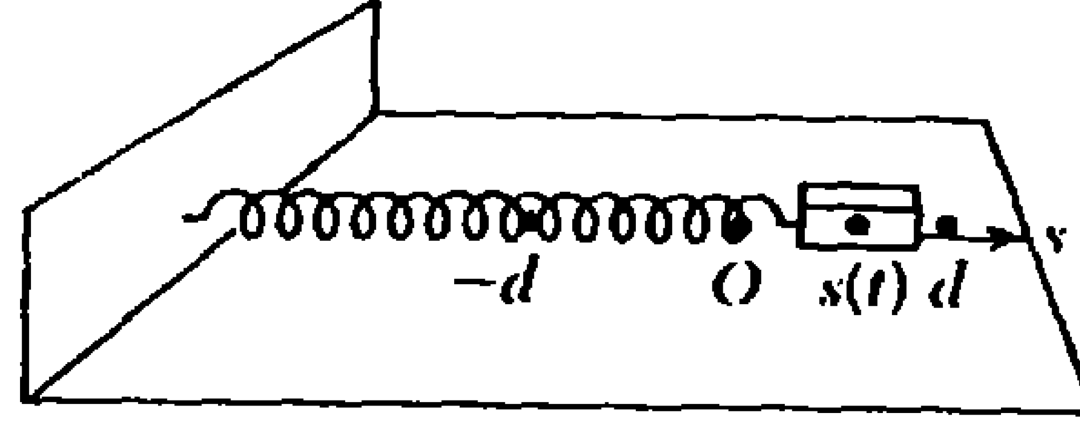
فى هذا البند سنعطى توضيحا لاستخدام الدوال المثلثية فى الفيزياء . ثقل كتلته m يقع على نضد أفقى أملس . الثقل مربوط بأحد طرفى زنبرك أفقى طرفه الآخر مثبت (شكل ٦ ـ ١٥) . الزنبرك يمكنه أن يطول أو يتضاعف إذا جذب الثقل إلى اليمين ثم ترك ، فما هى حركته التالية ؟

نوجد أولا المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة ، باستخدام قانون نيوتن الثانى للحركة الذى يربط عجلة الثقل بالقوة المؤثرة عليه بالزنبرك (انظر بند ٤ ـ ١١) . خذ خط للاحداثيات s ، كما هو موضح فى الشكل ، حيث نقطة الأصل 0 عند الطرف غير المثبت للزنبرك عندما يكون فى حالته الطبيعية أى غير المشدودة . لتكن s هى إحداثى الثقل بعد زمن t sec ، أى بعده الاتجاهى من 0 بما أن s تعتمد على t ، سنرمز أيضا للاحداثى $s(t)$. لتكن m هى كتلة الثقل ، a عجلته ، و F مقدار القوة المبذولة بالزنبرك . F تكون دائما موجبة أو صفرا . عندما يكون الثقل على يمين 0 ، القوة المبذولة بالزنبرك تعمل على تناقص s والمعادلة التى تحكم الحركة هى من (٢) ببند ٤ ـ ١١ ،

$$ma = -F, \qquad s \geqslant 0 \tag{١}$$

عندما يكون الثقل على يسار 0 ، القوة تعمل على تزايد s والمعادلة تكون

$$ma = F, \qquad s < 0 \tag{٢}$$



شكل ٦ ـ ١٥

من المعروف من التجارب المعملية أن المقدار F للقوة المبذولة بشد أو تضاغط الزنبرك يتناسب مع طول الجزء المشدود أو المضغوط * ومن ثم لزنبركنا ، $F = c|s|$ ، حيث c ثابت موجب يعتمد فقط على الصلابة والطول الأصلى للزنبرك . بتعويض $c|s|$ لـ F فى (١) و (٢) نرى أن

$$ma = -c|s| = -cs, \qquad s \geq 0,$$
$$ma = c|s| = c(-s), \qquad s < 0.$$

لكن هاتين المعادلتين هما نفس المعادلة ، وهى $ma = -cs$ لجميع s . إذا وضعنا $k = c/m$ واستبدلنا a بـ d^2s/dt^2 ، فإننا نحصل على

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \qquad k > 0 \tag{٣}$$

المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة الثقل .

طريقة حل هذه المعادلة التفاضلية لايمكن إعطاؤها هنا ، لكن من السهل تحقيق أن $\sin\sqrt{k}t$ و $\cos\sqrt{k}t$ هما حلان وأن حلا أعم هو

$$s(t) = c_1 \sin\sqrt{k}t + c_2 \cos\sqrt{k}t \tag{٤}$$

لأى ثابتين c_2 و c_1 . وهو أيضا صحيح ، إن لم يكن واضحا ، أن كل حل للمعادلة التفاضلية (٣) هو على الصورة (٤) لثابتين مناسبين c_2 و c_1 . لتعيين c_2 و c_1 ، نحتاج إلى معلومات إضافية عن الحركة فى صورة شروط حديه . فى البداية يجذب الثقل مسافة d إلى اليمين ثم يترك ، هذا يعنى أن $s'(0) = 0$ و $s(0) = d$ من (٤) ومن مشتقتها

$$s'(t) = c_1\sqrt{k}\cos\sqrt{k}t - c_2\sqrt{k}\sin\sqrt{k}t$$

---

* هذا المبدأ الفيزيائى يعرف بقانون Hooke نسبة الى الفيزيائى الانجليزى روبرت هوك (١٦٣٥ ـ ١٧٠٣)

نرى أن $s'(0) = c_1\sqrt{k}$ و $s(0) = c_2$ وإذن $c_1 = 0$ و $c_2 = d$ و (٤) تصبح

$$s(t) = d \cos \sqrt{k}t \quad (٥)$$

هذا يعطى موضع الثقل عند أى زمن $t \geqslant 0$. سرعة الثقل تعطى بالصيغة .

$$s'(t) = -d\sqrt{k} \sin \sqrt{k}t, \qquad d > 0$$

السرعة تكون صفرا عندما $\sqrt{k}t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ ، أى عندما $t = 0, \pi/\sqrt{k}, 2\pi/\sqrt{k}, 3\pi/\sqrt{k}, \ldots$ ، عندما يكون $0 < t < \pi/\sqrt{k}$، يكون : $0 < \sqrt{k}t < \pi$ ويكون $\sin \sqrt{k}t > 0$ ، فالسرعة تكون سالبة . وإذن الثقل يتحرك أولا إلى اليسار ، ويمر بنقطة الأصل عند $t = \pi/2\sqrt{k}$ ، ويقف لحظيا عند $t = \pi/\sqrt{k}$ حيث $s = -d$: عندما يكون $\pi/\sqrt{k} < t < 2\pi/\sqrt{k}$ ، يكون $\sin \sqrt{k}t < 0$ فالسرعة تكون موجبة ، والثقل يتحرك الآن إلى اليمين ويمر بنقطة الأصل عندما $t = 3\pi/2\sqrt{k}$ ، ويقف لحظيا عندما : $t = 2\pi/\sqrt{k}$ حيث $s = d$. الآن الحركة تكرر نفسها ، وحيث أنه لايوجد احتكاك ، فتستمر بدون انتهاء على هذا النمط . جيب التمام فى (٥) يعكس الطبيعة التذبذبية للحركة .

أى جسم ، مثل الثقل أعلاه ، موضعه عند الزمن t يعطى بالصيغة .

$$d \sin (\omega t + b), \qquad d \cos (\omega t + b) \quad (٦)$$

أو

$$c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t \quad (٧)$$

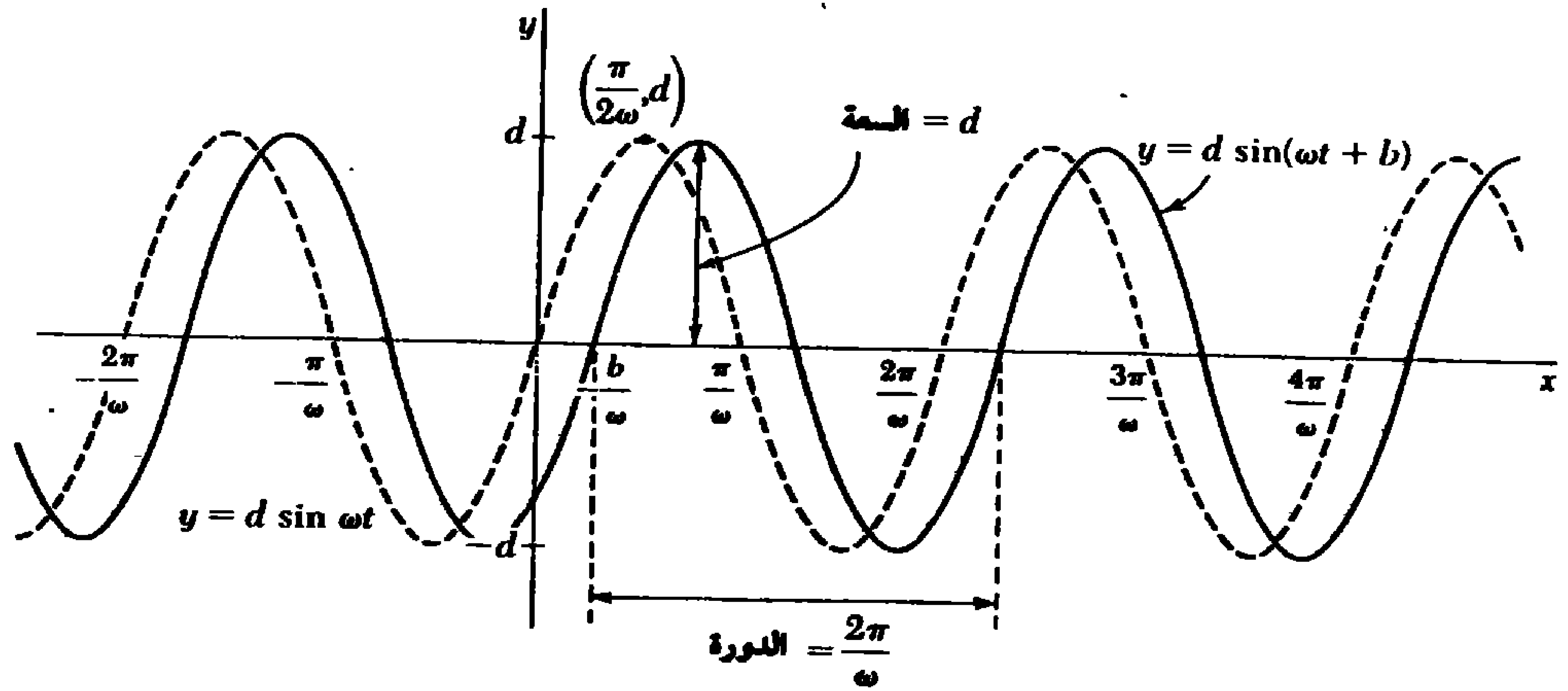
حيث $d , b , c_1 , c_2 , \omega$ ثوابت ، يقال أنه فى حركة توافقية بسيطة . مثل هذه الحركة دائما تذبذبية . الصيغ الثلاث فى (٦) و (٧) متكافئة بمعنى أن كلا منها يمكن كتابتها فى أى من الصورتين الآخريين (المسألة ٨) . الأشكال البيانية مشابهة للشكل البيانى لدالة الجيب .

العدد d فى (٦) يسمى سعة الدالة . وهو المسافة من المحور السينى إلى قمة الموجة فى الشكل ٦ - ١٦ وهى أيضا المسافة من نقطة الأصل إلى أقصى موضع للثقل الذى درسناه أعلاه . الزمن الدورى لأى دالة من الدوال فى (٦) و (٧) نرى بسهولة أنه $2\pi / \omega$ الشكل البيانى للدالة $y = d \sin (\omega t + b)$ هو نفس الشكل البيانى للدالة

$$y = d \sin \omega t$$

لكن مزاحا إلى اليمين مسافة $- b / \omega$. العدد b يسمى زاوية الطور للدالة .

الزمن الدورى لأى جسم يتحرك حركة توافقية بسيطة هو الزمن الذى يستغرقه فى دورة كاملة واحدة أى ليرجع إلى نقطته الابتدائية . عدد الدورات فى كل وحدة زمن يسمى التردد . ومن ثم التردد هو مقلوب الزمن الدورى ، أى $\omega / 2\pi$ ، للزنبرك المتذبذب فى (٥) ، $\omega = \sqrt{k}$ ، والتردد هو $\sqrt{k}/2\pi$ دورة فى الثانية .



شكل ٦-١٦

مثال ١ . أوجد معادلة الحركة للثقل الذى سبق دراسته إذا كانت السعة هى *4* والتردد هو *2.5* دورة فى الثانية .

معادلة الحركة معطاة بـ (٥) . فى حالتنا $d = 4$ ، والتردد هو $\sqrt{k}/2\pi = 2.5$. ومن ثم $\sqrt{k}$
$\sqrt{k} = 5\pi,$ ومعادلة الحركة هى $s\ (t) = 4\ \cos\ 5\ \pi\ t$

مسائل

١ - حقق أن (٤) هى حل للمعادلة التفاضلية (٣) لأى اختيار للثابتين c_1 و c_2 .

٢ - اثبت أن سرعة الثقل الذى سبقت دراسته تكون أكبر ما يمكن عند مروره بنقطة الأصل .

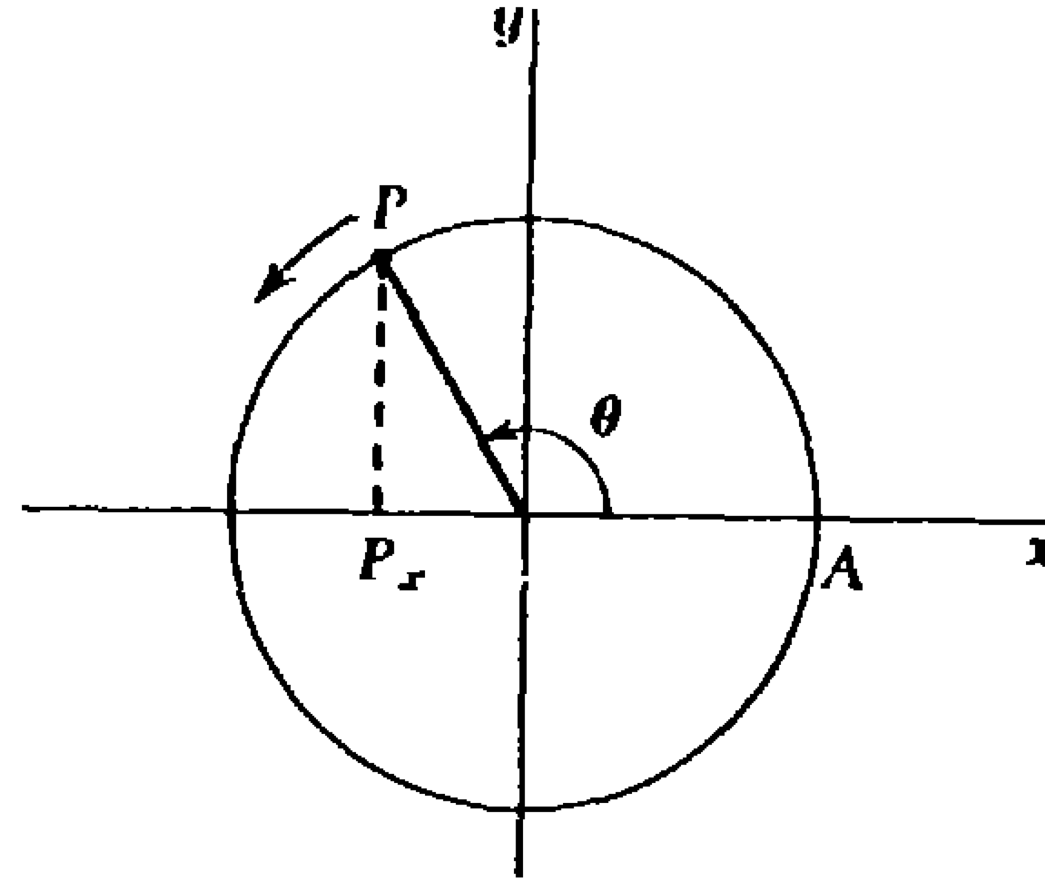
٣ - أوجد موضع الثقل الذى سبق دراسته بعد *3* sec إذا كانت $k = 2$ وكان الثقل قد بدأ الحركة من سكون من نقطة على بعد 5 cm على يسار نقطة الأصل .

٤ - أوجد موضع الثقل الذى سبق دراسته عند الزمن t اذا كانت $k = \frac{1}{4}$ ، وبفرض أن $s\ (\pi\ /\ 3) = 4$ و $s\ (17\ \pi\ /\ 3) = -2$.

٥ - كلما زادت صلابة الزنبرك كلما زادت القوة المؤثرة على الثقل الذى سبق دراسته . اثبت أن الذبذبة تكون أسرع للزنبرك الأشد صلابة .

٦ - تبدأ نقطة P عند A فى الشكل ٦ - ١٧ وتتحرك فى اتجاه مضاد لاتجاه عقرب الساعة حول الدائرة بمعدل ثابت هو دورتان فى الدقيقة . وبالتالى الزاوية θ تعتمد على الزمن t ، ومعدل تغيرها $d\theta / dt$ ، ويسمى السرعة الزاوية للنقطة P ، هو 4π زاوية نصف قطرية فى الدقيقة . أوجد θ بدلالة t . أوجد المسقط P_x للنقطة P على المحور السينى بدلالة t واثبت أن P_x تتحرك حركة توافقية بسيطة .

٧ - ثقل قدرة *20* grams يتذبذب باستخدام زنبرك بالكيفية التى سبق دراستها ، بتردد قدره دورتان فى الثانية . أوجد معامل الصلابة لزنبرك يعمل ذلك .



شكل ٦ ـ ١٧

٨ ـ (أ) عبر عن $d \cos(.225t + b)$ فى الصورة $d \sin(\omega t + b')$ وفى الصورة $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$.

(ب) عبر عن $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ فى الصورة $d \sin(\omega t + b)$.

(إرشاد : $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t\right)$.

اثبت أنه يوجد عدد b بحيث أن

$$\cos b = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \quad \text{و} \quad \sin b = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}.\Big]$$

٩ ـ البندول البسيط هو بندول فيه كتلة السلك تهمل بالمقارنة مع كتلة الثقل وأبعاد الثقل صغيرة . المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة البندول البسيط هى

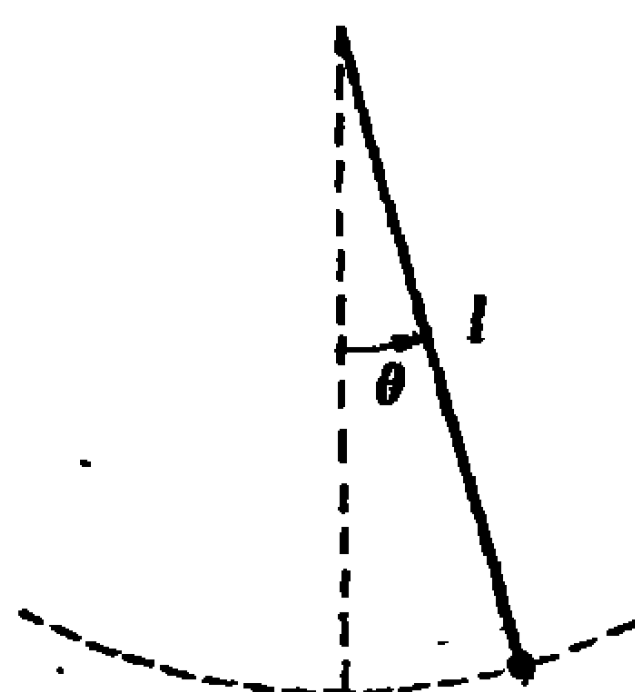
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

حيث l هى طول البندول ، g هى عجلة الجاذبية الأرضية ، θ هى الازاحة الزاوية للسلك عند الزمن t من الوضع الرأسى (شكل ٦ ـ ١٨) . هذه المعادلة لايمكن حلها بدلالة دوال معروفة لنا . لكن إذا كانت θ صغيرة فإن $\sin \theta$ تكاد تساوى θ ، لأن $\lim_{\theta \to 0} [(\sin \theta)/\theta] = 1$ ، والمعادلة التفاضلية يمكن استبدالها بالمعادلة

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

مع خطأ صغير . هذه المعادلة على الصورة (٣) ولها حل على الصورة (٤) . ومن ثم عندما يتذبذب البندول فى أقواس صغيرة ، حركته تكونصبالتقريب توافقية بسيطة . إذا ترك البندول فى البداية ، من سكون ، صانعا زاوية $\theta = \alpha$ ، اثبت أن الزمن الدورى ، ذهابا وإيابا ، هو $2\pi\sqrt{l/g}$. لاحظ أن هذا الزمن لايعتمد على الزاوية α . ما طول بندول ساعة تدق كل ثانية ، أى يأخذ البندول ثانية فى الحركة من أعلى نقطة على جانب واحد إلى أعلى نقطة على الجانب

الآخر؟ ما هو طول البندول إذا كان يعمل دورة كاملة واحدة أى ذهابا وإيابا كل ثانية ؟ (خذ $g = 32\text{ft} / \sec / \sec$) .



شكل ٦ ـ ١٨
البندول البسيط

١٠ ـ ثقب مار بمركز الأرض سقط فيه حجر . مقدار قوة الجذب على الحجر يتناسب مع بعد الحجر عن المركز . بفرض عدم وجود مقاومة للهواء ، ما الزمن الذى يأخذه الحجر حتى يصل الجانب الآخر؟ (إرشاد : استخدم قانون نيوتن الثانى للحركة لايجاد المعادلة التفاضلية التى تحكم حركة الحجر . بما أن مقدار القوة معروف أنه mg عندما يكون الحجر على سطح الأرض ، حيث m هى كتلة الحجر وحيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية فإن ثابت التناسب يمكن إيجاده . حل المعادلة التفاضلية .

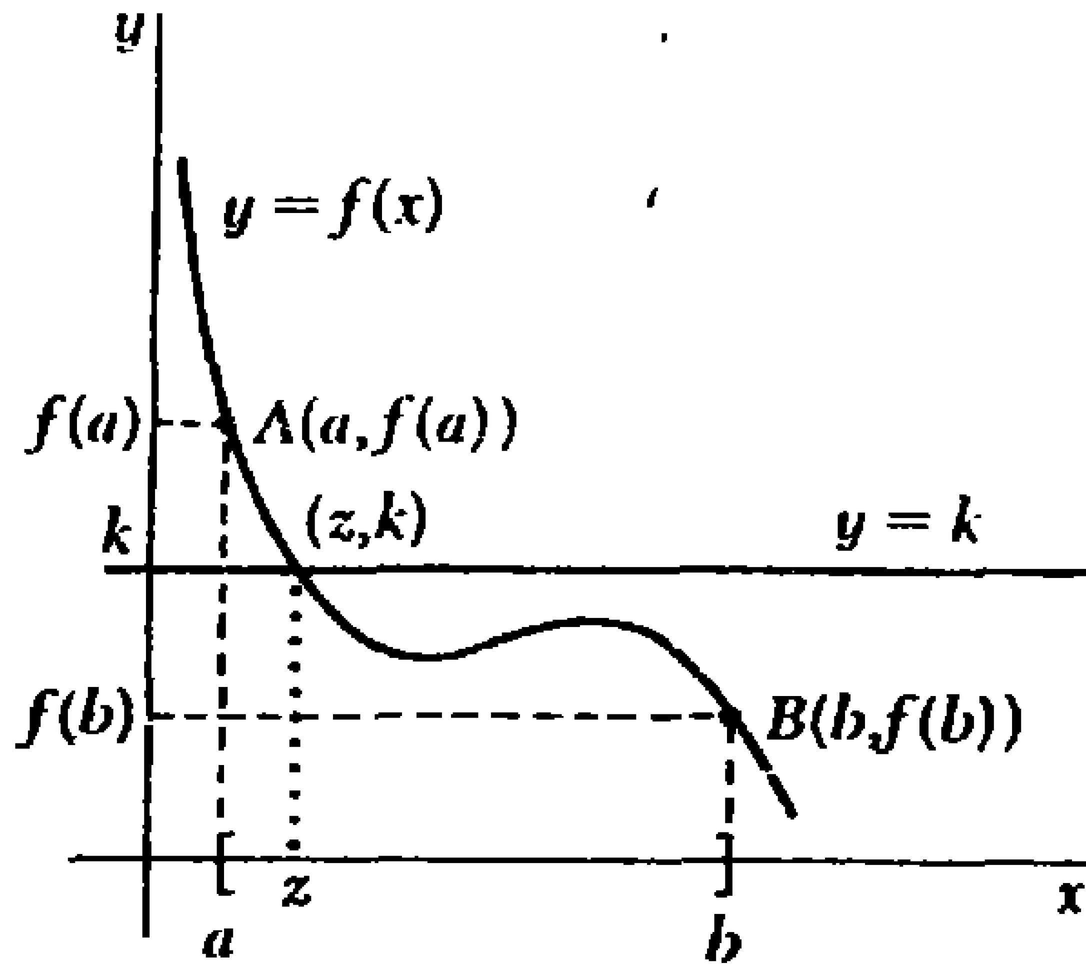
٦ ـ ٥
نظرية القيمة الوسط

الشكل البيانى لدالة f متصلة فى الفترة $[a,b]$ موضح فى الشكل ٦ ـ ١٩ . عندما ترسم نقطة المنحنى من $A\ (a,f\ (a))$ إلى $B\ (b,f\ (b))$ تقطع على الأقل مرة واحدة كل خط أفقى $y = k$ واقع بين B و A ، ونقطة التقاطع هى $(z\ ,\ k)$ حيث z نقطة ما فى (a,b) . هذا هو التفسير الهندسى للنظرية القادمة ، التى لها أهميتها فى التحليل .

٦ ـ ٥ نظرية القيمة الوسط . لتكن f متصلة فى الفترة المقفلة [a وb] . لكل عدد k يقع بين $f\ (a)$ و $f\ (b)$ توجد z فى (a وb) بحيث أن $f\ (z) = k$.

عادة نقول أن الدالة المتصلة فى فترة مقفلة $[a,b]$ تأخذ كل قيمة بين $f\ (a)$ و $f\ (b)$. شرط الاتصال هام . النظرية قد لاتكون صحيحة إذا كانت f غير متصلة عند نقطة ما فى [a وb] (المسألة ١) .

البرهان . نفرض أن $f\ (a) > k > f\ (b)$ ، بما أن $f\ (x)$ متصلة فى $[a,\ b]$ ، كذلك تكون الدالة $f\ (x) - k$ ، ومن ثم ، $f\ (x) - k$ لها معكوس تفاضلى $G\ (x)$ هناك . أى أنه توجد G بحيث أن $G\ '\ (x) = f\ (x) - k$ الدالة . G تكون بالضرورة متصلة فى $[a,\ b]$ ، (لماذا ؟) وإذن يكون لها قيمة



شكل ٦ - ١٩
المنحنى المتصل يقطع كل خط أفقى بين B و A على الأقل مرة واحدة .

عظمى فى الفترة . بالتمهيدية ٤ - ٢ ، هذه القيمة العظمى لايمكن حدوثها عند النقطة الطرفية اليسرى a لأن $G'_+(a) = f(a) - k > 0$ ولايمكن حدوثها عند النقطة الطرفية اليمنى b لأن $G'_-(b) = f(b) - k<0$ اذن يجب حدوثها عند عدد حرج z داخل الفترة [a, b] . بمعنى آخر ، توجد z فى (a, b) بحيث أن .

$$G'(z) = f(z) - k = 0$$

ولهذا الـ z تكون $f(z) = k$. برهان مماثل لكن باستخدام القيمة الصغرى للدالة G تعالج الحالة $f(a) < k < f(b)$.

مسائل

١ - وضح بشكل تخطيطى أن نظرية القيمة الوسط قد لاتكون صحيحة إذا كانت f غير متصلة فى [a, b] .

٢ - أثبت أن $\sqrt{2}$ موجود . أى أثبت أنه يوجد عدد موجب c بحيث أن $c^2 = 2$. (إرشاد : ضع $f(x) = x^2$. أوجد عددين b و a بحيث أن $f(a) < 2, f(b) > 2$) .

٣ - اثبت أن المعادلة $x^3 - 4x^2 + 7x - 5 = 0$ لها حل حقيقى . هل لها أكثر من حل واحد ؟ عين موضع كل حل بين عددين صحيحين متعاقبين [إرشاد : خطط الشكل البيانى للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 5$].

٤ - اثبت أن كثيرة الحدود لدرجة فردية بمعاملات حقيقية لها على الأقل جذر حقيقى واحد . [إرشاد : لتكن $p(x)$ كثيرة الحدود . ماذا يحدث للشكل البيانى لـ p لقيم x الكبيرة الموجبة والسالبة ؟].

٥ - سيارة قطعت 225 miles من Boston إلى NewYork فى 5hr. ، وعلى ذلك سرعتها المتوسطة كانت 45 mph . أثبت أنه عند نقطة ما أثناء الرحلة كانت السرعة 45 mph بالضبط .

(إرشاد : يمكن فرض أن السرعة $v(t)$ متصلة . اثبت أن المسافة $s(t)$ للسيارة من Boston عند الزمن t تعطى بالصيغة .

$$[\ s(t) = \int_0^t v(t)\ dt.\ ]$$

٦ - إذا كانت الدالة f متصلة فى $[0, 1]$ وكان $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ لكل x فى $[0, 1]$ ، فاثبت أنه يوجد عدد z فى $[0, 1]$ بحيث أن $f(z) = z$ [إرشاد : اعتبر الدالة $u(x) = f(x) - x$] .

٧ - صورة أضعف قليلا من نظرية القيمة المتوسطة ٥ - ١٢ ، للتكاملات تقول إنه إذا كانت f متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، فإنه توجد z فى $[a, b]$ بحيث أن $\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(z).$ أضف التفصيلات للبرهان الاتى لهذه النظرية . لتكن $f(u)$ و $f(v)$ القيمتين الصغرى والعظمى للدالة f فى الفترة $[a$ و $b]$. (لماذا توجدان ؟) فيكون

$$(b-a)f(u) \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant (b-a)f(v)$$

العدد $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)$ يقع بين $f(u)$ و $f(v)$. الآن استخدم نظرية القيمة الوسط .

٨ - اثبت الحالة $f(a) < k < f(b)$ لنظرية القيمة الوسط .

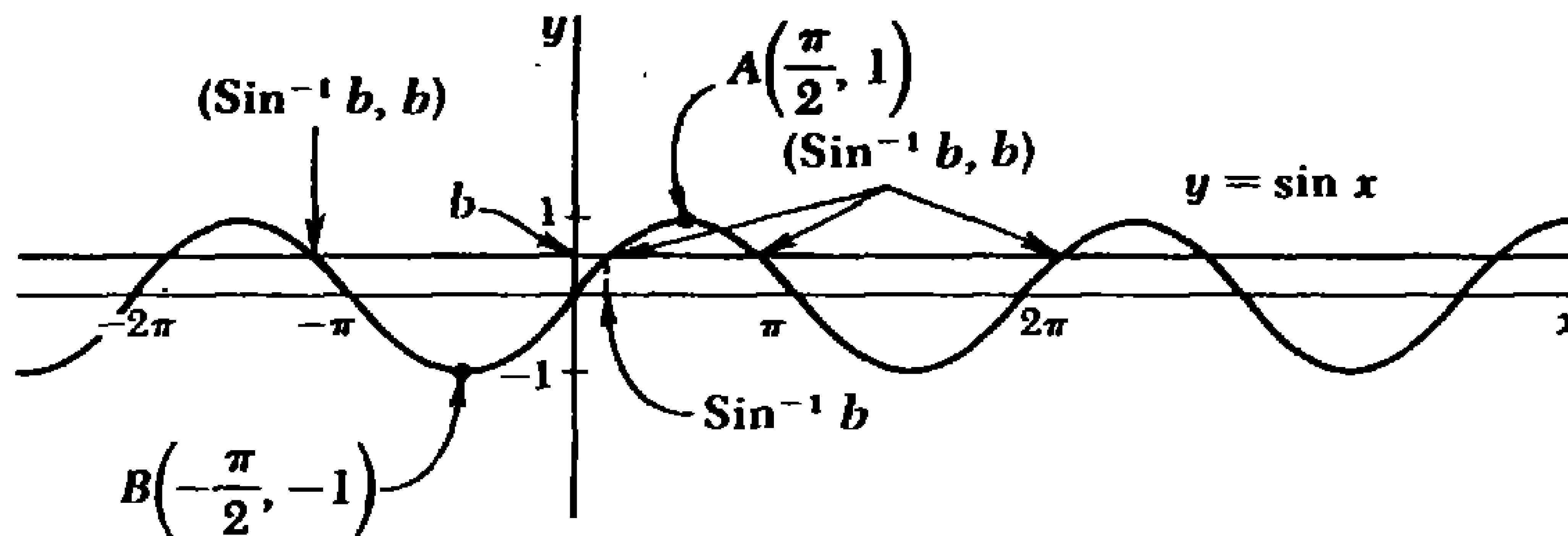
٦ - ٦

الدوال المثلثية العكسية

إذا كانت x زاوية (أو عدد) جيبها b ، فإننا نشير إلى هذه الزاوية (أو العدد) بالرمز $\mathrm{Sin}^{-1}\, b$ أو $\mathrm{Arc\ sin}\ b$ بالحرف الأول كبيرا ، أى أن ،

$$x = \mathrm{Sin}^{-1}\, b = \mathrm{Arcsin}\ b \qquad \text{if } \sin x = b$$

فمثلا ، $30° = \mathrm{Sin}^{-1}\tfrac{1}{2}$ لأن $\sin 30° = \tfrac{1}{2}$ وأيضا $\pi/2 = \mathrm{Sin}^{-1}\, 1$ لأن $\sin(\pi/2) = 1$ ، وأيضا ، $\mathrm{Sin}^{-1}(-0.621) \approx -38°23'$ لأن $\sin\ (-38°23') \approx -0.621$. بما أن $\sin$ كل عدد يقع بين 1 و -1، أو عند أيهما ، فمن الواضح أن $\mathrm{Sin}^{-1}\, b$ توجد فقط عندما $-1 \leqslant b \leqslant 1$.



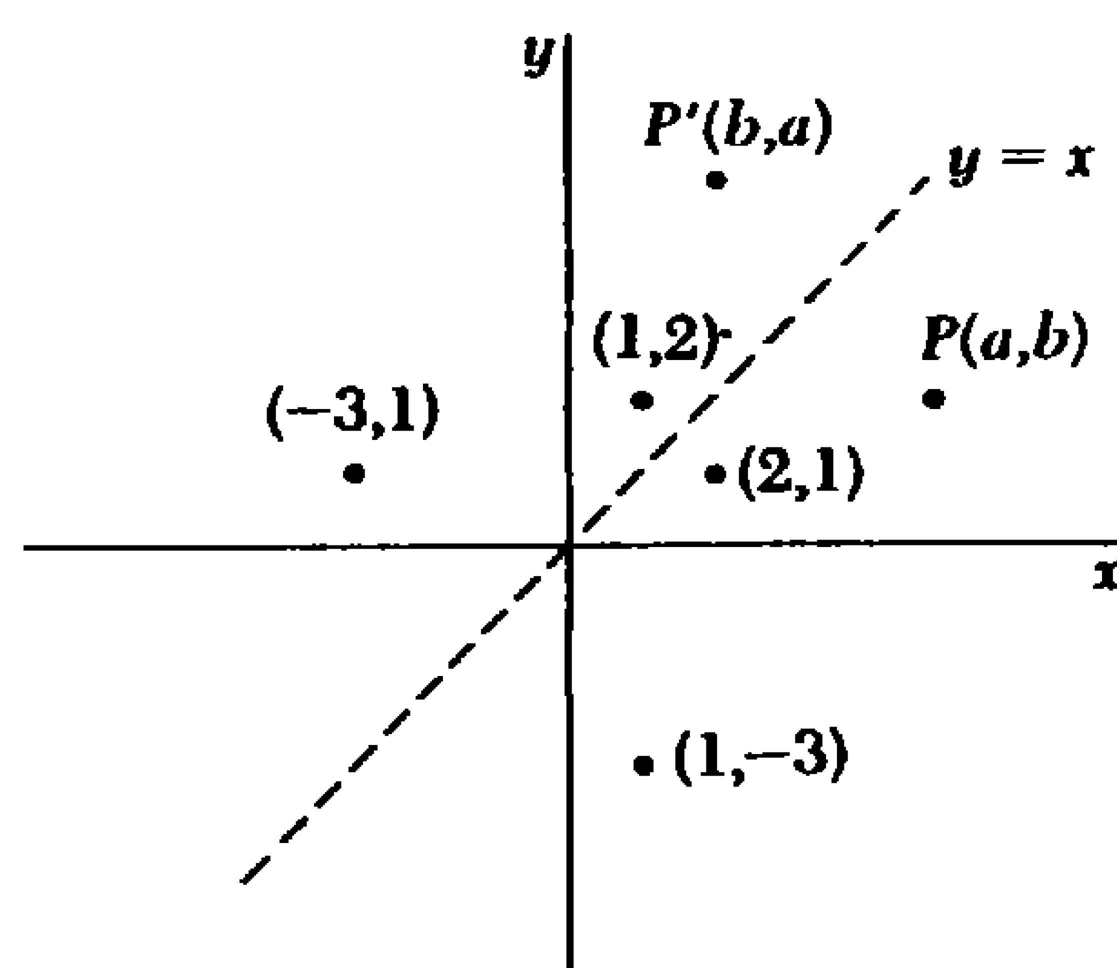
شكل ٦ - ٢٠
$\mathrm{Sin}^{-1} b$ الاحداثى السينى لأى نقطة على الشكل البيانى احداثيها الصادى هو b .

مع أن $\text{Sin}^{-1} b$ عادة تقرأ « arcsin» إلا أن الطالب قد يجد أنه من المفيد أن يقرأها « زاوية (أو عدد) الـ sine لها هو b . » الكتابة $\text{Sin}^{-1} b$ لاتتفق مع كتابة الأس فهي لاتعنى $1 / (\sin b)$. لنبين $1 / (\sin b)$ عن طريق الأس ، نكتب $(\sin b)^{-1}$. هذا هو الاستثناء الوحيد ، فمثلا $\sin^{-2} b$ مثلا ، تعنى $1 / (\sin^2 b)$.

الرموز لامعنى لها مالم تكن الأعداد التى تمثلها الرموز موجودة . قبل أن نتكلم عن $\text{Sin}^{-1} b$ يجب أن نوضح أنه يوجد فعلا عدد حيث الـ sine له هو b . من الشكل البيانى للدالة $y = \sin x$ فى الشكل ٦ ـ ٢٠ نرى أن $\text{Sin}^{-1} b$ هى الاحداثى x لأى نقطة حيث الخط المستقيم الأفقى $y = b$ يقطع الشكل البيانى . بما أن الدالة f متصلة والخط المستقيم $y = b$ يقع بين النقطتين $A(\pi/2, 1)$ و $B(-\pi/2, -1)$ على المنحنى ، فنظرية القيمة الوسط ٦ ـ ٥ تؤكد أن الخط المستقيم يقطع المنحنى فى مكان ما بين B و A ومن ثم فإنه يوجد عدد له الـ sine يساوى b .

رغم أن $\sin^{-1} \frac{1}{2} = 30°$ ، فإن $30°$ ليست الزاوية الوحيدة التى لها الـ sine $\frac{1}{2}$ زوايا أخرى هى $-210°$, $390°$, $150°$ ولايزال توجد زوايا أخرى . نفس الشىء يكون صحيحا لـ $\text{Sin}^{-1} b$ لأى b . الخط المستقيم $y = b$ حيث $-1 \leq b \leq 1$ ، يقطع الشكل البيانى لـ $y = \sin x$ عددا لانهائيا من المرات . الاحداثى x لكل نقطة تقاطع هو عدد له الـ sine b .

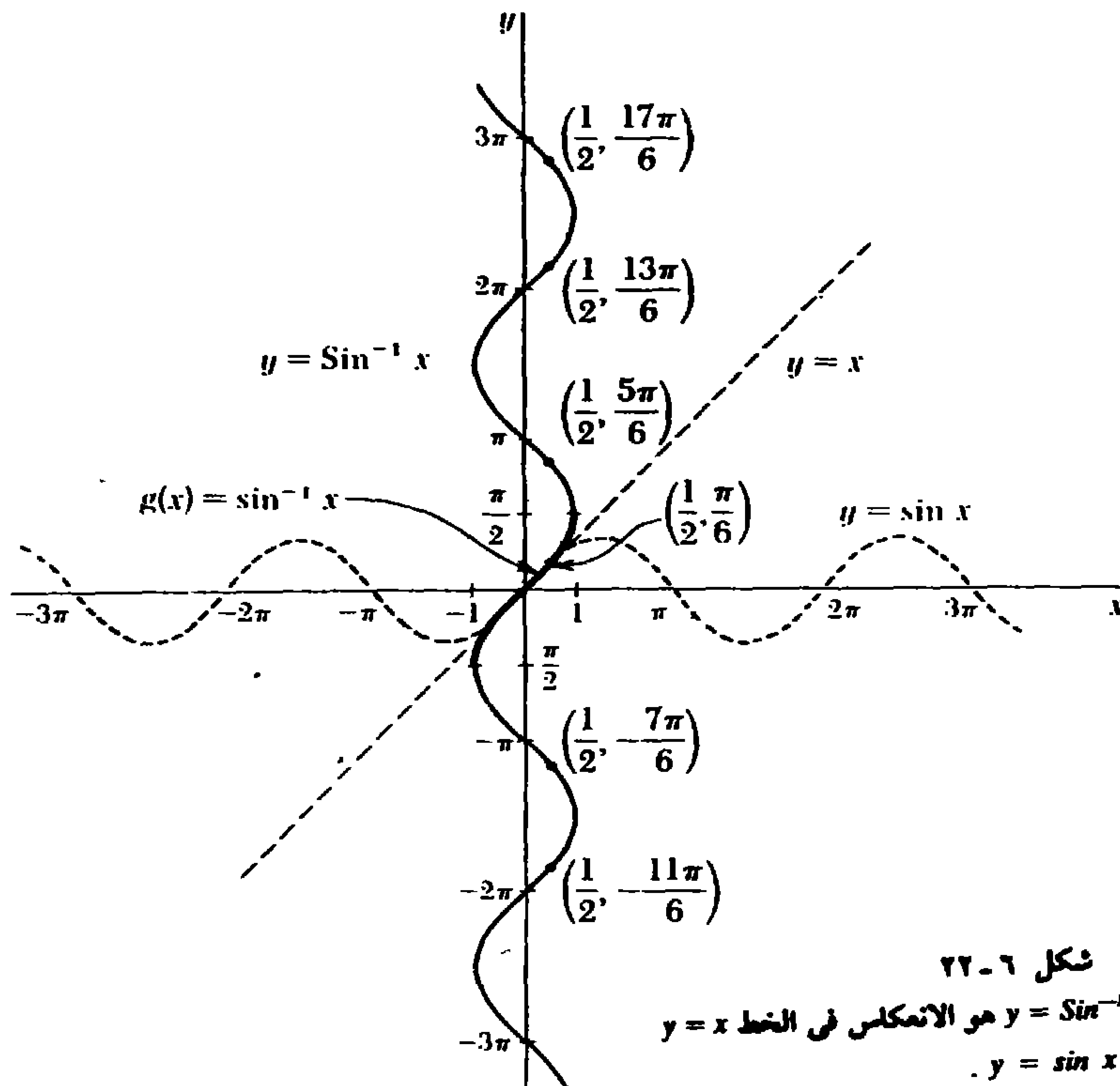
بما أن $y = \text{Sin}^{-1} x$ إذا وإذا فقط كان $\sin y = x$ ، فإن المعادلتين لهما نفس الشكل البيانى . إذا استبدلنا x و y فى المعادلة الأخيرة ، فإننا نحصل على $y = \sin x$. استبدال إحداثيى نقطة $P(a,b)$ يعطى نقطة $p'(b$ و $a)$ هى انعكاس النقطة p فى الخط المستقيم $y = x$ (شكل ٦ ـ ٢١) . ومن ثم استبدال y و x فى معادلة يعكس شكلها البيانى فى نفس الخط . وإذن الشكل البيانى لـ $y = \text{Sin}^{-1} x$ هو الانعكاس فى الخط المستقيم $y = x$ للشكل البيانى لـ $y = \text{Sin}\, x$. المنحنيان موضحان فى الشكل ٦ ـ ٢٢ . .



شكل ٦ ـ ٢١
استبدال احداثيى نقطة يجعل النقطة تنعكس فى الخط $y = x$.

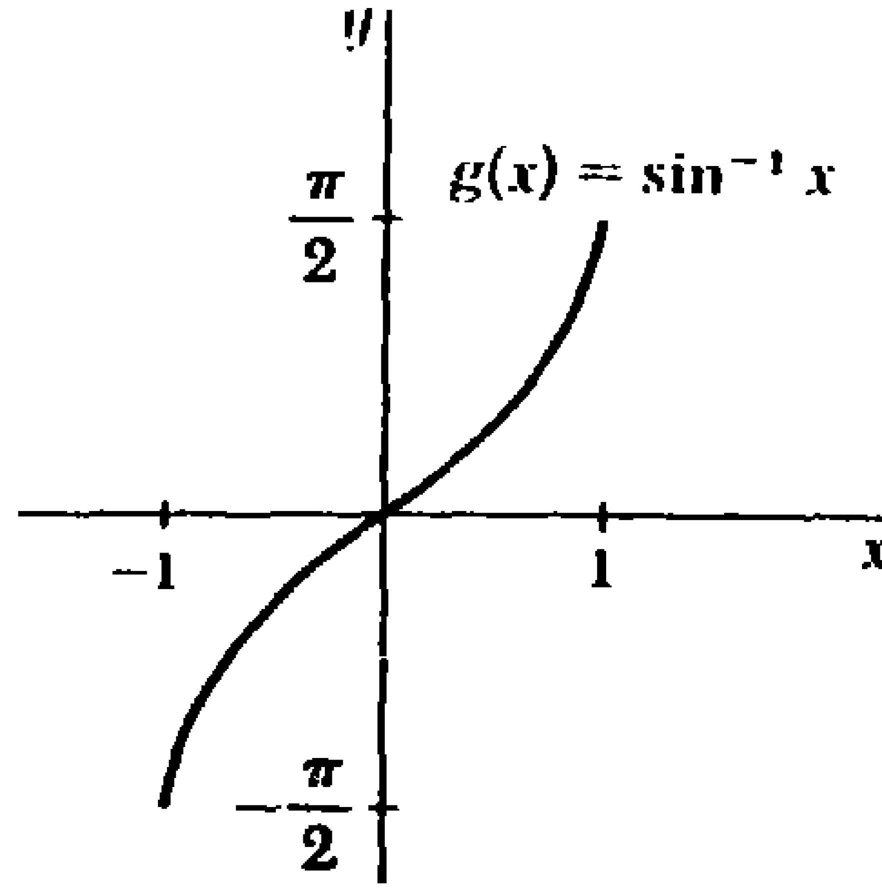
المعادلة $y = \text{Sin}^{-1}x$ لاتعرف دالة ، إذ أن لأى قيمة x فى الفترة $[\,-1 , 1\,]$ ، يوجد الكثير من y يحقق المعادلة ، مثلا ، عند $x = \frac{1}{2}$ ، لدينا .... $y = \pi / 6 , 5\pi / 6 , 13\pi / 6 , -7\pi / 6 , ...$ لكن اذا قيدنا أنفسنا بجزء الشكل البيانى بين $y = \pi / 2$ و $y = -\pi / 2$ الموضح أثقل من الباقى فى الشكل ٦ - ٢٢ ، فإنه توجد y واحدة لكل x ، وهذا الجزء من المنحنى يعرف دالة ، تسمى arc sine أو دالة sine عكسية*. الشكل البيانى لدالة الـ sine العكسية هذه ، $g(x) = \sin^{-1}x$ مخططة فى الشكل ٦ - ٢٣ . النطاق هو الفترة $[\,-1 , 1\,]$ ، والمدى هو $[\,-\pi / 2 , \pi / 2\,]$.

تبعا لذلك ، قيمة الدالة $g(x) = \sin^{-1}x$ لقيمة معطاة x تعرف بأنها العدد الوحيد بين $\pi / 2$ و $-\pi / 2$ الذى جيبه هو x . سنحتفظ بالرمزين $\arcsin x$ و $\sin^{-1}x$ (بالحرف الأول صغيرا) لهذه القيمة الخاصة وسنشير اليها كالعدد الذى جيبه هو x . هذه القيمة تسمى أيضا القيمة الرئيسية لـ $\sin^{-1}x$ وبذلك يكون $\sin^{-1}(-1) = -\pi / 2$ (أو 90° اذا كانت الزوايا مقيسة بالدرجات) ولايساوى $3\pi / 2$. بالمثل ، $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi / 3$ (أو 60°) ولايساوى $2\pi / 3$.



شكل ٦ - ٢٢
الشكل البيانى للدالة $y = \text{Sin}^{-1}x$ هو الانعكاس فى الخط $y = x$ للشكل البيانى للدالة $y = \sin x$.

* معنى الكلمة « عكسية » المستعملة هنا ينبغى ألا يلتبس مع معناها الآخر المختلف تماماً « المقلوب » .



شكل ٦ ـ ٢٣

دراسة الـ arctangents تساير دراسة الـ arcsines ، نستخدم إما الفترة $(-\pi / 2 , \pi / 2)$ أو الفترة $[0 , \pi]$ للقيم الأساسية للـ arctangent ، لكن الفترة الأولى أكثر ملاءمة لأن الظل يكون متصلا هناك . تبعا لذلك ، $\tan^{-1}x$ (أو $\arctan x$) تعرف بأنها العدد الوحيد فى الفترة $(-\pi / 2 , \pi / 2)$ الذى ظله x ، فمثلا $\tan^{-1} (1/\sqrt{3}) = \pi/6$ (أو 30° إذا كانت الزوايا مقيسة بالدرجات)وايضا $\tan^{-1} (-1) = -\pi / 4$ (أو -45°) .

تعريف الـ arcsecant أكثر تعقيدا . حيث أن زوايا الربع الأول والرابع لها نفس الـ secant ، وهو موجب فقط ، هناك ، إذن يوجد عددان فى الفترة $(-\pi /2 , \pi / 2)$ لهما الـ secant 2 ولايوجد عدد له الـ secant 2 ـ يمكن التغلب على كل من الصعوبتين باستخدام ، بدلا من الفترة $(-\pi /2 , \pi /2)$ ، اتحاد الفترتين $[\pi ,3\pi /2)$ و $[0,\pi /2)$ للقيم الأساسية الـ arcsecant . هذا ما سنعمله ، نعرف $\sec^{-1}x$ بأنه العدد الوحيد فى $[0 , \pi / 2) \cup [\pi , 3\pi / 2)$ الذى له الـ secant x . الدالة secant منفصلة ، لكن هذا لا يمكن تجنبه لأى نطاق للتعريف . الشكل البيانى لـ $x = \sec y$ موضح فى الشكل ٦ ـ ٢٤ . الجزء الثقيل هو الشكل البيانى لـ $y = \sec^{-1}x$. الفترة $[0, \pi]$ مع حذف $\pi / 2$ قد تبدو اختيارا طبيعياً للقيم الرئيسية لـ $\sec^{-1}x$ ، لكن هذا سيعرضنا لصعوبات مع المشتقة .

نلخص ماسبق فى التعريف التالى .

٦ ـ ٦ تعريف

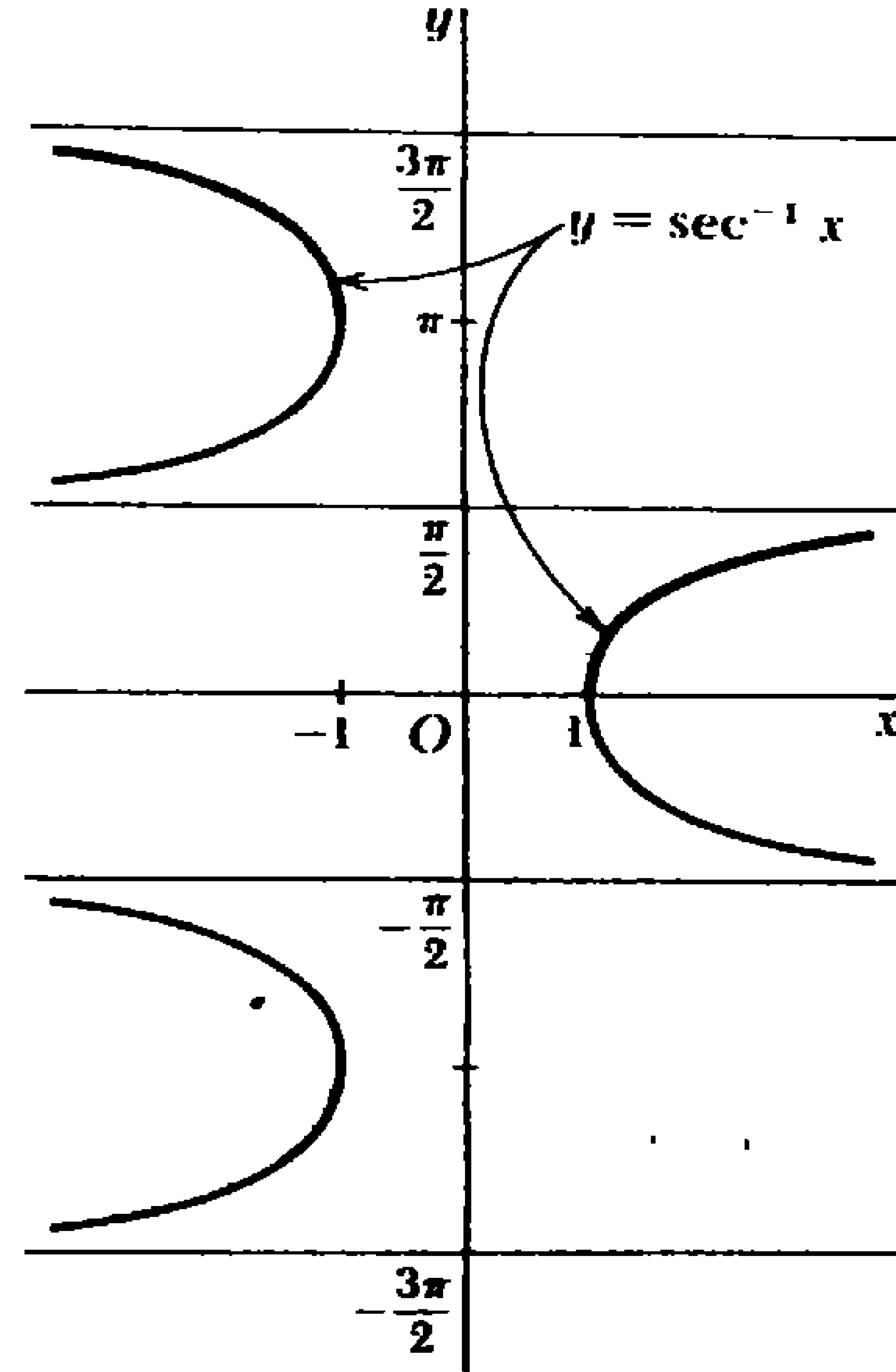
(أولا) $y = \tan^{-1} x$ if $\tan y = x$ and $-\pi/2 < y < \pi/2$

(ثانيا) $y = \sin^{-1} x$ if $\sin y = x$ and $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

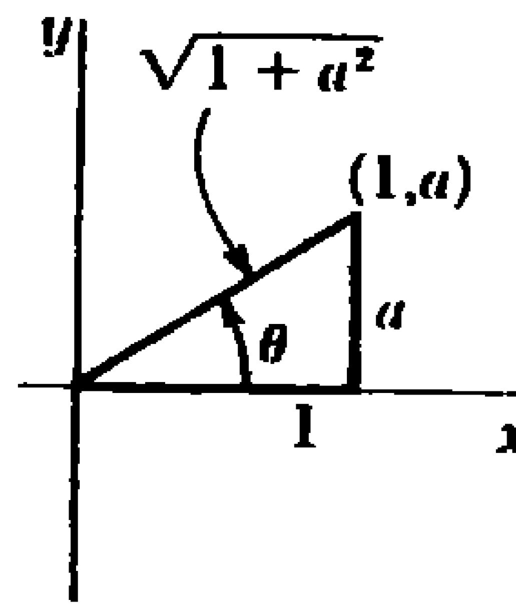
(ثالثا) $y = \sec^{-1} x$ if $\sec y = x$ and $0 \leq y < \pi/2$ or $\pi \leq y < 3\pi/2$

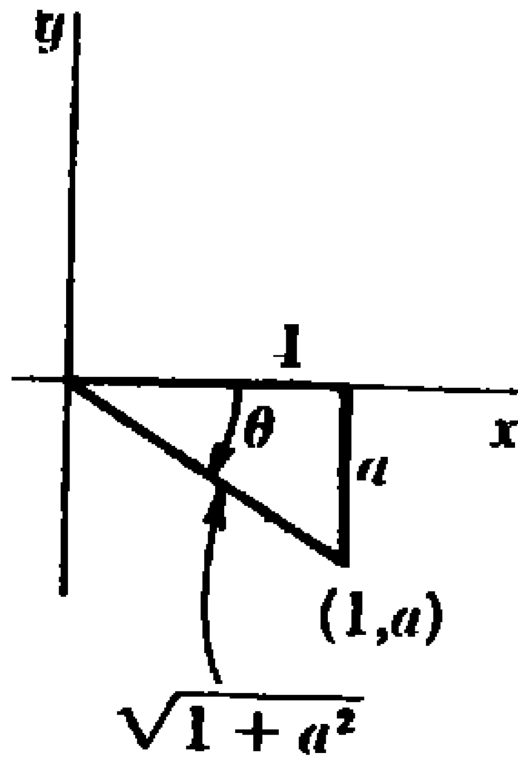
الدوال المثلثية العكسية الباقية $\cos^{-1}x , \cot^{-1}x , \csc^{-1}x$ يمكن تعريفها بالمثل لكننا لسنا فى حاجة إليها إذ يمكن التعبير عنها بدلالة الدوال الاكثر نفعا $\sin^{-1}x , \tan^{-1}x , \sec^{-1}x$. أى مسألة

عملية تستخدم فيها الدوال المثلثية العكسية يمكن صياغتها بدلالة تلك التى عرفناها . التعريفان لـ $\cot^{-1} x$ و $\cos^{-1} x$ معطيان فى المسألتين ٣٥ ، ٣٦ .



شكل ٦ ـ ٢٤
$x = \sec y$





شكل ٦ ـ ٢٥
إذا كان $\tan\theta = a$ ، فإن $\sin\theta = a/\sqrt{1+a^2}$.

مثال ١ . بسط $\sin(\tan^{-1} a)$.

لتكن $\theta = \tan^{-1} a$. نعلم أن $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، θ تكون موجبة أو سالبة تبعا لكون a موجبة أو سالبة . الاحتمالان موضحان فى الشكل ٦ ـ ٢٥ . بما أن $\tan\theta = a$ ، يوجد مثلث قائم طولا ساقيه 1 و a ، كما هو موضح . الوتر طوله $\sqrt{1+a^2}$ ، ولأى الاحتمالين يكون $\sin(\tan^{-1} a) = \sin\theta = a/\sqrt{1+a^2}$.

مسائل

١ ـ إذا كانت b عددا فى الفترة $[-1, 1]$ ، وضح كيف تكون زاوية بين $90K$ و $-90K$ بحيث أن sine لها يساوى b .

٢ ـ إذا كانت b أى عدد ، وضح كيف تكون زاوية بين $90K$ و $-90K$ الـ tangent لها يساوى b .

٣ ـ إذا كانت $b \geq 1$ أو كانت $b \leq -1$ ، وضح كيف تكون زاوية بين $90K$ و 0 أو بين $270K$ و $180K$ بحيث أن secant لها هو b .

أوجد كلا من قياس الزاوية بالدرجات والعدد المساوى لكل مما يأتى :

٤ - $\tan^{-1} 1$	٥ - $\arcsin(1/\sqrt{2})$	٦ - $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$	٧ - $\operatorname{arcsec} 1$
٨ - $\sec^{-1}\sqrt{2}$	٩ - $\sin^{-1}(-\sqrt{3}/2)$	١٠ - $\arctan(-\sqrt{3})$	١١ - $\sec^{-1}(-2/\sqrt{3})$
١٢ - $\sin^{-1} 2$	١٣ - $\sec^{-1} 5.011$	١٤ - $\arcsin(-0.407)$	١٥ - $\tan^{-1} 2.5$

بسط الآتى :

١٦ - $\sin(\sin^{-1} 0.415)$ ١٧ - $\sin^{-1}(\sin 47°)$ ١٨ - $\cos[\sin^{-1}(\sqrt{3}/2)]$

١٩ - $\sin(\tan^{-1} 1)$ ٢٠ - $\tan^{-1}[-\sin(\pi/6)]$ ٢١ - $\sec^{-1}(\csc 30°)$

٢٢ - $\sin^{-1}(\sin 130°)$ ٢٣ - $\cos(\sin^{-1} 0.6)$ ٢٤ - $\tan[\sec^{-1}(-1.25)]$

٢٥ - $\tan(\sin^{-1} a)$ ٢٦ - $\cot(\tan^{-1} z)$ ٢٧ - $\cos(\tan^{-1} 2x)$

٢٨ - $\sin[\sin^{-1}(-\frac{4}{5}) + \tan^{-1}(\frac{4}{3})]$ (إرشاد : استخدم متطابقة مثلثية).

٢٩ - $\sin(2\sin^{-1} 0.6)$ ٣٠ - $\sin(2\sec^{-1} b)$ ٣١ - $\cos[2\sec^{-1}(1/x)]$

٣٢ - خطط الشكل البيانى للدالة $f(x) = \sin^{-1} 2x$. ما هو نطاق ومدى الدالة f؟

٣٣ - خطط الشكل البيانى لدالة الظل العكسية $g(x) = \tan^{-1} x$. ما هو نطاق ومدى الدالة ؟

٣٤ - دالة الجيب العكسية $\sin^{-1}x$ عرفت من المعادلة $\sin y = x$ بقيد y بالفترة $[-\pi/2, \pi/2]$. ما هى الفترات الأخرى التى يمكن استخدامها لتعريف دالة الجيب العكسية ؟

٣٥ - (أ) عرف $\cos^{-1}x$ كالعدد فى الفترة $[0, \pi]$ الذى جيب تمامه هو x . خطط المنحنى $x = \cos y$. علم بخط ثقيل الجزء من المنحنى الذى هو الشكل البيانى لدالة جيب التمام العكسية $g(x) = \cos^{-1}x$. ما هو نطاق ومدى الدالة g؟ (ب) وضح هندسيا أن $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$ حيث $0 \leq x \leq 1$ (ج) وضح جبريا أن المعادلة فى (ب) صحيحة ، وبصفة أعم ، حيث $-1 \leq x \leq 1$ [إرشاد : اثبت أن

$$\sin(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = 1 \,]$$

٣٦ - (أ) عرف $\cot^{-1}x$ كالعدد فى الفترة $(0, \pi)$ الذى ظل تمامه هو x . خطط الشكلين البيانيين لـ $y = \cot x$ حيث $0 < x < \pi$ ، و $g(x) = \cot^{-1}x$ (ب) اثبت أنه لجميع قيم x الحقيقة $\tan^{-1}x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

٣٧ - (أ) اثبت أن $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ فالدالة $\sin^{-1} x$ دالة فردية (ب) عبر عن $\tan^{-1}(-x)$ بدلالة $\tan^{-1}(-x)$ ، هل $\tan^{-1} x$ دالة زوجية أم دالة فردية ؟

٣٨ - (أ) اثبت أن

$$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

(ارشاد : خذ الجيب لكلا الطرفين) (ب) اثبت أن

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

٣٩ - اثبت أن $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \pi/4$. باستخدام المعادلة وجدول للظلال ، أوجد تقريبا عشريا للعدد π .

٦ ـ ٧

مشتقات الدوال المثلثية العكسية

دالة الجيب العكسية هى الانعكاس فى الخط المستقيم $y = x$ لجزء الشكل البيانى لدالة الجيب . سلاسة الشكل البيانى لدالة الجيب تشير الى أن دالة الجيب العكسية ينبغى أن تكون قابلة للتفاضل ماعدا عند نقطها الطرفية حيث الشكل البيانى يكون رأسيا (شكل ٦ ـ ٥٣) . سنوجد مشتقتها .

لتكن $y = \sin^{-1} x$ ، حيث $-1 < x < 1$ وحيث $-\pi / 2 < y < \pi / 2$. نريد إيجاد dy / dx . بما أن $y = \sin^{-1} x$ ، إذن

$$\sin y = x$$

بإجراء تفاضل هذه المعادلة ضمنيا ، باعتبار y دالة فى x ، يكون

$$(\cos y) \frac{dy}{dx} = 1$$

ومن ثم

$$D \sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

من السهل التعبير عن $\cos y$ بدلالة x. بما أن $-\pi / 2 < y < \pi / 2$ فإن $\cos y > 0$ وإذن $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ ، ويكون

$$D \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad -1 < x < 1 \tag{١}$$

هذا الاستنتاج البارع لـ $D \sin^{-1} x$ ، لسوء الحظ ، به ثغرة . التفاضل الضمنى هو طريقة صحيحة لايجاد مشتقة الدالة إذا كانت الدالة معروف أن لها مشتقة ، وهذا ما لانعلمه بعد عن $\sin^{-1} x$. لكن عملنا لايكون بأكمله خسارة . يمكننا أن نقول أنه إذا كانت $\sin^{-1} x$ لها مشتقة فهذه المشتقة تعطى بـ (١) . هذا يوحى بأنه قد يمكننا إثبات (١) بالبدء بالدالة المتصلة $1/\sqrt{1 - x^2}$ وإثبات أن $\sin^{-1} x$ هى معكوس تفاضلى لها . بالنظرية ٥ ـ ٧ ، معكوس تفاضلى لـ $1/\sqrt{1 - x^2}$ هو الدالة لـ x المعرفة بـ

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du, \qquad -1 < x < 1 \tag{٢}$$

اى أن ، إذا كانت F معرفة بـ (٢) ، فإن

$$DF(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (٣)$$

سنثبت أن $F(x) = \sin^{-1} x$ ، أجر تغيير للمتغير فى (٢) بوضع $z = \sin^{-1} u$ ، حيث $-\pi/2 < z < \pi/2$ ، فيكون $du = \cos z\, dz$ و $u = \sin z$ ، (٢) تصبح

$$F(x)=\int_0^{\sin^{-1} x}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}}\cos z\, dz$$

حيث الحدان الجديدان للتكامل هما قيمتا z المناظرتان للحدين القديمين $u = x$ و $u = 0$. نستمر فنحصل على

$$F(x)=\int_0^{\sin^{-1} x}\frac{1}{\cos z}\cos z\, dz=\int_0^{\sin^{-1} x} dz=z\Big|_0^{\sin^{-1} x}=\sin^{-1} x$$

بتطابق $\sin^{-1} x$ مع $F(x)$ ، يكون من (٣)

$$D\sin^{-1} x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

الصيغتان الثانية والثالثة أدناه يمكن اشتقاقهما بالمثل

٦ - ٧

(أولا) $$D\sin^{-1} x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -\frac{\pi}{2}<\sin^{-1} x<\frac{\pi}{2}$$

(ثانيا) $$D\tan^{-1} x=\frac{1}{1+x^2}, \qquad -\frac{\pi}{2}<\tan^{-1} x<\frac{\pi}{2}$$

(ثالثا) $$D\sec^{-1} x=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \qquad 0<\sec^{-1} x<\frac{\pi}{2} \text{ or } \pi<\sec^{-1} x<\frac{3\pi}{2}$$

بالاستعانة بقاعدة السلسلة ، القواعد فى ٦ - ٧ يمكن تعميمها الى دوال على الصورة $\sec^{-1} g(x)$ و $\tan^{-1} g(x)$, $\sin^{-1} g(x)$ ، بشرط أن $g'(x)$ تكون موجودة . لنعمل ذلك ، نضع $f(z) = \sin^{-1} z$ و $z = g(x)$. فيكون

$$\sin^{-1} g(x)=f(g(x))$$

من القاعدة ٦ - ٧ (أولا) ، تكون $f'(z) = 1/\sqrt{1-z^2}$ ، وإذن بقاعدة السلسلة يكون

$$D\sin^{-1} g(x)=D_x f(g(x))=f'(z)g'(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}g'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$$

هذا يثبت الصيغة الأولى من صيغ المشتقات أدناه . الصيغتان الباقيتان تبرهنان بالمثل .

٦ ـ ٨ . إذا كانت $g'(x)$ موجودة ، فإن

(أولا) $$D \sin^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$$

(ثانيا) $$D \tan^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$$

(ثالثا) $$D \sec^{-1} g(x) = \frac{g'(x)}{g(x)\sqrt{g^2(x)-1}}$$

مثال ١ . أوجد $D \sin^{-1} (x/a),\ a > 0$

بالقاعدة ٦ ـ ٨ (أولا) ، حيث $g(x) = x/a$ ، يكون

$$D \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{D(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \frac{1/a}{\sqrt{1-x^2/a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

مثال ٢ ـ أوجد $\frac{d}{dx}[x \tan^{-1}(x^2+1)]$

التعبير المطلوب إجراء تفاضله هو حاصل ضرب . نبدأ بقاعدة حاصل الضرب ثم نستخدم القاعدة ٦ ـ ٨ (ثانيا) :

$$\frac{d}{dx}[x \tan^{-1}(x^2+1)] = x\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2+1) + \tan^{-1}(x^2+1)$$

$$= x\frac{\frac{d}{dx}(x^2+1)}{1+(x^2+1)^2} + \tan^{-1}(x^2+1)$$

$$= \frac{2x^2}{x^4+2x^2+2} + \tan^{-1}(x^2+1)$$

نعطى ثلاث صيغ مفيدة ، سنرجع اليها مستقبلا :

٦ ـ ٩

(أولا) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

(ثانيا) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a \neq 0$$

(ثالثا) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0.$$

البرهان . الصيغة الأولى نتيجة مباشرة لمثال ١ . الثانية والثالثة يمكن التحقق منهما بإجراء التفاضل ، لكن سنشتقهما لتوضيح بعض الأفكار المستخدمة فى إيجاد التكاملات . لاشتقاق (ثانيا) ، نقسم بسط ومقام الدالة المكاملة على a^2 ، فنحصل على

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{1/a^2}{1 + (x/a)^2}\, dx \tag{٤}$$

ماعدا العامل ثابت ، الدالة المكاملة الثانية تشبه الطرف الأيمن من القاعدة ٦ ـ ٨ (ثانيا) حيث $g(x) = x/a$ ، وتوحى بأن نحاول $\tan^{-1}(x/a)$ كمعكوس تفاضلى لـ $1/(a^2 + x^2)$ كتخمين أول .

$$D \tan^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1/a}{1 + (x/a)^2}$$

مع الدالة المكاملة الثانية فى (٤) نرى أن نعدّل تخميننا إلى $(1/a)\tan^{-1}(x/a)$ ، ونرى أن هذا صحيح .

اشتقاق (ثالثا) أصعب . نبدأ بتغيير للمتغير . دع $\theta = \sin^{-1}(x/a)$ ، حيث $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. فيكون $x = a \sin\theta ,\ dx = a\cos\theta\, d\theta$ والتكامل يصبح

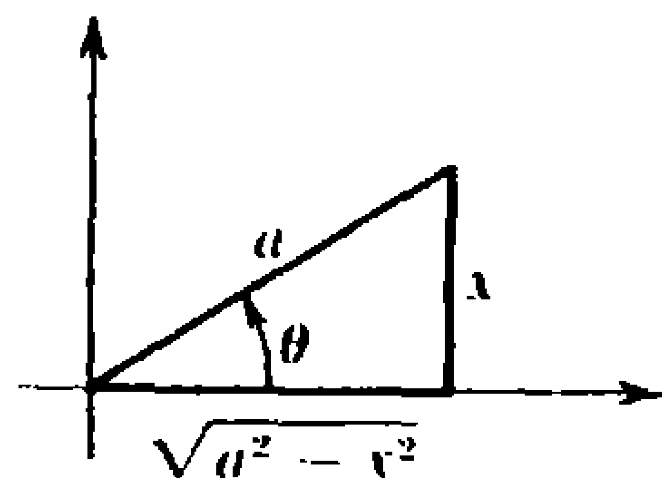
$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int a\sqrt{1 - \sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta \\ &= a^2 \int \sqrt{\cos^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta = a^2 \int |\cos\theta| \cos\theta\, d\theta.\end{aligned}$$

بما أن $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ إذن $\cos\theta \geqslant 0$ والتكامل الأخير يصبح $a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta$. يمكننا اجراء هذا التكامل باستخدام المتطابقة $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ ونحصل على

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int (\cos 2\theta + 1)\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right) + C. \tag{٥}$$

الآن يجب التعبير عن النتيجة بدلالة x ، بصيغة جيب ضعف الزاوية لدينا $\frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta$. بما أن $\sin\theta = x/a$ و $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ ، يوجد مثلث قائم مثل ذلك الذى فى شكل ٦ ـ ٢٦ ضلعه الرأسى x ووتره a واذن ضلعه الآخر يجب أن يكون $\sqrt{a^2 - x^2}$ ، وبذلك يكون $\cos\theta = \sqrt{a^2 - x^2}/a$. أيضا $\theta = \sin^{-1}(x/a)$. بتعويض هذه القيم فى (٥) ، يكون



شكل ٦ ـ ٢٦
اذا كانت $\sin\theta = x/a$ فإن $\cos\theta = \sqrt{a^2 - x^2}/a$.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} (\sin\theta \cos\theta + \theta) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + \sin^{-1} \frac{x}{a}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a}\right) + C.$$

القارىء يجب أن يتحقق من الاجابة بإجراء التفاضل .

مثال ٣ . أوجد قيمة $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

باستخدام الصيغة ٦ - ٩ (أولا) مع $a = 2$ ، يكون

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2}\Big|_0^1 = \sin^{-1} \tfrac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى

$$y = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

بين 0 و -1.

المنحنى موضح فى الشكل ٦ - ٢٧ ، بما أن $l(x) = y = 1 / (3x^2 + 1)$ ، فإن مساحة المنطقة تعطى بالتكامل

$$A = \int_{-1}^{0} l(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{3x^2 + 1}$$

هذا التكامل ليس على صورة المعادلة ٦ - ٩ (ثانيا) . لكن من السهل وضعه فى تلك الصورة : ويكون

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3} \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\frac{1}{3} + x^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{1/\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{1/\sqrt{3}}\Big|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3}x\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}} [\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} (-\sqrt{3})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[0 - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

عند إيجاد قيم الدوال المثلثية العكسية يجب أن نحرص على اختيار قيمها الأساسية . القيم الأساسية للـ arctangent تقع فى الفترة $(-\pi / 2 , \pi / 2)$ ففى المثال الأخير $\tan^{-1} (-\sqrt{3}) = -\pi / 3$ ولاتساوى $2\pi / 3$. أيضا يجب أن يستخدم المقياس الدائرى للزوايا . وإلا كانت صيغ التفاضل والتكامل للدوال المثلثية والدوال المثلثية العكسية غير صحيحة .

مثال ٥ . اثبت أن مساحة الدائرة التى نصف قطرها r هى πr^2 .

عندما يراد إيجاد المساحة بالتكامل ، يجب اعتبار المنطقة كمنطقة محدودة بأشكال بيانية لدالة أو أكثر . معادلة الدائرة هى $x^2 + y^2 = r^2$. المنطقة المقفلة بالنصف الأعلى للدائرة هى المنطقة

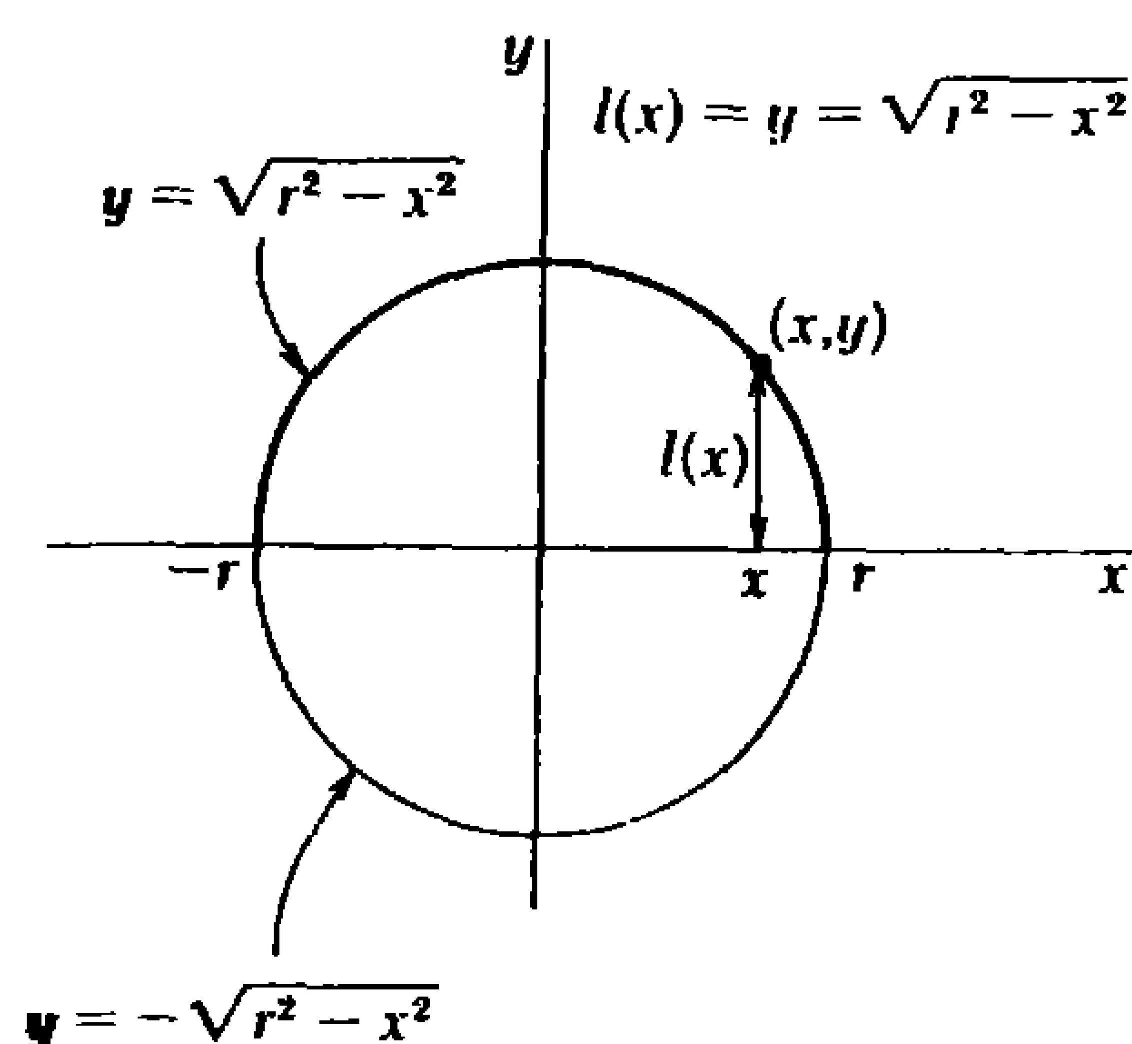
تحت منحنى الدالة $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ؛ بين r و $-r$ (شكل ٦ ـ ٢٨) . مساحة الدائرة هى ضعف مساحة هذه المنطقة وعلى ذلك يكون

$$A = 2\int_{-r}^{r} l(x)\ dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$$

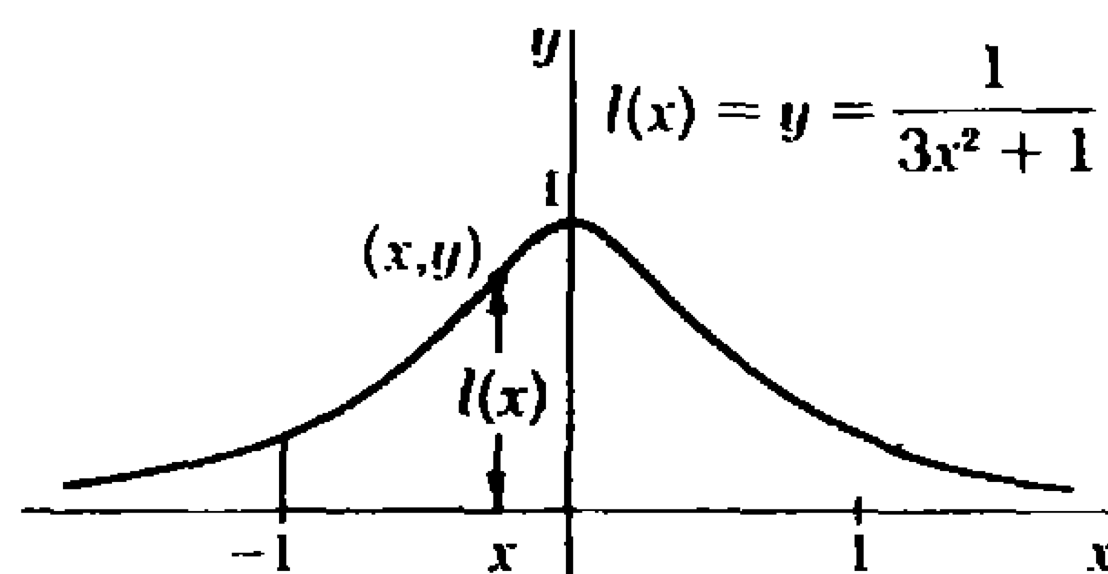
نجرى التكامل باستخدام الصيغة ٦ ـ ٩ (ثالثا) ، فنحصل على،

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r}$$

$$= r^2 \sin^{-1} 1 - r^2 \sin^{-1}(-1) = r^2\frac{\pi}{2} - r^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi r^2.$$



شكل ٦ ـ ٢٨



شكل ٦ ـ ٢٧

مسائل

أوجد المشتقة لما يأتى :

١ - $\sin^{-1} 3x$

٢ - $\tan^{-1}\frac{x}{c}$

٣ - $a \sin^{-1} bx$

٤ - $\tan^{-1}(3z - 2)$

٥ - $2\sin^{-1}(1 - x^2)$

٦ - $\sec^{-1}\frac{1-u}{2}$

٧ - $\sin^{-1} x + x\sqrt{1 - x^2}$

٨ - $x^3 \sin^{-1} x$

٩ - $6 \arctan \frac{2}{x^2}$

١٠ - $\sec^{-1}\frac{a}{y}$

١١ - $z \arctan z$

١٢ - $b \tan^{-1}\frac{x+a}{b}$

١٣ - $-\frac{\tan^{-1} x}{x}$

١٤ - $\arcsin \frac{x-a}{x}$

١٥ - $\tan^{-1}\frac{b}{x} - \tan^{-1}\frac{a}{x}$

١٦ - $4 \arctan \sqrt{t}$

١٧ - $\sin^{-1}\sqrt{5x - 2}$

١٨ - $\operatorname{arcsec}\sqrt{y}$

١٩ - $\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{2+3t}{1-t}$

٢٠ - $\sin^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

٢١ - $c \sec^{-1}\sqrt{c^2 - x^2}$

٢٢ - $r(\sin^{-1} r)^2$

٢٣ - $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

٢٤ - $\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$

٢٥ - $4\sec^{-1}(x+1)-x^2$

٢٦ - $z\sin^{-1}z+\sqrt{1-z^2}$

٢٧ - $\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}-\sin^{-1}\frac{y}{a}$

٢٨ - $\sin^{-1}\frac{u}{b}+\frac{\sqrt{b^2-u^2}}{u}$

٢٩ - $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+\sec^{-1}\frac{1}{t}$

٣٠ - $v\sec^{-1}\frac{1}{2v}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4v^2}$

٣١ - $\sin^{-1}\frac{x}{2}+\sec^{-1}2x$

٣٢ - $\sin^{-1}(n\sin y)$

٣٣ - $\tan^{-1}\left(2\tan\frac{z}{2}\right)$

أوجد قيمة المشتقة لما يأتى عند العدد المعطى :

٣٤ - $x\sin^{-1}x, \frac{1}{2}$

٣٥ - $\sec^{-1}\frac{1-t}{2}, -2$

٣٦ - $\frac{\tan^{-1}z}{z}, 1$

٣٧ - أوجد dy / dx إذا كان $\tan^{-1}(x-y)+xy=1$

٣٨ - أوجد dy / dx إذ كان $x\arcsin y+y\arcsin x=\pi/4$

٣٩ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y=\sin^{-1}x$ عند النقطة التى احداثيها السينى $\frac{1}{2}$.

٤٠ - أوجد معادلة المماس للمنحنى $y=\tan^{-1}(x/2)$ عند النقطة التى احداثيها السينى -2 .

٤١ - أثبت أن $(\sin^{-1}x)^2$ حل للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-2=0$$

٤٢ - اثبت أن $\sin(a\tan^{-1}t)$ حل للمعادلة التفاضلية

$$(1+t^2)^2\frac{d^2u}{dt^2}+2t(1+t^2)\frac{du}{dt}+a^2u=0$$

٤٣ - اثبت أن $\cos(n\cos^{-1}x)$ حل للمعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$$

أجر التكاملات الآتية . (أهمل أى انفصال للدالة المكاملة عند نهاية فترة التكامل)

٤٤ - $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

٤٥ - $\int\frac{dy}{1+9y^2}$

٤٦ - $\int_{-1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dt}{1+3t^2}$

٤٧ - $\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$

٤٨ - $\int_0^7\frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$

٤٩ - $\int_{-3}^{3}\frac{6du}{9+u^2}$

٥٠ - $\int_{8/\sqrt{3}}^{8}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$

٥١ - $\int\frac{dx}{3+4x^2}$

٥٢ - $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-10}}$

٥٣ - $\int_{-6}^{-3}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-9}}$

٥٤ - $\int\frac{du}{\sqrt{36-12u^2}}$

٥٥ - $\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

٥٦ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$

٥٧ - $\int \frac{ds}{\sqrt{a^2-b^2s^2}},\ ab \neq 0$

٥٨ - $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-(x^2-2)^2}}$

٥٩ - $\int \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$

٦٠ - $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx$

٦١ - $\int \frac{dx}{10+6x+x^2}$ [ارشاد : $10+6x+x^2 = 1+(3+x)^2$]

٦٢ - $\int \frac{dx}{6+4x+4x^2}$

٦٣ - $\int \frac{dy}{\sqrt{3-2y-y^2}}$

٦٤ $\int \frac{u}{1+u^4}\,du$

٦٥ - $\int \sqrt{4-3x^2}\,dx$

٦٦ - $\int \sqrt{a^2-b^2x^2}\,dx,\ ab \neq 0$

٦٧ - صورة ارتفاعها a ft معلقة على حائط وقاعدتها b ft فوق مستوى النظر لمشاهد . أثبت أنه عندما يكون المشاهد على بعد x ft من الحائط ، الزاوية θ التى تعملها الصورة عند عين المشاهد تعطى بالصيغة .

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a+b}{x} - \tan^{-1}\frac{b}{x}$$

ما هو البعد عن الحائط الذى يقف عنده المشاهد ليحصل على أحسن رؤ ية للصورة ، وذلك يحدث عندما تكون θ نهاية عظمى .

٦٨ - كاميرا تلفزيونية تستقبل الصور لنهائى سباق للجرى ، موضوعة عند الخط النهائى وبعدها 20 ft على أحد جانبى حلبة السباق . إذا كانت سرعة المتسابقين هى 22 ft / sec ، ما هى سرعة دوران الكاميرا عندما يكون المتسابقون على بعد 50 ft من خط الانتهاء ؟ (ارشاد : معدل دوران الكاميرا هو معدل تغير الزاوية بين العمودى على الحلبة واتجاه الكاميرا) .

٦٩ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 3 / \sqrt{6-x^2}$ والمحور السينى والمحور الصادى والخط المستقيم $x = \sqrt{3}$.

٧٠ - أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 4 / (2 + x^2)$ والمستقيم $y = \frac{1}{2}x$, والمحور الصادى .

٧١ - أثبت أن مساحة القطع الناقص الذى طول نصف محوره الأكبر a وطول نصف محوره الأصغر b هى πab .

٧٢ - خطط المنحنى $y = 1 / (1 + x^2)$ وأوجد المساحة $A(t)$ للمنطقة تحت المنحنى بين t و 0 . أوجد الآن $\lim_{t\to\infty} A(t)$. هذه النهاية يمكن تفسيرها بأنها مساحة المنطقة تحت النصف الأيمن للمنحنى رغم أن المنحنى يمتد الى اليمين بدون انتهاء .

٧٣ - أوجد حجم الجسم الناشىء بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 2/\sqrt{1+x^2}$ والمحور السينى والمستقيمين $x = -1$, $x = 1$ حول المحور السينى .

٧٤ ـ الجسم الناشيء من دوران دائرة حول مستقيم فى مستواها وخارج عنها يسمى تورس . أثبت أن حجم التورس هو $2\pi^2 a^2 b$ ، حيث a هى نصف قطر الدائرة المنشئة وb هى المسافة بين مركز هذه الدائرة والخط المستقيم .

٧٥ ـ (أ) كمية الاضاءة عند نقطة P الناشئة عن مصدر ضوئى تساوى شدة الضوء مقسومة على مربع المسافة بين P ومصدر الضوء . مصدر ضوء فلورسنت معين هو أنبوبة طولها 4 ft وشدة الضوء منتظمة وقدرها 30 قوة شمعة لكل قدم طولى . الأنبوبة رفيعة ويمكن اعتبارها كخط مستقيم . أوجد كمية الاضاءة الناتجة عن مصدر الضوء عند نقطة P على بعد 6 ft من أحد طرفى الضوء وعلى المستقيم العمودى على مصدر الضوء عند ذلك الطرف . (إرشاد : قسِّم الأنبوبة إلى أجزاء صغيرة وقرب كمية الضوء عند P الناشئة عن كل جزء) . (ب) ما هو طول الأنبوبة التى تجعل كمية الضوء عند P ضعف تلك التى فى (أ) ؟

(ج) هل من الممكن جعل طول الأنبوبة كافيا للحصول على أى كمية من الضوء عند P ؟

٧٦ ـ اثبت $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = -\frac{d}{dx}\tan^{-1}(1/x)$. بما أن $\tan^{-1} x$ و $\tan^{-1}(1/x)$ متصلتان لـ $x > 0$ ، يوجد ثابت c بحيث أن

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = c \qquad (٦)$$

لجميع $x > 0$ ، أوجد c . الدالتان أيضا متصلتان لـ $x < 0$ ، وإذن يوجد ثابت c' قد يختلف عن c بحيث أن (٦) تبقى صحيحة مع c' مكان c لجميع $x < 0$. أوجد c' .

٧٧ ـ بمعاملة y كثابت واجراء التفاضل بالنسبة إلى x ، أثبت العلاقة

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$$

٧٨ ـ خطط المنحنى $y = \sin^{-1} 1/x$.

٧٩ ـ كيف نهتدى الى تخمين أن $1/(1+x^2)$ هى مشتقة $\tan^{-1} x$ ؟ اثبت تخمينك ، لتحصل على القاعدة ٦ ـ ٧ (ثانيا) .

٨٠ ـ كيف نهتدى إلى تخمين أن $1/(x\sqrt{x^2-1})$ هى مشتقة $\sec^{-1} x$ ؟ أثبت تخمينك ، لتحصل على القاعدة ٦ ـ ٧ (ثالثا) .

٨١ ـ بافتراض القاعدة ٦ ـ ٧ (ثانيا) ، أثبت القاعدة ٦ ـ ٨ (ثانيا) .

٨٢ ـ بافتراض القاعدة ٦ ـ ٧ (ثالثا) ، أثبت القاعدة ٦ ـ ٨ (ثالثا) .

٨٣ ـ (أ) إذا كانت $\cos^{-1} x$ تعرف بأنها العدد فى الفترة $[0, \pi]$ الذى جيب تمامه x ، اثبت أن $D\cos^{-1} x = -1/\sqrt{1-x^2}$. (ب) من العلاقة $D\sin^{-1} x = -Dx\cos^{-1} x$ المشتقة من (أ) ، أثبت العلاقة $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$

٨٤ ـ إذا كانت $\cot^{-1} x$ تعرف بأنها العدد فى الفترة $(0,\pi)$ الذى ظل تمامه x ، اثبت أن $D\cot^{-1} x = -1/(1+x^2)$.

الفصل السابع

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

٧ - ١

الأسس والدوال الأسية*

فى هذا البند سنعمم الفكرة عن القوة الى الأسس غير الكسرية ، بحيث أن الرموز مثل $3^{\sqrt{2}}$ يكون لها معنى . المسألة ليست لايجاد قيمة a^u حيث u غير كسرية ولكن هى لتعريف ماذا نقصد بهذا الرمز . لصياغة التعريف سنقاد باعتبارين : الأول هو أن قوانين الأسس تبقى صحيحة للأسس غير الكسرية حتى يكون ، مثلا ، $3^{\sqrt{2}}(3^{\pi}) = 3^{\sqrt{2}+\pi}$ والثانى هو أن a^u ينبغى أن تكون متصلة حتى تكون a^v قريبة من a^u عندما تكون v قريبة من u . أى أن $3^{\sqrt{2}}$ يجب أن تعرف كعدد بحيث أن $3^{1.4}$ تكون قريبة من $3^{\sqrt{2}}$ ، وبحيث أن $3^{1.41}$ تكون أقرب الى $3^{\sqrt{2}}$ لأن 1.41 أقرب الى $\sqrt{2}$ عن 1.4 . فى الواقع ، $3^{\sqrt{2}}$ ينبغى أن تكون عددا بحيث أن اختيار r قريبة قربا كافيا من $\sqrt{2}$ يجعل 3^r قريبة كما نريد من $3^{\sqrt{2}}$.

شرط الاتصال يعطينا لمحة لصياغة تعريف مناسب لـ a^u . نوضح بـ $3^{\sqrt{2}}$ نعتبر الفئة S لجميع الاعداد الكسرية $r < \sqrt{2}$. أى أن ،

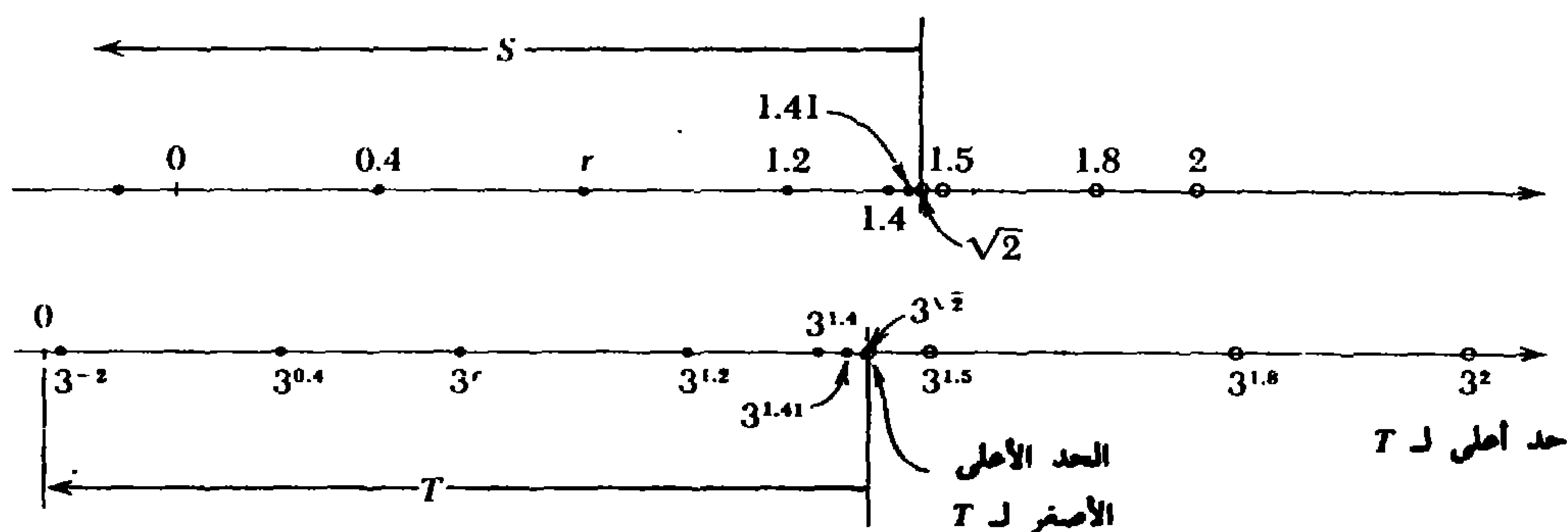
$$S = \{r | r \text{ وكسرية } r < \sqrt{2}\}$$

فمثلا 1.41 و 1.4 , 1.2 , 0.4 , -2 تكون فى S ، لكن $\sqrt{1.1}$ و 1.5 لايكونان فى S. ليكن

$$T = \{3^r | r \text{ in } S\}$$

أى أن ، 3^r تكون فى T اذا واذا فقط كانت r فى S فمثلا ، $3^{1.41}$ و $3^{1.4}$, $3^{1.2}$, $3^{0.4}$, 3^{-2} جميعها فى T ، بينما $3^{1.5}$ ليست فى T . بعض الأعداد فى T و S مشار اليها بنقط على الخطين الحقيقيين الأعلى والأدنى فى الشكل ٧ - ١ .

* يجب على القارىء أن يراجع المادة عن الحد الأعلى الأصغر ببند ٥ - ٨ قبل قراءة هذا البند .



شكل ٧ ـ ١

$\sqrt{2}$ هو .l.u.b.s $3^{\sqrt{2}}$ يعرف بأنه .l.u.b.T .

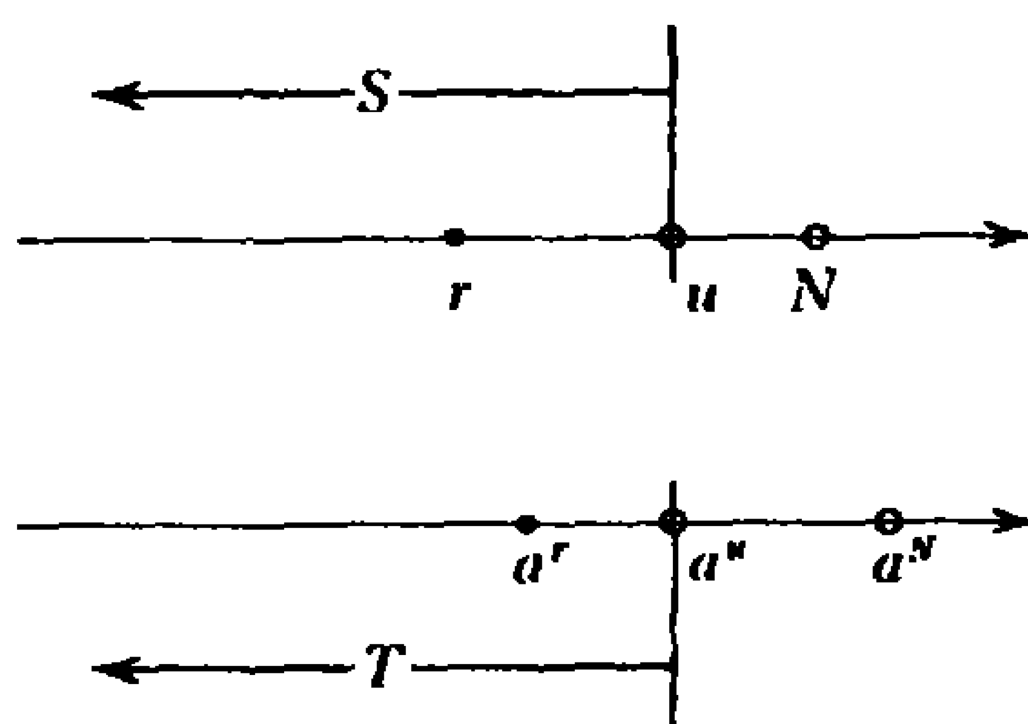
الأعداد التى ليست فى T و S مشار اليها بدوائر . اذا كانت 3^r أى عدد فى T ، فان r تكون كسرية ويكون $r < \sqrt{2} < 2$ ومن ثم $3^r < 3^2$. هذا يبين أن T لها حد أعلى هو 3^2 ، وبالتالى لها حد أعلى أصغر . نعرف قيمة $3^{\sqrt{2}}$ بأنها هذا الحد الاعلى الأصغر . تقريب كسرى لها هو 4.7287 ، الأعداد 3^r تضغط ناحية الحد الاعلى الاصغر من جهة اليسار .

يمكن استخدام طريقة مماثلة لتعريف a^u لأى عدد كسرى u ولأى عدد $a \geqslant 1$. لتكن

$$S = \{r | r \text{ وكسرية } r < u\}$$

و
$$T = \{a^r | r \text{ in } S\}$$

(شكل ٧ ـ ٢) . نريد تعريف a^u كالحد الأعلى الاصغر للفئة T ، لكن يجب أولا اثبات أن T لها حد أعلى . لتكن N عددا صحيحا ما حيث $u < N$. فيكون $a^r < a^n$ لجميع الأعداد الكسرية r التى تحقق $r < u < N$ ، وهذا يثبت أن T لها حد أعلى . وبالتالى T لها حد أعلى أصغر . نعرف a^u بأنها هذا الحد الأعلى الاصغر . اذا كان $0 < a < 1$ ، فان $1 / a > 1$ ويكون $(1 /a)^n$ له معنى . نعرف a^u فى هذه الحالة بأنه $1 / (1 / a)^n$. نلخص ماسبق فى التعريف الآتى .



شكل ٧ ـ ٢

u هى .l.u.b. S a^u | تعرف بأنها .l.u.b.T .

٧ ـ ١ تعريف . لتكن u عددا غير كسرى .

(أولا) اذا كانت $a \geqslant 1$ ، فان $a^u = \text{l. u. b. } T$ ، حيث $T = \{ a^r / r$ وكسرية $r < u \}$.

(ثانيا) اذا كانت $0 < a < 1$ ، فان $a^u = 1 / (1 / a)^u$.

(ثالثا) $0^u = 0$ لـ $u > 0$.

التعريف يتضمن أن $1^u = 1$ لجميع u . بما أننا لم نعط تعريفا مقنعا لـ a^u عندما تكون $a < 0$ وتكون u غير كسرية ، فاننا لانستخدم التعبيرات مثل $(-5)^{\sqrt{2}}$ وأيضا 0^{-u} غير معرفة عندما $u \geqslant 0$
نعلم من قبل معنى a^u عندما تكون u كسرية ، ويمكن اثبات أن التعريف ٧ ـ ١ (أولا) يكون صحيحا عندما تكون u كسرية . واذن التعريف ٧ ـ ١ يصبح نظرية لـ u الكسرية .

القوانين الأساسية للأسس المعطاة أدناه يمكن برهنتها من التعريف ٧ ـ ١ . البراهين مملة أكثر منها صعبة ، وبما أن الموضوع قد حاد عن الغرض الأساسى لهذا الفصل ، فاننا نحذف البراهين .

٧ ـ ٢ قوانين الأسس . هذه القوانين تكون صحيحة لجميع ٧ و u الحقيقية حيث الرموز تكون معرفة .

(أولا)	$a^u > 0, \text{ if } a > 0$	(ثانيا)	$a^{-u} = 1/a^u$
(ثالثا)	$a^u a^r = a^{u+r}$	(رابعا)	$\dfrac{a^u}{a^r} = a^{u-r} = 1/a^{r-u}$
(خامسا)	$a^u b^u = (ab)^u$	(سادسا)	$a^u / b^u = (a/b)^u$
(سابعا)	$(a^u)^r = a^{uv}$		

(ثامنا) لتكن $u > 0$ و $a > 0 , b > 0$. فيكون $a^u < b^u$ اذا واذا فقط كان $a < b$.

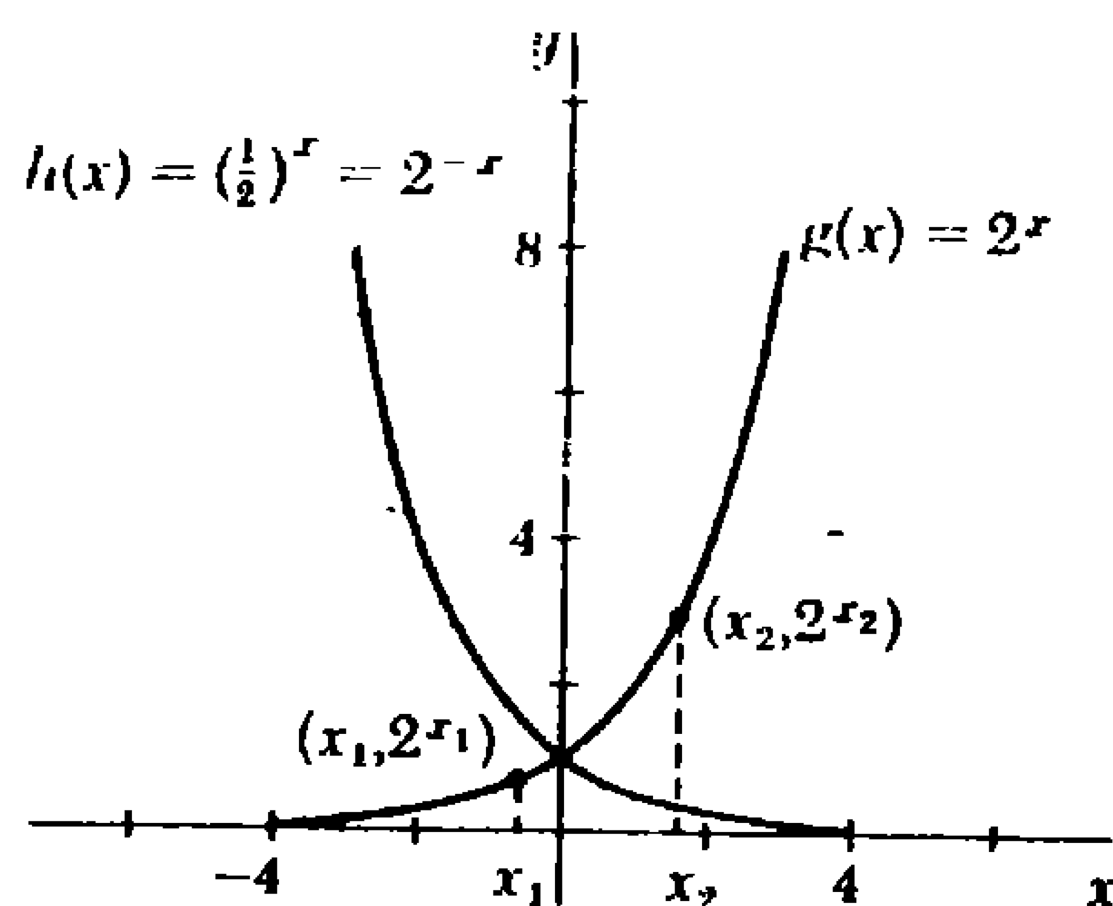
(تاسعا) لتكن $a > 1$. فيكون $a^u < a^v$ اذا واذا فقط كان $u < v$. لتكن $0 < a < 1$. فيكون $a^u > a^v$ اذا واذا فقط كان $u < v$.

اذا كانت الأسس كسرية ، فان بعضا من هذه القوانين ، مع قيود واضحة ، تكون صحيحة لـ b و a السالبتين .

بما أن a^x لها معنى لجميع x الحقيقية اذا كانت $a > 0$ ، فان الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0$$

لها فئة جميع الاعداد الحقيقية كنطاقها . مثل هذه الدوال تسمى دوال أسية . الدالة الأسية الخاصة $g(x) = 2^x$ مجدولة فى الهامش ، وشكلها البيانى مخطط فى الشكل ٧ ـ ٣ .



شكل ٧ ـ ٣
الشكلان البيانيان لـ $h(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = 2^x$ انعكاسان كل منهما للآخر فى المحور الصادى .

هذه الدالة نمطية لجميع الدوال الأسية $f(x) = a^x$ إذا كانت $a > 1$. وجميعها موجبة فى كل مكان القانون ٧ ـ ٢ (أولا) وتتزايد فى الفترة $(-\infty, \infty)$ ، لأن بالقانون ٧ ـ ٢ (تاسعا) ، إذا كانت $x_1 < x_2$ فإن $a^{x_1} < a^{x_2}$. الأشكال البيانية جميعها تقطع المحور الصادى عند $(0,1)$ وبعدها ترتفع بسرعة . فى الواقع ، كما سنرى فى بند ٧ ـ ٣ ، $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. سنرى أيضا هنالك أن $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ وهذا يثبت أن الشكل البيانى يكون مقاربا للمحور السينى السالب .

إذا كانت $0 < a < 1$ فإن $f(x) = a^x$ تكون دالة تناقصية بالقانون ٧ ـ ٢ (تاسعا) وهى موجبة فى كل مكان وأيضا $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ مما يثبت أن شكلها البيانى يكون مقاربا للمحور السينى الموجب . فى الشكل ٧ ـ ٣ مخطط أيضا الدالة النمطية $h(x) = (\frac{1}{2})^x$.

إذا عوضنا $-x$ لـ x فى المعادلة $y = 2^x$ فإننا نحصل على $y = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x$. ومن ثم الشكل البيانى لـ $y = (\frac{1}{2})^x$ هو الانعكاس فى المحور الصادى للشكل البيانى لـ $y = 2^x$. جميع الدوال التى على الصورة $u(x) = a^{-x}$ ، حيث $a > 1$ ، لها أشكال بيانية متناقصة مثل الشكل البيانى لـ $h(x) = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$.

x	$g(x) = 2^x$
−10	$2^{-10} \approx 0.00098$
−4	$2^{-4} = 0.0625$
−3	$2^{-3} = 0.125$
−2	$2^{-2} = 0.25$
−1	$2^{-1} = 0.5$
$-\frac{1}{2}$	$1/\sqrt{2} \approx 0.707$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \approx 1.414$
1	2
2	4
$\sqrt{7}$	$2^{\sqrt{7}} \approx 6.258$
3	8
10	1024

الدالة الأسية لايمكن الاستغناء عنها فى كثير من موضوعات الفيزياء والكيمياء والبيولوجى . وهى تستخدم فى الوصف الكمى لانحلال المواد المشعة ونمو المستعمرات البكتيرية .

مسائل :

حل المعادلات الاتية :

١ - $3^{4x} = 81$ ٢ - $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$. ٣ - $(\frac{1}{2})^x = 32$

٤ - $17^y = 1/\sqrt{17}$ ٥ - $6(12^x) = \frac{1}{2}(12^{3x})$ ٦ - $16^x = 8$

حدد موقع x بين عددين صحيحين متتاليين إذا كان :

٧ - $7^x = 93.4$ ٨ - $2^x = \frac{1}{5}$ ٩ - $10^x = 0.036$ ١٠ - $(\frac{9}{5})^x = 16$

ماهو العدد الأكبر فى الأزواج الآتية ؟ (إرشاد : استخدم قوانين الأسس ٧ ـ ٢) .

١١ - $\left(\frac{1}{4}\right)^{\pi}, \left(\frac{1}{4}\right)^{3}$ ١٢ - $\pi^{1/4}, 3^{1/4}$

١٣ - $5^{2/3}, 5^{3/4}$ ١٤ - $10^{-\sqrt{3}}, 10^{-\sqrt{7}}$

١٥ - $5^{-5}, (2\pi)^{-5}$ ١٦ - $(\pi/3)^{1/3}, (\sqrt{2}/5)^{1/3}$

١٧ - $(1.2)^{-1/4}, (1.2)^{-3/7}$ ١٨ - $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{7}}, \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{10}}$

١٩ - $(2\sqrt{3}-3)^{-1}, (2\sqrt{3}-3)^{2}$ ٢٠ - $(\pi-3)^{-2/3}, (\pi-3)^{-3/4}$

٢١ - $(\sqrt{2})^{-\sqrt{5}}, (\pi/2)^{-\sqrt{5}}$ ٢٢ - $(\sqrt[3]{70})^{5}, (\sqrt{17})^{5}$

٢٣ - $2^5, 10^{3/2}$ ٢٤ - $(\frac{3}{5})^{2/3}, (\frac{2}{3})^{3/5}$ [إرشاد : خذ فى الاعتبار $(\frac{2}{3})^{2/3}$] .

أوجد قيمة تقريبية للأعداد الآتية :

٢٥ - 2^{π} ٢٦ - $15^{\sqrt{3}}$ ٢٧ - $1/5^{\sqrt{2}}$

٢٨ ـ اثبت أنه اذا كانت $a \neq 1$ و $a > 0$ ، فإن $a^x = a^y$ تضمن أن $x = y$.(إرشاد : افرض أن $x > y$.)

٢٩ ـ اثبت أنه لجميع u الموجبة ، $a^u > 1$ إذا كانت $a > 1$ وأيضا $0 < a^u < 1$ إذا كانت $0 < a < 1$.

٣٠ ـ بافتراض قوانين الأسس ٧ ـ ٢ ، اذكر واثبت النتيجة المناظرة لـ ٧ ـ ٢ (ثامنا) عندما تكون $u < 0$.

٣١ ـ يمكننا ، بتبرير مماثل ، تعريف a^u ، حيث $a \geq 1$ وحيث u غير كسرية ، بأنها الحد الأدنى الأكبر للفئة w ، حيث $w = \{ a^s \mid s$ كسرية . $s > u \}$. اثبت أن العدد a^u المعرف هكذا هو

نفس العدد المعطى بالتعريف ٧ ـ ١ (إرشاد : لتكن $t = \text{l.u.b.}\,T$ ، حيث $\{ r < u$,
كسرية $T = \{ a^r / r$ ولتكن $w = \text{g.l.b.}\,W$. أثبت أن $t \leqslant w$. ثم اثبت أن العدد غير السالب $w - t$ أصغر من كل عدد موجب) .

٣٢ ـ خطط على نفس مستوى الاحداثيات الأشكال البيانية للمعادلات الآتية :

(أ) $y = 3^x$ (ب) $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}$ (جـ) $y = 5^x$ (د) $y = 5^{-x}$ (هـ) $y = 1^x$

خطط الشكل البيانى للمعادلات الآتية . (جداول الجذور والمقلوبات ستسهل الحسابات) .

٣٣ ـ $y = 3^{x+1}$ ٣٤ ـ $y = -3^x$ ٣٥ ـ $y = 2^{x/2}$ ٣٦ ـ $y = -5^{-x}$ ٣٧ ـ $y = (\frac{1}{4})^{-x}$

٣٨ ـ $y = 2^{-x^2}$ ٣٩ ـ $y = 2^{|x|}$ ٤٠ ـ $y = x2^x$ ٤١ ـ $y = 1.3^x$ ٤٢ ـ $y = (\frac{2}{5})^x$

٤٣ ـ عند وقت معين تحتوى مزرعة *1000* بكتيريا . المشاهدات عند نفس الساعة فى أيام متعاقبة تبين أنه بعد t يوما المزرعة تحتوى $1000\,(2)^t$ بكتيريا . كم سيوجد بعد يومين ؟ بعد *8* أيام ؟ كم كان يوجد منذ يومين ؟

٤٤ ـ عند وقت معين كتلة المادة المشعة هى *0.01* gram . الكتلة تتناقص باستمرار تبعا للفاقد بالاشعاع . من المعلوم من نظرية المواد المشعة أن بعد t سنة سيكون المتبقى $0.01\,(3^{-t/2})$. كم سيكون المتبقى بعد سنة واحدة ؟ بعد *8* سنوات ؟ كم كانت المادة منذ سنة واحدة ؟ متى ستنتهى المادة ؟

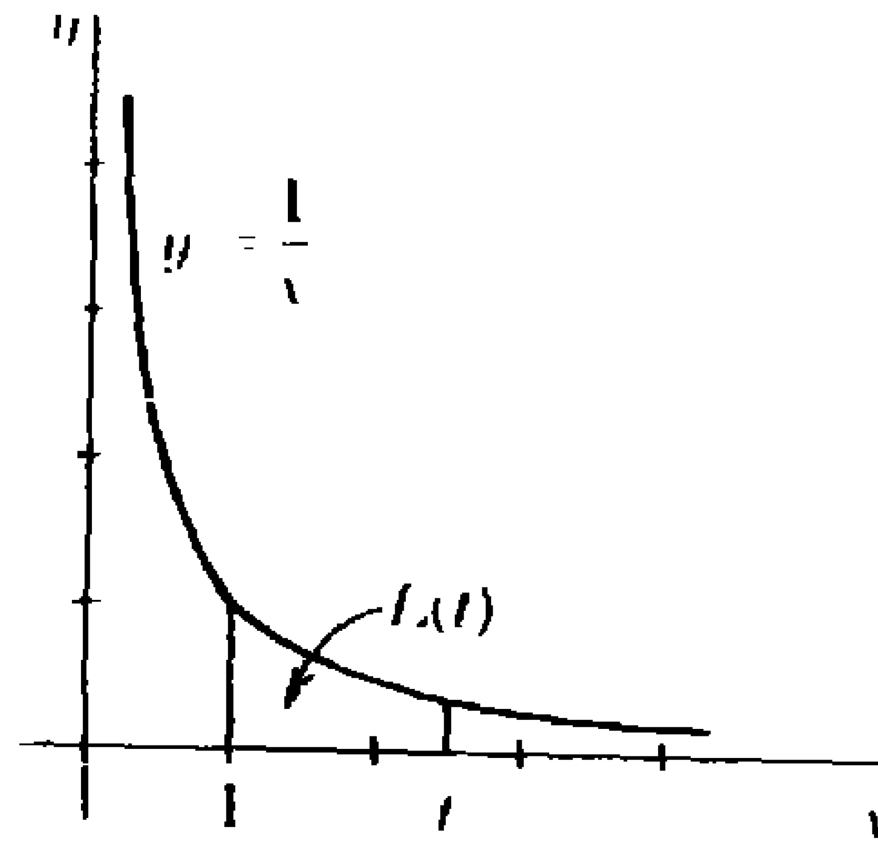
٤٥ ـ الكتلة لكمية من الراديوم تتناقص باستمرار تبعا للفاقد بالاشعاع . عند وقت معين الكتلة هى A ، ومن المعروف أن بعد t من السنوات كتلة الكمية المتبقية تعطى بـ $A(\frac{1}{2})^{t/1600}$ (أ) كم سيوجد بعد *800* سنة ؟ بعد *4800* سنة ؟ (ب) أثبت أنه بصرف النظر عن حجم القطعة ، الزمن المطلوب لتناقص قطعة راديوم إلى النصف هو دائما نفس الزمن . هذا الزمن يسمى عمر النصف للراديوم .

٧ ـ ٢
الدالة L

الدالة الأسية a^x لها مشتقة ، لكن إيجادها بالطرق المباشرة ليس سهلا . سنستخدم طريقة غير مباشرة ، وإن كانت طويلة إلا أنها أسهل ، وأيضا تعطى معلومات ستكون مفيدة فى دراستنا للدالة اللوغاريتمية فى بند ٧ ـ ٥ .

بما أن $1/x$ متصلة لجميع $x > 0$ ، التكامل المعين

$$\int_1^t \frac{1}{x}\,dx$$



شكل ٧ ـ ٤

$L(t)$ هى مساحة المنطقة المظللة

يوجد لجميع $t > 0$ بالنظرية ٥ ـ ٣ . عندما تكون $t > 1$ فإنه يمثل مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1 / x$ بين 1 و t (شكل ٧ ـ ٤) . التكامل لايمكن إيجاده بقاعدة القوة : $\int x^r \, dx = x^{r+1}/(r+1)$ لأن هذه ليست صحيحة عندما $r = -1$. لأى عدد معين t ، قيمة التكامل يمكن التقريب إليها إلى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع ريمان أو بقاعدة شبه المنحرف . التقريبات لقيم قليلة من t معطاة فى جدول فى الهامش . كل t تعين قيمة للتكامل ، وإذن التكامل يعرف دالة ، نرمز لها بـ L . أى أن

$$L(t) = \int_1^t \frac{1}{x} \, dx, \qquad t > 0 \tag{١}$$

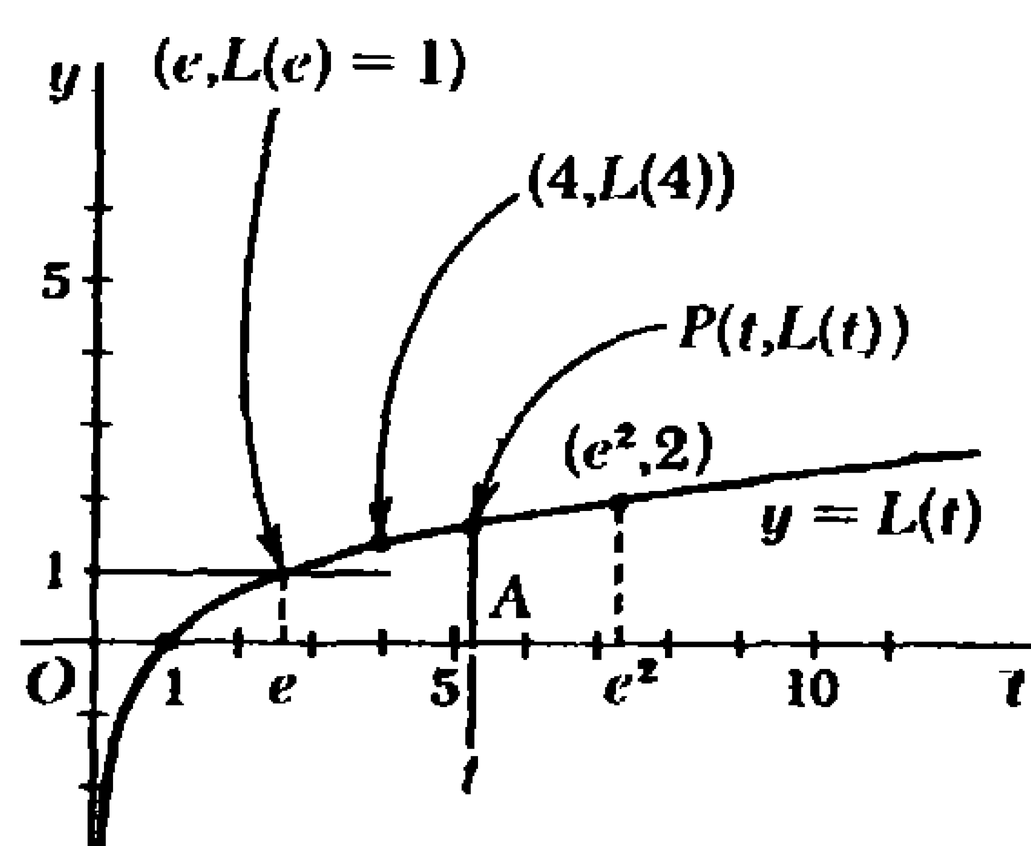
الدالة L ستساعدنا على إيجاد مشتقة a^x . سنثبت فيما بعد أن $L(x)$ تطابق الدالة اللوغاريتمية $\log_e t$ ، حيث الأساس e هو عدد سيعرف أدناه .

بما أن الدالة المكاملة موجبة ، فان $L(t) > 0$ لـ $t > 1$, $L(1) = 0$ و $L(t) < 0$ لـ $0 < t < 1$.
بالنظرية ٥ ـ ٧ ، مشتقة L هى

t	$L(t) = \int_1^t \frac{1}{x} \, dx$
0.01	−4.605
0.1	−2.303
0.5	−0.693
1	0
2	0.693
3	1.099
6	1.792
8	2.079

$$L'(t) = \frac{1}{t} > 0 \qquad (٢)$$

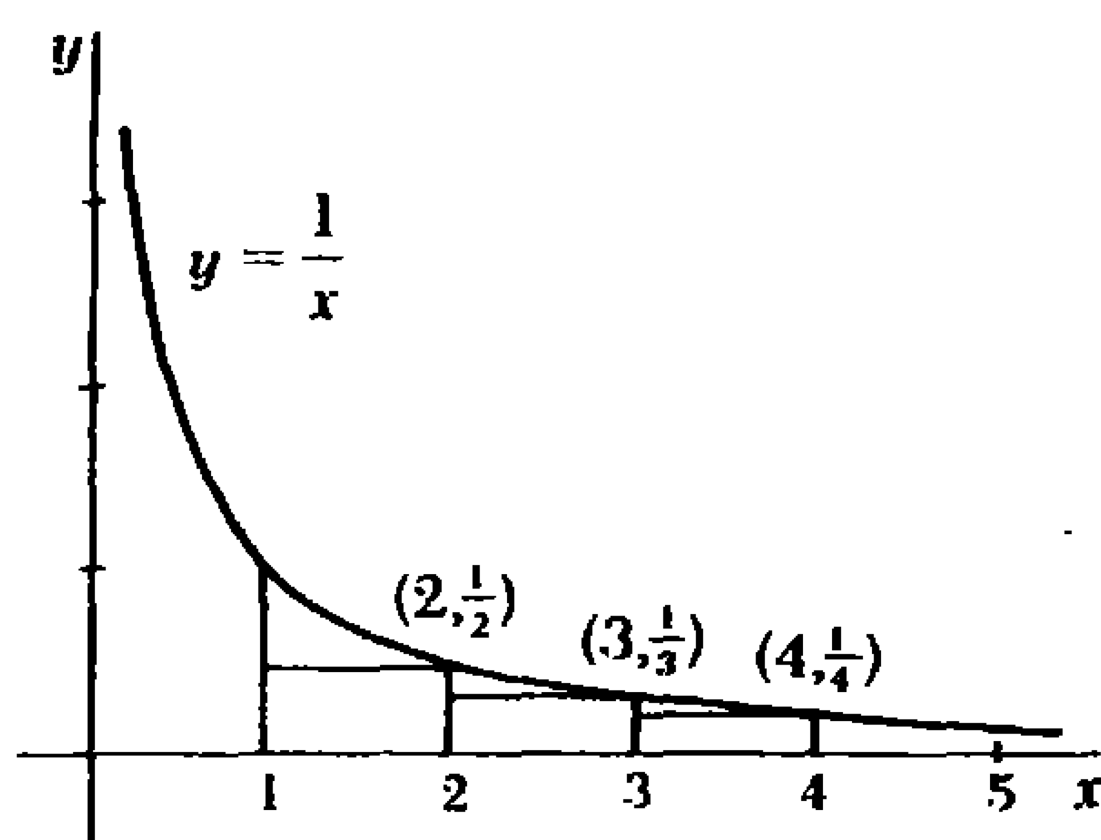
وهذا يثبت أن L متصلة ومتزايدة فى الفترة $(0 , \infty)$ وأن ميل شكلها البيانى يقترب من الصفر عندما t تصبح كبيرة . بما أن المشتقة الثانية ، $L''(t) = -1/t^2$ ، دائما سالبة ، فإن الشكل البيانى لـ L يكون مقعرا إلى تحت . بهذه المعلومات والجدول أعلاه يمكننا تخطيط الشكل البيانى للدالة L (شكل ٧ ـ ٥) . إذا كانت $t \geqslant 1$ ، فإن الاحداثى الصادى لأى نقطة $P(t , L(t))$ على الشكل البيانى يساوى المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين t و 1 .



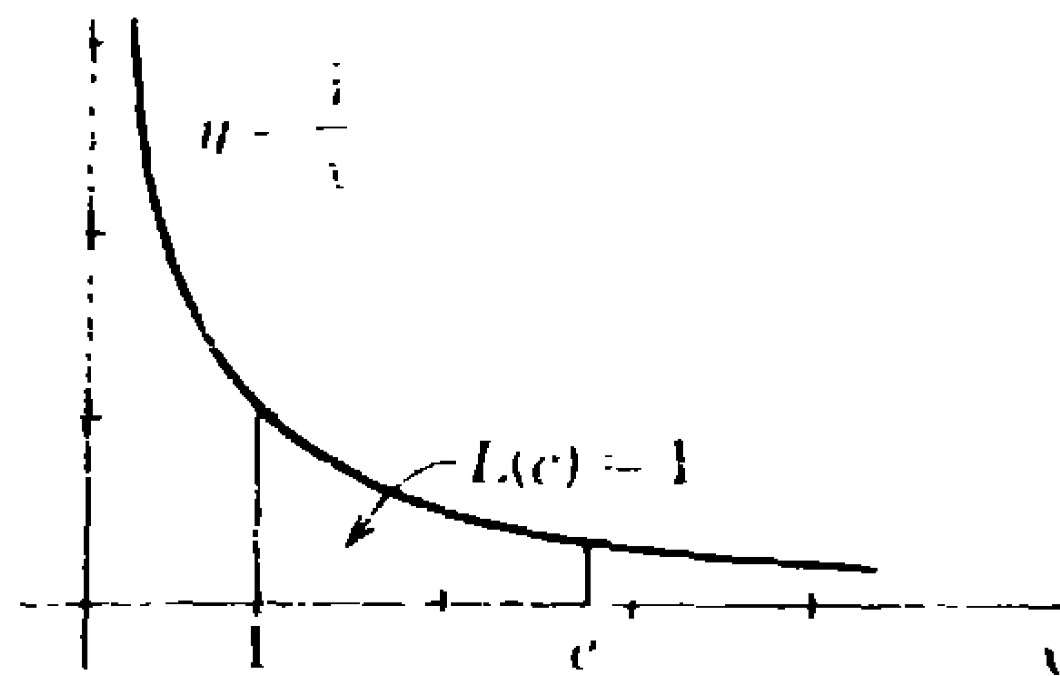
شكل ٧ ـ ٥
الشكل البيانى للدالة $y = L(t)$. طول الخط المستقيم AP يساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين t و 1 .

المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين 4 و 1 أكبر من مجموع مساحات المستطيلات المظللة الثلاث الموضحة فى الشكل ٧ ـ ٦ . وإذن $L(4) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1 > 0 = L(1)$.

هذا يثبت أن الخط الافقى $y = 1$ يقع بين النقطتين $(4 , L(4))$ و $(1 , L(1))$ على المنحنى $y = L(t)$ (شكل ٧ ـ ٥) . بما أن L متصلة ، فالمنحنى يجب بنظرية القيمة الوسط ٦ ـ ٥ أن يقطع هذا الخط عند نقطة $(t , 1)$ لقيمة ما t بين 4 و 1 . هذه القيمة لـ t حيث $L(t) = 1$ يرمز لها عالميا بالحرف e . أى أن ، $L(e) = 1$. بعبارة أخرى ، e هى القيمة لـ t حيث مساحة المنطقة المظللة فى الشكل ٧ ـ ٤ هى 1 (شكل ٧ ـ ٧)



شكل ٧ ـ ٦
مساحة المنطقة تحت المنحنى بين 4 و 1 أكبر من مساحة المنطقة المظللة .



شكل ٧ ـ ٧
e هى قيمة t التى تجعل مساحة المنطقة المظللة 1 .

العدد e له أهمية كبرى فى الرياضيات وتطبيقاتها . وهو عدد غير كسرى وعلى وجه التقريب يساوى 2.71828 . فى الفصل السادس عشر ستتعلم كيف نقربه إلى أى درجة من الدقة . الدالة f المعرفة بـ $f(x) = e^x$ مفيدة للغاية حتى أنها تعرف بالدالة الأسية . جدول لقيم e^x معطى فى التذييل B ، والشكل البيانى للدالة مخطط فى الشكل ٧ ـ ٨ .

من السهل إيجاد مشتقة e^x عن الدوال الأسية الأخرى ، لكن نحتاج أولا إلى تمهيديتين .

٧ ـ ٣ تمهيدية . $L(e^u) = u$ لجميع u .

فمثلا ، $L(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ و $L(e^\pi) = \pi$.

البرهان . نبرهن أولا التمهيدية ٧ ـ ٣ لعدد كسرى u ، ثم نستخدم هذه النتيجة لبرهنتها لأى عدد حقيقى u . إذا كانت $u = 0$ ، فالتمهيدية تافهة لأن $L(1) = 0$. لتكن r أى عدد كسرى غير الصفر . من التعريف

$$L(t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx$$

وإذن

$$L(e^r) = \int_1^{e^r} \frac{1}{x}\,dx \qquad (٣)$$

أجر تغييرا للمتغير فى التكامل بوضع $z = x^{1/r}$. فيكون $dx = rz^{r-1}\,dz$ و $x = z^r$ ، و (٣) تصبح

$$L(e^r) = \int_1^e \frac{rz^{r-1}}{z^r}\,dz = r\int_1^e \frac{1}{z}\,dz$$

حيث الحدان الجديدان للتكامل هما قيمتا z المناظرتان للحدين القديمين $x = e^r$ و $x = 1$ ، لكن

$$\int_1^e \frac{1}{z}\,dz = L(e) = 1$$

ومن ثم

$L(e^r) = r$ حيث r عدد كسرى . (٤)

هذا يبرهن التمهيدية ٧ ـ ٣ لعدد كسرى u .

لبرهنة التمهيدية لجميع الأعداد الحقيقية u ، نفرض أن u أى عدد حقيقى وأن $L(e^u)$ أقل من u . يوجد دائما عدد كسرى بين أى عددين حقيقين . اختر عددا كسريا r بين u و $L(e^u)$:

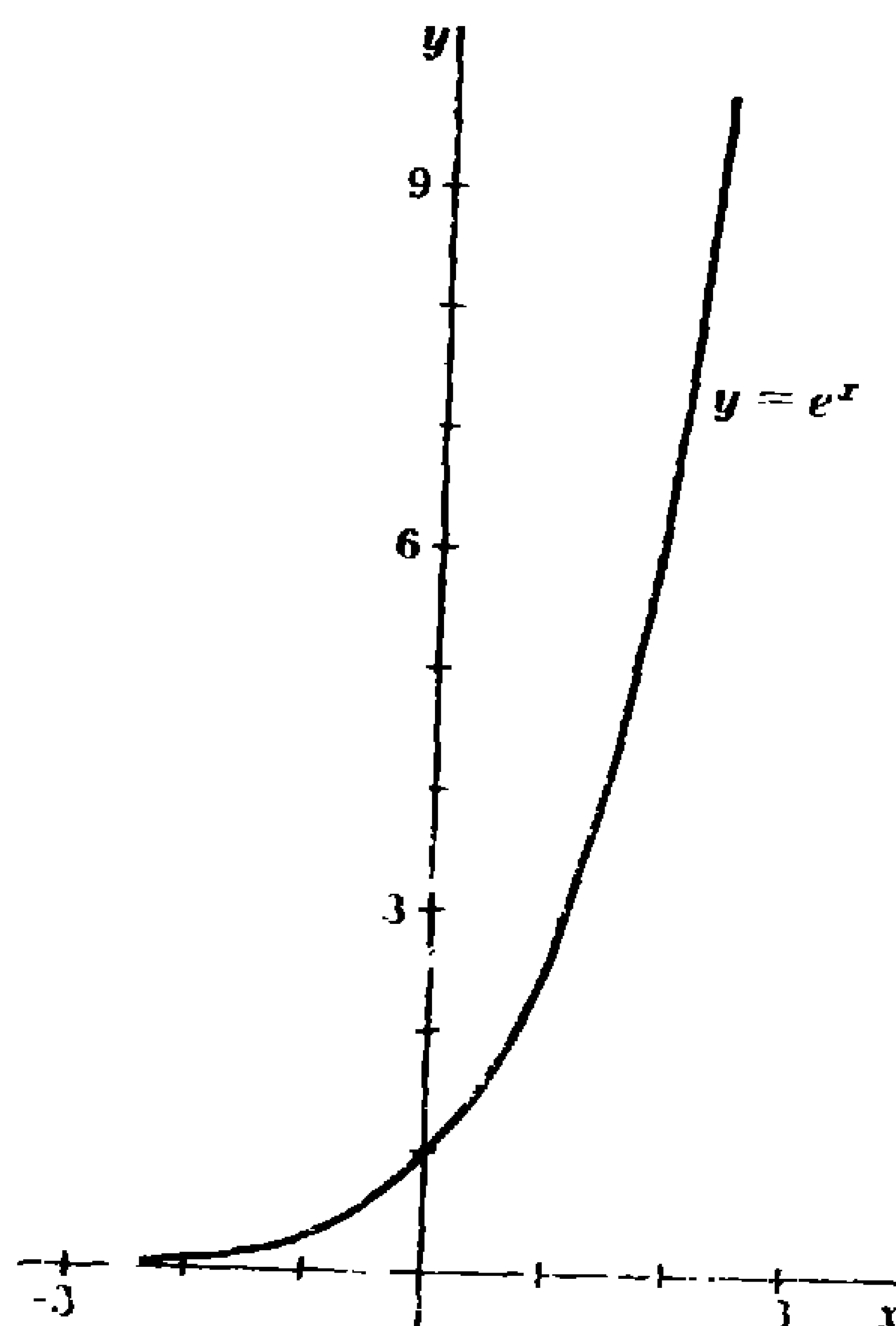
(٥)

بما أن e^x هى دالة متزايدة ، النصف الأيمن لهذه المتباينة يتضمن أن $e^r < e^u$ وهذا بدوره ، لأن L أيضا متزايدة ، يتضمن أن

$$L(e^u) < r < u$$

بما أن r عدد كسرى والتمهيدية قد برهنت للأسس الكسرية ، فإن $L(e^r) = r$ ، ومن ثم : $r < L(e^u)$. لكن هذا يناقض (٥) ، وإذن $L(e^u)$ لايمكن أن تكون أقل من u . برهان مماثل يبين أن $L(e^u)$ لايمكن أن تكون أكبر من u . هذا يجعل $L(e^u) = u$ الاحتمال الوحيد ، وبذلك يكمل البرهان .

نستخدم هذه التمهيدية لايجاد قيمة نهاية نحتاج إليها لايجاد مشتقة e^x.



شكل ٧ ـ ٨

٧ ـ ٤ تمهيدية $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

البرهان . بتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدالة L فوق الفترة التى طرفاها النقطتان e^h و 1 ، يكون

$$L(e^h)-L(1)=(e^h-1)L'(z)$$

لقيمة ما z بين e^h و 1 . بما أن $L(e^h)=h$ بالتمهيدية ٧ ـ ٣ ، و $L(1)=0$ ، وأيضا $L'(z)=1/z$ ، من (٢) ، فهذا يختزل إلى $h=(e^h-1)(1/z)$. من هذا ، يكون

$$e^h=1+hz \quad \text{و} \quad \frac{e^h-1}{h}=z \qquad (٦)$$

لأننا نهتم بقيم h القريبة من الصفر ، فليس بقيد حقيقى أن نفترض أن $h<1$. إذا كانت $0<h<1$ ، فان $1=e^0<e^h<e$. بما أن z بين e^h و 1 فإن $1<z<e^h<e$ ، ومن (٦) ، يكون

$$1<\frac{e^h-1}{h}=z<e^h=1+hz<1+he \qquad (٧)$$

إذا كانت $h<0$ ، فإن $e^h<z<1$ و $e^h<e^0=1$ ، إذن $hz>0$ ، لأن $h>0$ ويكون

$$1>z=\frac{e^h-1}{h}>e^h=1+hz>1+h \qquad (٨)$$

تطبيق نظرية الحصر على (٧) و (٨) يبين أن $\lim_{h\to 0}[(e^h-1)/h]=1$.

مسائل :

١ ـ باستخدام جدول e^x الموجود فى التذييل B ، خطط الشكل البيانى للدالة $y=e^x$.

٢ ـ إذا كانت $f(x)=L(x)/x$ ، فأوجد $f'(x)$.

٣ ـ حقق أن $L(4)\approx 1.39$ بتقريب المساحة تحت المنحنى $y=1/x$ بين 4 و 1 بقاعدة شبه المنحرف بفترات جزئية طولها 0.25 .

٤ ـ اثبت أن $e\approx 2.7$ بتقريب المساحة تحت المنحنى $y=1/x$ بين 2.7 و 1 بقاعدة شبه المنحرف بفترات حزئية طولها 0.1 .

٥ ـ استخدم الشكل البيانى لـ L لايجاد المساحة تحت المنحنى $y=1/x$ (أ) بين 7 و 1 ، (ب) بين 8 و 3 .

٦ ـ استخدم الشكل البيانى لـ L لايجاد العدد m الذى يجعل المساحة تحت المنحنى $y=1/x$ بين m و 1 تساوى 1.5 .

٧ ـ أوجد شاهدا يدعم أن $\lim_{h\to 0}[(e^h-1)/h]=1$ بحساب $(e^h-1)/h$ لقيم صغيرة متعددة لـ h موجبة وسالبة . (ارشاد : استخدم جدول e^x الموجودة فى التذييل B) .

٨ ـ من المعادلة (٦) ، $e = (1 + hz)^{1/h}$ ، حيث z بين e^h و 1 اذن لقيم h الصغيرة تكون $e \approx (1 + h)^{1/h}$ (لماذا ؟) . أوجد قيمة e بحساب $(1 + h)^{1/h}$ عندما $h = 1 , 0.5 , 0.1 , 0.01$. يمكن استخدام اللوغاريتمات .

٩ ـ العدد e عرف بأنه العدد الذى يجعل $L (e) = 1$. ما هى خاصية L التى تؤكد أنه يوجد عدد واحد فقط هكذا ؟

١٠ ـ اثبت أن $L (at) = L (a) + L (t)$ لجميع $t > 0$ و $a > 0$ [ارشاد :

$$L(at) = \int_1^{at} \frac{dx}{x} = \int_1^{a} \frac{dx}{x} + \int_a^{at} \frac{dx}{x}$$] .

أجر تغييرا للمتغير فى التكامل الثالث بوضع $y = x / a$.)

١١ ـ لماذا يكون الجزء الأول من برهان التمهيدية ٧ ـ ٣ ، الى (٤) ، ليس صحيحا لجميع قيم r الحقيقية ؟ لو كان صحيحا ، لامكن حذف باقى البرهان .

٧ ـ ٣
مشتقة e^x

بمعلومات التمهيدية ٧ ـ ٤ ، من السهل ايجاد مشتقة e^x .

٧ ـ ٥ $$De^x = e^x$$

البرهان . لتكن $f (x) = e^x$ من تعريف المشتقة ، يكون

$$De^x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x(1) = e^x$$

الدالة الأسية دالة مميزة ، مشتقتها هى نفسها . فى بند ٧ ـ ٦ سنرى ما إذا كاذ يوجد دوال أخرى بهذه الخاصية .

لايجاد مشتقة تعبير مثل e^{x^2+3x} ، نحتاج الى تعميم للقاعدة ٧ ـ ٥ الى الدوال التى على الصورة $e^{g(x)}$.

٧ ـ ٦ $$De^{g(x)} = e^{g(x)}g'(x)$$ بشرط وجود $g'(x)$.

البرهان . كما نتوقع ، نعبر عن $e^{g(x)}$ كدالة تركيبية لدالتين ونستخدم قاعدة السلسلة . ضع : $z = g (x)$ و $f (z) = e^z$. فيكون

$$e^{g(x)} = f(g(x))$$

من القاعدة ٧ ـ ٥ ، يكون $f'(z) = e^z$ ، واذن بقاعدة السلسلة يكون

$$De^{g(x)} = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) = e^z g'(x) = e^{g(x)}g'(x)$$.

مثال ١ . أوجد De^{x^2+3x}

هنا $g(x) = x^{2+3x}$ وبالقاعدة ٧ ـ ٦ ، يكون

$$De^{x^2+3x} = e^{x^2+3x}D(x^2+3x) = e^{x^2+3x}(2x+3)$$

مثال ٢ . أوجد $Dx^2e^{\sqrt{x}}$.

بما أن التعبير المطلوب اجراء تفاضله هو حاصل ضرب ، فنبدأ بقاعدة حاصل الضرب ، ويكون

$$Dx^2e^{\sqrt{x}} = x^2\, De^{\sqrt{x}} + 2xe^{\sqrt{x}}$$

لايجاد $De^{\sqrt{x}}$ ، نستخدم القاعدة ٧ ـ ٦ ونحصل على

$$Dx^2e^{\sqrt{x}} = x^2e^{\sqrt{x}}D\sqrt{x} + 2xe^{\sqrt{x}} = x^2e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2xe^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}(\tfrac{1}{2}x^{3/2} + 2x)$$

مثال ٣ . أوجد $\frac{d}{dx}(e^{-4x}+x^2)^3$

التعبير المطلوب اجراء تفاضله هو قوة . نبدأ بقاعدة القوة ثم نستخدم القاعدة ٧ ـ ٦ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{-4x}+x^2)^3 &= 3(e^{-4x}+x^2)^2\frac{d}{dx}(e^{-4x}+x^2)\\ &= 3(e^{-4x}+x^2)^2[e^{-4x}(-4)+2x]\\ &= 6(e^{-4x}+x^2)^2(-2e^{-4x}+x).\end{aligned}$$

مثال ٤ . اذا كانت $g(x) = e^x / x$ ، فأوجد أصفار $g'(x)$.

باستخدام قاعدة خارج القسمة يكون

$$g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = e^x\frac{x-1}{x^2}$$

بما أن e^x لاتكون أبدا صفرا ، فان $g'(x) = 0$ فقط اذا كانت $(x-1)/x^2 = 0$ ، أى أن فقط اذا كانت $x = 1$. الشكل البيانى للدالة g اذن له مماس أفقى عند النقطة $(1, e) \approx (1, 2.7)$.

لأن مشتقة التعبير المحتوى على $e^{g(x)}$ هى أيضا تحتوى على $e^{g(x)}$ ، فاننا نتوقع أن المعكوس التفاضلى للتعبير المحتوى على $e^{g(x)}$ أيضا يتضمن $e^{g(x)}$. القاعدة ٧ ـ ٦ تبين أن أى تعبير على الصورة $e^{g(x)}g'(x)$ سيكون لها $e^{g(x)}$ كمعكوس تفاضلى .

مثال ٥ . اجر التكامل $\int 3xe^{x^2}\,dx$

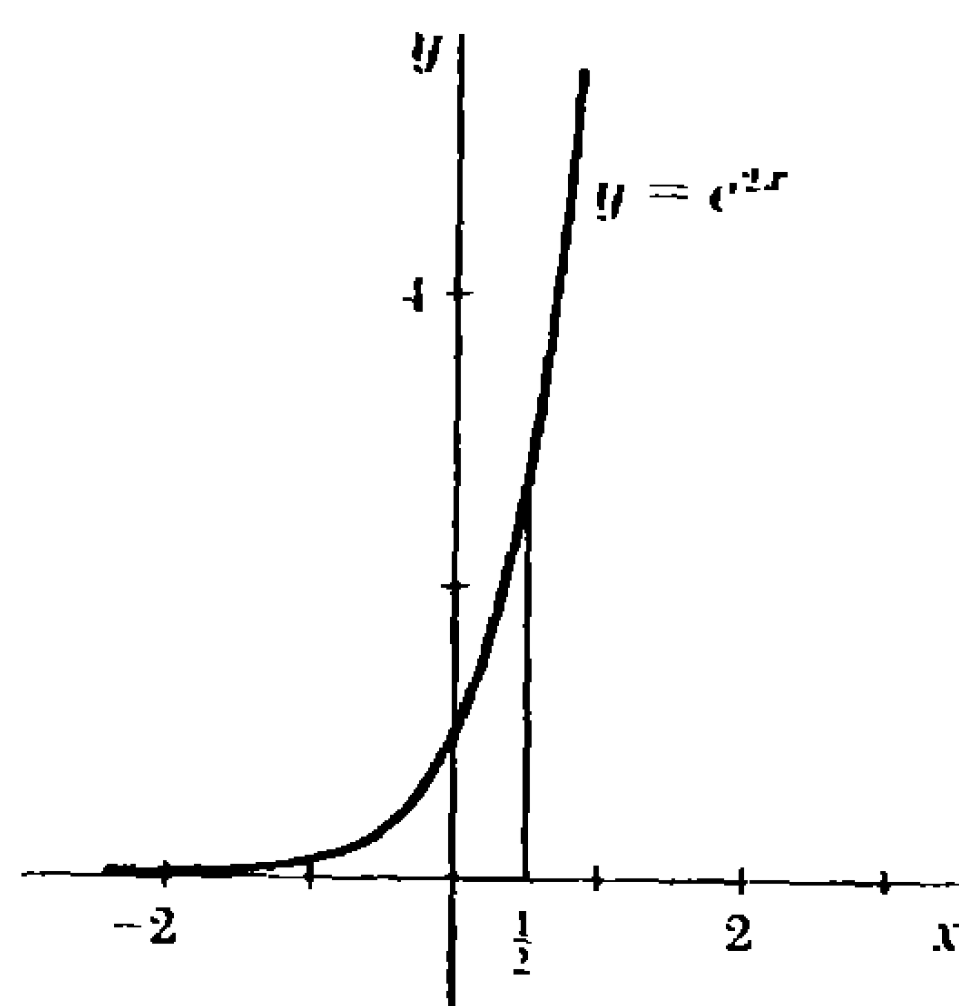
ماعدا لعامل ثابت ، الدالة المكاملة هى على الصورة $e^{g(x)}g'(x)$ ، حيث $g(x) = x^2$. هذا يوحى بأن نحاول e^{x^2} كتخمين أول لمعكوس تفاضلى . بمقارنة $\frac{d}{dx}e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ بالدالة المكاملة ، نرى تعديل تخميننا الى $\frac{3}{2}e^{x^2}$ ، وهذا صحيح . لذلك $\int 3xe^{x^2}\,dx = \frac{3}{2}e^{x^2} + C$.

مثال ٦ . أوجد المساحة تحت المنحنى $y = e^{2x}$ بين $\frac{1}{2}$ و -2 (شكل ٧ ـ ٩) .

المساحة A تعطى بـ

$$A = \int_{-2}^{1/2} e^{2x}\, dx = \tfrac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-2}^{1/2} = \tfrac{1}{2}(e - e^{-4})$$

$$\approx \tfrac{1}{2}(2.718 - 0.018) = 1.350$$



شكل ٧ ـ ٩

لقد استخدمنا الجدول الموجود فى التذييل لايجاد $e^{-4} \approx 0.018$

مثال ٧ . أوجد قيمة $\int_0^1 3e^{x^2}\, dx$

كل تخمين معقول لمعكوس تفاضلى لـ $3e^{x^2}$ يتضمن e^{x^2} لكن مشتقة هذه تعطى x غير مرغوب فيها . لأن $3e^{x^2}$ متصلة ، النظرية الأساسية للتكامل تؤكد وجود معكوس تفاضلى لكن لاتعد بأنه يمكن التعبير عنه فى صورة بسيطة . يمكن اثبات أن المعكوس التفاضلى لـ $3e^{x^2}$ لايمكن التعبير عنه بدلالة الدوال العادية . أفضل ما يمكننا عمله هو ايجاد تقريب للتكامل المعين .

بما أن e^x قابلة للتفاضل ، فهى متصلة فى كل مكان . أعم من ذلك ، $a^{g(x)}$ و $e^{g(x)}$ متصلتان طالما كانت $g(x)$ متصلة (المسألة ٨٩) . فمثلا ، $e^{1/(x+1)}$ متصلة عند كل $x = -1$.

من التمهيدية ٧ ـ ٣ مع $L(a)$ مكان u ، يكون $L(e^{L(a)}) = L(a)$ ، ولأن L هى دالة متزايدة ، فيحتم أن يكون $t_1 = t_2$ اذا ما كانت $L(t_1) = L(t_2)$. واذن

$$e^{L(a)} = a$$

من ثم $a^x = e^{xL(a)}$ ، ومرة أخرى بالتمهيدية ٧ ـ ٣ يكون

$$L(a^x) = L(e^{xL(a)}) = xL(a) \qquad (١)$$

هذا هو تعميم للتمهيدية ٧ ـ ٣ ، يختزل اليها عندما $a = e$.

٧ ـ ٧ **نظرية .** إذا كانت $a > 1$ ، فان $\lim_{x\to -\infty} a^x = 0$ و $\lim_{x\to \infty} a^x = \infty$.

البرهان . النهاية الأولى تقول أن المنحنى $y = a^x$ فى آخر الأمر يقطع ويظل فوق كل خط مستقيم أفقى $y = M$. لبرهنة ذلك ، يجب اثبات أنه اذا أعطينا أى عدد M فانه يوجد عدد N بحيث أن $a^x > M$ لكل $x > N$. لتكن M أى عدد موجب . فيكون ، باستخدام (١) ، $a^x > M$ اذا واذا كان

$$L(a^x) = xL(a) > L(M) \qquad (٢)$$

[لماذا $a^x > M$ تتضمن $L(a^x) > L(M)$ ؟] بما أن $a > 1$ ، فان $L(a) > 0$ والعبارة (٢) تكون صحيحة اذا واذا فقط كان $x > L(M) / L(a)$. لذلك يمكننا اختيار $N = L(M) / L(a)$.

النهاية الثانية تتبع بسهولة من الأولى (المسألة ٨٧) . وهى تبين أن المنحنى $y = a^x$ يكون مقاربا للمحور السينى السالب .

الدالة a^x ، حيث $a \neq e$ ، أقل أهمية من e^x مع أننا يمكننا ايجاد مشتقتها الآن ، الا أننا سننتظر الى حين الانتهاء من مناقشة اللوغاريتمات .

مسائل

أوجد مشتقة ما يأتى :

١ - e^{-5x} ٢ - e^{3x^2-1} ٣ - e^{ax+b}

٤ - $\frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$ ٥ - $\frac{c}{2}(e^{x/c} - e^{-x/c})$ ٦ - e^{x^2+x+4}

٧ - t^2e^{-t} ٨ - $xe^{x/2}$ ٩ - $(3 - 4x)e^{-5x}$

١٠ - $(7x^2 + 5x - 2)e^{-2x+5}$ ١١ - z^2e^{-az} ١٢ - $xe^x - 5e^{2x} - 7$

١٣ - $1/e^{x/4}$ ١٤ - e^ce^{9x} ١٥ - $1/e^{2x-7}$

١٦ - be^{au} ١٧ - $(2 + e^x)^2$ ١٨ - $-7(u + e^{2u})^5$

١٩ - $e^{-3x}/(x - 1)$ ٢٠ - $x/5e^{x/3}$ ٢١ - $x(e^x - e^{-x})^2$

٢٢ - $e^{ax}(\sin bx + \cos bx)$ ٢٣ - $e^{1/x}$ ٢٤ - $\frac{cx - 1}{c^2} e^{cx}$

٢٥ - $\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$ ٢٦ - $4\sqrt{e^x}$ ٢٧ - $\sqrt{3(e^t + e^{-t})}$

٢٨ - $e^{-ax}\sqrt{e^{bx} + 2}$ ٢٩ - $e^u/\sqrt{e^{2u} - 1}$ ٣٠ - $e^{\sin x}$

٣١ - $e^{\sin^{-1} x}$ ٣٢ - $\tan^{-1} e^x$ ٣٣ - $e^{e^{-2x}}$

٣٤ - $x^2e^{3x} \sin 2x$

أوجد dy / dx لما يأتى :

٣٥ - $e^y = \sin x$ ٣٦ - $y + e^y = x$ ٣٧ - $e^y y^2 = x^2 + 2x$ ٣٨ - $e^{xy} = \cos (x + 2y)$

للدوال الآتية ، أوجد تقريبا عشريا للمشتقة $f'(a)$ عند القيمة المعطاه a :

٣٩ - $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x/2} + e^{-x/2}), a = 3$ ٤٠ - $f(x) = e^{x^2}, a = 0.9$ ٤١ - $f(x) = (x/2)e^{2x}, a = 1.7$

٤٢ - اذا كانت $y = e^{2x-1}/e^{2x+1}$ ، فاثبت أن $y' = 1 - y^2$.

٤٣ - أوجد القيمة العظمى للدالة $f(x) = 2x + e^{-2x}$ فى الفترة $[-1, 1]$.

٤٤ - تحقق أن e^{-3x} و e^{2x} هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y / dx^2 + dy / dx - 6y = 0$. أثبت أن $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$ لأى ثابتين c_2 و c_1 ، هو ايضا حل .

٤٥ - تحقق أن e^{-x} و e^x هما حلان للمعادلة التفاضلية $y'' = y$ أوجد حلا يمر بالنقطة $(0, 3)$ بميل قدرة 1 هناك . (ارشاد : انظر المسألة ٤٤)

٤٦ - اختر الثابت m بحيث أن $s = e^{mt}$ يكون حلا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 5\frac{ds}{dt} - 6s = 0$$

٤٧ - اذا كانت $x = e^{-t} \sin t$ ، فاثبت أن $d^4x / dt^4 + 4x = 0$ لجميع t . أوجد حلا آخر لهذه المعادلة التفاضلية .

خطط الشكل البيانى للدوال الآتية وأوجد نقط الانقلاب ، أن وجدت.(يمكنك افتراض أن $\lim_{x \to \infty} (e^x/x^n) = \infty$

٤٨ - $f(x) = e^{-x}$ ٤٩ - $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ ٥٠ - $f(x) = xe^x$ ٥١ - $f(x) = e^{-x}/x$

٥٢ - $g(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ٥٣ - $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ٥٤ - $f(x) = x^2e^x$

٥٥ - أوجد الأجزاء المقطوعة ومكان حدوث النهايات القصوى الموضعية للمنحنى : $y = e^{-x} \sin x$. أثبت أن هذا المنحنى يمس المنحنيين $y = -e^{-x}$ و $y = e^{-x}$ كلما كان له نقطة مشتركة مع أى منهما ، ارسم الشكلين البيانيين $y = -e^{-x}$ و $y = e^{-x}$ على نفس المحورين . واستخدم المعلومات السابقة لتخطيط المنحنى $y = e^{-x} \sin x$ أوجد الانقلاب لهذا المنحنى .

اجر التكاملات الآتية :

٥٦ - $\int 2e^{3x+2}\,dx$ ٥٧ - $\int e^{ax}\,dx$ ٥٨ - $\int ex\,dx$

٥٩ - $\int e^{-t/2}\,dt$ ٦٠ - $\int_0^c e^{ax+b}\,dx$ ٦١ - $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

٦٢ - $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx$ ٦٣ - $\int e^s \cos e^s\,ds$ ٦٤ - $\int \frac{x^2\,dx}{e^{x^3}}$

٦٥ - $\int \frac{e^z - 2}{e^z}\,dz$ ٦٦ - $\int \sqrt{e^x}\,dx$ ٦٧ - $\int \frac{3dx}{e^{4x+1}}$

٦٨ - $\int \frac{e^z}{(e^z + 3)^2}\,dz$ ٦٩ - $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$ ٧٠ - $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\,dx$

٧١ - $\int (x + 3)e^{x^2+6x}\,dx$

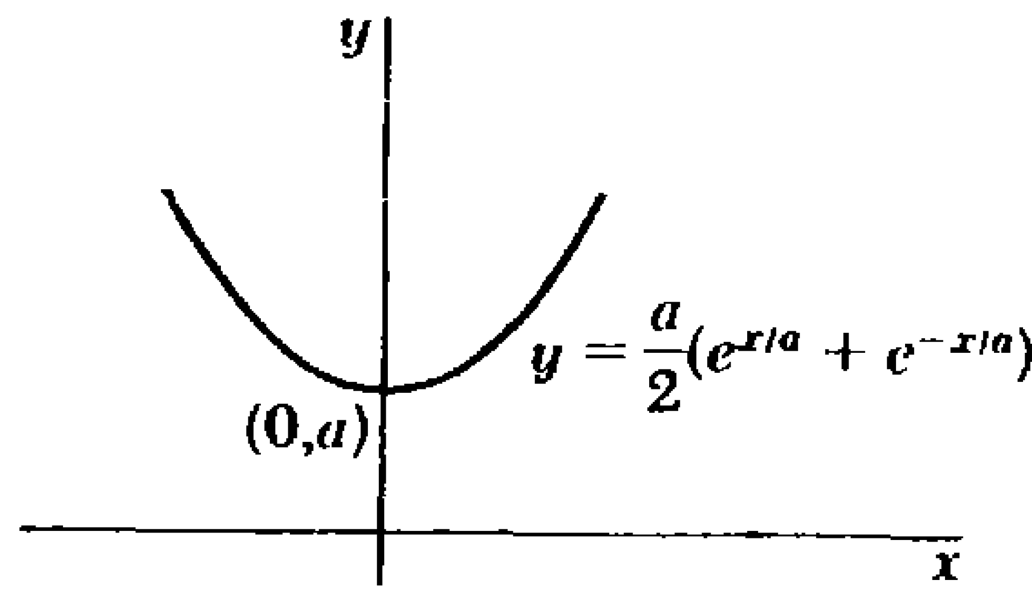
أوجد تقريباً عشرياً للتكاملات الآتية :

٧٢ ـ $\int_{1}^{2} 2e^{-2x}\,dx$ ٧٣ ـ $-\int_{0}^{3} e^{u-2}\,du$

أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنيين الآتيين بين العددين المعطيين :

٧٤ ـ $y = e^{x/2}: -2, 4$ ٧٥ ـ $y = xe^{-x^2}: 0, 2$

٧٦ ـ عندما تعلق سلسلة من طرفيها تأخذ شكل منحنى يسمى الكتينة . معادلتها عندما يوضع المحوران كما فى الشكل ٧ ـ ١٠ هى $y = (a/2)(e^{x/a} + e^{-x/a})$ حيث الثابت $a > 0$ هو بعد أدنى نقطة للسلسلة فوق المحور السينى . اثبت أن مساحة المنطقة تحت الكتينة بين a و $-a$ هى $a^2(e - e^{-1})$.



شكل ٧ ـ ١٠
الكتينة

٧٧ ـ رسم المماس عند نقطة P على الكتينة فى المسألة ٧٦ . لتكن A مسقط النقطة P على المحور السينى ، ولتكن T مسقط A على المماس . اثبت أن المسافة $|AT|$ هى نفس المقدار لجميع اختيارات P .

٧٨ ـ المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = be^{ax}$ والمحورين السينى والصادى والخط المستقيم $x = c$ ، حيث $c > 0$ ، دارت حول المحور السينى . أوجد حجم الجسم الناشىء بهذه الكيفية .

٧٩ ـ حل المعادلة التفاضلية $e^{x+y}\, dy/dx + 1 = 0$.

٨٠ ـ أوجد مساحة أكبر مثلث يقع فى الربع الأول ومتكون من المحور السينى والمحور الصادى ومماس للمنحنى $y = e^{-x}$.

٨١ ـ أثبت أن المعادلة $x + e^x = 0$ لها جذر واحد ، وواحد فقط . أوجد الجذر الى أقرب 0.1.
(ارشاد : خذ فى الاعتبار الشكل البيانى لـ $y = x + a^x$)

٨٢ ـ أوجد $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cos x$ ٨٣ ـ إذا كانت $f(t) = \int_0^t e^{x^2}\,dx$ فأوجد $f'(2)$

٨٤ ـ المنحنى الطبيعى للخطأ

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad (٣)$$

يستخدم بكثرة فى الاحتمالات والاحصاء . خطط المنحنى وأوجد نقط الانقلاب له . رغم أن المعكوس التفاضلى لـ $e^{-x^2/2}$ لايمكن التعبير عنه بدلالة دوال معروفة لنا ، إلا أنه يمكن

إثبات أن المساحة تحت المنحنى (٣) بين 4 و 0 هى 0.5000 ، صحيحة الى أربعة أرقام عشرية . قرب المساحة تحت المنحنى $y = e^{-x^2/2}$ بين 4 و 0 بقاعدة شبه المنحرف وبفترات جزئية طولها 0.5 ، واستخدم هذا لايجاد تقريب لـ π .

٨٥ ـ خطط المنحنى $y = e^{-x^2}$. أوجد مساحة أكبر مستطيل أحد جوانبه على المحور السينى ، وجانب آخر على الخط المستقيم $x = -\frac{1}{2}$ ، ورأسه المقابل لنقطة تقاطعهما على المنحنى .

٨٦ ـ أوجد تعبيرا لـ $D^n (x e^x)$. (ارشاد : من المشتقات الأربع أو الخمس الأولى خمن المشتقة النونية . أثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضى) .

٨٧ ـ أثبت أنه اذا كانت $a > 1$ ، فان $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ (ارشاد : ضع $x = -z$) .

٨٨ ـ اثبت أنه اذا كانت $0 < a < 1$ ، فان $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$
(ارشاد : $a = 1 / (1 / a)$)

٨٩* ـ (أ) أثبت أن $e^{g(x)}$ تكون متصلة أينما كانت $g(x)$ متصلة . (ارشاد : ضع $f(z) = e^z$ ، فيكون $(e^{g(x)} = f(g(x))$. (ب) أثبت أن $a^{g(x)}$ تكون متصلة أينما كانت $g(x)$ متصلة . (ارشاد $a = e^{L(a)}$) .

٧ ـ ٤
اللوغاريتمات

العدد يمكن التعبير عنه بطرق كثيرة ، فمثلا ، 72 يمكن كتابتها $\frac{144}{2}$ و $(3)(24)$ و $22 + 50$. صورة أخرى هى قوة للعدد 10 :

$$72 = 10^{1.8573} \qquad (١)$$

الأس 1.8573 الذى يجب وضعه فوق 10 ليعطى 72 يسمى لوغاريتم العدد 72 للأساس 10 ويرمز له بالرمز $\log_{10} 72$ بما أن $10^{1.8573}$ لايساوى 72 بالضبط ، فالأصح كتابة

$$72 \approx 10^{1.8573} \text{ and } 1.8573 \approx \log_{10} 72$$

بوجه عام ، اذا عبرنا عن عدد t كقوة للعدد 10 ، فان الأس فوق 10 يسمى لوغاريتم العدد t للأساس 10 ويرمز له بالرمز $\log_{10} t$. أى أن ،

$$t = 10^{\log_{10} t}$$

للتبسيط ، عادة سنحذف دليل الأساس 10 ونكتب $\log t$ لـ $\log_{10} t$ فمثلا ،

$3 = \log 1000$ لأن $1000 = 10^3$

$2.3729 \approx \log 236$ لأن $236 \approx 10^{2.3729}$

$0.7924 \approx \log 6.2$ لأن $6.2 \approx 10^{0.7924}$

$-0.8557 \approx \log 0.1394$ لأن $0.1394 \approx 10^{-0.8557}$

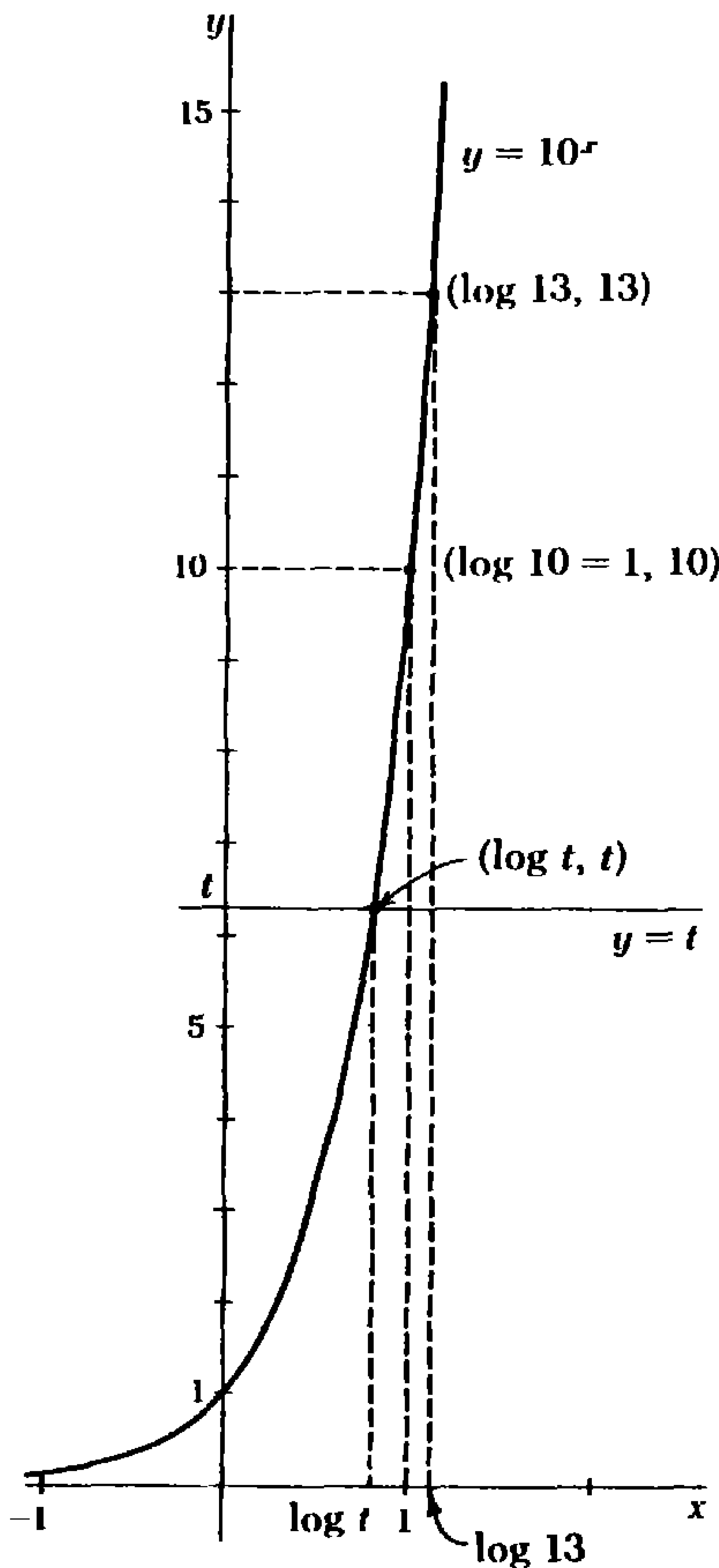
٧ ـ ٨ تعريف . لكل $t > 0$ ، يكون $\log t$ (أى $\log_{10} t$) العدد حيث $10^{\log t} = t$.

بما أن لاقوة للعدد 10 يمكن أن تكون صفرا أو سالبة ، فهذه الأعداد ليس لها لوغاريتمات . أيضا ، اذا كانت $\log t \geqslant 0$ ، فان

$$t = 10^{\log t} \geqslant 10^0 = 1$$

وبالعكس . بالمثل ، $\log t < 0$ اذا واذا فقط كان $0 < t < 1$.

قبل أن نستطيع الحديث عن $\log t$ يجب اثبات أن العدد الممثل بالرمز موجود ، أى أن ، توجد قوة ما للعدد 10 تساوى t . فى معظم الأمثلة السابقة لدينا فقط تقريب للقوة . الشكل البيانى لـ $y = 10^x$ موضح فى الشكل ٧ ـ ١١ . لأن $\lim_{x \to -\infty} 10^x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} 10^x = \infty$ بالنظرية ٧ ـ ٧ ، فانه توجد نقط على الشكل البيانى أعلى وأسفل أى خط مستقيم أفقى معطى $y = t$ واقع أعلى المحور السينى . الدالة $f(x) = 10^x$ متصلة فى أى مكان (الجزء (ب) من المسألة ٨٩ ، بند ٧ ـ ٣) . اذن نظرية القيمة الوسط ٥ ـ ٦ تؤكد أن الخط المستقيم $y = t$ يقطع الشكل البيانى ، ولأن 10^x دالة



شكل ٧ ـ ١١
$\log t$ هو الاحداثى السينى لتقاطع الخط المستقيم $y = t$ مع المنحنى $y = 10^x$.

متزايدة يقطعه مرة واحدة فقط . أنه الاحداثى السينى لنقطة التقاطع هذه ، ما هو $\log t$ ، لأن $10^x =$ t . لذلك $\log t$ موجود ووحيد . كل عدد موجب له لوغاريتم واحد فقط . الشكل البيانى يوضح ما سبق أن برهناه وهو أن $\log t \geqslant 0$ لـ $t \geqslant 1$ وان $\log t < 0$ لـ $0 < t < 1$. أيضا ، اذا كانت $t \leqslant 0$ ، فان الخط المستقيم $y = t$ لايقطع الشكل البيانى ، وبالتالى الصفر والاعداد السالبة لايمكن أن يكون لها لوغاريتمات .

يجب على القارىء أن يتذكر أن اللوغاريتمات هى أعداد وأنها تظهر كأسس . مثل الأعداد الأخرى ، يمكن جمعها بعضها على بعض ، ويمكن ضربها فى أعداد ، أوحتى ، إذا كانت موجبة ، فهى ذاتها لها لوغاريتمات .

مثال ١ . حل المعادلة $\log (x + 7) = 2$
ارفع طرفى المعادلة الى قوة للعدد 10 ، فيكون

$$10^{\log (x+7)} = 10^{-2}$$

من تعريف اللوغاريتم ، الطرف الأيسر هو $x + 7$. ومن ثم يكون $x + 7 = 10^{-2}$ ومنها

$$x = -7 + 10^{-2} = -6.99$$

فائدة اللوغاريتمات فى الحساب ترجع الى ثلاث خواص :

٧ ـ ٩ نظرية . لجميع v و u الموجبة ، يكون

(أولا) $\log (uv) = \log u + \log v$

(ثانيا) $\log \frac{u}{v} = \log u - \log v$

(ثالثا) $\log (u^r) = r \log u$ لأى عدد حقيقى r .

البرهان . براهين هذه الخواص سهلة . لاثبات (أولا) ، لدينا من التعريف ٧ ـ ٨

$$u = 10^{\log u} \quad \text{and} \quad v = 10^{\log v} \qquad (٢)$$

واذن

$$uv = (10^{\log u})(10^{\log v}) = 10^{\log u + \log v}$$

ومن ناحية أخرى ، بالتعريف ، $uv = 10^{\log (uv)}$ اذا كانت قوتان لنفس الاساس متساويتين ، فإن أساهما يجب أن يكونا متساويين (المسألة ٢٨ ، ببند ٧ ـ ١) بناء على ذلك ، يكون

$$\log (uv) = \log u + \log v$$

برهان الخاصية (ثانيا) مماثل . لاثبات (ثالثا) ، لدينا من (٢)

$$u^r = (10^{\log u})^r = 10^{r \log u}$$

لكن بالتعريف $u^r = 10^{\log (u^r)}$ اذن $\log (u^r) = r \log u$.

من الآن فصاعدا سنحذف الأقواس فى التعبيرات مثل $\log (u^r)$. ونكتب $\log u^r$.

توجد فقط اعداد قليلة ، لوغاريتماتها يمكن ايجادها مباشرة من التعريف . فى الفصل السادس عشر سنتعلم كيف نوجد تقريبات كسرية ، لأى درجة نريدها من الدقة ، للوغاريتم أى عدد . يوجد جدول قصير للوغاريتمات للأساس *10* فى التذييل B. الجدول يحتوى على تقريبات صحيحة الى أربعة أرقام عشرية ، للوغاريتمات جميع الأعداد من *1.00* الى *9.99* على فترات قدرها *0.01* .

اللوغاريتمات اكتشفت بواسطة جون نابيير (١٥٥٠ ـ ١٦١٧) الاسكتلندى ، وقد رحب بها كأداة الحاجة اليها ماسة فى الحسابات الفلكية . اليوم الآلات الحاسبة تقوم بالحسابات الروتينية بكفاءة أكثر ، لكن اللوغاريتمات لاتزال تستخدم فى إيجاد القوى والجذور وحل المعادلات الأسية .

مثال ٢ . حل المعادلة $4^z = 72$

بأخذ لوغاريتم الطرفين ، نحصل على المعادلة المكافئة

$$\log 4^z = \log 72,$$

أو

$$z \log 4 = \log 72.$$

اذن

$$z = \frac{\log 72}{\log 4} = \frac{1.8573}{0.6021} = 3.0847 \quad \text{(على وجه التقريب)}^{*} \qquad (٣)$$

لاحظ أن هذه المعادلة تعطى z وليس $\log z$. خارج القسمة فى (٣) يمكن إيجاد قيمته بأى طريقة ملائمة . بوجه خاص ، يمكن استخدام اللوغاريتمات ، لكن هذا ليس ضروريا .

العدد *10* ليس حيويا فى تعريف اللوغاريتم . لا فى التعريف ولا فى براهين النظرية ٧ ـ ٩ استخدمت أى خواص خاصة بالعدد *10* . فى مثال ٢ أوجدنا z بحيث أن

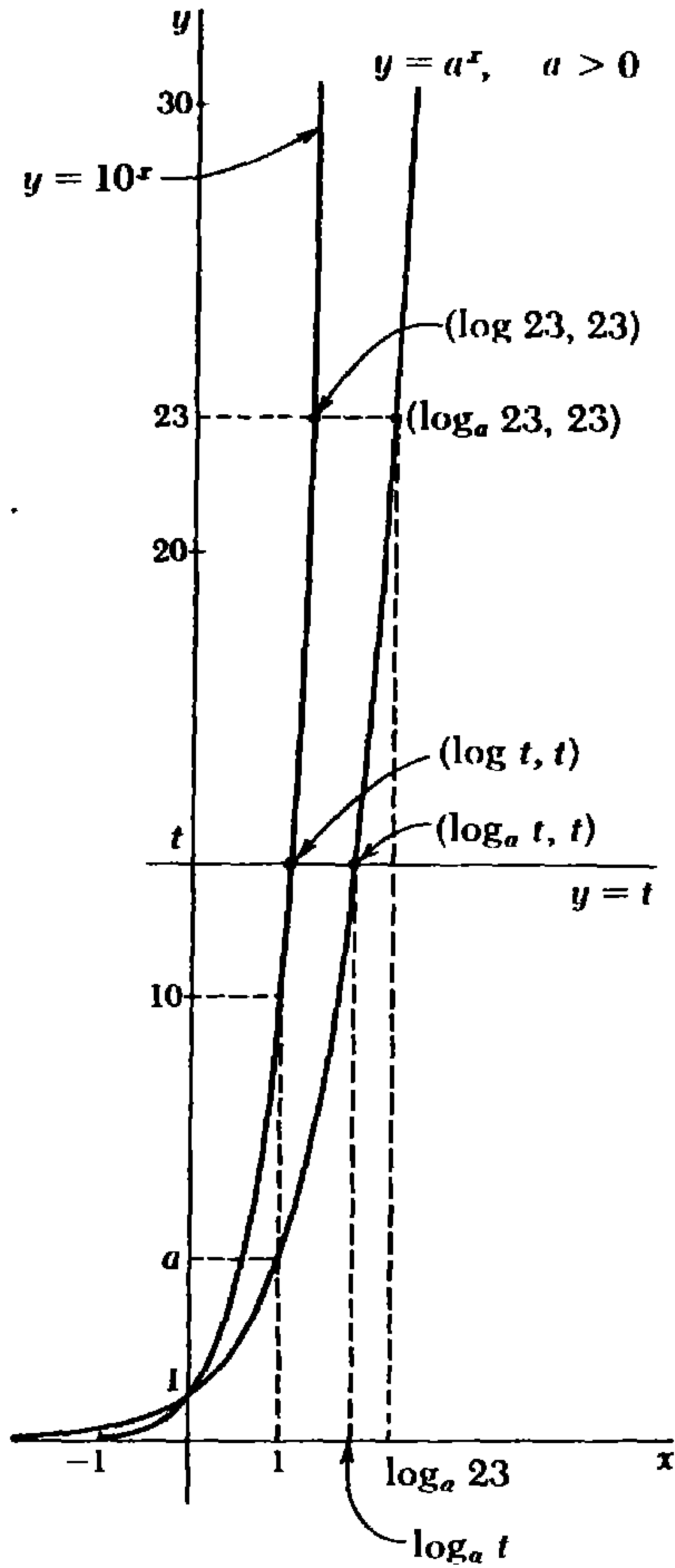
$$4^z = 72 \qquad (٤)$$

هذه الـ z لها مطلب عادل بأن تسمى « لوغاريتم *72* » . لكى نميز بين الاثنين ، نكتب $z = \log_4 72$ ونسمى z لوغاريتم العدد *72* للأساس *4* . وإذن $\log_4 72 = 3.0847$ بينما $\log_{10} 72 = \log 72 = 1.8573$ من (١) .

أى عدد موجب a غير الـ *1* ، سواء كان عدداً صحيحاً أو لم يكن ، يمكن أن يلعب دور العدد **10** فى تعريف اللوغاريتم . العدد x حيث $a^x = t$ يسمى لوغاريتم العدد t للأساس a ويرمز له بالرمز $\log_a t$. أى أن

$$a^{\log_a t} = t$$

* الكتابة الدقيقة هى $\log 72 \approx 1.8573$ and $\log 4 \approx 0.6021$ لكن من المعتاد استخدام علامة التساوى مع مفهومية أن الأرقام العشرية هى فقط تقريبات للوغاريتمات .



شكل ٧ ـ ١٢
$\log_a t$ هو الاحداثى السينى لتقاطع الخط المستقيم $y = t$ مع المنحنى $y = a^x$.

البرهان على أنه يوجد لكل $t > 0$ عدد x بحيث أن $a^x = t$ هو نفسه الذى أعطى سابقا فى حالة $a = 10$. الدالة a^x ، حيث $a > 1$ ، متزايدة ومتصلة فى كل مكان (الجزء (ب) من المسألة ٨٩ ، ببند ٧ ـ ٣) ، وبالنظرية ٧ ـ ٧ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ ومن ثم كل خط مستقيم أفقى $y = t$ يقع فوق المحور السينى يجب أن يقطع المنحنى $y = a^x$ مرة واحدة (شكل ٧ ـ ١٢) . هو الاحداثى x لنقطة التقاطع ما يسمى $\log t$ اذا كانت $0 < a < 1$ فإن a^x تكون متناقصة ، لكن رغما عن ذلك ، فإن الخط المستقيم $y = t$ يقطع المنحنى $y = a^x$ ، وإذن فى هذه الحالة أيضا $\log t$ يوجد .

٧ ـ ١٠ تعريف . ليكن a أى عدد موجب غير الـ 1 . لكل $t > 0$ يكون $\log_a t$ ذلك العدد الذى يجعل

$a^{\log_a t} = t$ فمثلا

$$\log_5 25 = 2 \quad \text{لأن} \quad 5^2 = 25$$

$$\log_4 \tfrac{1}{64} = -3 \quad \text{لأن} \quad 4^{-3} = \tfrac{1}{64}$$

$8^{1/3} = 2$ لأن $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

$23.3^{1.3583} \approx 72$ لأن $\log_{23.3} 72 \approx 1.3583$

أيضا لأى أساس a ، يكون

٧ - ١١ $\log_a 1 = 0$ لأن $a^0 = 1$

ويكون

٧ - ١٢ $\log_a a = 1$ لأن $a^1 = a$

الشكل ٧ - ١٢ يوضح أنه اذا كانت $a > 1$ ، فإن $\log a\ t < 0$ لجميع $0 < t < 1$ أيضا يوضح أن الاعداد السالبة والصفر ليس لها لوغاريتمات .

خواص اللوغاريتمات فى النظرية ٧ - ٩ صحيحة للوغاريتمات لأى أساس ، البرهان هو نفسه المعطى هناك لكن بوضع a مكان 10 . من الواضح أن $\log_a b = \log_a c$ اذا كانت $b = c$. العكس ، ونترك برهانه للقارىء ، (المسألة ١٠٥) ، كثيرا ما يستخدم .

٧ - ١٣ اذا كان $\log_a b = \log_a c$ فإن $b = c$.

توجد صيغة بسيطة تعبر عن لوغاريتم عدد لأساس ما بدلالة اللوغاريتم لأساس آخر . ليكن b و a الأساسين بالتعريف

$$a^{\log_a t} = t$$

خذ لوغاريتمى الطرفين للأساس b ، فيكون

$$\log_b a^{\log_a t} = \log_b t$$

واستخدم النظرية ٧ - ٩ (ثالثا) لتحصل على

$$(\log_a t)(\log_b a) = \log_b t$$

هذا يعطى

٧ - ١٤
$$\log_a t = \frac{1}{\log_b a} \log_b t$$

لأن العدد $1 / (\log_b a)$. هذه القاعدة لتغيير الأساس يعتمد فقط على الأساسيين b و a وليس على t ، فجميع المدخلات فى جدول اللوغاريتمات للأساس a يمكن إيجادها بضرب المدخلات المناظرة فى جدول اللوغاريتمات للأساس b فى العامل الثابت $1 / (\log_b a)$. فمثلا ، إذا كان لدينا جدول لوغاريتمات للأساس 10 ونريد تكوين جدول لوغاريتمات للأساس 4. كل ما نحتاج الى إجرائه هو ضرب كل مدخل فى جدول الأساس 10 فى العدد 1.6608 . $1 / (\log_{10} 4) \approx 1.6608$ ، لأن

$$\log_4 t = \frac{1}{\log_{10} 4} \log_{10} t \approx 1.6608 \log_{10} t$$

رغم أن أى عدد موجب ماعدا الـ 1 يمكن أن يخدم كأساس لنظام لوغاريتمى ، لكن عمليا e و 10 فقط يستخدمان . لأن 10 هو الأساس لنظامنا العددى ، اللوغاريتمات للأساس 10 هى الأكثر

ملاءمة للحساب ، لكن فى تطبيقات حساب التفاضل والتكامل التى تحتوى الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_a x$ ، التعبير للمشتقة يكون الأبسط اذا اختير الأساس a ليكون e . لهذا السبب ، تستخدم اللوغاريتمات للأساس e فى الرياضيات والعلوم .

اللوغاريتمات للأساس 10 تسمى اللوغاريتمات العادية أما تلك للأساس e فتسمى اللوغاريتمات الطبيعية . جدول قصير للوغاريتمات الطبيعية معطى فى التذييل B . فمثلا ، من هذا الجدول ، $\log_e 9.6 \approx 2.2618$ و $\log_e 0.3 \approx -1.2040$ مخالفا لجدول اللوغاريتمات العادية جدول اللوغاريتمات الطبيعية يدون اللوغاريتم بالكامل ، المميز وجميعه . فى الفصل السادس عشر ستتعلم كيف تحسب اللوغاريتمات الطبيعية . حسابها أسهل من حساب اللوغاريتمات العادية ، أليس هذا غريبا ؟ جداول اللوغاريتمات العادية تكوّن بعمل جدول اللوغاريتمات الطبيعية أولا . هذه تحول بعدئذ الى لوغاريتمات عادية بضرب كل مدخل فى العامل $0.43429 \approx (1 / \log_e 10)$ ، وذلك وفقا للقاعدة ٧ ـ ١٤ لتغيير الأساس :

$$\log t = \frac{1}{\log_e 10} \log_e t \approx 0.43429 \log_e t$$

مثال ٣ . حل المعادلة $\log_e (x - 10) = 2t + c$ بالنسبة الى x .

ارفع الطرفين الى قوة للعدد e ، فيكون

$$e^{\log_e (x-10)} = e^{2t+C}$$

بالتعريف $e^{\log_e (x-10)} = x - 10$ ، اذن $x - 10 = e^{2t+C}$, ومنها

$$x = 10 + e^{2t+C} = 10 + e^C e^{2t}$$

مسائل

أوجد تقريبا عشريا لما يأتى (للاعداد بأرقام معنوية أكثر من تلك التى فى جدولك ، استخدم أقرب عدد مدخل فى الجدول)

١ ـ $\log 42.5$ ٢ ـ $\log 0.2568$ ٣ ـ $\log 0.00297$ ٤ ـ $\log \log 213$

أوجد x مستخدما أقرب عدد مدخل فى الجدول ، اذا كان :

٥ ـ $\log x = 0.8913$ ٦ ـ $\log x = 1.5652$ ٧ ـ $\log x = 2.0012$ ٨ ـ $\log x = 9.4120 - 10$

٩ ـ $\log x = -1.7878$

استخدم اللوغاريتمات لإيجاد القيمة التقريبية لما يأتى :

١٠ ـ $81.3(0.1117/66.8)$ ١١ ـ $0.04674^{1/2}$ ١٢ ـ $18^{3/4}$ ١٣ ـ 1.06^{-22}

١٤ ـ $12^{1.6}\sqrt{23.44}$ ١٥ ـ $159^{0.806}$ ١٦ ـ 2^{π} ١٧ ـ $10^{\log 17.6}$

١٨ ـ أوجد نصف قطر الكرة التى حجمها 136 cu in

١٩ ـ الزمن الدورى للبندول هو الزمن الذى يأخذه البندول لعمل ذبذبة كاملة ذهابا وايابا . بندول بسيط طوله l ft يتذبذب داخل قوس صغير ، زمنه الدورى T (بالثوانى) يعطى بالتقريب بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ، حيث $g \approx 32$ ft / sec / sec (أ) أوجد بالتقريب الزمن الدورى لبندول طوله 10.8 ft (ب) ماهو بالتقريب طول البندول الذى يجعل الزمن الدورى 2.75 sec ؟

٢٠ ـ عند وقت معين تحتوى مزرعة بكتيرية 500 بكتيريا . بعد t يوما المزرعة تحتوى $500\ (2^t)$ بكتيريا . (أ) ما هو عددها بعد 2.5 يوما ؟ (ب) متى ستحتوى المزرعة 20000 بكتيريا ؟

٢١ ـ معمل به كمية من الراديوم وزنها 0.0108 gram ، بعد t سنة وزن الكمية المتبقية يعطى بالصيغة $0.0108(\frac{1}{2})^{t/1600}$ gram . كم سيوجد بعد 500 سنة ؟

عبر عن الآتى بدلالة $\log 3$ و $\log 2$:

٢٢ ـ $\log \frac{3}{8}$ ٢٣ ـ $\log 36$ ٢٤ ـ $\log \sqrt{13.5}$

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى x :

٢٥ ـ $\log x = 0$ ٢٦ ـ $\log x = -1$ ٢٧ ـ $\log (3x+2) = 3$

٢٨ ـ $\log (3 - x^2) = -2$ ٢٩ ـ $\log x = 1.4014$ ٣٠ ـ $\log (x+6) = kt + C$

حل المتباينات الآتية :

٣١ ـ $\log x \geqslant 2$ ٣٢ ـ $\log x < -3$ ٣٣ ـ $\log (z+5) < 0$ ٣٤ ـ $\log |x| < -1$

أوجد حلا تقريبيا عشريا للدوال الآتية :

٣٥ ـ $2^x = 15$ ٣٦ ـ $6^{2x-1} = 76$ ٣٧ ـ $11^{3x} = 11^{x+4}$ ٣٨ ـ $0.41^t = 5$

٣٩ ـ $(\frac{2}{3})^{x-6} = 17$ ٤٠ ـ $2^{|x|} = 50$ ٤١ ـ $2^x + 12/2^x = 8$ ٤٢ ـ $\log (4z+10) = 2 + \log z$

٤٣ ـ اشرح الفرق فى المعنى بين $\log 23.7^2$ $(\log 23.7)^2$ أوجد قيمة كل منهما .

٤٤ ـ بافتراض الجزءين (أولا) و (ثالثا) من النظرية ٧ ـ ٩ ، اثبت الجزء (ثانيا) . استخدم تعريف اللوغاريتم لايجاد مايأتى :

٤٥ ـ $\log_2 16$ ٤٦ ـ $\log_3 27$ ٤٧ ـ $\log_{27} 3$ ٤٨ ـ $\log_2 \sqrt{2}$ ٤٩ ـ $\log_4 \frac{1}{\sqrt{64}}$

٥٠ ـ $\log_e \frac{1}{e}$ ٥١ ـ $\log_{12} 1$ ٥٢ ـ $\log_{1/2} 64$ ٥٣ ـ $\log_{\sqrt{5}} 5$

أوجد N أوجد a اذا كان

٥٤ ـ $\log_{10} N = 4$ ٥٥ ـ $\log_8 N = \frac{1}{3}$ ٥٦ ـ $\log_5 (N+2) = \frac{1}{3}$ ٥٧ ـ $\log_e N = -2$

أوجد a اذا كان

٥٨ ـ $\log_a 36 = 2$ ٥٩ ـ $\log_a 8 = -1$ ٦٠ ـ $\log_a 1 = 0$

رتب الأعداد فى الفئتين التاليتين ترتيبا تصاعديا (ليس من الضرورى إيجاد تقريبات عشرية لعمل ذلك) .

٦١ ـ $\log_{10} 13, \log_7 13, \log_{1/2} 13$ ، ٦٢ ـ $\log_e t, \log_{10} t$

بدون إيجاد اللوغاريتم ، عين موضع الآتى بين عددين صحيحين متعاقبين :

٦٣ - $\log_{10} 29$ ٦٤ - $\log_3 14$ ٦٥ - $\log_2 \frac{1}{3}$ ٦٦ - $\log_{10} 0.0058$ ٦٧ - $\log_e 12$

بحل المعادلة الأسية المناسبة أو باستخدام القاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس وجدول للوغاريتمات العادية ، أوجد تقريبا عشريا لكل مما يأتى : $(e \approx 2.71828)$:

٦٨ - $\log_7 17.6$ ٦٩ - $\log_{12} 136$ ٧٠ - $\log_6 36$ ٧١ - $\log_{11.6} 29.4$

٧٢ - $\log_2 0.0224$ ٧٣ - $\log_5 \sqrt{5}$ ٧٤ - $\log_e 1.86$ ٧٥ - $\log_e (1/e)$

٧٦ - باستخدام جدول للوغاريتمات العادية والقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس ، أوجد
(أ) $\log_e 768$ ، (ب) $\log_e 7.68$ (جـ) $\log_e 0.0768$

٧٧ - استخدم جدول للوغاريتمات الطبيعية والقاعدة ٧ - ١٤ لتغيير الأساس ، أوجد (أ) $\log 4.3$ ، (ب) $\log 35$ ، (ج) $\log 4$. تحقق من إجابتك من جدول للوغاريتمات العادية .

حل المعادلات الآتية بالنسبة الى x أو y

٧٨ - $\log_e x = 1$ ٧٩ - $\log_e (2x + 4) = 2$ ٨٠ - $\log_e (y - 3)^2 = 4$

٨١ - $\log_e x = 2b + C$ ٨٢ - $\log_e (3y + 2) = kt + C$

حل المتباينات الآتية :

٨٣ - $\log_e x \geqslant 2$ ٨٤ - $\log_e z \leqslant -3$ ٨٥ - $\log_e (x + 5) < 0$ ٨٦ - $\log_e |x| < -1$

حل المعادلات الآتية بالنسبة إلى C أو k

٨٧ - $e^{C+2} = \frac{2}{3}$ ٨٨ - $e^{8k} = 4$ ٨٩ - $e^k = (\frac{1}{2})^{1/9}$ ٩٠ - $e^{k-1} = (\frac{4}{7})^{1/15}$

٩١ - اذا كان $\log_e y = 2x - 3$ فأوجد y بدلالة x.

٩٢ - اذا كان $\log_e y = kx + c$ فأوجد y بدلالة x وعين الثابتين k و c بحيث أن $y = 10$:
عند $x = 0$ و $y = 5$ عند $x = 2$. ماقيمة y عند $x = 6$ ؟

بسط الآتى

٩٣ - $\log_e e^{-(2x+3)}$ ٩٤ - $\log_e (1/e^{2u})$ ٩٥ - $\log_e \sqrt{e}$ ٩٦ - $e^{-3\log_e 4}$ ٩٧ - $t+\log_e t$

٩٨ - حل المعادلة $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{4}{3}$ (ارشاد : اكتب المعادلة كمعادلة من الدرجة الثانية فى e^x)

٩٩ - (أ) حقق الأجزاء الثلاثة للنظرية ٧ - ٩ للوغاريتمات للأساس 10 عندما $r = 2$ و $v = 3$, $u = 16.1$ (ب) حقق الأجزاء الثلاثة للنظرية ٧ - ٩ للوغاريتمات للأساس 3 عندما $r = \frac{1}{2}$ و $v = 27$, $u = 81$.

١٠٠ - استخدم جدول اللوغاريتمات الطبيعية فى التذييل B لايجاد

$\log_e 170, \log_e 7300, \log_e 0.012$

(ارشاد : $170 = 17.0\ (10)$) .

١٠١ - لماذا العدد 1 لايمكن استخدامه كأساس للوغاريتمات .

١٠٢ ـ اثبت أنه لأى عددين موجبين b و a ماعدا الـ 1 ، يكون $\log_a b = 1/(\log_b a)$

١٠٣ ـ اثبت أن $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ لأى أساس a .

١٠٤ ـ اثبت أن $\log_{1/a} x = -\log_a x$ لكل $x > 0$ و $a > 0$.

١٠٥ ـ أثبت النظرية ٧ ـ ١٣ ١٠٦ ـ بسّط $a^{1/\log_e a}, a > 0$

٧ ـ ٥
الدالة اللوغاريتمية

مع أنه حاليا استخدام اللوغاريتمات فى الحسابات قليل ، إلا أنها أكثر فائدة ، فى الرياضيات والعلوم من أى وقت مضى . فهى توجد فى حلول المعادلات التفاضلية وفى الصياغة الرياضية للقوانين الفيزيائية . فى هذا البند ندرس الدالة اللوغاريتمية وفى البند التالى نوضح بعض استخداماتها فى العلوم .

بما أن كل عدد موجب له لوغاريتم للأساس a ، فالمعادلة $y = \log_a x$ تعرف دالة : $f : f(x) = \log_a x$ ، نطاقها هى الفئة لجميع $x > 0$. العلاقة الوطيدة بين الاسس واللوغاريتمات تمكننا من إيجاد الشكل البيانى بسهولة . من تعريف اللوغاريتم ، $y = \log_a x$ إذا وفقط إذا كان

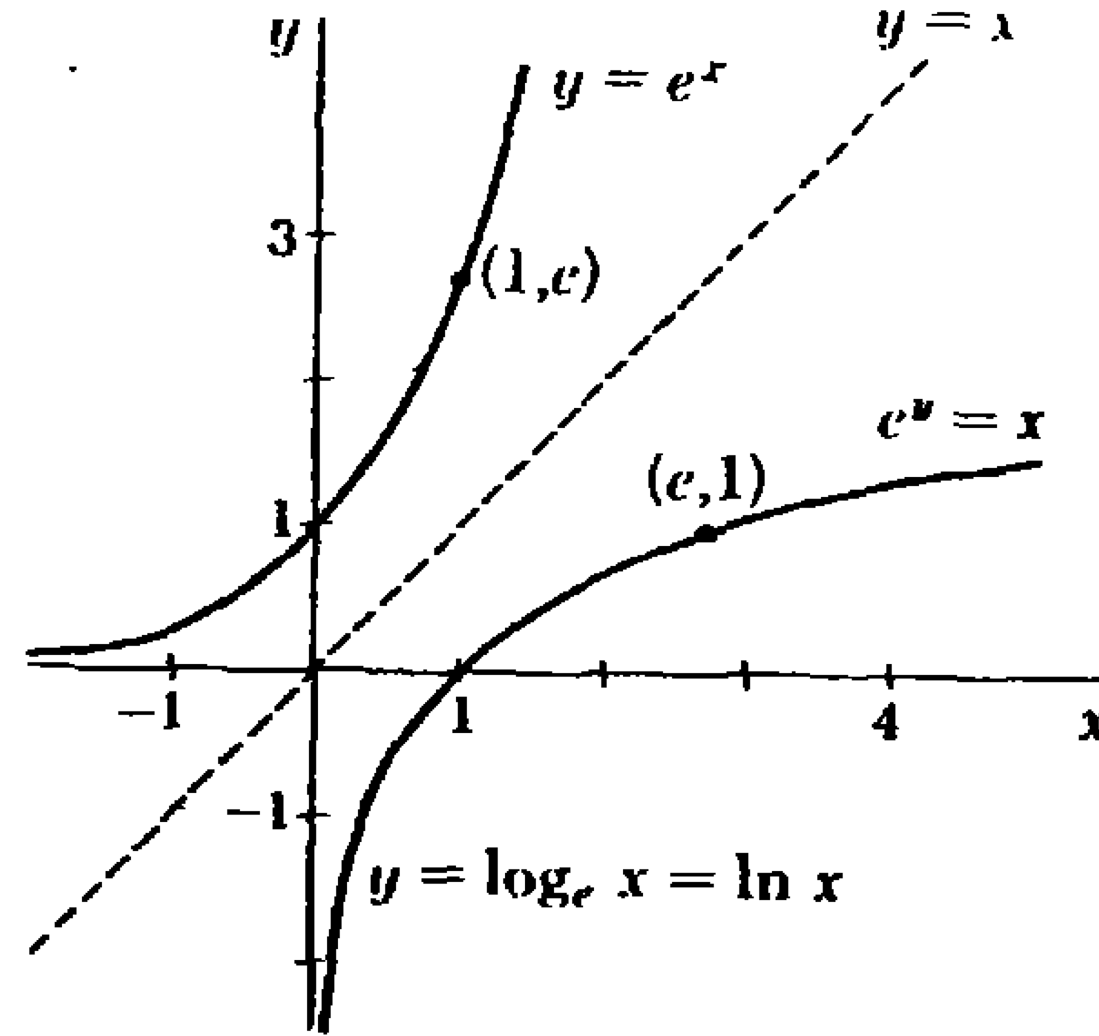
$$a^y = x$$

وإذن هاتان المعادلتان لهما نفس الشكل البيانى . إذا أبدلنا y و x فى هذه المعادلة الأخيرة ، فإننا نحصل على

$$y = a^x$$

لكن إبدال y و x فى معادلة يعكس شكلها البيانى فى الخط المستقيم $y = x$. أى أن الشكل البيانى للدالة $y = \log_a x$ هو انعكاس الشكل البيانى لـ $y = a^x$ فى الخط المستقيم $y = x$. هذا موضح فى الشكل ٧ ـ ١٣ للمنحنين $y = e^x$ و $y = \log_e x$.

الشكل البيانى للدالة $y = \log_a x$ لأى أساس $a > 1$ يشبه كثيرا ذلك للدالة $y = \log_e x$. فهو يكون مقاربا للمحور الصادى السالب ، يرتفع بسرعة فى الأول ، يقطع المحور السينى عند $(1,0)$ ، ثم يتفرطح ، مرتفعا ببطء أكثر عندما تزداد x . كل ذلك نتيجة للنظرية ٧ ـ ١٥ ومشتقة $\log_a x$ ، التى سنوجدها فى النظرية ٧ ـ ٢٣ . الشكل البيانى يوضح تماما أن الأعداد بين 1 و 0 لها لوغاريتمات سالبة وأن الصفر والأعداد السالبة ليس لها لوغاريتمات . النظرية القادمة توضح أنه بالرغم من معدل تزايدها البطىء ، $\log_e x$ أخيرا تصبح كبيرة جدا ، وأن شكلها البيانى يكون مقاربا للمحور الصادى السالب .



شكل ٧ ـ ١٣

الشكل البيانى للدالة $y = \log_e x$ هو الانعكاس فى الخط المستقيم $y = x$ للشكل البيانى للدالة $y = e^x$.

٧ ـ ١٥ نظرية . اذا كانت $a > 1$ ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

البرهان . القول أن $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ يعنى أن الشكل البيانى للدالة $y = \log_a x$ أخيرا يقطع ويظل فوق الخط المستقيم الافقى $y = M$ مهما كانت M كبيرة . لتكن M أى عدد . بما أن a^x دالة متزايدة ، فإن $\log_a x > M$ اذا وفقط اذا كان $a^{\log_a x} > a^M$. لكن $a^{\log_a x} = x$. واذن $\log_a x$ ستكون أكبر من M طالما كانت x أكبر من a^M . بما أن M كانت اختيارية ، فهذا يثبت النهاية الأولى . اثبات الثانية يترك للقارىء (المسألة ١١٧) .

اذا كانت $a < 1$ ، الشكل البيانى للدالة $y = \log_a x$ يكون متناقصا ، وله الشكل العام للانعكاس فى المحور السينى للشكل البيانى للدالة $y = \log_e x$.

الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \log_a x$ تسمى دالة لوغاريتمية . وهى دالة متزايدة اذا كانت $a > 1$ ومتناقصة اذا كانت $0 < a < 1$. الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والمثلثية العكسية يشار اليها جميعا بأنها دوال مسترسلة .

من الآن فصاعدا سنهتم فى الأكثر باللوغاريتمات للأساس e لتجنب كتابة دليل الأساس e ، سنستخدم رمز الفيزيائيين والمهندسين للوغاريتم الطبيعى ونكتب $\ln x$ لـ $\log_e x$* . دالة اللوغاريتمات الطبيعى $f(x) = \ln x$ مفيدة حتى أنها تعرف بالدالة اللوغاريتمية . بسبب أهميتها نكرر التعريف ٧ ـ ١٠ للحالة الخاصة للوغاريتم الطبيعى .

* الرمز $\ln$ هو اختصار "Natural logarithm" رغم أنه منتشر ، إلا أنه ليس عالمياً . الرياضيون عادة يكتبون $\log x$ لـ $\log_e x$.

٧ ـ ١٦ تعريف . لكل $t > 0$ و t و $\ln t$ هى ذلك العدد حيث $e^{\ln t} = t$.

ينبغى للقارىء أن يحتفظ بالمعادلة $e^{\ln t} = t$ جيدا فى ذاكرته ، كما يحتفظ أيضا بالحالتين الخاصتين للمعادلتين ٧ ـ ١١ ، ٧ ـ ١٢ ، وهما

$$\ln e = 1 \qquad \text{و} \qquad \ln 1 = 0$$

لقد قابلنا من قبل دالة اللوغاريتم الطبيعى تحت اسم آخر . هى الدالة L التى عرفت فى البند ٧ ـ ٢ . لأن $x = e^{\ln x}$ بالتعريف ، فمن ثم بالتمهيدية ٧ ـ ٣ يكون

$$L(x) = L(e^{\ln x}) = \ln x$$

الدالة اللوغاريتمية الطبيعية لذلك تكون متصلة عند كل $x > 0$ ، ومن (٢) ببند ٧ ـ ٢ ، مشتقها تعطى بالصيغة

٧ ـ ١٧
$$D \ln x = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

لايجاد مشتقات تعبيرات أعم مثل $\ln (x^2 + 3x)$ يجب تعميم القاعدة ٧ ـ ١٧ للدوال التى على الصورة $\ln g(x)$.

٧ ـ ١٨ $D \ln g(x) = g'(x)/g(x)$ بفرض أن $g(x) > 0$ وان $g'(x)$ موجودة .

البرهان ضع $f(z) = \ln z$ و $z = g(x)$ فيكون

$$\ln g(x) = f(g(x))$$

من القاعدة ٧ ـ ١٧ ، $f'(z) = 1/z$ ، واذن بقاعدة السلسلة ، يكون

$$D \ln g(x) = D_x f(g(x)) = f'(z)g'(x) = \frac{1}{z} g'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x)$$

مثال ١ . أوجد $D \ln (x^2 + 3x)$

بالقاعدة ٧ ـ ١٨ حيث $g(x) = x^2 + 3x$ ، يكون

$$D \ln (x^2 + 3x) = \frac{D(x^2 + 3x)}{x^2 + 3x} = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

مثال ٢ . أوجد $D[x^3 \ln (4x^2 - 7x + 6)]$

الدالة المطلوبة اجراء تفاضلها هى حاصل ضرب . نستخدم قاعدة حاصل الضرب متبوعة بالقاعدة ٧ ـ ١٨ :

$$D[x^3 \ln (4x^2-7x+6)] = x^3 D \ln (4x^2-7x+6) + 3x^2 \ln (4x^2-7x+6)$$

$$= x^3 \frac{D(4x^2-7x+6)}{4x^2-7x+6} + 3x^2 \ln (4x^2-7x+6)$$

$$= \frac{x^3(8x-7)}{4x^2-7x+6} + 3x^2 \ln (4x^2-7x+6).$$

مثال ٣ . اذا كانت $f(x) = \ln \sqrt{5+3x}$ ، فأوجد $f'(x)$.

الطريقة الأولى . بالقاعدة ٧ ـ ١٨ ، يكون

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5+3x}} \frac{1}{2} (5+3x)^{-1/2}(3) = \frac{3}{2(5+3x)}$$

الطريقة الثانية . نستخدم أولا خاصية القوة للوغاريتم لتبسيط التعبير للدالة $f(x)$.

$$f(x) = \ln (5+3x)^{1/2} = \tfrac{1}{2} \ln (5+3x)$$

ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{3}{5+3x} = \frac{3}{2(5+3x)}$$

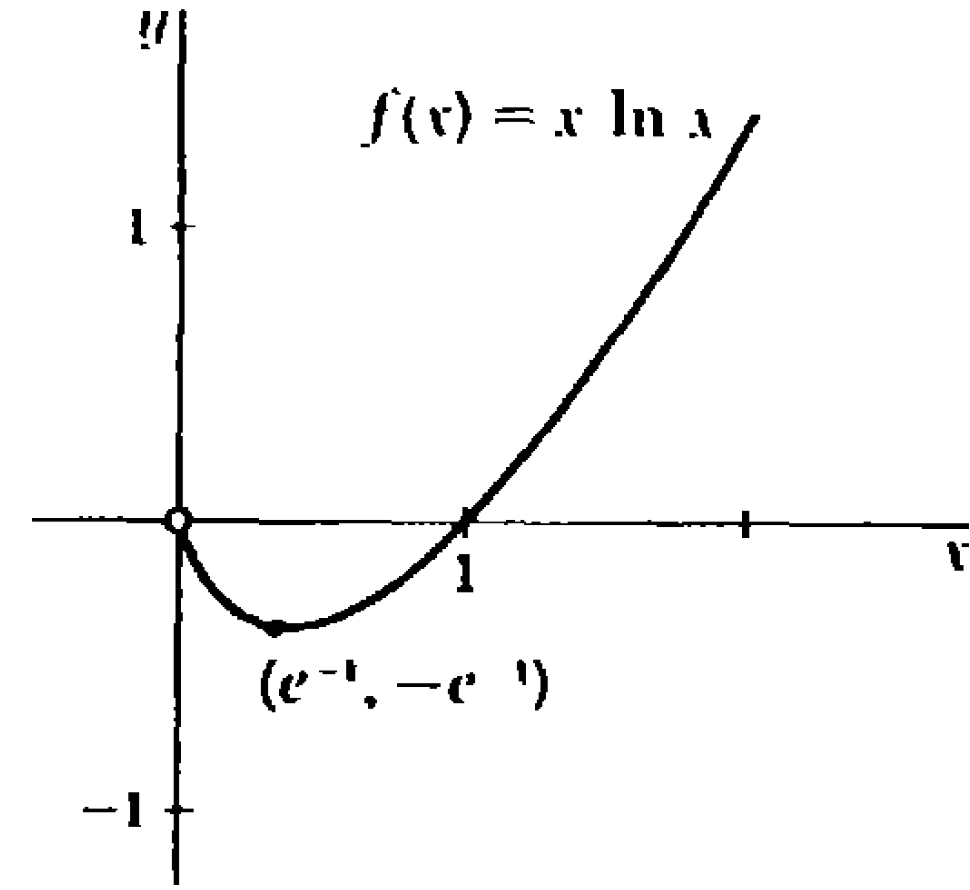
إجراءات مماثلة لذلك المستخدم فى الطريقة الثانية عادة تبسط إجراء تفاضل لوغاريتمات حواصل الضرب وخوارج القسمة والقوى .

مثال ٤ . خطط الشكل البيانى للدالة $f(x) = x \ln x$. بما أن $\ln x$ تعرف فقط لـ $x > 0$ فإن $f(x)$ يمكن أن تكون صفرا فقط عندما تكون $\ln x = 0$ ، أى أن ، فقط عندما $x = 1$. مشتقة الدالة f هى

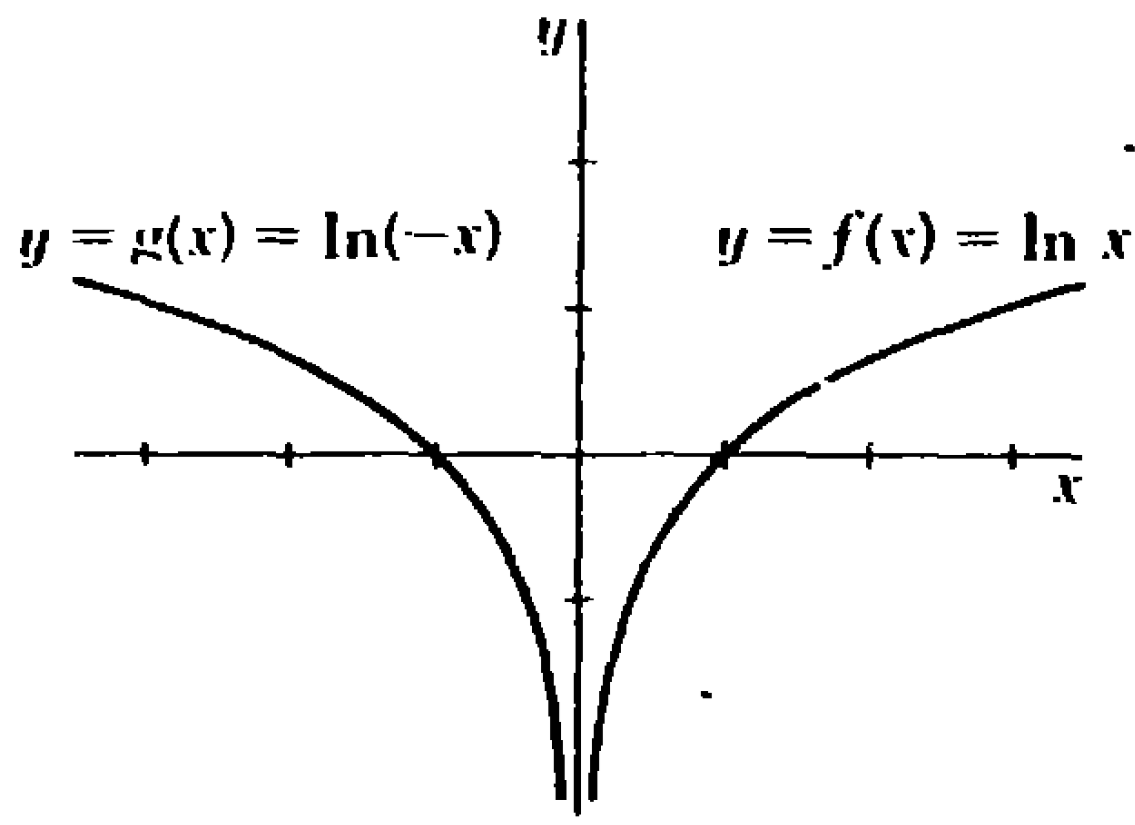
$$f'(x) = x \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

واذن العدد الحرج الوحيد هو ذلك العدد حيث $\ln x = -1$. لحل هذه المعادلة ، نرفع كلا الطرفين الى قوة لـ e ، فنحصل على $e^{\ln x} = e^{-1}$ لأن $e^{\ln x} = x$ ، الحل هو $x = e^{-1}$ والشكل البيانى له مماس أفقى عند النقطة $(e^{-1}, -e^{-1})$. بما أن $f''(x) = 1/x$ ، اختبار المشتقة الثانية يوضح أن الدالة لها نهاية صغرى موضعية عند e^{-1} . الشكل البيانى مقعر الى أعلى فى كل مكان . يمكن اثبات أن $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ (المسألة ١٢٥) . واذن المنحنى يقترب من نقطة الاصل . انحداره جوار نقطة الاصل يقاس بالمشتقة . لأن $\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$ ، الشكل البيانى منحدر بشدة قرب نقطة الاصل . وهو مخطط فى الشكل ٧ ـ ١٤

الدالة $f(x) = \ln x$ معرفة فقط لـ $x > 0$ والدالة $g(x) = \ln(-x)$ فقط لـ $x < 0$. الشكل البيانى للدالة g هو الانعكاس فى المحور الصادى للشكل البيانى للدالة f ، وهو موضح فى الشكل ٧ ـ ١٥ .



شكل ٧ ـ ١٤



شكل ٧ ـ ١٥

لدينا

$$D \ln x = \frac{1}{x} \qquad \text{if } x > 0 \qquad (١)$$

ومن القاعدة ٧ ـ ١٨ ، يكون

$$D \ln (-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \qquad \text{if } x < 0 \qquad (٢)$$

المشتقة فى (٢) سالبة ، كما نتوقع من الشكل البيانى لـ g

بما أن
$$\ln |x| = \begin{cases} \ln x & \text{if } x > 0 \\ \ln (-x) & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(١) ، (٢) يمكن الجمع بينهما فى المعادلة الواحدة

٧ ـ ١٩.
$$D \ln |x| = \frac{1}{x}$$

وبالاستعانة بقاعدة السلسلة يكون لدينا الصيغة الأعم

٧ ـ ٢٠
$$D \ln |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

فمثلا ،
$$D \ln |3x^3 - 4x - 1| = \frac{9x^2 - 4}{3x^3 - 4x - 1}$$

الصور العكسية لهذه المعادلات أكثر نفعا ،

٧ ـ ٢١
$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C$$

و

٧ ـ ٢٢
$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx = \ln |g(x)| + C$$

مثال ٥ . اجر التكامل $\int 2x / (x^2 + 3)\, dx$

البسط تفاضل المقام ، فالدالة المكاملة على الصورة $g'(x) / g(x)$ حيث $g(x) = x^2 + 3$. واذن بالمعادلة ٧ ـ ٢٢ ، يكون

$$\int \frac{2x}{x^2 + 3}\, dx = \ln |x^2 + 3| = \ln (x^2 + 3) + C$$

هنا يمكننا حذف علامة القيمة المطلقة اذ أن $x^2 + 3$ دائما موجبة . الجواب يمكن ويجب التأكد منه بتفاضل $\ln (x^2 + 3)$.

مثال ٦ . أوجد قيمة $\int_1^3 \frac{4}{3t - 11}\, dt$

فيما عدا لعامل ثابت البسط هو تفاضل المقام ، فالدالة المكاملة أساسا على الصورة $g'(t)/g(t)$ حيث $g(t) = 3t - 11$. الصيغة ٧ ـ ٢٢ توحى بأن فيما عدا لعامل ثابت التكامل غير المعين يساوى $\ln |3t - 11|$ ليكن هذا تخميننا الأول . بالقاعدة ٧ ـ ٢٠

$$\frac{d}{dt} \ln |3t - 11| = \frac{3}{3t - 11}$$

بمقارنة هذه المشتقة مع الدالة المكاملة ، نرى تعديل تخميننا الى $\frac{4}{3} \ln |3t - 11|$ وهذا صحيح . لذلك

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{4}{3t - 11}\, dt &= \frac{4}{3} \ln |3t - 11| \Big|_1^3 \\ &= \frac{4}{3}(\ln |-2| - \ln |-8|) = \frac{4}{3}(\ln 2 - \ln 8) \\ &= \frac{4}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{4}{3}(\ln 1 - \ln 4) = -\frac{4}{3} \ln 4 \approx -1.8484.\end{aligned}$$

لقد استخدمنا مرتين خاصية لوغاريتم خارج القسمة . واذ أن الدالة المكاملة سالبة فى الفترة $[1, 3]$ ، فالتكامل أيضا يجب أن يكون سالبا .

يمكننا أيضا ايجاد قيمة التكامل باجراء تغيير للمتغير نضع $u = 3t - 11$ فيكون $dt = du/3$ ، ويكون

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{4}{3t - 11}\, dt &= \int_{-8}^{-2} \frac{4}{u} \frac{du}{3} = \frac{4}{3} \ln |u| \Big|_{-8}^{-2} \\ &= \frac{4}{3}(\ln |-2| - \ln |-8|) \approx -1.8484.\end{aligned}$$

هنا غيرنا حدى التكامل الى مايناظر مدى المتغير الجديد u .

مثال ٧ . أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى

$$y = \frac{5(3x + 1)}{3x^2 + 2x + 2}$$

بين 2 و 0 .

المساحة تعطى بـ

$$\int_0^2 \frac{5(3x + 1)}{3x^2 + 2x + 2}\, dx$$

مرة أخرى ، البسط هو تفاضل المقام فيما عدا لعامل ثابت ، فالدالة المكاملة أساسا على الصورة $g'(x)/g(x)$. بالتجربة والخطأ أو باجراء تغيير للمتغير نجد أن

$$\text{المساحة} = \int_0^2 \frac{5(3x+1)}{3x^2+2x+2}\, dx = \tfrac{5}{2} \ln |3x^2+2x+2| \Big|_0^2$$

$$= \tfrac{5}{2}(\ln |18| - \ln |2|) = \tfrac{5}{2} \ln 9 \approx 5.4930.$$

عند استخدام تكاملات معينة على الصورة $\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\, dx$ يجب أن نتأكد أن الدالة المكاملة متصلة فى الفترة $[a, b]$.

مثال ٨ . اجر التكامل $\int \tan \theta \, d\theta$.

يمكن اجراء التكامل بسهولة بحيلة بسيطة

$$\int \tan \theta \, d\theta = \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta}\, d\theta = -\ln |\cos \theta| + C$$

مشتقة اللوغاريتم لأساس غير e يمكن ايجادها بالاستعانة بالقاعدة ٧ ـ ١٤ لتغيير الأساس حيث $b = e$.

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

اجراء التفاضل يعطينا

٧ ـ ٢٣ $$D \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

وبصفة أعم ، يكون

٧ ـ ٢٤ $$D \log_a g(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{g'(x)}{g(x)}$$

فمثلا ،

$$D \log_{10} (x^2+1) = \frac{1}{\ln 10} \frac{2x}{x^2+1} \approx \frac{1}{2.3026} \frac{2x}{x^2+1}$$

القاعدة ٧ ـ ٢٣ لمشتقة $\log_a x$ تكون أبسط عندما يكون الاساس a هو e ، لأن حينئذ العامل $(1/\ln a)$ يساوى 1 . هذا التبسيط فى صيغة المشتقة يكفى لتبرير افضلية استخدام الاساس e عن استخدام الأساس 10 فى العمل العلمى غير الحساب . العدد e لايمكن تجنبه عندما نعالج مشتقات اللوغاريتمات ، مهما كان الاساس ، لكن يكون أقل تطفلا عند استخدام اللوغاريتمات الطبيعية .

التعريف ٧ ـ ١٦ للوغاريتم يمكننا من التعبير عن $a^{g(x)}$ كقوة لـ e وبالتالى من ايجاد مشتقتها . لدينا

$$a^{g(x)} = e^{\ln a^{g(x)}} = e^{g(x) \ln a}$$

واذن

$$Da^{g(x)} = De^{g(x)\ln a} = e^{g(x)\ln a}g'(x)\ \ln a$$

باستبدال $e^{g(x)\ \ln a}$ بـ $a^{g(x)}$ ، التى تكافئها هذا يبسط الى الصيغة الثانية من الصيغتين أدناه . الصيغة الأولى هى حال خاصة منها

٧ ـ ٢٥ $$Da^x = a^x \ln a$$

٧ ـ ٢٦ $$Da^{g(x)} = a^{g(x)}g'(x)\ \ln a$$

فمثلا ، $$D7^{2x-x^3} = 7^{2x-x^3}(2-3x^2)\ \ln 7$$

الى الآن قاعدة القوة $D\,x^r = r\,x^{r-1}$ مقيدة بالأسس الكسرية r . يمكننا الآن اثبات أنها صحيحة أيضا للأسس غير الكسرية r . نكتب x^r كقوة لـ e

$$x^r = e^{\ln x^r} = e^{r\ln x}$$

فيكون

$$Dx^r = e^{r\ln x}D(r\ln x) = e^{r\ln x}\frac{r}{x} = x^r\frac{r}{x} = rx^{r-1}$$

الحيلة التى استخدمت هنا ومن قبل ، للتعبير عن كمية كقوة لـ e وهى حيلة نافعة ، يجب على القارىء أن يحفظها فى ذاكرته .

الدالة x^x ليست على الصورة x^r ولاعلى الصورة a^x ، حيث a و r ثابتان . واذن لاقاعدة القوة ولا القاعدة ٧ ـ ٢٥ يمكن استخدامها لايجاد مشتقتها . على الرغم من ذلك ، يمكن ايجاد المشتقة بالطريقة التى استخدمت لايجاد مشتقة $a^{g(x)}$. نكتب x^x كقوة لـ e ، فيكون

$$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$$

ويكون

$$\begin{aligned} Dx^x &= e^{x\ln x}D(x\ln x) = e^{x\ln x}(1+\ln x) \\ &= x^x(1+\ln x) \end{aligned}$$

يمكننا ايجاد مشتقة أى دالة على الصورة $[f(x)]^{g(x)}$ بنفس الطريقة ، طبعا بشرط أن g و f يكون لهما مشتقتان .

فى البند ٧ ـ ٢ عرفنا العدد e بأنه قيمة t التى تجعل المساحة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين t و 1 تساوى 1 . التعريف التاريخى للعدد e هو قيمة نهاية معينة .

٧ ـ ٢٧ $$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}$$

البرهان المباشر لوجود هذه النهاية صعب ، لكن بالنظريات التى لدينا الآن يكون اسهل نسبيا . ضع $h = \ln(1+t)$ فيكون $1 + t = e^h$ ويكون

$$(1+t)^{1/t} = (e^h)^{1/(e^h-1)} = e^{h/(e^h-1)}$$

عندما تقترب t من الصفر ، تقترب h من الصفر . واذن

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = \lim_{h\to 0} e^{h/(e^h-1)} = e^{\lim_{h\to 0}[h/(e^h-1)]}$$

حيث الخطوة الاخيرة صحيحة بسبب اتصال e^x . باستخدام التمهيدية ٧ ـ ٤ ، لدينا

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{e^h-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(e^h-1)/h} = \frac{1}{1} = 1$$

واذن $\lim_{t\to 0} (1+t)^{1/t} = e$

اذا وضعنا فى المعادلة ٧ ـ ٢٧ $t = 1/x$ ، فان t تقترب من 0^+ عندما تصبح x لانهائية ويكون لدينا صورة أخرى للنهاية :

٧ ـ ٢٨ $$e = \lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

مسائل

١ ـ خطط الشكل البيانى للدالة $y = \log x$ بتعيين مواقع بعض النقط ، مستخدما جدولا للوغاريتمات العادية .

٢ ـ خطط الشكل البيانى للدالة $y = \ln x$ بتعيين مواقع بعض النقط ، مستخدما جدولا للوغاريتمات الطبيعية .

٣ ـ (أ) لأى x يقطع المنحنى $y = \log x$ الخط الأفقى الذى على بعد 2 فوق المحور السينى ؟ الخط الأفقى على بعد 3 فوق المحور السينى؟ لأى x يكون $\log x$ أكبر من 100؟ 1,000,000؟ (ب) كرر (أ) مع المنحنى $y = \ln x$.

٤ ـ خطط الشكل البيانى للدالة $y = \log_{1/2} x$ (ارشاد : اعتبر الشكل البيانى لـ $y = (\frac{1}{2})^x$)

اجر تفاضل مايأتى :

٥ ـ $\ln(5-3x)$	٦ ـ $\ln(at^2+b)$	٧ ـ $\ln(3x+4x^2)$
٨ ـ $\ln(ax+b)^2$	٩ ـ $\ln(ax^n)$	١٠ ـ $\ln(7z-4)^2$
١١ ـ $x^2 \ln x$	١٢ ـ $\ln \frac{2}{r}$	١٣ ـ $(9x-1)\ln 3x$
١٤ ـ $\frac{\ln x}{x}$	١٥ ـ $\ln \frac{ax-b}{ax+b}$	١٦ ـ $\frac{u^2}{\ln u}$
١٧ ـ $\ln\lvert x^2-2x+5\rvert$	١٨ ـ $\ln\sqrt{x^2+7}$	١٩ ـ $\ln\left\lvert\frac{t}{t+1}\right\rvert$

٢٠ - $\ln \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ ٢١ - $(x+1) \ln \sqrt{x+3}$ ٢٢ - $\ln \frac{y}{\sqrt{3y+2}}$

٢٣ - $x(\ln x)^2$ ٢٤ - $3z(\ln z + \sqrt{z})$ ٢٥ - $\ln \sin ax$

٢٦ - $\sin (\ln ax)$ ٢٧ - $\ln |\sec \theta + \tan \theta|$ ٢٨ - $\ln e^y$

٢٩ - $\ln ye^y$ ٣٠ - $\ln (e^{2x} + 5e^x - 3)$ ٣١ - $\ln (e^x + e^{-x})$

٣٢ - $\ln [(x^2 + 10x + 3)(x^3 - x^2 + 7)]$ ٣٣ - $\ln (\ln 3x)$.

٣٤ - $x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$ ٣٥ - $-\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2})$

اجر تفاضل ما يأتى :

٣٦ - $\log_{10} (x^2 + 4)$ ٣٧ - $\log_2 \frac{1}{3x+10}$ ٣٨ - $x^3 \log_{10} (a^2 + x^2)$ ٣٩ - $\log_{10} \sqrt{y^2 + c^2}$

٤٠ - $\log_{10} e^x$.

أوجد المشتقة الثانية لما يأتى :

٤١ - $\ln bx$ ٤٢ - $x \ln x$ ٤٣ - $\ln \frac{ax-3}{ax+3}$ ٤٤ - $x \log_{10} x$

أوجد dy / dx لما يأتى :

٤٥ - $y = \ln (x + y)$ ٤٦ - $e^y = \ln x$ ٤٧ - $\ln (x^2 + y^2) + 2 \tan^{-1} (x/y) = 0$

٤٨ - اذا فرض أن الدالة اللوغاريتمية لها مشتقة ، يمكن ايجاد المشتقة كما يلى . لتكن $y = \ln x$ فيكون $e^y = x$ أوجد dy / dx بالتفاضل الضمنى .

٤٩ - اثبت $y = (\ln x) / x$ حل للمعادلة التفاضلية $x^2 y'' + 3x y' + y = 0$.

٥٠ - حقق أن $y = \cos (\ln x)$ حل للمعادلة التفاضلية $x^2 d^2 y / dx^2 + x dy / dx + y = 0$. هل يمكنك ايجاد حل آخر ؟

خطط الشكل البيانى للمعادلات الآتية . (النهايتان $\lim_{x\to\infty} [(\ln x) / x] = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0$ ، المبرهنتان فى المسألة ١٢٥ ، قد تفيدان)

٥١ - $y = \ln (x + 2)$ ٥٢ - $y = \ln |x|$ ٥٣ - $y = x - \ln x$ ٥٤ - $y = x + \ln x$

٥٥ - $y = x \ln x - x$ ٥٦ - $y = (\ln x)/x$ ٥٧ - $y = x/(\ln x)$

اجر التكاملات الآتية :

٥٨ - $\int \frac{1}{x+2} dx$ ٥٩ - $\int \frac{6}{3x+5} dx$ ٦٠ - $\int_1^4 \frac{4x}{x^2+3} dx$

٦١ - $\int \frac{u+1}{u^2 + 2u + 11} du$ ٦٢ - $\int \frac{8x+10}{2x^2+5x} dx$ ٦٣ - $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$

٦٤ - $\int \left(\frac{2}{1-2t} + t\right) dt$ ٦٥ - $\int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2} dx$ ٦٦ - $\int_{-3}^{-2} \frac{y^2+1}{5y^3} dy$

٦٧ - $\int_0^{\pi/4} \frac{1 - \sin \alpha}{\alpha + \cos \alpha} d\alpha$ ٦٨ - $\int \frac{\sec^2 \theta}{a + b \tan \theta} d\theta, b \neq 0$ ٦٩ - $\int \frac{3 - x^4}{x^2} dx$

٧٠- $\int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx$ ٧١- $\int \frac{z+2}{z^2+3}\,dz$ ٧٢- $\int \frac{x}{2x+3}\,dx$ (ارشاد ضع $u = 2x + 3$)

٧٣- $\int \frac{v}{v-4}\,dv$ ٧٤- $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ ٧٥- $\int \left(y - \frac{1}{y}\right)^3 dy$

٧٦- $\int \frac{dw}{w\sqrt{2w}}$ ٧٧- $\int \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}\,dy$ ٧٨- $\int \cot\theta\, d\theta$

اوجد تقريبا عشريا للتكاملات المعينة الآتية :

٧٩- $\int_0^1 \frac{dx}{4x+3}$ ٨٠- $\int_1^2 \frac{dy}{2y-7}$ ٨١- $\int_{3/2}^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$ ٨٢- $\int_1^{e^2} \frac{1}{t}\,dt$

أوجد مشتقة مايأتى :

٨٣- 2^{3x+4} ٨٤- $8^{\sqrt{t}}$ ٨٥- $\frac{1}{t}6^{t^2}$ ٨٦- $(1+e)^t$ ٨٧- t^{1+e} ٨٨- $2^s \ln s$

٨٩- e^{e^x} ٩٠- $e^{\ln x}$ ٩١- $u^{\sqrt{u}}$ ٩٢- $\left(\frac{a}{x}\right)^x$ ٩٣- $x^{\ln x}$ ٩٤- $(1+x)^{1/x}$

أوجد تقريبا عشريا للمشتقة عند العدد المشار اليه :

٩٥- $x \ln \sqrt{x-3}, 13$.   ٩٦- $7^x, 2$

اجر التكاملات الاتية :

٩٧- $\int 5^{3t}\,dt$ ٩٨- $\int_{-2}^{1} 10^{-x}\,dx$ ٩٩- $\int x4^{x^2+6}\,dx$ ١٠٠- $\int du/3^{2u}$ ١٠١- $\int (1+e)^x\,dx$

١٠٢ - كابل تليفون يتكون من سلك نحاسى مغطى بعازل . من المعروف أن سرعة الاشارة تتناسب مع $y^2 \ln (i/y)$ ، حيث y ترمز الى نسبة نصف قطر السلك النحاسى الى سمك العازل . أوجد قيمة y التى تجعل السرعة أكبر ما يمكن .

١٠٣ - ليكن المماس للمنحنى $y = e^x + 1$ عند النقطة A يقطع المحور السينى عند B.ماهى احداثيات A اذا كانت المسافة $|AB|$ أقل ما يمكن ؟

١٠٤ - أوجد أكبر قيمة للدالة $f(x) = x + e^{-2x}$ فى الفترة $[-1 , 1]$.

١٠٥ - لاى قيمة لـ x تكون x^x أصغر مايمكن .

١٠٦ - أوجد مساحة المنطقة تحتَ المنحنى $y = 2^x$ بين 3 و -3 .

١٠٧ - اثبت أن مساحة المنطقة تحت القطع الزائد $xy = c , c > 0$ بين $a > 0$ و $b > 0$ تساوى مساحة المنطقة تحت القطع الزائد بين $1/b$ و $1/a$.

١٠٨ - أوجد حجم الجسم المتكون بدوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 1/\sqrt{3x-2}$ والمحور السينى والخطين المستقيمين $x = 1$ و $x = 2$ ، حول المحور السينى .

١٠٩ - بدون ايجاد تقريبٌ عشرى لاى العددين ، عين ما اذا كانت e^π أكبر أو أصغر من π^e .
(ارشاد : ادرس لوغاريتمى العددين) .

اللوغاريتمات يمكن استخدامها لتبسيط تفاضل بعض حواصل الضرب وخوارج القسمة والقوى . الطريقة ، وتسمى التفاضل اللوغاريتمى ، موضحة بالمثال الآتى . لايجاد $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (٣)$$

فيكون $\ln y = \ln x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$. توجد الآن dy / dx باجراء التفاضل الضمنى :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{x(1 + x^2)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(1 + x^2)} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}},$$

حيث عوضنا عن y بقيمتها المعطاه فى (٣) . استخدم التفاضل اللوغاريتمى لايجاد مشتقة مايأتى :

١١٠ - $(1 + ax)(1 + bx)$ ١١١ - $\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2x}$ ١١٢ - $\sqrt{\frac{1 + z^2}{1 - z^2}}$

١١٣ - $\frac{\sqrt{6 + x^2}}{x\sqrt{6 - x^2}}$ ١١٤ - $\frac{x^3\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[3]{15 - 2x}}$

١١٥ - أوجد تعبيرا لـ $\frac{d^n}{dx^n} \ln (1 - x)$ (ارشاد : من المشتقات القليلة الأولى ضمن المشتقة النونية . اثبت تخمينك بالاستنتاج الرياضى) .

١١٦ - اثبت أن $\log_a x$ دالة متناقصة اذا كان $0 < a < 1$.

١١٧ - اثبت أن $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ اذا كانت $a > 1$ (ارشاد : ضع $x = 1/z$)

١١٨ - فى برهان $e = \lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t}$ اعتمدنا على أن

$$\lim_{z \to 0} e^{g(z)} = e^{\lim_{z \to 0} g(z)}$$

برر هذه العبارة (ارشاد : ضع $f (u) = e^u$ فيكون $e^{g(z)} = f (g (z))$) .

١١٩ - اثبت أن $\lim_{x \to a} [\ln g(x)] = \ln [\lim_{x \to a} g (x)]$ بفرض أن $\lim_{x \to a} g (x)$ تكون موجودة . استخدم هذه النتيجة لايجاد $\lim_{x \to 5} (\ln \sqrt{x^2 + 3})$. تحت أى شروط تكون

$$\lim_{x \to a} [\ln g(x)] = \ln g(a)?$$

١٢٠ - اوجد تقريبا للعدد e بايجاد قيمة $(1 + 1 / x)$ فى المعادلة ٧ - ٢٨ عند $x = 10$. أوجد تقريبا أفضل بأخذ $x = 100$.

١٢١ - اثبت أن $1 - 1/x < \ln x < x - 1$ اذا كانت $x > 1$ (ارشاد : $1/x^2 < 1/x < 1$)

١٢٢ - اثبت أن $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = \sqrt{e}$.

١٢٣ - يبدو من (١) ، (٢) أن $\ln (-x)$ و $\ln x$ لهما نفس المشتقة . لماذا لايمكن استنتاج أن $\ln x = \ln (-x) + c$ لثابت ما C ؟

١٢٤ - اثبت أن المعادلة $x + \ln x = 0$ لها حل . هل المعادلة لها أكثر من حل ؟ استخدم الجداول لايجاد تقريب لكل حل . (ارشاد : خطط الشكل البيانى للدالة $y = x + \ln x$)

١٢٥ - اثبت أن $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} [(\ln x)/x] = 0$ (ارشاد : خطط المنحنيين $y = 1 / \sqrt{x}$ و $y = 1 / x$ على نفس مستوى الاحداثيات . أثبت أن

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2(\sqrt{x} - 1)$$

لجميع $x \geqslant 1$. (ارشاد جزئى : ماذا يمثل التكاملان ؟) . استخدم هذه المتباينة لاثبات أن $\lim_{x\to\infty} [(\ln x)/x] = 0$. النهاية الثانية تنتج من الأولى باستبدال x بـ $1/x$) . اثبت النتيجة $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$ (ارشاد : x^x كقوة لـ e) .

١٢٦ ـ أثبت أن

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2$$

(ارشاد : كون حاصل جمع ريمان للدالة $f(x) = 1/(1+x)$ والفترة $[0, 1]$).

١٢٧ ـ اذا افترضنا صحة المعادلة ٧ ـ ٢٧ ، فانه يمكننا مباشرة ، من تعريف المشتقة ، اثبات أن $\frac{d}{dx}\log_a x = (1/x)\log_a e$ بالطريقة الآتية :

$$\frac{d}{dx}\log_a x=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{x/h}\right]=\frac{1}{x}\log_a e.$$

أضف التفاصيل لهذا البرهان . ماهى خاصية الدالة اللوغاريتمية التى افترضناها عند اجراء تبادل ln و lim فى الخطوة قبل الأخيرة ؟ أثبت أن $\log_a e = 1/(\log_e a)$ حاصلا على القاعدة ٧ ـ ٢٣ .

١٢٨ ـ النظرية ٢ ـ ١٦ تقول أن $\lim_{x\to a} g^r(x) = [\lim_{x\to a} g(x)]^r$ لجميع r الكسرية ، بفرض وجود $\lim_{x\to a} g(x)$. عمم هذه النتيجة لجميع قيم r الحقيقية . (ارشاد : ضع $f(z) = z^r$) . تحت أى شروط يكون $\lim_{x\to a} g^r(x) = g^r(a)$ ؟

٧ ـ ٦
تطبيقات الدالة الأسية

مسائل عديدة فى الفيزياء والكيمياء تؤدى الى معادلات تفاضلية حلها يحتوى على دوال لوغاريتمية أو أسية . قبل الشروع فى معالجة الأمثلة سندرس الأسلوب الفنى لحل المعادلات التفاضلية النمطية لهذه المسائل . يجب أن يكون القارىء ملما بالطريقة المشروحة فى بند ٤ ـ ١٥ لحل المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرين .

مثال ١ . أوجد الحل $y = f(x)$ للمعادلة التفاضلية(١)

$$\frac{dy}{dx}=2y \qquad (1)$$

حيث $y = 5$ عند $x = 0$.

يمكن ايجاد الحل بفصل المتغيرين واجراء تكامل كل من الطرفين للمعادلة الناتجة :

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2dx \qquad (٢)$$

$$\ln |y| = 2x + C \qquad (٣)$$

حيث C أى ثابت . المعادلة (١) تتضمن أن أى حل y يجب أن يكون قابلا للتفاضل واذن متصل . المعادلة (٢) تتضمن ، لوجود y فى المقام ، ان نأمل فى الحصول على الحل المطلوب من بين الحلول التى لاتنعدم أبدا . الدالة المتصلة التى لاتساوى صفرا أبدا ، تكون اما موجبة دائما واما سالبة دائما (لماذا ؟) . بما أن $y = 5$ عند $x = 0$ ، فالحل المطلوب يجب أن يكون بحيث أن y تكون موجبة لجميع x . ومن ثم يمكننا اسقاط علامة القيمة المطلقة فى (٣) ونبحث عن حل من بين الحلول حيث $\ln y = 2x + c$. لحل هذه المعادلة بالنسبة الى y ، نرفع كلا الطرفين الى قوة لـ e ، فيكون

$$e^{\ln y} = e^{2x+C} = e^C e^{2x}$$

بما أن $e^{\ln y} = y$ ، فيكون

$$y = e^C e^{2x} \qquad (٤)$$

يمكننا تعيين C أو مكافئا لذلك وأكثر ملاءمة تعيين e^c ، من المعلومات أن $y = 5$ عند $x = 0$. بتعويض هذين العددين فى (٤) ، نرى أن $e^c = 5$ وبالتالى (٤) تصبح

$$y = 5e^{2x}$$

على القارىء أن يتحقق أن $f(x) = 5\,e^{2x}$ تحقق (١) لجميع x وأن $f(0) = 5$. فهذا اذن هو الحل المطلوب . لاحظ أننا لانحتاج لايجاد قيمة C نفسها . يمكن ايجادها ، اذا اردنا ، بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لكل من طرفى المعادلة $e^c = 5$ ، وبذلك نحصل على $C = \ln 5$.

مثال ٢ . حل المعادلة التفاضلية

$$(x-5)\frac{dy}{dx} = 2y, \qquad y < 0 \qquad (٥)$$

لدينا

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x-5}$$

ومن ثم بالتكامل ، يكون

$$\ln |y| = 2 \ln |x-5| + C = \ln (x-5)^2 + C \qquad (٦)$$

لأن $y < 0$ فان $\ln |y| = \ln (-y)$. اذا كان لكل C , C' هى العدد ، بالضرورة موجب ، حيث $C = \ln C'$ فان المعادلة (٦) يمكن التعبير عنها بتبسيط أكثر هكذا

$$\ln(-y) = \ln(x-5)^2 + \ln C' = \ln[C'(x-5)^2]$$

لحلها بالنسبة الى y ، يمكننا إما رفع كل من طرفى هذه المعادلة الى قوة لـ e ، كما فعلنا فى المثال ١ ، أومجرد أن نلاحظ أن العددين اللذين لهما نفس اللوغاريتم يجب أن يتساويا . أى من الطريقتين تعطينا

$$y = -C'(x-5)^2, \qquad C' > 0$$

يمكن للقارىء إن يتحقق أن هذه الدالة تحقق (٥) لأى C'.

مثال ٣ . حل المعادلة التفاضلية

$$x + 1 + x(e^y + 1)y' = 0$$

لدينا

$$(e^y + 1)\, dy = -\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

ومن ثم

$$e^y + y = -x - \ln|x| + C$$

هذه المعادلة لايمكن حلها لـ y . يجب أن نقتنع بالحل $y = f(x)$ الذى تعرفه ضمنيا .

المواد المشعة مثل الراديوم تبعث بجسيمات على فترات متكررة ، بحيث أن أى كمية معطاة من المادة تتناقص باستمرار أو تتحلل . يحتمل انبعاث جسيم من أى نقطة داخل أو على سطح المادة كما من أى نقطة أخرى . أيضا على فترات قصيرة من الوقت القطع ذات الحجم الواحد تبعث فى المتوسط نفس العدد من الجسيمات ، فالقطع الكبيرة تبعث جسيمات أكثر فى اليوم ، ومن ثم تفقد من حجمها فى اليوم أكثر مما تفقده القطع الصغيرة . هذا يدل على أن الكمية الكبيرة من مادة مشعة تتناقص أولا بسرعة أكبر نسبيا . عندما يصبح حجمها أصغر ، معدل التناقص أيضا يصبح أقل ، وتفقد من حجمها ببطء أكثر فاكثر . فمثلا ، قطعة من الراديوم كتلتها *80* mg* تفقد *40* mg أثناء الـ *1600* سنة الأولى ، وتفقد *20* mg أثناء الـ *1600* سنة التالية ، فقط *10* mg أثناء الـ *1600* سنة التالية . الدراسات المعملية والنظرية تبين أنه للقطع الكبيرة نسبيا (*1* mg أو أكثر) من مادة مشعة ، معدل التناقص فى الحجم (أو الكتلة) عند أى وقت يتناسب مع الكمية المتبقية عند ذلك الوقت .

نفرض أننا لدينا قطعة من الراديوم يوم كتلتها *100* mg ونريد معرفة الكمية المتبقية بعد *1000* سنة . لتكن M هى كتلة القطعة بعد t من السنوات . فتكون M دالة للزمن t نرمز لها أيضا بالرمز الدالى $M(t)$ معدل التغير فى $M(t)$. عند الزمن t يعطى بالمشتقة dM/dt . الافتراض الفيزيائى أن معدل تغير M عند الزمن t يتناسب مع M يمكن صياغته رياضيا هكذا

---

* 1 mg (milligram) = 0.001 gram.

$$\frac{dM}{dt} = kM \qquad (٧)$$

لثابت ما k غير معين بعد . بما أن M متناقصة فاننا نتوقع أن k تكون سالبة .

الآن نحل المعادلة التفاضلية (٧) :

$$\frac{dM}{M} = k\,dt,$$

$$\ln |M| = kt + C.$$

بما أن M موجبة ، فيمكننا حذف علامة القيمة المطلقة ، ويكون لدينا

$$\ln M = kt + C$$

برفع كلا الطرفين الى قوة لـ e لكى نحل المعادلة لـ M ، يكون

$$M = e^{\ln M} = e^{kt+C}$$

أى

$$M = e^C e^{kt} \qquad (٨)$$

يجب الآن تعيين الثابتين k و C هذا يتطلب أن نعرف قيمة M عند زمنين معينين . من الحقيقة أن $M = 100$ عند $t = 0$ يمكننا تعيين e^c ، لأنه بتعويض هذين العددين فى (٨) يكون لدينا $100 = e^c$، والمعادلة (٨) تصبح

$$M = 100e^{kt} \qquad (٩)$$

لتعيين k يجب أن نعرف قيمة M عند وقت ما t غير 0 ، ولم نعط معلومات كهذه فى منطوق المسألة . من التجارب المعملية قد حسب أن أى قطعة من الراديوم ، بصرف النظر عن حجمها ، تتحلل الى نصفها فى 1600 سنة تقريبا . إذن فى حالتنا $M = 50$ عند $t = 1600$ وبتعويض هذين العددين فى (٩)

نحصل على

$$50 = 100(e^k)^{1600}$$

ومن ثم

$$e^k = (\tfrac{1}{2})^{1/1600} \qquad (١٠)$$

يمكننا حل هذه المعادلة لـ k بأخذ اللوغاريتم الطبيعى لكل من الطرفين ، وبذلك نحصل على

$$k = \tfrac{1}{1600} \ln \tfrac{1}{2} \approx -0.000433$$

بتعويض هذه فى (٩) يكون لدينا صيغة كمية الراديوم المتبقية بعد t من السنوات :

$$M = M(t) = 100e^{-0.000433t} \qquad (١١)$$

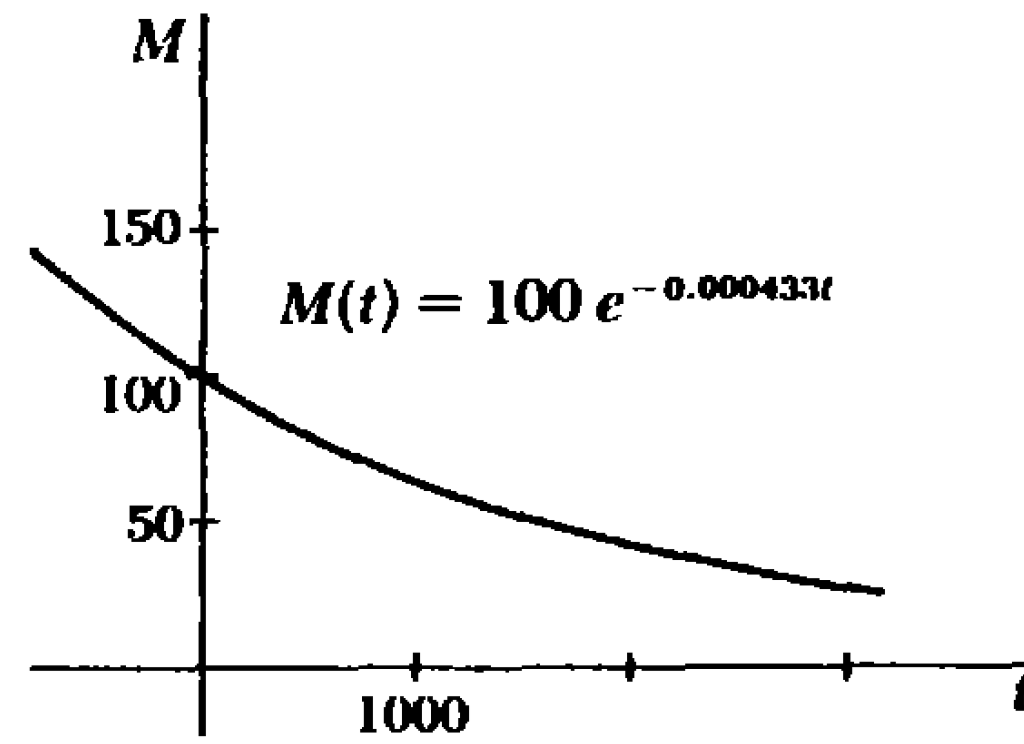
الشكل البيانى لـ M موضح فى الشكل ٧ ـ ١٦ . وهو دالة متناقصة ، كما نتوقع من طبيعة المسألة .

بعد 1000 سنة تكون الكمية المتبقية هى

$$M(1000) = 100e^{-0.433} \approx 64.86 \text{ mg}$$

قيمة $e^{-0.433}$ نحصل عليها بالاستعانة باللوغاريتمات أو من جدول لقيم e^x .

لاحظ أنه لكى نوجد كمية الراديوم المتبقية بعد 1000 سنة كان علينا أن نوجد أولا صيغة للكمية المتبقية بعد t من السنوات. هذه الطريقة نمطية لمسائل المعادلات التفاضلية .



شكل ٧ ـ ١٦
مقدار الراديوم بالمليجرام بعد t من السنوات .

صورة أخرى لـ M ، تكون لبعض الأغراض أكثر ملاءمة من (١١) ، يمكن ايجادها ليس بايجاد k وإنما بايجاد e^k . بالتعويض عن e^k فى (9) بقيمتها المعطاة فى (١٠) ، يكون لدينا

$$M(t) = 100(\tfrac{1}{2})^{t/1600}.$$

من هذه ، يكون

$$M(1000) = 100(\tfrac{1}{2})^{5/8} \approx 64.86 \text{ mg},$$

كما سبق

معادلة (٧) ، وبالتالى المعادلة (٨) ، صحيحة لكل المواد المشعة . الزمن المطلوب لأى مادة مشعة لتتحلل الى نصف حجمها الحالى يسمى عمر النصف . العدد يعتمد فقط على المادة ، وليس على الكمية (انظر تايخ قطعة الراديوم التى كتلتها 80 mg التى شرحت سابقا) ، ويعين الثابت k فى المعادلة (٨) . أعمار النصف قد تختلف من ملايين السنين الى كسر صغير من الثانية . لقد رأينا أن عمر النصف للراديوم هو 1600 سنة ، عمر النصف للثوريوم هو 1.65×10^{10} سنة ، بينما لمادة البولونيوم 213 هو 4.2×10^{-6} ثانية . هذه المواد قصيرة العمر جدا يمكن مشاهدتها فى المعامل فقط .

مسألة التحلل المشع هى نموذج لنوع كبير من المسائل التى فيها تتغير كمية معينة بمعدل يتناسب مع مقدار الكمية عند ذلك الوقت . الكمية قد لاتتناقص بل يمكن أن تكون متزايدة ، كما فى مزرعة البكتريا أو سكان بعض أقطار . فى جميع هذه المسائل طريقة الحل مماثلة لمسألة التحلل المشع ، والتعبير للكمية الموجودة عند أى وقت يتضمن دالة أسية .

المعادلتان (٨) و (٩) حيث $k = 1$ توضحان ، عرضا ، أن الدوال غير الصفرية التى تساوى مشتقاتها هى فقط تلك التى تكون على الصورة $A\,e^t$ ، حيث A ثابت .

مثال ٤ . دلو به ماء يغلى عند درجة حرارة $100°C$ ، وضع فى العراء حيث درجة الحرارة تكون $10°C$. قانون نيوتن للتبريد يقول أن الشىء المغمور فى وسط أبرد يفقد حرارة بمعدل يتناسب مع الفرق فى الحرارة بين الشىء والوسط المحيط به . اذا كان بعد 20 min درجة حرارة الماء قد انخفضت الى $60°$ ماذا ستكون درجة الحرارة بعد 1 hr ؟

لتكن $T = T(t)$ درجة حرارة الماء بعد t min فيكون dT/dt هو معدل تغير T ، وقانون نيوتن يمكن صياغته رياضيا هكذا

$$\frac{dT}{dt} = k(T-10)$$

حيث k ثابت التناسب ، وهو غير معلوم بعد . نحل هذه المعادلة :

$$\frac{dT}{T-10} = k\,dt,$$

$$\ln|T-10| = kt + C. \qquad (١٢)$$

من الاعتبارات الفيزيائية ، درجة حرارة الماء لايمكن أن تهبط عن درجة الهواء . إذن $T > 10$ ، والمعادلة (١٢) تصبح

$$\ln\,(T-10) = kt + C$$

واذن

$$T - 10 = e^{\ln(T-10)} = e^{kt+C}$$

ومنها

$$T = 10 + e^C e^{kt} \qquad (١٣)$$

عندما $T = 100$ و $t = 0$ ، وإذن $10 + e^c = 100$ ومنها $e^c = 90$ والمعادلة (١٣) تصبح

$$T = T(t) = 10 + 90e^{kt} \qquad (١٤)$$

لايجاد k ، نستخدم الشرط الحدى الثانى $T(20) = 60$. هذا الشرط مع (١٤) يستلزمان

$$60 = 10 + 90e^{20k},$$

وإذن

$$e^k = (\tfrac{5}{9})^{1/20}.$$

بدلا من إيجاد k والتعبير عن t بدلالة قوة لـ e ، سنعوض عن e^k فى (١٤) بقيمتها التى أوجدناها ، ونحصل على

$$T = T(t) = 10 + 90(\tfrac{5}{9})^{t/20} \qquad (١٥)$$

بعد 60 min يكون

$$T(60) = 10 + 90(\tfrac{5}{9})^3 \approx 25.4°C$$

وفقا للمعادلة (١٥) ، درجة حرارة الماء لن تصل أبدا لدرجة حرارة الهواء المحيط به اذ أن الحد الأخير من حاصل الجمع لايمكن أن يكون صفرا . لايوجد هنا تناقض . لأن قانون نيوتن هو فقط تقريبى ولايميل لان يكون صحيحا للفترات الطويلة من الزمن .

مسائل

١ ـ أوجد حلا للمعادلة $dy/dx = 2y$ فى مثال ١ بحيث أن $y = -3$ عند $x = 2$.

حل المعادلات التفاضلية الاتية :

٢ ـ $\dfrac{dy}{dx} = x^2y$ ٣ ـ $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ ٤ ـ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$ ٥ ـ $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{u}{t}$

٦ ـ $xy' = 2y$ ٧ ـ $\dfrac{dy}{dx} = 5(y+b)$ ٨ ـ $\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{s+3}{x}$ $(x-3)y' = a$

١٠ ـ $e^t\dfrac{dx}{dt} - 2 = 0$ ١١ ـ $xyy' + x^3 = 1$ ١٢ ـ $x\dfrac{dx}{dt} + tx^2 = t$ ١٣ ـ $\sqrt{2rz}\,\dfrac{dz}{dr} = 1$

١٤ ـ $(x+1)^2\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{y+1} = 0$ ١٥ ـ $(\csc x)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y+1}$ ١٦ ـ $\dfrac{dy}{dx} = 2e^{x-y}$

أوجد حلا $y = f(x)$ للمعادلات التفاضلية الاتية يحقق الشرط الحدى المعطى :

١٧ ـ $\dfrac{dy}{dx} = 2y,\ f(0) = 1$ ١٨ ـ $\dfrac{dy}{dx} = -3y,\ f(1) = 2$ ١٩ ـ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3}y,\ f(0) = -1$

٢٠ ـ عند $x = -6$ $x\dfrac{dy}{dx} - y = 0,\ y = 2$ ٢١ ـ عند $x = 0$ $3\dfrac{dy}{dx} = yx,\ y = -3$

٢٢ ـ عند $x = 2$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y+1}{x^2},\ y = 0$

فى المسائل الآتية أوجد دالة f وثابت k يحققان المعادلة التفاضلية $f'(x) = k f(x)$ والشروط الحدية المعطاة . عبر عن $f(x)$ بصورتين ، احداهما تحتوى على قوة لـ e والاخرى تحتوى على قوة لعدد آخر .

٢٣ ـ $f(0) = 1, f(1) = 6$ ٢٤ ـ $f(0) = 20, f(1) = 10$ ٢٥ ـ $f(1) = 4, f(3) = 12$

٢٦ ـ اثبت أن $w = a + b/r$ ، حيث b و a ثابتان اختياريان ، هو حل للمعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dw}{dr} = 0$$

هل يمكنك ايجاد هذا الحل ؟ (ارشاد : ضع $z = dw / dr$) .

٢٧ ـ (أ) لقطعة الراديوم التى كتلتها 100 gm التى سبق دراستها فى الكتاب ، أوجد الكمية المتبقية بعد 500 سنة ، بعد 4800 سنة ، منذ 1600 سنة ، منذ 500 سنة . (ب) كم من الزمن ستأخذ قطعة من الراديوم كتلتها 100 mg لتتحلل الى ربع حجمها الاصلى ؟ هل كان يمكن توقع هذه النتيجة ؟

٢٨ ـ أثبت أن عمر النصف لمادة مشعة يكون مستقلا عن الكمية الاصلية . (ارشاد : حل المعادلة التفاضلية لكن افترض أنه عند الابتداء كانت كتلة القطعة M_o mg) .

٢٩ ـ لقد قيل فى الكتاب أن الرقم 1600 سنة لعمر النصف للراديوم قد عين بتجربة معملية . صف مثل هذه التجربة .

٣٠ ـ منحنى يمر بالنقطة $(6, 0)$ وميله عند كل نقطة (x, y) عليه هو $2 - y$. أوجد معادلته .

٣١ ـ عمر النصف لـ strontium 90 هو 27 سنة . لكمية كتلتها 150 mg كم يكون المتبقى بعد 5 سنوات ؟

٣٢ ـ اذا كان 10 mg من النظير المشع Cobalt 60 يتحلل الى 8.77 mg فى سنة واحدة ، ماهو عمر النصف لـ Cobalt 60 ؟

٣٣ ـ مستعمرات البكتيريا تتزايد بمعدل يتناسب مع العدد الموجود عند أى لحظة . مزرعة بكتيريا بدأت بـ 500 بكتيريا ، وبعد 6 hr العدد زاد الى 1500 . كم يكون العدد بعد يوم من الابتداء ؟ متى سيكون العدد 100,000 بكتيريا ؟

٣٤ ـ فى سنة 1960 كان عدد سكان مدينة معينة 100,000 وفى سنة 1970 كان 130,000. بافتراض أن عدد السكان يزداد بمعدل يتناسب مع عدد الاشخاص عند أى زمن معطى ، ماذا سيكون عدد السكان فى سنة 1980 ؟ متى سيصل عدد السكان الى 200,000 ؟

٣٥ ـ المعدل الحالى لزيادة عدد السكان فى الهند تقريبا 2.5 فى المائة كل سنة . بافتراض أن عدد السكان يزداد بمعدل يتناسب مع عدد السكان عند أى وقت معطى ، اثبت أن عدد السكان يتضاعف كل 28 سنة .

٣٦ ـ عمر النصف للنظير المشع Iodine 131 هو 8 أيام . اذا حقن مريض بكمية معينة كم من الزمن يمر قبل أن يتناقص الـ iodine الى المقدار غير المضر 0.1 فى المائة من الكمية الأصلية ؟

٣٧ ـ عندما يرتفع معدل تغير الضغط الجوى بالنسبة للارتفاع يتناسب مع الضغط عند الارتفاع . اذا كان الضغط عند سطح البحر هو 30 in من الزئبق وعند ارتفاع 10000 ft هو 21 in ، فأوجد الضغط عند قمة افرست ، التى تكاد تكون على ارتفاع 30,000 ft .

٣٨ ـ كل عضو حيوى يحتوى على كربون ، كسر صغير منه يمكن قياسه هو النظير المشع 14 carbon والباقى كربون خامل . هذا الكسر واحد لجميع الأعضاء الحيوية . بعد موت العضو يظل الكربون الخامل ثابتا ، لكن 14 carbon المشع ، لايتجدد بعد ذلك ، فيتناقص ، وبذلك يتناقص الكسر . عمر النصف لـ 14 carbon هو 5570 سنة . هذا يعنى أن العضو الميت مثل حيوان ، أو حيوان رخوى ، أو نبات التى بقاياه تحتوى على كربون 50 فى المائة من الكسر 14 carbon للعضو الحى قد مضى على موته 5570 سنة . كربون من بقايا خشب وجد فى سنة 1965 فى فجوة حجرية يحتوى على 62.2 فى المائة من الكسر الاصلى لـ 14 carbon . اثبت أن هذا الجزء من الحفرة قد بنى حوالى عام 1850 قبل الميلاد

٣٩ ـ قطعة حديد سخنت لدرجة حرارة 1000° F وضعت فى العراء حيث درجة الحرارة 60° F . اذا كان بعد ساعتين درجة حرارة القطعة قد هبطت الى 500° F ، متى ستكون درجة حرارتها 100° F .

٤٠ ـ سكر خام فى محلول يتغير الى مواد أخرى بمعدل يتناسب مع كمية السكر الخام المتبقية . اذا كان 100 lb من السكر الخام تختزل الى 40 lb فى 6 ساعات ، ما هو المتبقى بعد 24 ساعة ؟

٤١ ـ مكعب من الثلج ، طول ضلعه 10 in ، يبدأ فى الذوبان . حيث أن الهواءالمحيط به يكون ملاصقا لسطح المكعب فقط ، من المعقول أن نفترض أن المكعب يذوب بمعدل يتناسب مع مساحة سطحه . اذا كان بعد ساعة واحدة المكعب الاصلى قد تناقص الى مكعب طول ضلعه 6 in ، فمتى سيذوب كلية ؟

٤٢ ـ عجلة نقطة تتحرك على المحور السينى تتناسب مع السرعة v أوجد موضع وسرعة النقطة عند الزمن t اذا كان $x = 0$ و $v = 8$ عند $t = 0$ وكان $v = 2$ عند $t = 5$.

٤٣ ـ الكابل المتحد المحور هو سلك محاط بعازل مغطى بغلاف معدنى موصل . يسير التيار فى السلك والغلاف . عند أى نقطة فى العازل على بعد r من محور السلك ، الجهد الكهربى V الناتج عن التيار فى السلك والغلاف يحقق المعادلة التفاضلية .

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} = 0$$

اثبت أن $V = a + b \ln r$ ، حيث b ، a ثابتان اختياريان هو حل لهذه المعادلة . هل يمكنك الحصول على هذا الحل ؟ اذا كان الجهد صفرا عند نقطة 0.3 cm من المحور والجهد 5 عند نقطة 1.1 cm من المحور ، أوجد الجهد عند نقطة تبعد 1 cm من المحور .

٤٤ ـ الجسم الهابط فى وسط مقاوم ، مثل الهواء ، توجد بالاضافة الى القوة الناتجة عن الجاذبية لأسفل قوة لأعلى ناتجة عن مقاومة الوسط ، التى للسرعات العادية تتناسب مع سرعة الجسم . اذا كان خط الاحداثيات متجها لأسفل ، فهذا يعنى ان مقدار القوة المؤثرة ليس mg بل $mg - kv$ ، حيث الثابت k يعتمد على المقاومة وحيث m هى كتلة الجسم ، v سرعته . معادلة الحركة هى $ma = F = mg - kv$ ، حيث a هى العجلة . (أ) اذا كانت السرعة الابتدائية هى v_0 ft / sec ، اثبت أن السرعة بعد t sec تعطى بالصيغة

$$v(t) = \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}$$

(ب) اثبت أنه بصرف النظر عن السرعة الابتدائية فان السرعة تقترب من العدد mg / k ، ويسمى السرعة النهائية للجسم . (ج) عين عامل المقاومة k لبارشوت بحيث أن رجل مظلات كتلته 180 lb يقفز من ارتفاع $10,000$ ft يصطدم بالارض بسرعة لاتزيد عن 6 ft / sec (ارشاد : اثبت أن $v(t) < mg / k$ لجميع $k > 0$) .

تعريفات التعبيرات الاقتصادية المستخدمة فى المسألتين ٤٥ و ٤٦ معطاة فى البند ٤ ـ ١٣ .

٤٥ ـ من مبدأ فى الاقتصاديات أنه عندما يزيد المعروض من سلعة عن الطلب ، يهبط الثمن بمعدل بحيث أن الزيادة (المعروض ناقصا الطلب) تنقص بمعدل يتناسب مع الزيادة عند ذلك الوقت . اذا كان المعروض $\sigma(p)$ والمطلوب $\phi(p)$ كلاهما دالة خطية للثمن $p = p(t)$ ، أى كان

$$\phi(p) = a_2 p + b_2 \quad \text{و} \quad \sigma(p) = a_1 p + b_1$$

لبعض الثوابت a_1 , b_1 , a_2 , b_2 حيث $a_1 > a_2$ ، فاثبت أن $p_t = c + (p_0 - c)\, e^{-kt}$ ، حيث k ثابت موجب $p_0 = p(0)$ وحيث $c = -(b_1 - b_2) / (a_1 - a_2)$. ما هى القيمة النهائية للثمن $p(t)$ عندما تتزايد t ؟

٤٦ ـ الطلب والعرض لسلعة عند أى وقت t لايعتمدان فقط على سعرها $p(t)$ لكن ايضا على اتجاه السعر ، أى $p'(t)$. ثمن البن عن زمن معين 30 cents للرطل وبعد t شهرا الطلب يعطى بالصيغة $100 - 3p(t) + 10p'(t)$ والعرض بالصيغة $-20 + 2p(t) + 60p'(t)$. أوجد الثمن كدالة للزمن t الذى يجعل العرض مساويا للطلب فى جميع الأوقات .

٤٧ ـ اذا كانت $f(x)$ هى عدد الاشخاص فى الولايات المتحدة الامريكية الذين دخلهم السنوى مقداره x دولارا أو أكثر ، فمن المعروف أن $f'(x) = c f(x) / x$ حيث c ثابت ما موجب . أوجد $f(x)$ اذا علم أن 100 مليون شخص دخل كل منهم 52000 أو أكثر ، وان 20 مليون شخص دخل كل منهم 6000\$ أو أكثر . كم من الاشخاص دخل كل منهم مقداره $10,000$ \$ أو أكثر ؟ كم من الاشخاص دخل كل منهم يتراوح بين $10,000$\$ و $20,000$ \$ ؟

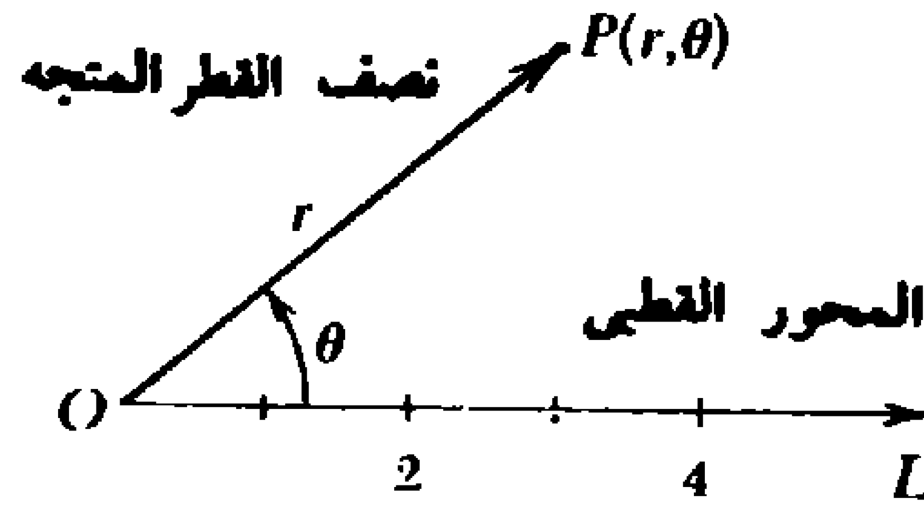
الفصل الثامن

الاحداثيات القطبية

٨ - ١
الاحداثيات القطبية

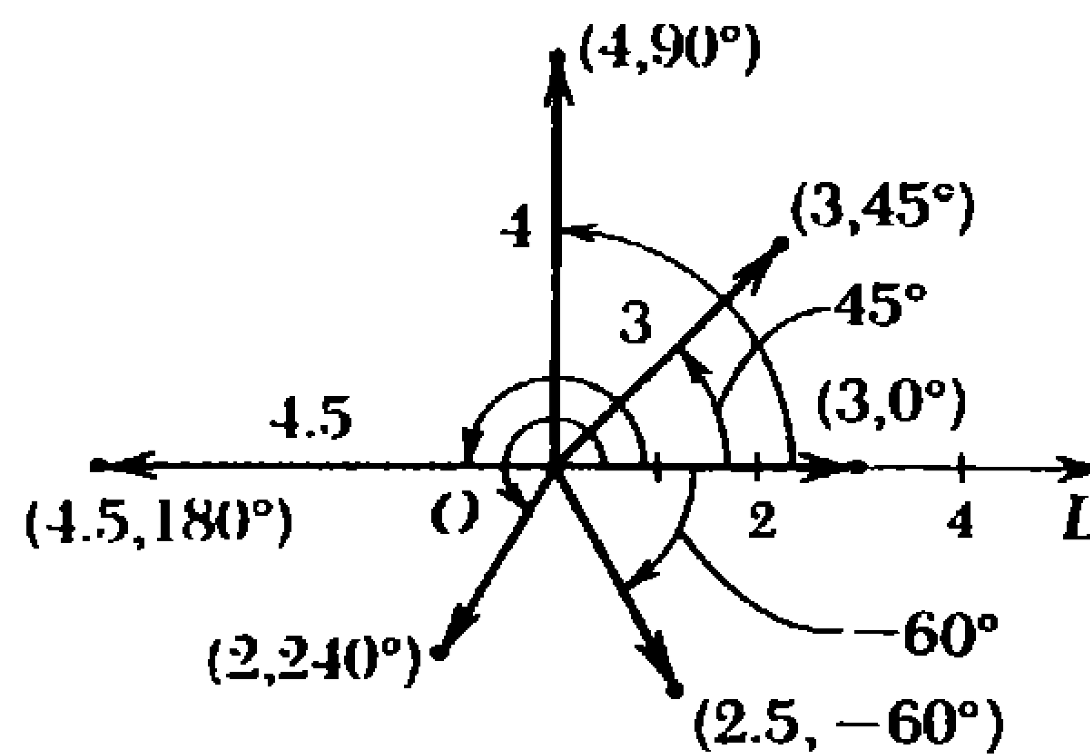
الاحداثيات الكارتيزية تعين النقطة باعطاء بعديها عن مستقيمين متعامدين . فى هذا البند سندرس طريقة أخرى لتعيين النقط فى مستوى وهى أكثر ملاءمة لبعض الأغراض .

ليكن L هو النصف الموجب لخط الاحداثيات فى المستوى حيث نقطة الاصل يرمز لها بالحرف O (شكل ٨ - ١) . لأى نقطة P فى المستوى لتكن r طول القطعة OP ولتكن θ هى مقياس الزاوية



شكل ٨ - ١

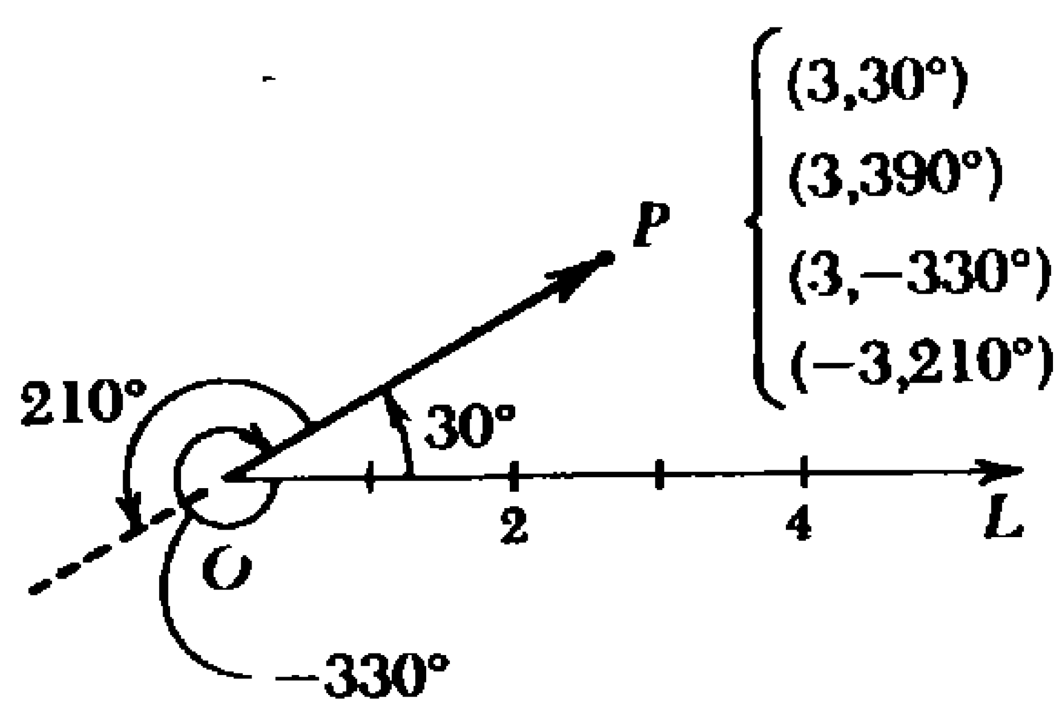
LOP التى ضلعها الابتدائى على L وضلعها النهائى على الخط المستقيم OP . زوج الاعداد (r, θ) يعين P ويسمى احداثياها القطبيان . نقط متعددة باحداثياتها القطبية موضحة فى الشكل ٨ - ٢ . لاحظ أن الاحداثى r دائما يعطى أولا . الشعاع L يسمى المحور القطبى ، النقطة O تسمى القطب أو نقطة الاصل ، والقطعة المستقيمة OP تسمى نصف القطر المتجه للنقطة P .



شكل ٨ - ٢

طريقة شكلية ومفيدة للنظر الى الاحداثيات القطبية هى أن تتصور نفسك واقفا عند نقطة الأصل O وملتفتا على طول المحور القطبى L . ادر نفسك حتى تجد نفسك ملتفتا على طول الخط OP . الزاوية θ التى أدرت نفسك خلالها تكون موجبة أو سالبة طبقا دورانك ضد اتجاه عقرب الساعة أم فى اتجاه عقرب الساعة . الان سر الى الامام على الخط OP الى أن تصل P. المسافة التى سرتها هى r .

النقطة يمكن أن يكون لها زوج واحد فقط من الاحداثيات الكارتيزية ، لكن يمكن أن يكون لها أكثر من زوج من الاحداثيات القطبية . النقطة $P(3,30°)$ فى شكل ٨ ـ ٣ أيضا لها الاحداثيات

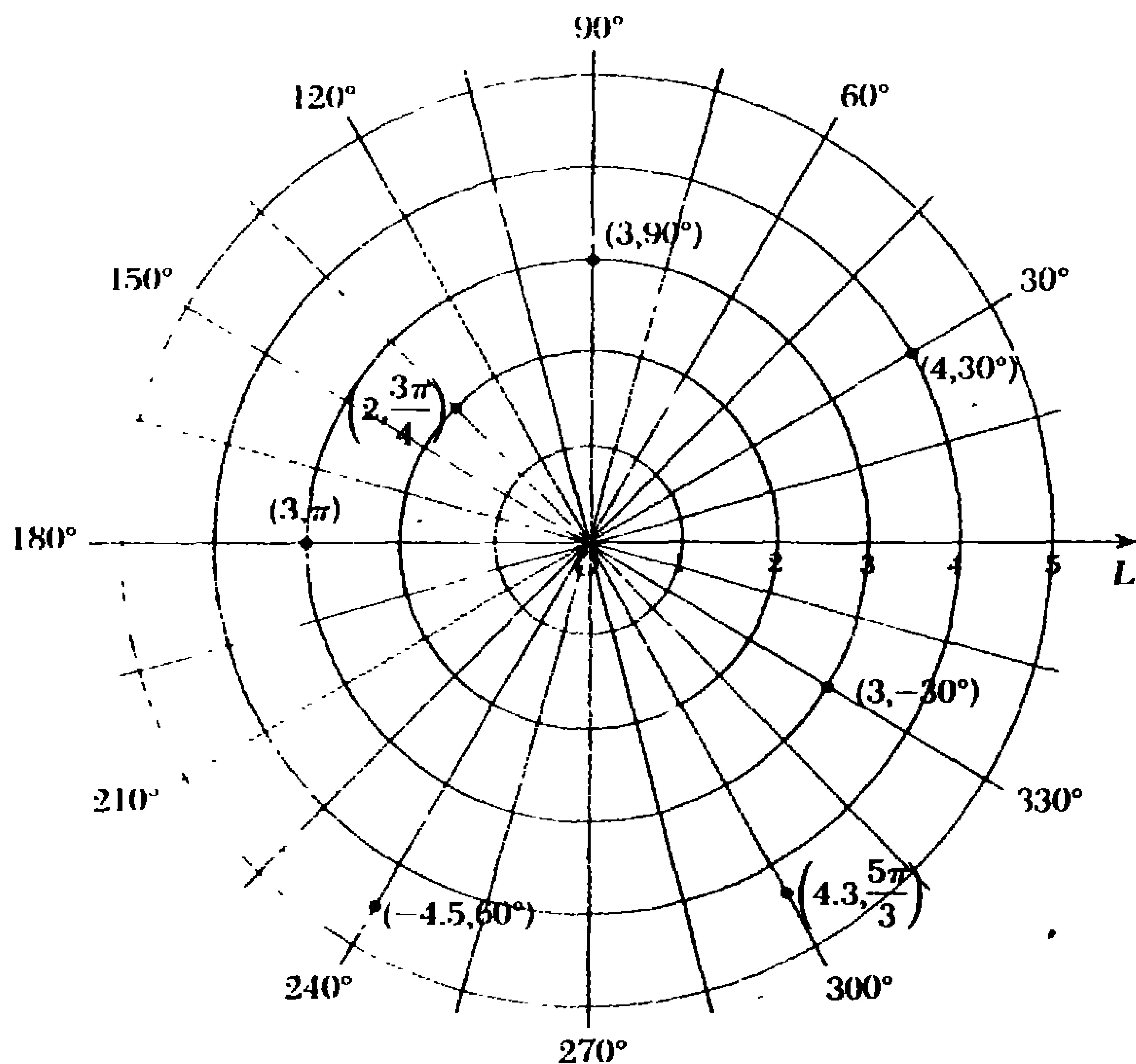


شكل ٨ ـ ٣

$(3,-330°)$, $(3,750°)$, $(3,390°)$ واحداثيات أخرى نحصل عليها باضافة مضاعفات لـ $360°$ الى $30°$. من المناسب فى الاحداثيات القطبية أن نجعل المسافة r سالبة مثلما نجعلها موجبة . بهذا الاصطلاح ، احداثيات قطبية أخرى للنقطة $P\ (3,30°)$ هى $(-3,\ 210°)$. لترى لماذا هذه تكون احداثيات ، أدر نفسك زاوية $210°$ ، لتصبح ملتفتا مباشرة بعيدا عن P . الان سر للخلف مسافة 3 ، فتصل للنقطة P .

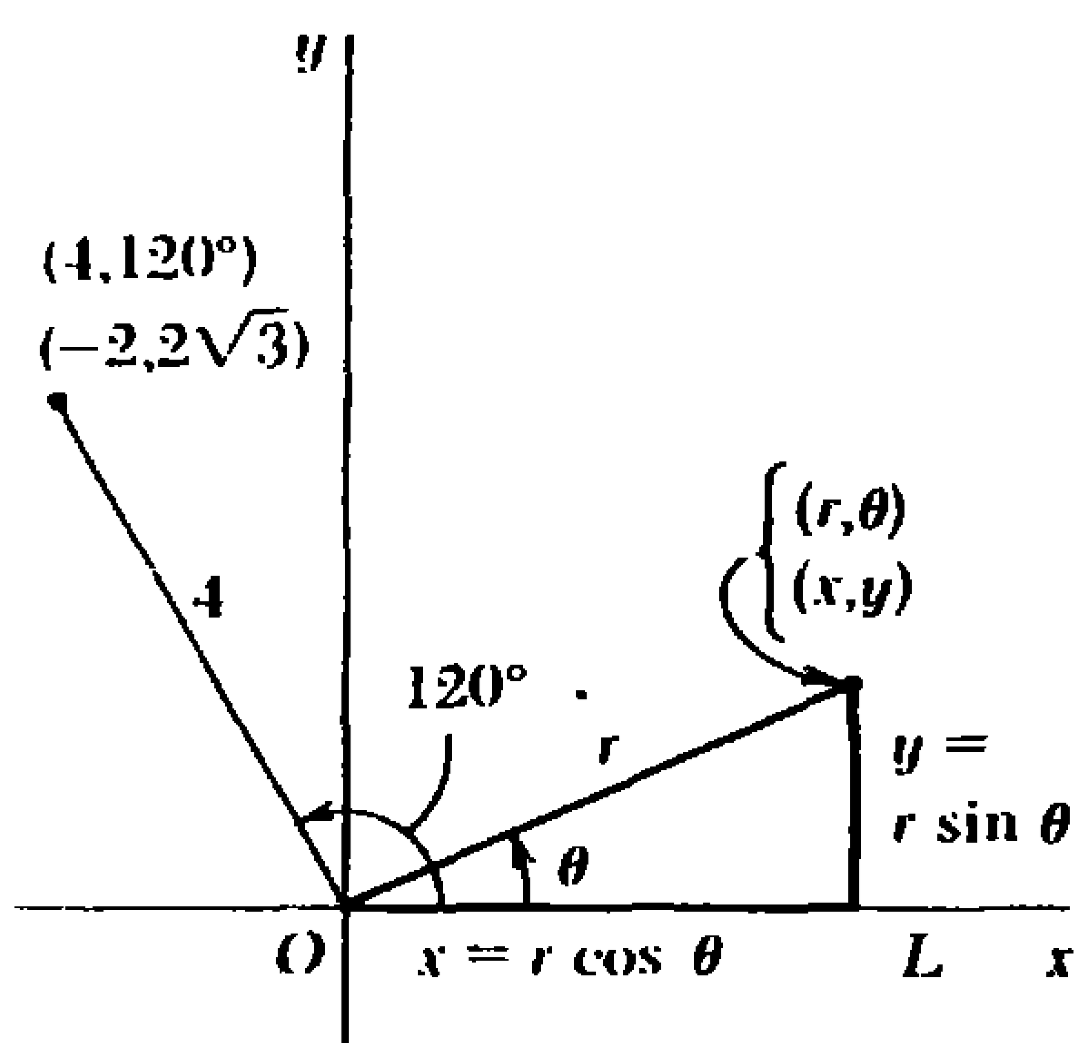
r السالبة تعنى سيرا للخلف . نقطة الاصل غير عادية فى أن لها الاحداثيات (r, θ) لأى زاوية θ . زاوية الاحداثى القطبى تقاس عادة بالتقدير الدائرى .

ورق احداثيات قطبية خاص عليه نموذج من الاشعة والدوائر المتحدة المركز مثل ذلك الموضح فى الشكل ٨ ـ ٤ يبسط تعيين مواقع النقط وتخطيط المنحنيات المعطاة بمعادلات احداثيات قطبية .



شكل ٨ - ٤

اذا وضع نظام الاحداثيات الكارتيزيه ونظام الاحداثيات القطبية على مستوى بحيث أن نقطتى الاصل لهما تنطبقان وبحيث المحور القطبى يقع على المحور السينى الموجب (شكل ٨ ـ ٥) ،



شكل ٨-٥

فان كل نقطة فى المستوى لها زوج من الاحداثيات القطبية (r, θ) كما لها زوج من الاحداثيات الكارتيزية (x, y) . من تعريف الدوال المثلثية ، $y / r = \sin\theta$ و $x / r = \cos\theta$ اذا كانت $r > 0$. ومن ثم يكون

$$y = r\sin\theta. \quad \text{و} \quad x = r\cos\theta \qquad (١)$$

المعادلتان أيضا صحيحتان اذا كانت $r \leqslant 0$. هاتان المعادلتان تمكننا من ايجاد الاحداثيين الكارتيزيين لنقطة معلوم احداثياها القطبيان . فمثلا ، النقطة التى احداثياها القطبيان $(4, 120°)$ لها الاحداثيات الكارتيزيان $y = 4\sin 120° = 2\sqrt{3}$ و $x = 4\cos 120° = -2$ (شكل ٨ ـ ٥) .

من (١) ، $y / x = \tan\theta$ و $x^2 + y^2 = r^2$. وبالتالى يكون

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}, \qquad (٢)$$

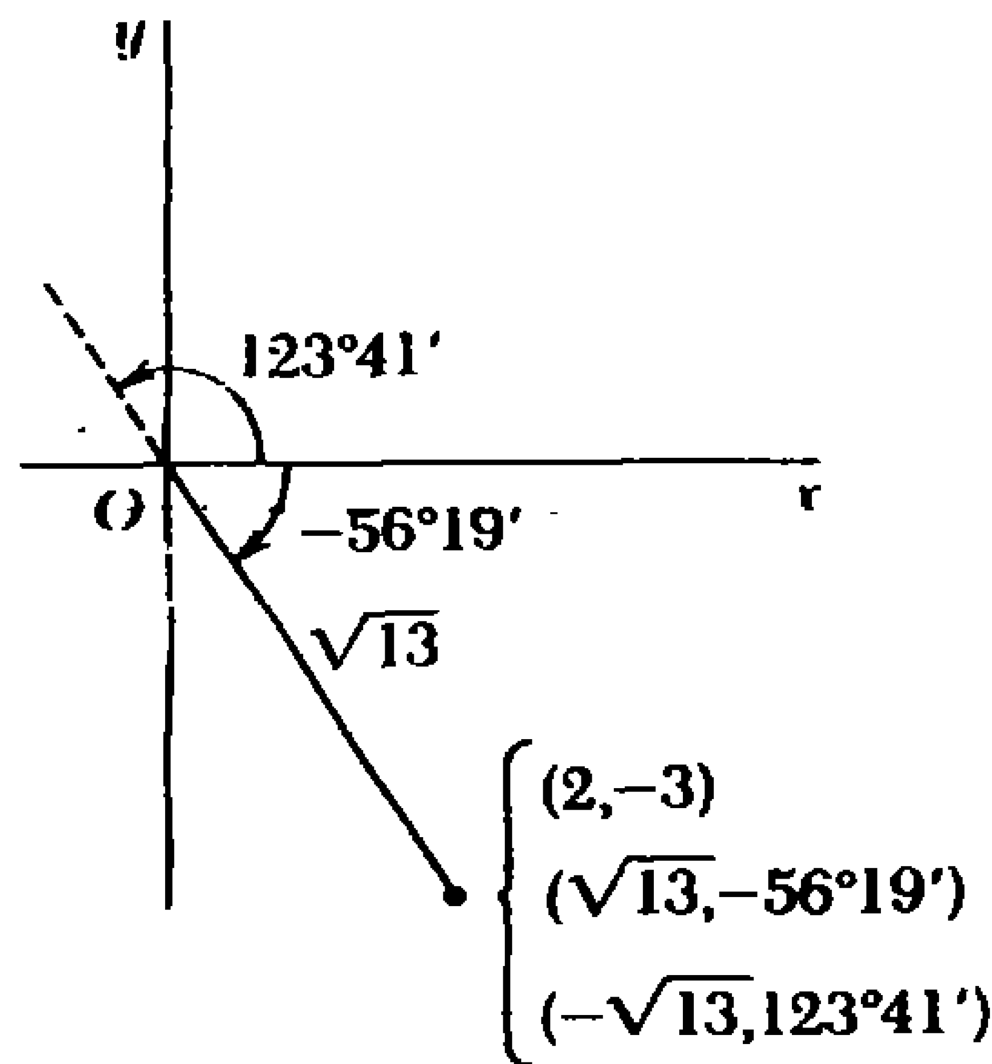
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad (٣)$$

حيث $\mathrm{Tan}^{-1}(y / x)$ يمكن أن تكون أى من الزوايا التى ظلها هو y / x . تعدد الاختيارات لـ r, θ يعكس الحقيقة أن النقطة ليس لها زوج وحيد من الاحداثيات القطبية . المعادلتان (٢) تمكناننا من ايجاد الاحداثيات القطبية لنقطة معلوم احداثياها الكارتيزيان .

النقطة التى احداثياها الكارتيزيان هما $(2, -3)$ لهما الاحداثيان القطبيان

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}(-3/2) \approx -56°19',\ r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

(شكل ٨ ـ ٦) . احداثيان قطبيان آخران هما $(-\sqrt{13}, 123° 41')$. يجب علينا أن نحرص عند استخدام المعادلتين (٢) على اختيار العلامة الصحيحة لـ r التى تتفق مع اختيارنا لـ θ .



شكل ٨ ـ ٦

عندما نستخدم نظامى الاحداثيات الكارتيزية والقطبية فى آن واحد أو نغير من نظام الى آخر ، سنفترض أنهما موضوعان كما شرحنا أعلاه .

مسائل

عين مواقع النقط التى احداثياتها القطبية معطاة :

١ - $(2,60^\circ)$ ٢ - $(1,180^\circ)$ ٣ - $(0,17^\circ)$ ٤ - $(4,\pi/4)$ ٥ - $(-1,60^\circ)$

٦ - $(2,0)$ ٧ - $(1.8,315^\circ)$ ٨ - $(2,-90^\circ)$ ٩ - $(3,-300^\circ)$ ١٠ - $(5,420^\circ)$

١١ - $(-4.3,140^\circ)$ ١٢ - $(-1,\pi)$ ١٣ - $(-2,-\pi/6)$

أوجد مجموعتين أخريين من الاحداثيات القطبية ، احداهما بها الاشارة العكسية لـ r ، لكل من النقط المعطاه احداثياتها القطبية أدناه :

١٤ - $(4,60^\circ)$ ١٥ - $(-2,225^\circ)$ ١٦ - $(2,-15^\circ)$ ١٧ - $(1,\pi/3)$

١٨ - $(3.3,-\pi/2)$ ١٩ - $(-\frac{4}{3},53^\circ)$ ٢٠ - $(-0.5,3\pi/4)$ ٢١ - $(0,0)$

أوجد الاحداثيات الكارتيزية للنقط التى احداثياتها القطبية معطاة :

٢٢ - $(0,0)$ ٢٣ - $(1,90^\circ)$ ٢٤ - $(4,180^\circ)$ ٢٥ - $(0,-\pi)$ ٢٦ - $(1,3\pi/2)$

٢٧ - $(-2,-3\pi/2)$ ٢٨ - $(2,30^\circ)$ ٢٩ - $(-3,-60^\circ)$ ٣٠ - $(-2,-\pi/4)$ ٣١ - $(6,3\pi/4)$

٣٢ - $(-2,-\pi/3)$ ٣٣ - $(1,-5\pi/6)$ ٣٤ - $(4.5,230^\circ)$

أوجد احداثيات قطبية للنقط التى احداثياتها الكارتيزية معطاة :

٣٥ - $(0,0)$ ٣٦ - $(3,0)$ ٣٧ - $(0,1)$ ٣٨ - $(0,-5)$ ٣٩ - $(-2,0)$

٤٠ - $(8,8)$ ٤١ - $(4,-4)$ ٤٢ - $(-3,-3)$ ٤٣ - $(-1,\sqrt{3})$ ٤٤ - $(-2\sqrt{3},2)$

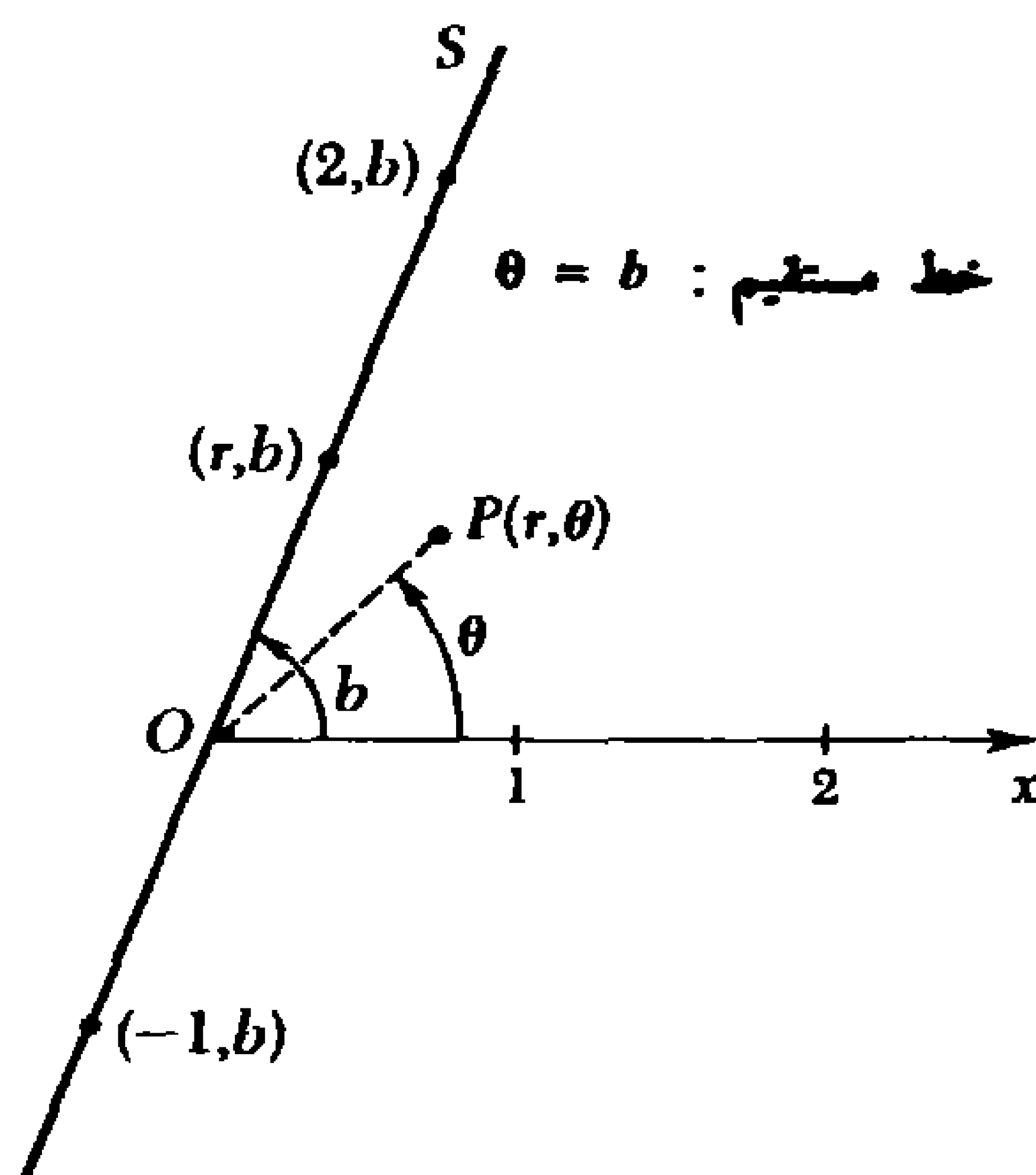
٤٥ - $(-4\sqrt{3},4)$ ٤٦ - $(2,5)$ ٤٧ - $(8,-3)$

٨ - ٢
الاشكال البيانية للمعادلات الاحداثيات القطبية

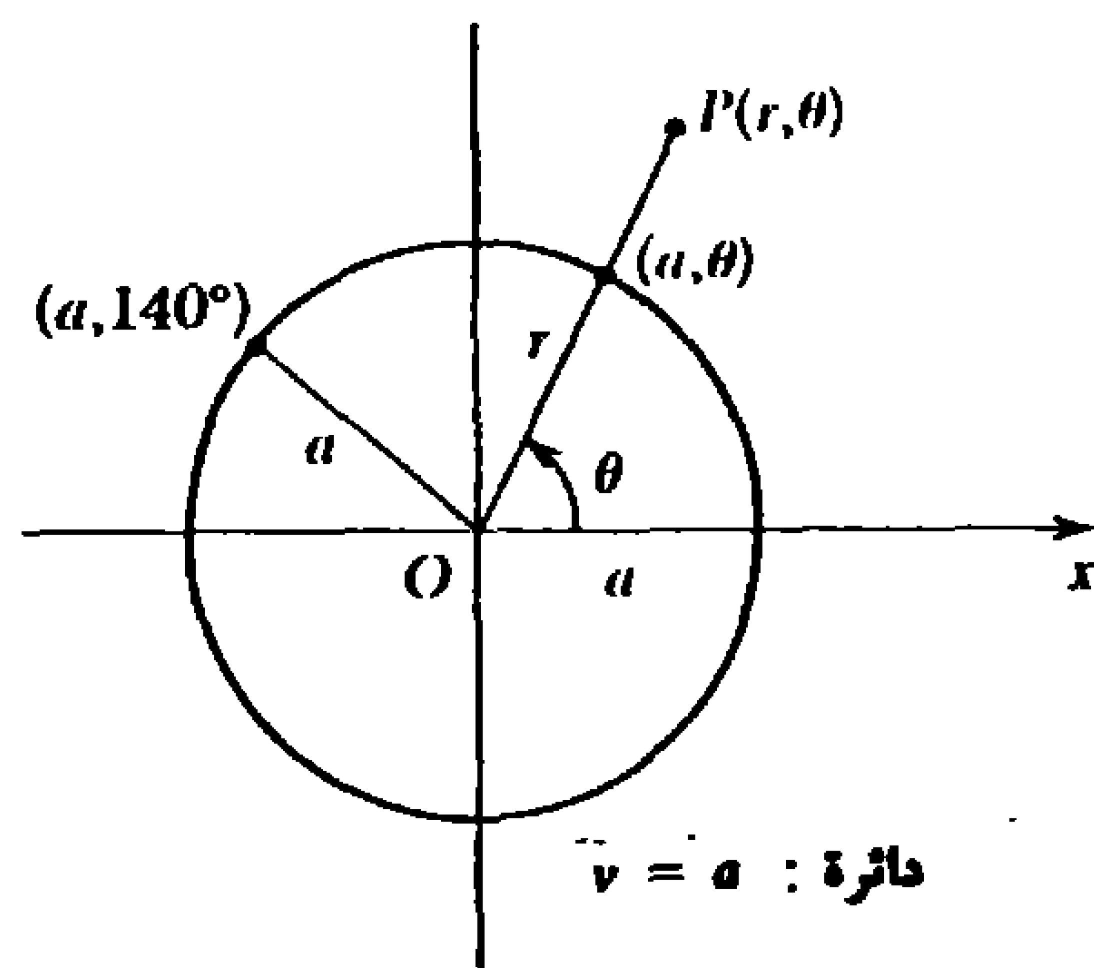
كما فى الاحداثيات الكارتيزية ، المعادلات فى الاحداثيات القطبية لها أشكال بيانية . الشكل البيانى لمعادلة فى الاحداثيات القطبية θ و r تعرف بأنها فئة جميع النقط التى كل منها له زوج ما من الاحداثيات القطبية يحقق المعادلة . ليس ضروريا أن جميع الاحداثيات الممكنة للنقطة تحقق المعادلة حتى تكون النقطة على الشكل البيانى . فمثلا ، زوج الاحداثيات $(1,45^\circ)$ لايحقق

المعادلة $r = \tan\theta$. لكن رغما من ذلك ، النقطة $P\,(1\,,\,45°)$ تكون على الشكل البيانى لان زوجا آخر لاحداثيات P , $(-1\,,\,225°)$ ، يحقق المعادلة .

نبدأ بالمنحنى البسيط $r = a$. حيث أن متغيرا واحدا موجود ، فان قيم الاحداثى الآخر يمكن أن تكون اختيارية . ولان الاحداثيين (a, θ) يحققان المعادلة لاى θ وأى زوج $(r\,,\,\theta)$ لايعمل ذلك ما لم تكن $r = a$ ، فالمنحنى يتكون من جميع النقط $(a\,,\,\theta)$ (شكل ٨ ـ ٧) . هذه تكون دائرة نصف قطرها a ومركزها عند نقطة الاصل . ومن ثم الدائرة هى الشكل البيانى للمعادلة . المنحنى $\theta = b$ هو الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الاصل ويصنع زاوية b مع المحور القطبى (شكل ٨ ـ ٨) . أى نقطة على هذا الخط ، وفقط مثل هذه النقطة ، لها الاحداثيات $(r\,,\,b)$ لقيمة ما لـ r .



شكل ٨ ـ ٨
النقطة P على الخط المستقيم S إذا كانت $\theta = b$.



شكل ٨ ـ ٧
النقطة P على الدائرة إذا وإذا فقط كان $r = a$.

مثال ١ . خطط الشكل البيانى للمعادلة $r = 4\sin\theta$.

عندما يكون $r\,,\,\theta$ متغيرين فى معادلة ، عادة نفترض أنهما تشيران الى احداثيات قطبية ما لم ينص على غير ذلك . نعمل قائمة (جدول ١) بقيم θ و r التى تحقق المعادلة . بما أن قيم $\sin\theta$ ، ومن ثم قيم r ، تتكرر لـ $\theta \geqslant 360°$ ، فلاتوجد حاجة للاستمرار فى الجدول بعد $360°$ ، نعين مواقع النقط التى احداثياتها هى القيم θ و r . هذه النقط تكون المنحنى الموضح فى الشكل ٨ ـ ٩ . النقط التى احداثياتها معطاة فى النصف الثانى من الجدول هى نفسها النقط التى فى النصف الاول . ومن ثم فالمنحنى يرسم بأكمله عندما θ تذهب من 0 الى $180°$. سنوضح فى مثال ٦ أن المنحنى هو دائرة .

جدول ١

r	θ
0	0°
2	30°
$2\sqrt{2} \approx 2.82$	45°
$2\sqrt{3} \approx 3.46$	60°
4	90°
$2\sqrt{3} \approx 3.46$	120°
$2\sqrt{2} \approx 2.82$	135°
2	150°
0	180°
-2	210°
$-2\sqrt{2} \approx -2.82$	225°
$-2\sqrt{3} \approx -3.46$	240°
-4	270°
$-2\sqrt{3} \approx -3.46$	300°
$-2\sqrt{2} \approx -2.82$	315°
-2	330°
0	360°

مثال ٢ . خطط الشكل البيانى للمعادلة $r = 1 + 2\cos\theta$.

مرة أخرى ، نحتاج فقط أن نعمل جدولا لـ θ و r حيث $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$ ، لان قيم r تتكرر لـ $\theta \geqslant 360°$ (جدول ٢) . المنحنى ، ويسمى ليماسون (limaçon) ، مخطط فى الشكل ٨ ـ ١٠ . عندما تزداد θ من صفر الى $180°$ ، تتناقص r من 3 الى -1 ، وعندما تزداد θ من 180 الى $360°$ تزداد r من -1 الى 3 . العروة الداخلية ترسم أثناء فترة $120° < \theta < 240°$ عندما تكون r سالبة . المنحنى يكون مماسا للشعاعين عند $240°$ و $120°$.

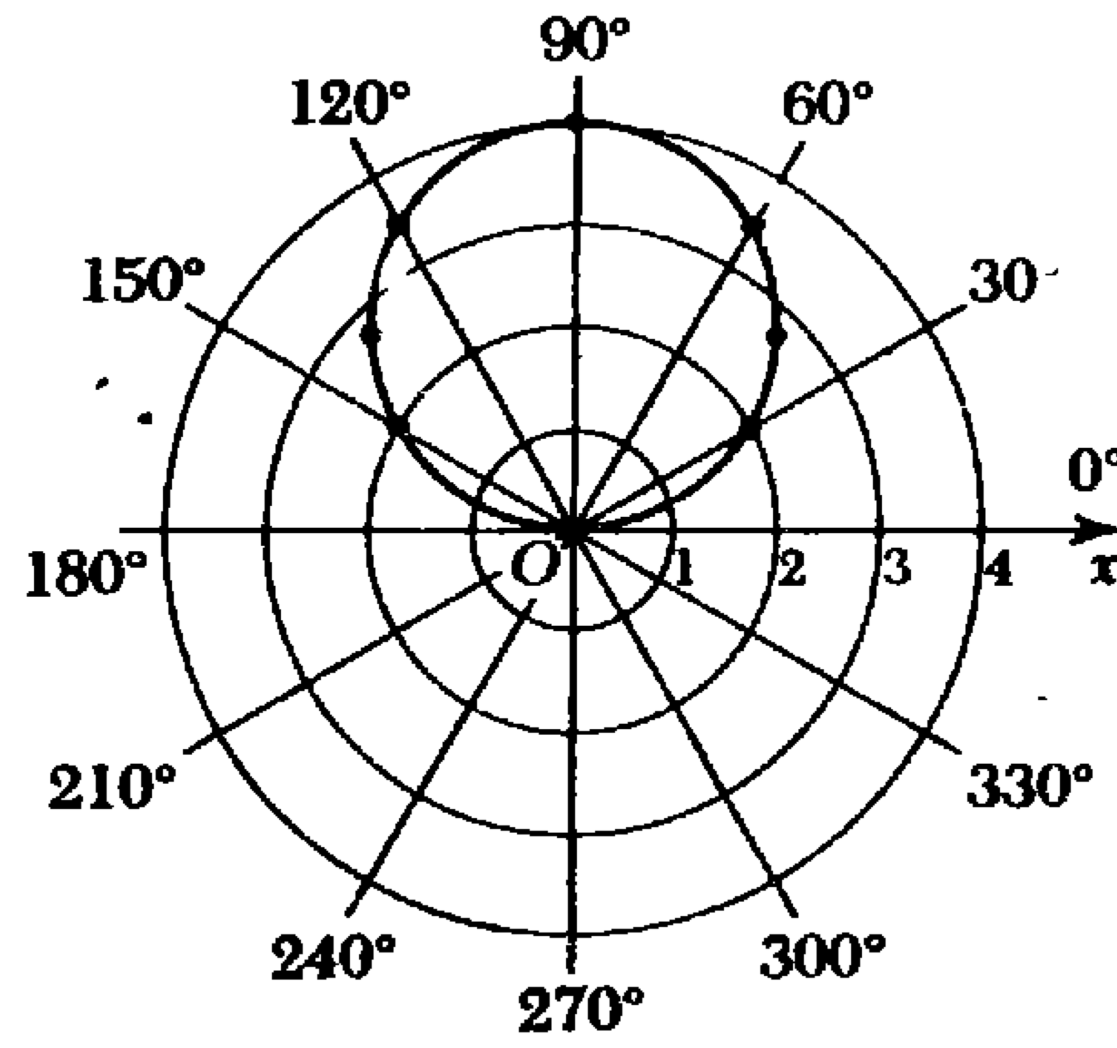
جدول ٢

r	θ
3	0°
$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$	30°
2	60°
1	90°
0	120°
$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$	150°
-1	180°
$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$	210°
0	240°
1	270°
2	300°
$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$	330°
3	360°

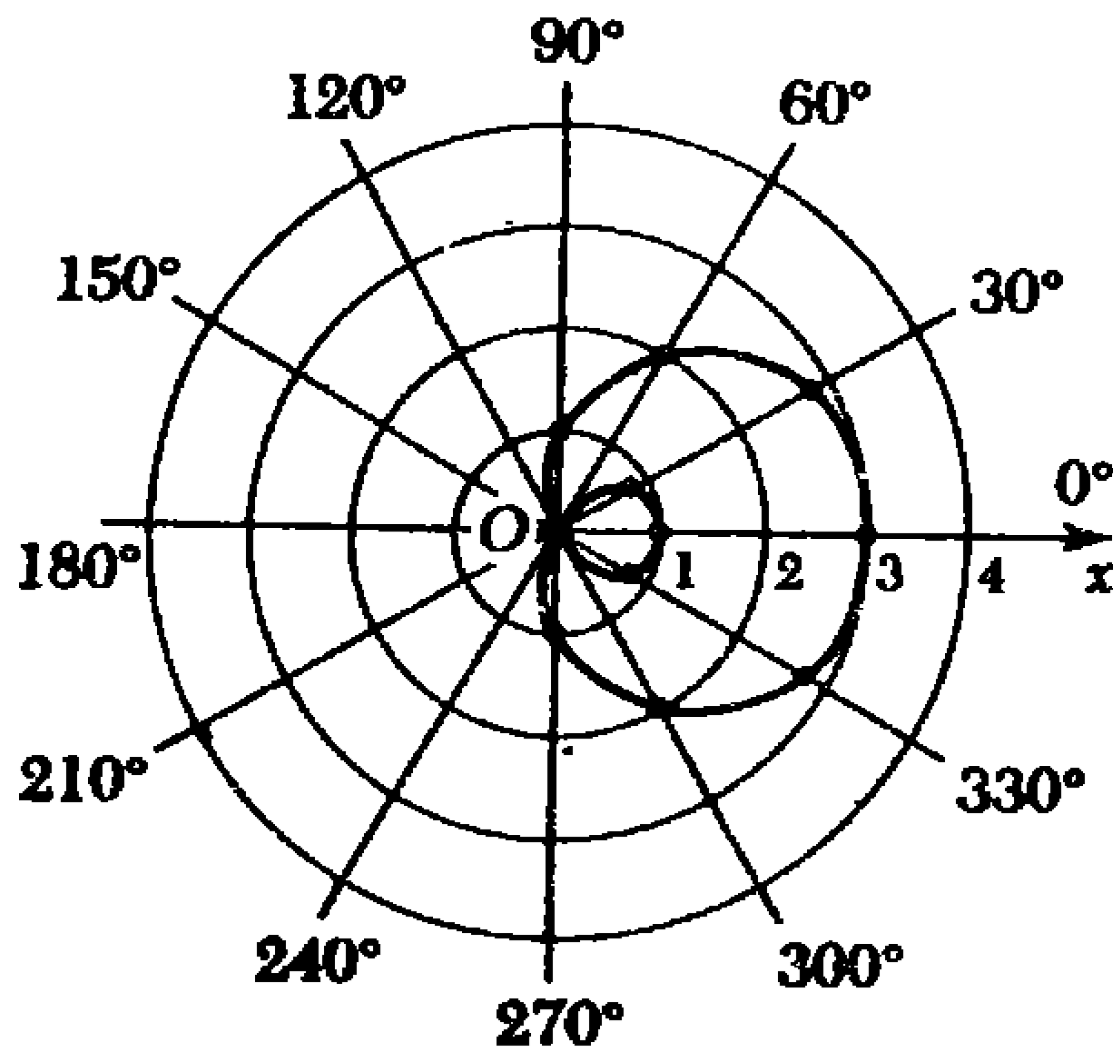
عند تخطيط منحنيات الاحداثيات القطبية ، θ يجب السماح لها أن تذهب من 0 الى $360°$ والى ما بعد ذلك ، اذا كان ضروريا ، حتى تبدأ قيم r أن تتكرر .

مثال ٣ . خطط الشكل البيانى للمعادلة $r = a \sin 3\theta$ حيث $a > 0$.

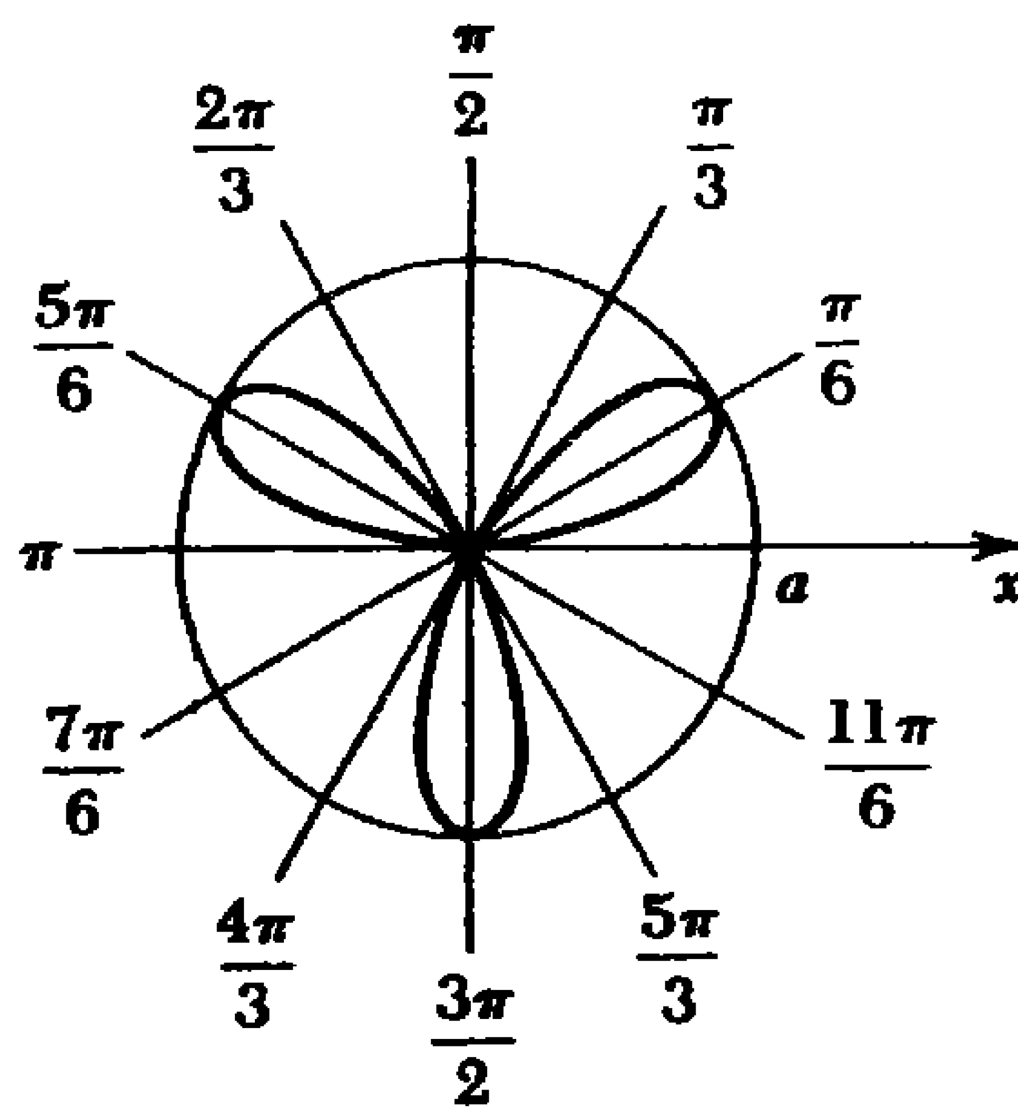
سوف لانعمل جدولا لقيم θ و r ، لكن سنستخدم معلوماتنا عن سلوك الدوال المثلثية ، لرسم الشكل البيانى . هذه المرة سنقيس θ بالتقدير الدائرى . اختر مسافة مناسبة على المحور القطبى وسمها a (شكل ٨ ـ ١١) . عندما $r = 0$ و $\theta = 0$. عندما تزداد θ تزداد r وتصل الى قيمتها العظمى a عندما $\theta = \pi / 6$ عندما تزداد θ من $\pi / 6$ الى $\pi / 3$ ، تزداد 3θ من $\pi / 2$ الى π ، وبالتالى تتناقص r وتكون صفرا عندما $\theta = \pi / 3$. هذا يكمل العروة اليمنى للمنحنى .



شكل ٨ ـ ٩
دائرة : $r = 4 \sin \theta$



شكل ٨ ـ ١٠
ليماسون : $r = 1 + 2 \cos \theta$



شكل ٨ ـ ١١
وردة بثلاث ورقات :
$r = a \sin 3\theta$

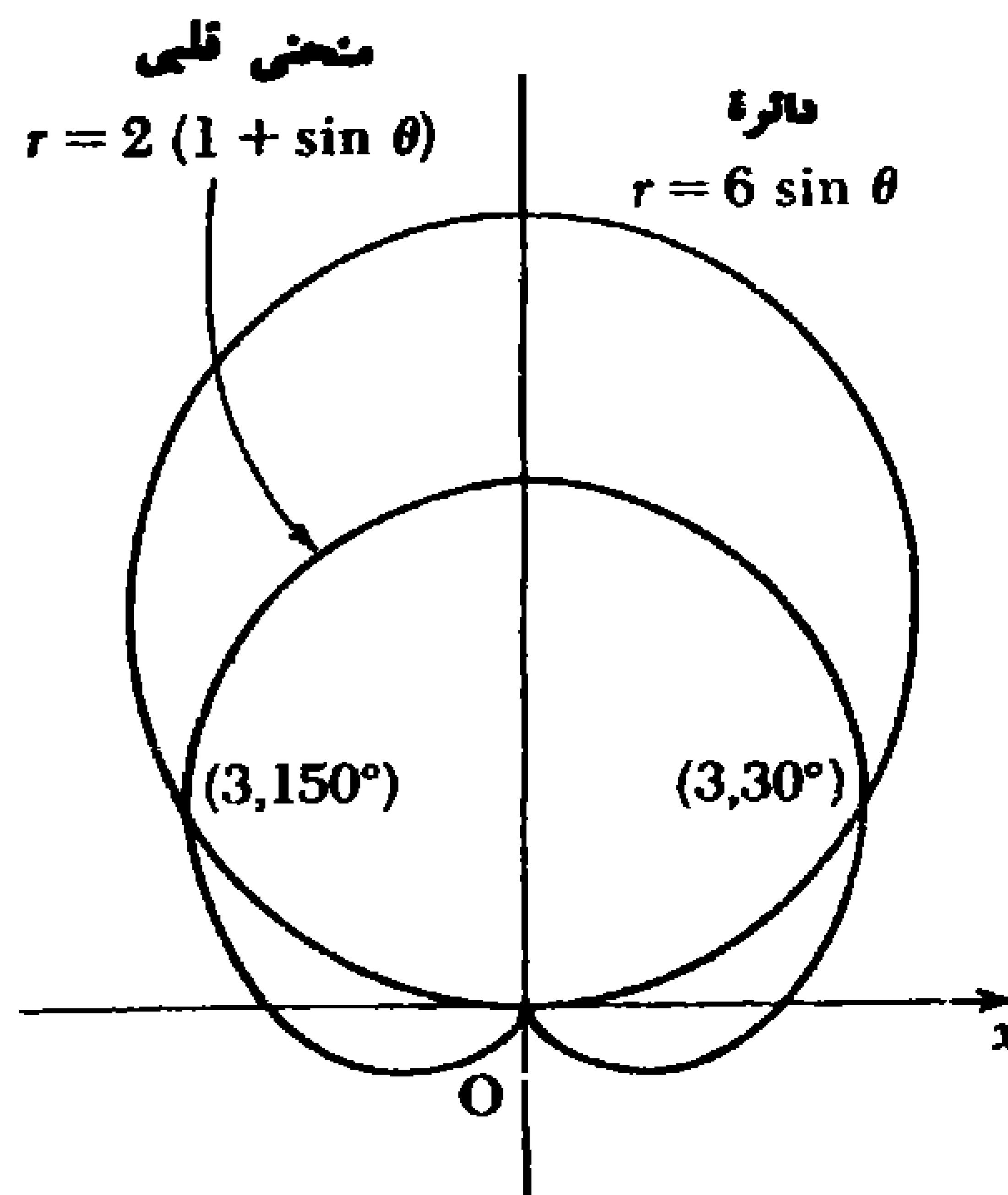
المنحنى يكون مماسا عند نقطة الأصل للمحور القطبي وللشعاع $\theta = \pi / 3$. عندما تكون $\pi / 3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi / 3$ تكون $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ وتكون r سالبة . عندما تتزايد θ من $\pi / 3$ الى $2\pi / 3$ ، تتناقص r ثم تتزايد من صفر الى a— الى صفر ، وترسم العروة السفلى للمنحنى . لـ $2\pi/3 \leqslant \theta \leqslant \pi$ تكون $2\pi \leqslant 3\theta \leqslant 3\pi$ وتكون r موجبة . عندما تتزايد θ من $2\pi/3$ الى π ، r تتزايد ثم تتناقص من 0 الى a الى 0 ، راسمة العروة اليسرى . لـ $\pi \leqslant \theta \leqslant 4\pi/3$ تكون r سالبة والعروة اليمنى ترسم مرة أخرى . بالمثل ، عندما تزداد θ من $4\pi/3$ الى 2π ، العروة السفلى ثم العروة اليسرى ترسمان مرة أخرى . هذا المنحنى يسمى وردة بثلاث ورقات .

مثال ٤ : أوجد نقط تقاطع المنحنى القلبي $r = 2(1 + \sin\theta)$ والدائرة $r = 6 \sin\theta$.

نحل المعادلتين معا :

$$2(1 + \sin\theta) = 6 \sin\theta,$$
$$\sin\theta = \tfrac{1}{2},$$
$$\theta = 30^\circ \text{ and } 150^\circ.$$

بتعويض $\frac{1}{2}$ لـ $\sin\theta$ فى معادلة احد المنحنيين ، نجد أن $r = 3$. اذن النقطتان $(3, 150^\circ)$ و $(3, 30^\circ)$ على المنحنيين . تخطيط المنحنيين فى الشكل ٨ ـ ١٢ يوضح أن نقطة الاصل تكون أيضا على المنحنيين مع أن حل المعادلتين معا لايعطيها . السبب فى ذلك هو تعدد الاحداثيات لنقطة . لايوجد زوج واحد من احداثيات نقطة الأصل يحقق كلا من المعادلتين ، لكن الزوج



شكل ٨ ـ ١٢

$(0, 270°)$ يحقق الأولى والزوج $(0, 0°)$ يحقق الثانية . عند ايجاد نقط تقاطع منحنيين ينبغى عمل تخطيط تقريبى للمنحنيين لنرى ما اذا كان المنحنيان لهما نقط مشتركة غير تلك التى توجد بحل المعادلتين معا .

المنحنى القلبى (الكاردويد) $r = 2\ (1 + \sin\theta)$ المخطط فى الشكل ٨ ـ ١٢ معادلته الكارتيزية

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 4y^3 - 4x^2y - 4x^2 = 0$$

تخطيط هذا المنحنى من هذه المعادلة أمر مروع . منحنيات مفيدة كثيرة لها معادلات أبسط فى الاحداثيات القطبية عن الاحداثيات الكارتيزية ومن الأسهل دراستها بتلك الصورة .

مثال ٥ . أوجد معادلة فى الاحداثيات القطبية للقطع المكافىء $y^2 = 4px$.

رأينا فى بند ٨ ـ ١ أن (r, θ) و (x, y) ترتبطان بالعلاقتين $x = r\cos\theta\ ;\ y = r\sin\theta$. بتعويض هاتين لـ x, y فى المعادلة ، نحصل على

$$r^2 \sin^2\theta = 4pr\cos\theta$$

كمعادلة احداثيات قطبية للقطع المكافىء . اذا حذفنا r من طرفى المعادلة المعادلة ، نحصل على المعادلة الأبسط

$$r \sin^2\theta = 4p\cos\theta$$

لان $r = 0$ تحقق المعادلة الأولى ، يوجد خطر فى الحذف ، فقد نفقد نقطة الأصل كنقطة على المنحنى . هذا لايحدث هنا لأن الاحداثيات $(0, 90°)$ لنقطة الأصل تحقق المعادلة الثانية . المعادلتان متكافئتان .

مثال ٦ . اثبت أن المنحنى $r = 4\sin\theta$ الذى خطط فى مثال ١ هو دائرة .

سنوجد معادلة المنحنى بالاحداثيات الكارتيزية . مع أننا يمكننا التعويض مباشرة عن θ و r أو $\sin\theta$ كما هى معطاة فى (٢) و (٣) ، ببند ٨ ـ ١ ، الا أنه من الاسهل أن نضرب أولا المعادلة فى r ، لنحصل على

$$r^2 = 4r\sin\theta \qquad (١)$$

هذه المعادلة مكافئة للمعادلة الأصلية . لأن النقطة الجديدة الوحيدة التى قد تكون أضيفت بعمل ذلك هى النقطة حيث $r = 0$ ، أى نقطة الأصل . لكن بما أن $(0, 0°)$ تحقق المعادلة الأصلية ، فنقطة الأصل تكون فعلا على المنحنى . بما أن $y = r\sin\theta$ ، $x^2 + y^2 = r^2$ ، فاننا نحصل بتعويض هذه القيم فى (١) على

$$x^2 + y^2 = 4y$$

وهذه معادلة دائرة . بكتابة المعادلة على الصورة

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

نرى أن المركز احداثياته الكارتيزية هى $(2\,,0)$ وطول القطر هو 4 .

مسائل

خطط الشكل البيانى للمعادلات الآتية :

١ - $r = 4.5$ ، ٢ - $r = -3$ ، ٣ - $\theta = 120°$

٤ - $\theta = -\pi/4$ ، ٥ - $r = 3\cos\theta$ ، ٦ - $r = 1 + \cos\theta$ (كاردويد)

٧ - $r = a(1 - \sin\theta),\ a > 0$ ، ٨ - $r = 2 + 4\sin\theta$ ، ٩ - $r = 1 - 2\sin\theta$

١٠ - $r = 3 + \cos\theta$ (ليماسون) ، ١١ - $r = 2 - \sin\theta$ ، ١٢ - $r\cos\theta = 4$

١٣ - $r = 2\csc\theta$ ، ١٤ - $r^2 = a^2\cos 2\theta,\ a > 0$ (ليمنسكيت)

١٥ - $r^2 = 4\sin 2\theta$ ، ١٦ - $r = \sin 2\theta$ (وردة بأربع ورقات)

١٧ - $r = a\cos 3\theta,\ a > 0$ ، ١٨ - $r = \cos 4\theta$ ، ١٩ - $r = \sin\frac{\theta}{2}$

٢٠ - $r = \theta$ ، ٢١ - $r^2 = \theta$ ، ٢٢ - $r = e^\theta$

٢٣ - $r = a\sec^2(\theta/2),\ a > 0$ ، ٢٤ - $r = \frac{1}{1 + \sin\theta}$ ، ٢٥ - $r = 1 + \sin 2\theta$

٢٦ - خطط المنحنى $r = \tan\theta$ واثبت أنه مقارب للمستقيمين $x = \pm 1$ (ارشاد : المسافة من المحور الصادى الى المنحنى هى $r\cos\theta$)

خطط أزواج المنحنيات الآتية وأوجد احداثيات نقط تقاطعهما :

٢٧ - $r = 4\sin\theta,\ r = 2$ ، ٢٨ - $r = -4\sec\theta,\ \theta = 315°$

٢٩ - $r = a(1 - \cos\theta),\ r = a(1 + \sin\theta);\ a > 0$ ، ٣٠ - $r = 2(1 - \cos\theta),\ r = -4\cos\theta$

٣١ - $r = 4\sin 2\theta,\ r = 4\sin\theta$ ، ٣٢ - $r^2 = 4\cos\theta,\ r = 1 - \cos\theta$

٣٣ - ادرس شكل منحنى الليماسون $r = a + b\cos\theta$ عندما $0 < a < b$ و $b > a > 0$ و $a > b > 0$ و $a = b > 0$.

٣٤ - كم ورقة للوردة $r = \sin n\theta$ ، حيث n عدد صحيح موجب ؟

٣٥ - اثبت أن المنحنى $a > 0$ و $r = a\cos\theta$ ، هو دائرة . أوجد مركزها وقطرها .

٣٦ - بدون ايجاد معادلته بالاحداثيات الكارتيزيه ، اثبت أن المنحنى $r\cos\theta = a$ يكون خطا مستقيما . (ارشاد : خطط المنحنى وفسر هندسيا المعادلة $a/r = \cos\theta$ ماذا يكون المنحنى عندما $a = 0$ ؟

٣٧ ـ اذا استبدلت θ بـ $\theta + 45^\circ$ فى المعادلة $r = f(\theta)$ ، ماذا يكون التأثير على الشكل البيانى ؟

أوجد المعادلة بالاحداثيات القطبية للمنحنيات الآتية :

٣٨ ـ $y = -3$ ٣٩ ـ $y = 4x$ ٤٠ ـ $2x + 3y = 9$

٤١ ـ $x^2 + y^2 = 16$ ٤٢ ـ $x^2 = 4y$ ٤٣ ـ $xy = 2$

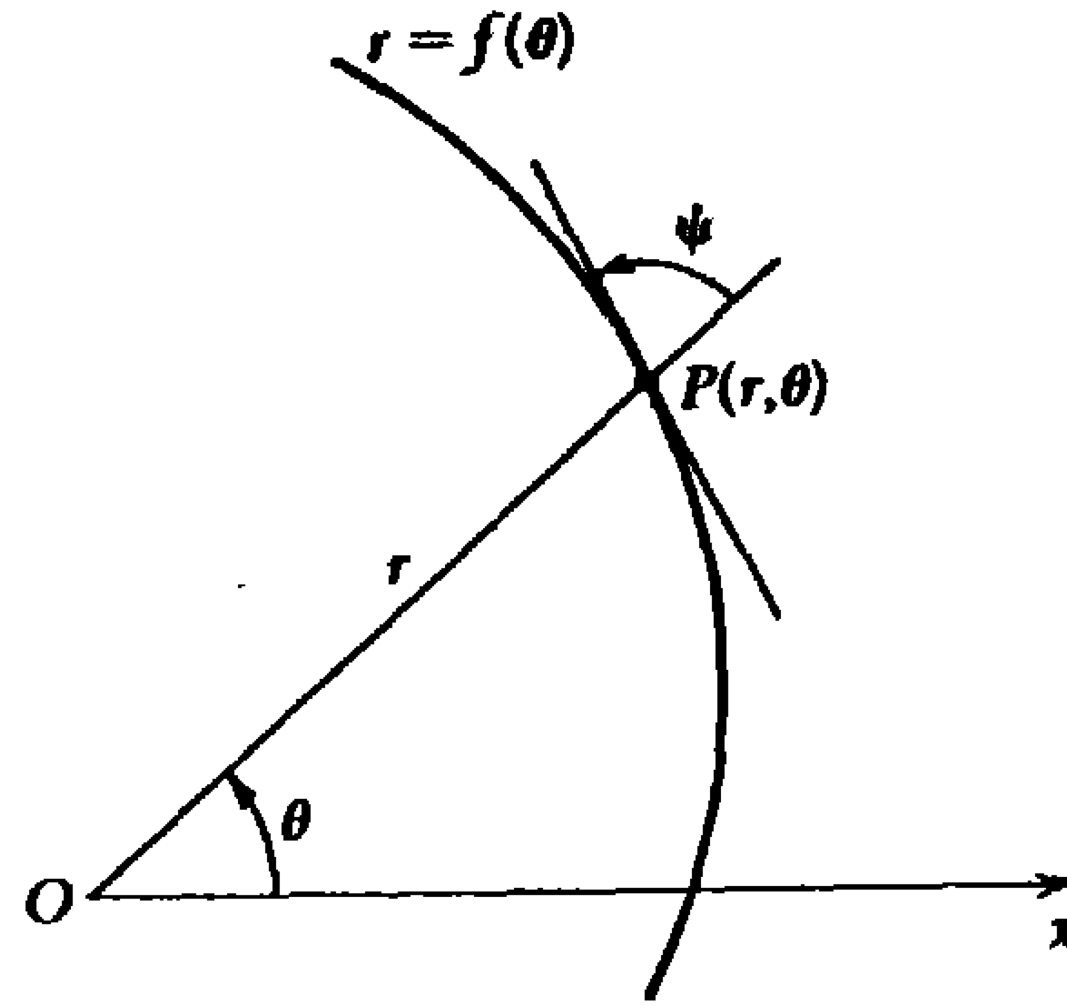
أوجد المعادلة بالاحداثيات المتعامدة للمنحنيات الاتية :

٤٤ ـ $r \cos\theta = -2$ ٤٥ ـ $r = 5\cos\theta$ ٤٦ ـ $r = a\sin\theta$ ٤٧ ـ $r = 5$

٤٨ ـ $r = 5\csc\theta$ ٤٩ ـ $r = 4 - 3\cos\theta$ ٥٠ ـ $\theta = \pi/3$ ٥١ ـ $r = 4\tan\theta$

٥٢ ـ $r = a\sin 2\theta$ (ارشاد : عبر عن $\sin 2\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$)   ٥٣ ـ $r^2\cos 2\theta = 9$

٥٤ ـ أوجد معادلة بالاحداثيات القطبية لدائرة نصف قطرها b ومركزها عند النقطة $(a, 0)$.



شكل ٨ ـ ١٣

$\cot\psi = f'(\theta)/f(\theta)$

٥٥ ـ لتكن $P(r, \theta)$ نقطة على المنحنى $r = f(\theta)$ ولتكن ψ هى الزاوية من امتداد نصف القطر المتجه الى المماس عند النقطة ، مقيسة فى اتجاه ضد عقرب الساعة (شكل ٨ ـ ١٣) . من الممكن اثبات أن $\cot\psi = f'(\theta)/f(\theta)$. المنحنى الذى يقطع كل خط نصف قطرى بنفس الزاوية يسمى منحنى متساوى الزوايا . خطط المنحنى $r = e^{\theta}$ واثبت أنه منحنى متساوى الزوايا . أوجد جميع المنحنيات الاخرى المتساوية الزوايا .

٥٦ ـ باى زاوية يقطع المنحنى القلبى (الكارديود) $r = 2(1 + \sin\theta)$ المحور القطبى (انظر المسألة ٥٥) ؟

أوجد زاوية تقاطع ازواج المنحنيات الاتية (انظر المسألة ٥٥) :

٥٧ ـ $r = \sin\theta,\ r = \cos\theta$ ٥٨ ـ $r = 2\cos\theta,\ r = 2(1 - \cos\theta)$

٥٩ ـ $r = a(1 + \cos\theta),\ r = a(1 - \cos\theta)$

٦٠ ـ خطط الشكل البيانى للمنحنى الحلزونى $r\theta = a$ ، حيث a ثابت موجب . بأى زاوية يقطع المنحنى الخط المستقيم $\theta = \pi / 2$ لأول مرة (انظر المسألة ٥٥) ؟ اثبت أن المنحنى له خط تقاربى مواز للمحور القطبى . (ارشاد : المسافة من المحور القطبى الى المنحنى هى $r \sin \theta$)

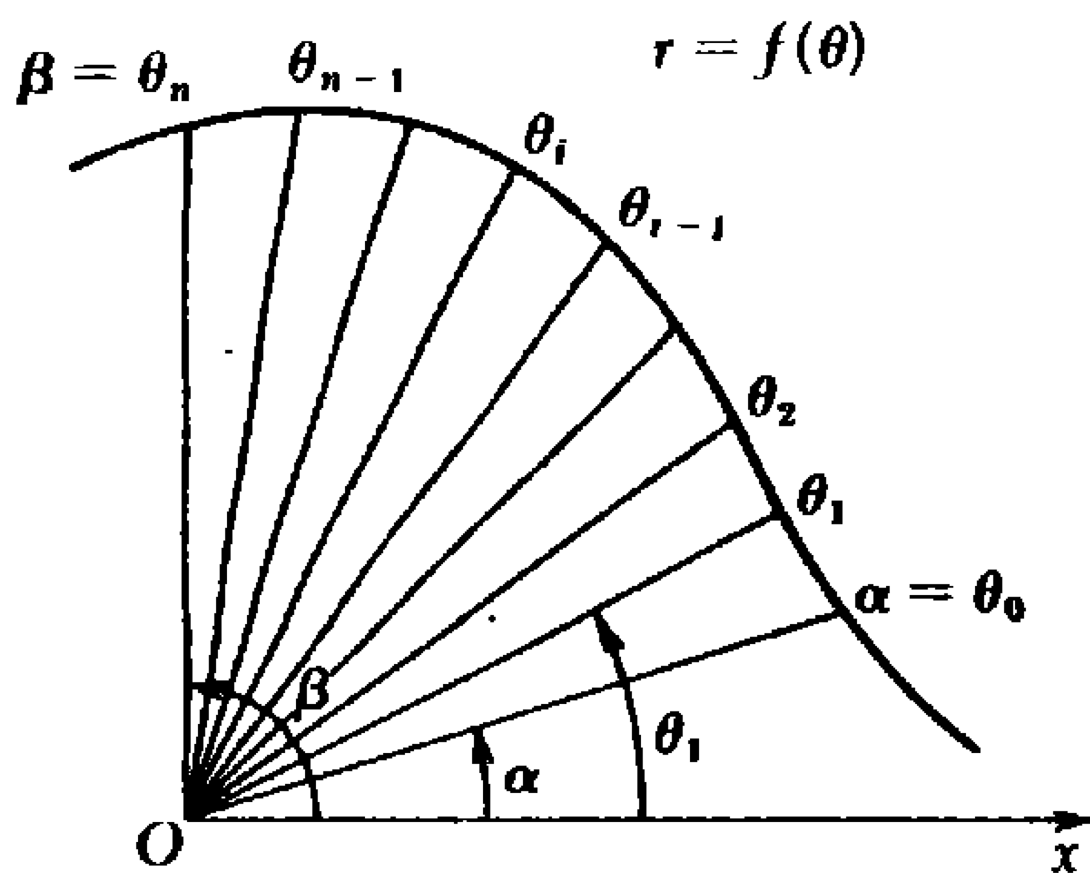
٦١ ـ (أ) ماهو امتداد المنحنى القلبى $r = 1 - \cos \theta$ على يمين المحور الصادى ؟ (ارشاد $x = r \cos \theta$) . (ب) أين يكون المماس للمنحنى القلبى أفقيا ؟ (ج) بأى زاوية يقطع المنحنى القلبى المحور الصادى الموجب (انظر المسألة ٥٥) ؟

٨ ـ ٣
المساحات بالاحداثيات القطبية

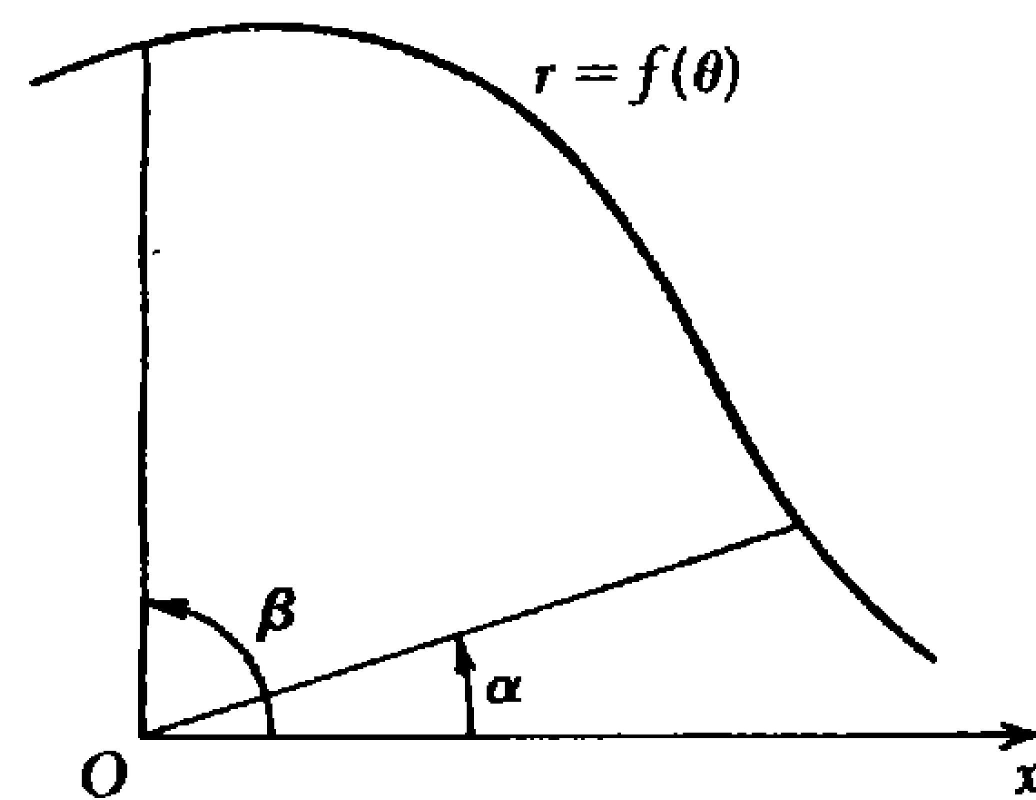
مساحات المناطق المحدودة بمنحنيات احداثيات قطبية توجد بنفس المبادىء العامة المستخدمة للمنحنيات باحداثيات كارتيزية . أبسط مسائل المساحة هى تلك الخاصة بايجاد مساحة منطقة محدودة بمنحنى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$ ، والشعاعين $\theta = \beta$ و $\theta = \alpha$ (شكل ٨ ـ ١٤) . سندرس فقط المناطق حيث f تكون متصلة . نقسم المنطقة الى قطاعات ضيقة بأشعة تبدأ من نقطة الاصل (شكل ٨ ـ ١٥) . استخدام القطاعات أفضل من استخدام الشرائط المستطيلة لأن فى الاحداثيات القطبية من السهل التقريب الى مساحة القطاع عن التقريب الى مساحة المستطيل . لتكن زوايا الاشعة هى $\alpha = \theta_0 , \theta_1 , \theta_2 , \dots , \theta_{n-1} , \theta_n = \beta$. هذه الزوايا تعين تجزيئا

$$[\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots . \theta_{n-1}, \theta_n = \beta]$$

للفترة الزاوية $[\alpha , \beta]$. القطاع المعين بالشعاعين اللذين زاويتاهما θ_i و θ_{i-1} موضح مكبرا فى الشكل ٨ ـ ١٦ . لتكن P_i و P_{i-1} النقطتين حيث هذان الشعاعان يقابلان المنحنى اختر عددا $\bar{\theta}_i$ فى الفترة الجزئية رقم i ، أى $[\theta_{i-1} , \theta_i]$ ، وارسم الشعاع التى زاويته $\bar{\theta}_i$. لتكن $(\bar{r}_i , \bar{\theta}_i)$



شكل ٨ ـ ١٥



شكل ٨ ـ ١٤

احداثيات النقطة حيث هذا الشعاع يقابل المنحنى . ارسم القوس الدائرى الذى يمر بهذه النقطة ومركزه النقطة O . لتكن N و M النقطتين يحث يقابل هذا القوس الشعاعين OP_i و OP_{i-1} . مقياس الزاوية $P_{i-1}OP_i$ هو $\theta_i - \theta_{i-1} = \Delta\theta_i$ ، ونصف قطر القوس هو $\bar{r}_i$. مساحة القطاع P_{i-1} OP_i هى بالتقريب مساحة القطاع الدائرة MON ، التى هى $\frac{1}{2}\bar{r}_i^2\,\Delta\theta_i$ بالنظرية ٦ ـ ١ .

اذا أنشأنا قطاعا دائريا مماثلا لكل قطاع ، فان حاصل جمع مساحاتها

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\bar{r}_i^2\,\Delta\theta_i$$

هو تقريب لمساحة المنطقة . بما أن $\bar{r}_i = f(\bar{\theta}_i)$ ، فان هذا يساوى

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}f^2(\bar{\theta}_i)\,\Delta\theta_i \tag{1}$$

الذى هو حاصل جمع ريمان للدالة $g(\theta) = \frac{1}{2}f^2(\theta)$ ، لتجزىء دقيق ، تكون القطاعات ضيقة ، والتقريب فى (١) يكون جيدا . باستخدام تجزىء دقيق الى درجة كافية يمكننا التقريب الى مساحة المنطقة الى أى درجة من الدقة ، كما نريد ، بحواصل جمع على الصورة (١) . واذن المساحة A تعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$A = \lim_{w\to 0}\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}f^2(\bar{\theta}_i)\,\Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}f^2(\theta)\,d\theta$$

حيث w هى معيار التجزىء . النهاية موجودة لان f ، ومن ثم $\frac{1}{2}f^2(\theta)$ ، مفترض أنها متصلة .

٨ ـ ١ مساحة منطقة . مساحة المنطقة المحدودة بنحنى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$ ، والشعاعين $\theta = \beta$ و $\theta = \alpha$ تعطى بالصيغة

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta$$

الصيغة للمساحة عادة تكتب

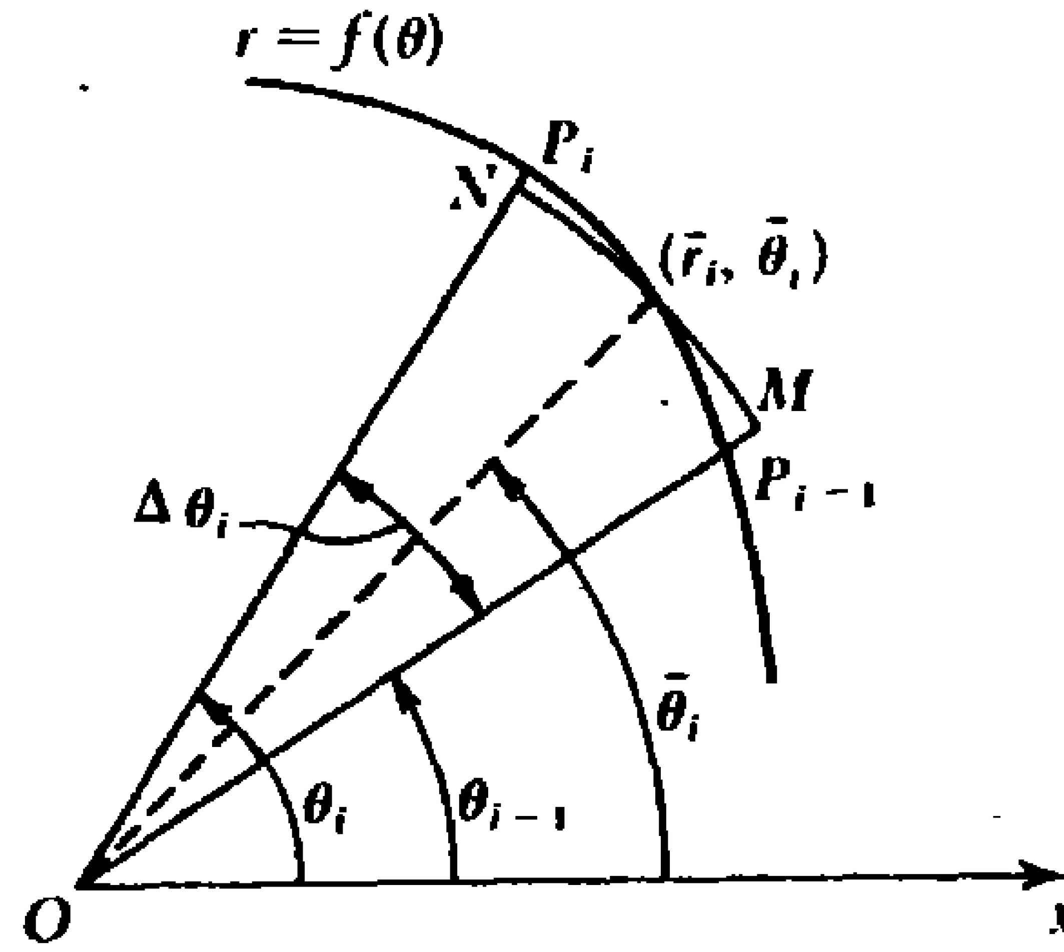
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$$

مع فهم أن r يجب استبدالها بالدالة $f(\theta)$ قبل ايجاد التكامل . فى أى مسألة خاصة ، حدا التكامل يوجدان بسهولة بتصور المنطقة مكتسحة بشعاع دائر . الحدان الادنى والاعلى هما الزاويتان β و α المناظرتان للوضعين الابتدائى والنهائى للشعاع .

التكاملان $\int \cos^2\theta\,d\theta$ و $\int \sin^2\theta\,d\theta$ يحدثان بكثرة فى مسائل المساحة بالأحداثيات القطبية . التكامل الاول يمكن ايجاده باستخدام المتطابقة $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$$\int \sin^2\theta\,d\theta = \int\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta \tag{2}$$

المساحة $MON = \frac{1}{2}\bar{r}_i^2 \Delta\theta_i$



شكل ٨ ـ ١٦

مساحة $P_{i-1}O\,P_i$ تقرب بمساحة القطاع الدائرى MON .

بالمثل ، يكون

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

مثال ١ . أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى القلبى $r = 1 + \sin\theta$ والشعاعين $\theta = 90°$ و $\theta = 0°$.

المنحنى القلبى مخطط فى الشكل ٨ ـ ١٧ ، الجزء المظلل هو المنطقة المراد إيجاد مساحتها . لدينا $f(\theta) = r = 1 + \sin\theta$. بما أننا سوف نكامل دوال مثلثية ، فيجب أن نستخدم القياس الدائرى . المنطقة تمسح بشعاع يدور من $\theta = 0$ الى $\theta = \pi/2$. وإذن حدا التكامل هما $\pi/2$ و 0 ، والمساحة تعطى بـ

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} f^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \sin\theta)^2\, d\theta$$

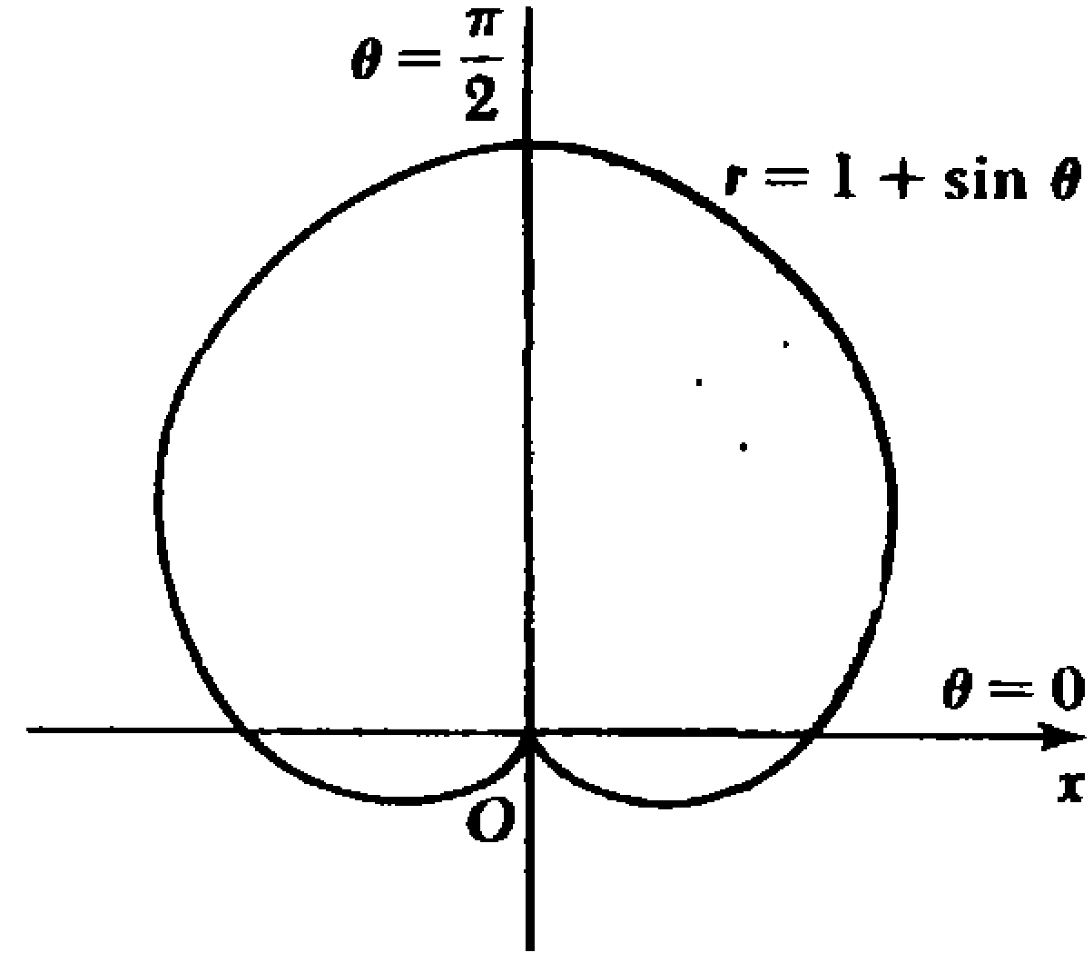
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - 2\cos\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

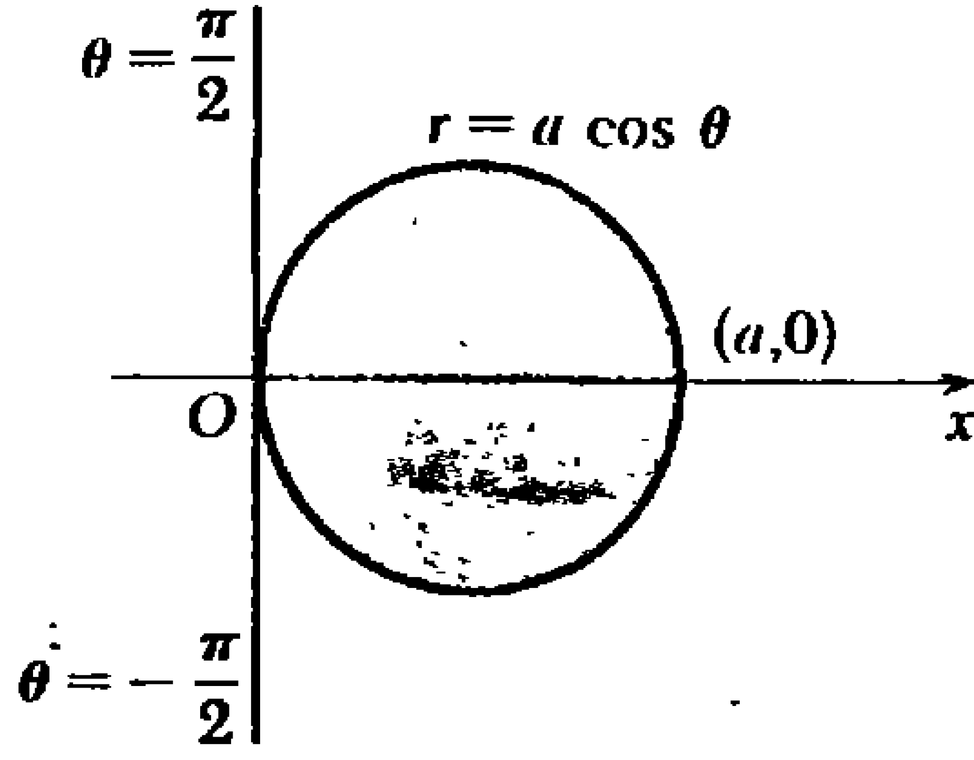
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - (-2)\right] = \frac{3\pi}{8} + 1,$$

حيث استخدمنا (٢) لاجراء تكامل $\sin^2\theta$.

مثال ٢ . أوجد مساحة الدائرة $r = a\cos\theta\,,\ a > 0$ الدائرة مخططة فى الشكل ٨ ـ ١٨ . المنطقة داخل الدائرة تمسح بشعاع يدور من $-\pi/2$ الى $\pi/2$. اذن مساحة الدائرة تعطى بـ



شكل ٨ ـ ١٧



شكل ٨ ـ ١٨

$$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{4}.$$

كان يمكننا أيضا ايجاد مساحة نصف الدائرة بالتكامل من صفر الى $\pi / 2$ ومضاعفة النتيجة .

مثال ٣ . أوجد مساحة المنطقة داخل عروة واحدة من منحنى الوردة ذات الورقات الثلاث $r = a \sin 3\theta\, ,\; a > 0$.

المنحنى مخطط فى الشكل ٨ ـ ١١ . المنطقة داخل العروة اليمنى تمسح بشعاع يدور من 0 الى $\pi / 3$ مساحة العروة تعطى بـ

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2 3\theta\, d\theta \qquad (٣)$$

هذا التكامل لايمكن ايجاده بالاستخدام المباشر لـ (٢) لأن الدالة المكاملة هى $\sin^2 3\theta$ وليست $\sin^2\theta$ ومع ذلك ، فالصيغة (٢) يمكن استخدامها اذا أجرينا أولا تغييرا للمتغير فى (٣) بوضع $u = 3\theta$ الحدان الجديدان هما $u = \pi$ و $u = 0$ ، والتكامل يصبح

$$A = \frac{a^2}{6}\int_0^{\pi} \sin^2 u\, du = \frac{a^2}{6}\left[\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{12}$$

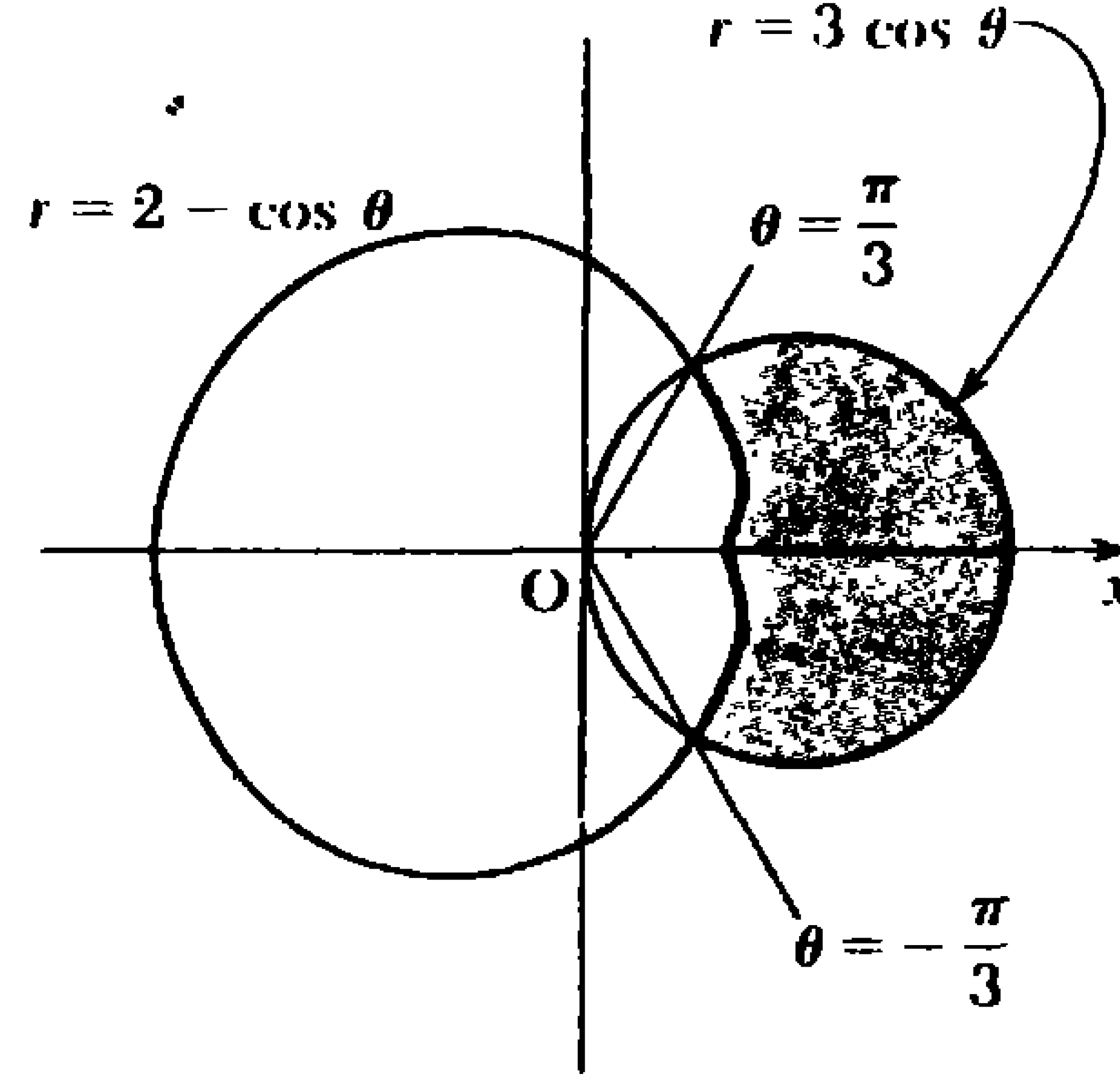
مثال ٤ . أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 3\cos\theta$ وخارج الليماسون $r = 2 - \cos\theta$.

المنحنيان موضحان فى الشكل ٨ ـ ١٩ . نقط تقاطعهما توجد بحل المعادلتين معا :

$$3\cos\theta = 2 - \cos\theta,$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ and } -\frac{\pi}{3}.$$



شكل ٨ـ١٩

الشكل يوضح أن النقطتين انمناظرتين لهاتين القيمتين لـ θ هما نقطتا التقاطع الوحيدتان . مساحة المنطقة المطلوبة يمكن ايجادها بايجاد مساحة المنطقة المحدودة بالدائرة والشعاعين $\theta = \pi / 3$ و $\theta = -\pi / 3$ والطرح من هذه المساحة مساحة المنطقة المظللة خفيفا المحدودة بالليماسون ونفس الشعاعين . بسبب التماثل ، كل من هاتين المساحتين يمكن إيجادها بالتكامل من 0 الى : $\pi / 3$ ومضاعفة النتيجة . بذلك يكون

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/3} 9\cos^2\theta\, d\theta - 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi/3} (2-\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} (8\cos^2\theta + 4\cos\theta - 4)\, d\theta$$

$$= \Big[4\theta + 2\sin 2\theta + 4\sin\theta - 4\theta\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= 2\sin\frac{2\pi}{3} + 4\sin\frac{\pi}{3} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

سواء هنا أو فى الفصل الخامس عملنا بالبداهة ولم نعرف مطلقاً مساحة منطقة . من الممكن الشك فى أن مساحة المنطقة التى توجد بالاحداثيات القطبية قد تختلف عن المساحة التى توجد بالاحداثيات الكارتيزيه . تعريف المساحة معطى فى الكتب المتقدمة ، وقد أثبت هناك أن كلا من الطريقة القطبية والطريقة الكارتيزيه تعطى نفس النتيجة .

مسائل

أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنى والشعاعين :

١ - $r=\theta;\ \theta=0,\ \theta=3\pi/2\ (0\leq r\leq 3\pi/2)$

٢ - $r=\sqrt{\cos\theta};\ \theta=\pi/3,\ \theta=\pi/2$

٣ - $r=3\sec\theta;\ \theta=0°,\ \theta=45°$

٤ - $r=2\sin\theta;\ \theta=0°,\ \theta=30°$

٥ - $r=\tan\theta;\ \theta=\pi/6,\ \theta=\pi/4$ (ارشاد : $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$)

٦ - $r=6/\sin\theta;\ \theta=\pi/3,\ \theta=2\pi/3$

٧ - $r=\sin\theta+\cos\theta;\ \theta=0,\ \theta=\pi/2$

٨ - أوجد مساحة النصف الأيمن من المنحنى القلبى $r=1+\sin\theta$.

خطط المنحنى وأوجد مساحة المنطقة أو المناطق داخله :

٩ - $r=a.$

١٠ - $r=5\sin\theta$

١١ - $r=1+\cos\theta$

١٢ - $r=a(1-\cos\theta),\ a>0$

١٣ - $r=5-2\sin\theta$

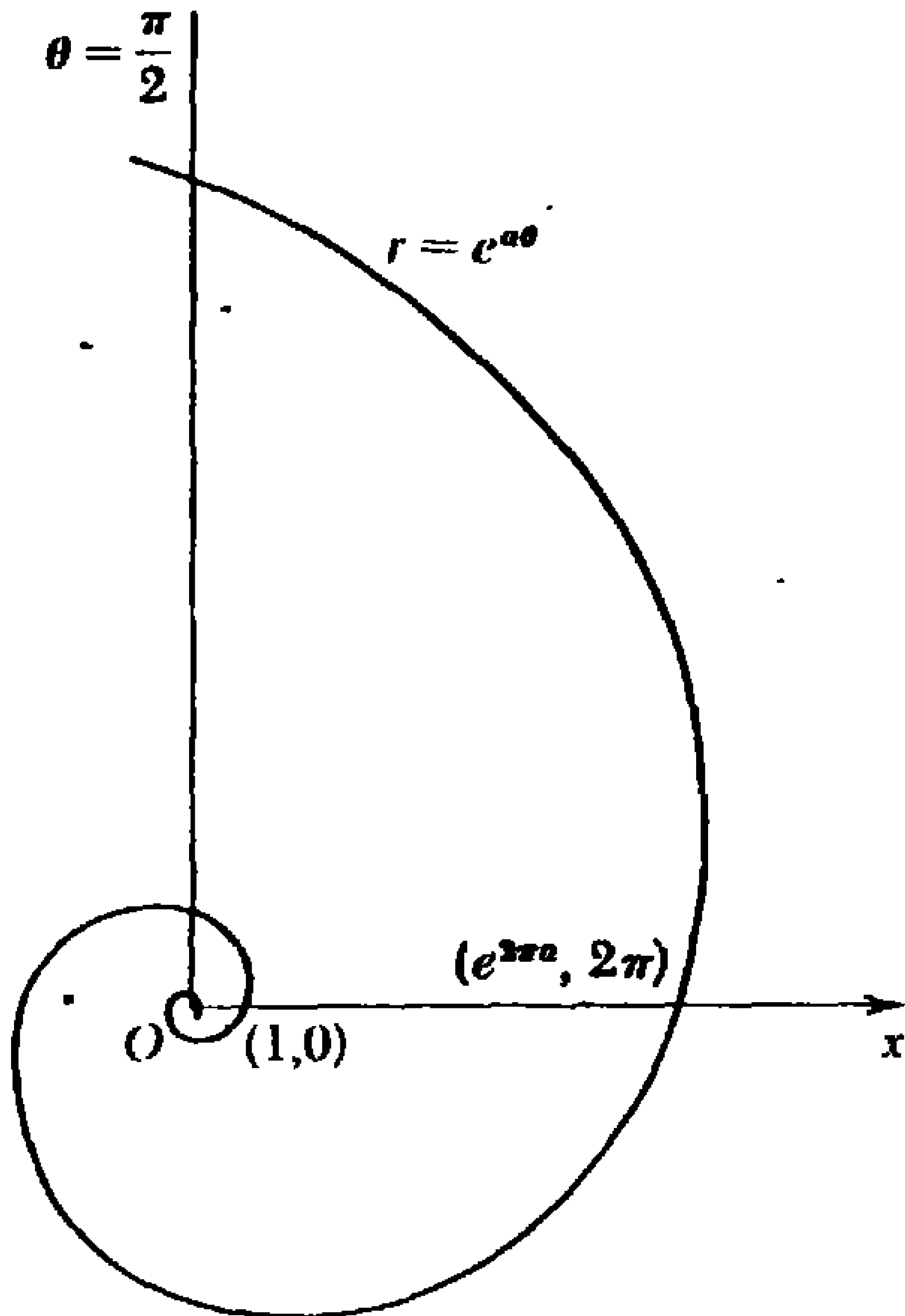
١٤ - $r^2=\sin\theta$

١٥ - $r=a\sin 2\theta,\ a>0$

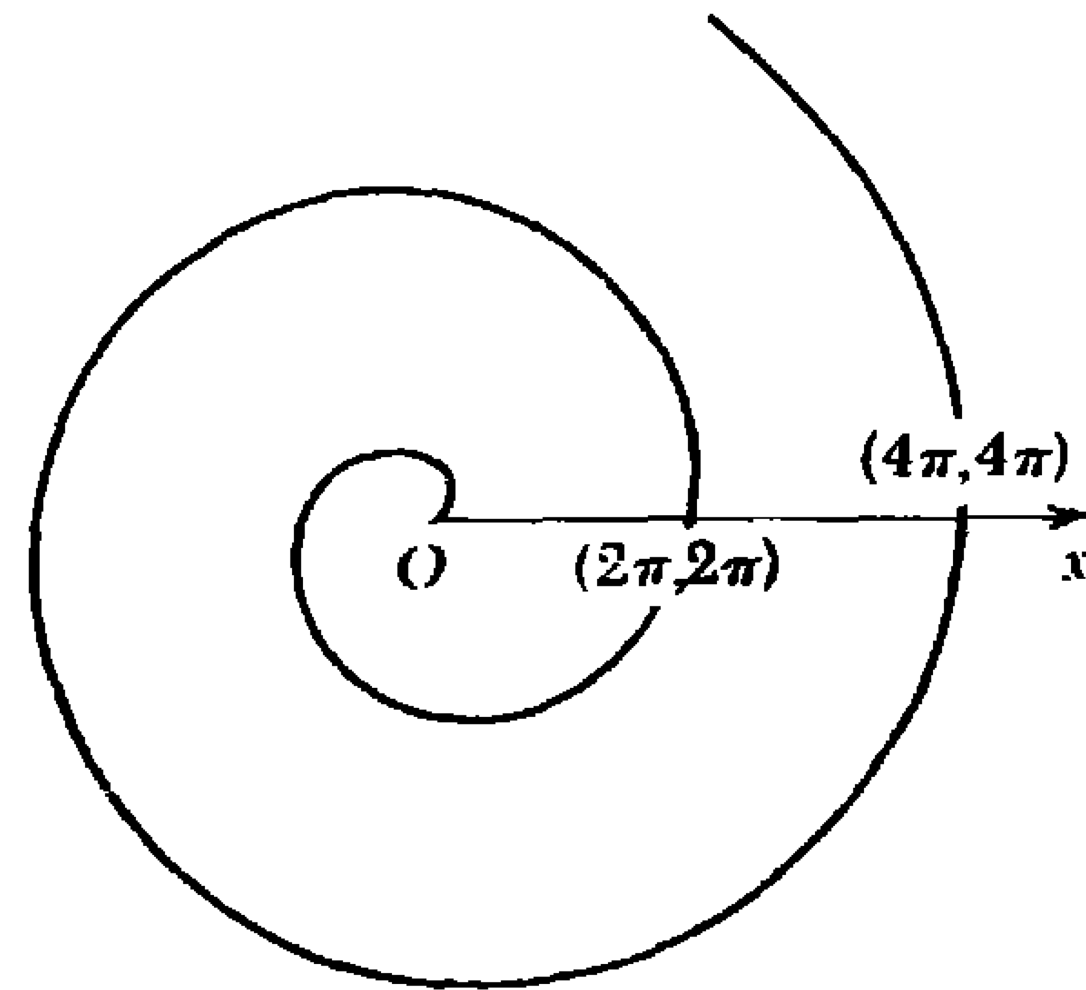
١٦ - $r=2\cos 3\theta$

١٧ - $r=a\sin n\theta,\ a>0$ ، حيث n عدد صحيح موجب .

١٨ - الشكل البيانى لحلزون أرشميدس ، $r=\theta,\ \theta\geq 0$ ، مخطط فى الشكل ٨ - ٢٠ . أوجد مساحة المنطقة المظللة .



شكل ٨ - ٢١



شكل ٨ - ٢٠
حلزون أرشميدس : $r=\theta$

١٩ ـ الشكل البيانى للمنحنى الحلزونى $r = e^{a\theta}$, $a > 0$ ، ومخطط فى الشكل ٨ ـ ٢١ . أوجد مساحة المنطقة المظللة .

٢٠ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل العروة الصغرى لمنحنى الليماسون $r = 1 + 2\cos\theta$ (شكل ٨ ـ ١٠) .

٢١ ـ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالعروة اليمنى لمنحنى الليمنسكيت $r^2 = 4\cos 2\theta$. لماذا لايمكننا إيجاد المساحة الكلية لليمنسكيت بالتكامل من صفر الى 2π ؟

٢٢ ـ أوجد مساحة المنطقة بين الدائرتين $r = a$ و $r = b$, $0 < a < b$.

٢٣ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = 6\sin\theta$ وخارج الدائرة $r = 3$.

٢٤ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل الدائرة $r = a$ وخارج المنحنى القلبى $r = a(1 - \cos\theta), a > 0$.

٢٥ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل كل من الدائرتين $r = \sin\theta$ و $r = \cos\theta$.

٢٦ ـ أوجد مساحة المنطقة فوق الخط المستقيم $r = \sqrt{2}\csc\theta$ وتحت الدائرة $r = 2$.

٢٧ ـ أوجد مساحة المنطقة داخل عروة واحدة لمنحنى الليمنسكيت $r^2 = 8\sin 2\theta$ وخارج الدائرة $r = 2$.

٢٨ ـ أوجد مساحة كل من المناطق الآتية المحدودة بالدائرة $r = 5\sin\theta$ ومنحنى الليماسون $r = 3 - \sin\theta$ (أ) داخل الدائرة وخارج منحنى الليماسون ، (ب) داخل كل من المنحنيين ، (ج) داخل منحنى الليماسون وخارج الدائرة .

٢٩ ـ أوجد مساحة كل من المناطق الآتية المحدودة بالدائرة $r = -6\cos\theta$ والمنحنى القلبى $r = 2(1 - \cos\theta)$: (أ) داخل الدائرة وخارج المنحنى القلبى ، (ب) داخل كل من المنحنيين . (ج) داخل المنحنى القلبى وخارج الدائرة .

٣٠ ـ أوجد مساحة المنطقة بين العروة الداخلية والعروة الخارجية لمنحنى الليماسون $r = 1 + 2\sin\theta$.

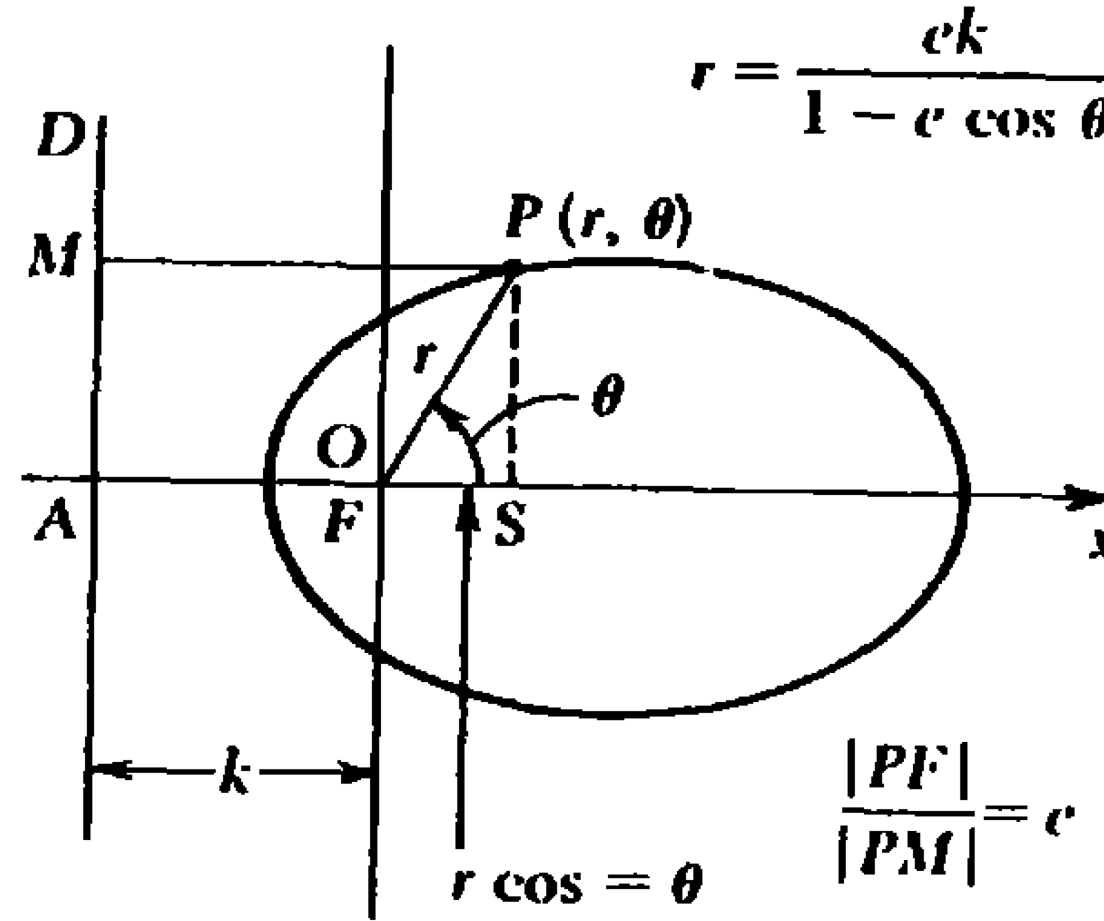
٨ ـ ٤
القطوع المخروطية*

مثبت فى التذييل أن القطع المكافىء والقطع الناقص (اذا لم يكن دائر .) والقطع الزائد ، لهم الخاصية أن لجميع النقط P على المنحنى ، المسافة $|PF|$ والمسافة $|PM|$ بين البؤرة F والدليل الاقرب D تحققان العلاقة

$$\frac{|PF|}{|PM|} = e \qquad (1)$$

* ينبغى على القارىء أن يلم بالمادة عن القطع المكافى والقطع الناقص والقطع الزائد فى البنود من ٧ ـ ٩ بالتذييل قبل دراسة هذا البند .

حيث e هى الاختلاف المركزى للقطع المخروطى (شكل ٨ - ٢٢) . القطع المخروطى يكون قطعا ناقصا أو قطعا مكافئا أو قطعا زائدة حسب كون e أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد الصحيح . المعادلة القطبية للقطع المخروطى التى تشمل الانواع الثلاثة جميعا يمكن اشتقاقها من هذه الخاصية ، وفى الواقع اشتقاقها أسهل من اشتقاق المعادلتين الكارتيزيتين للقطع الناقص والقطع الزائد من تعريفهما المعتاد .



شكل ٨-٢٢

من المناسب أن نسمى محور القطع المكافىء والمحور الواصل بين رأسى القطع الناقص أو رأسى القطع الزائد ، المحور الأساسى للقطع المخروطى . المعادلة تكون أسهل اذا كان القطع المخروطى موضوعا بحيث تكون البؤرة عند نقطة الأصل ويكون محوره الأساسى على امتداد المحور القطبى أو عموديا على المحور القطبى . ليكن D هو الدليل الاقرب لهذه البؤرة ولتكن $k > 0$ هى المسافة بين البؤرة والدليل . نفرض أن القطع موضوع كما فى الشكل ٨ ـ ٢٢ حيث الدليل D على يسار البؤرة . القطع مصور على أنه قطع ناقص ، لكن يمكن أن يكون أيضا قطعا زائدا أو قطعا مكافئا . إذا كانت S هى مسقط P على المحور القطبى ، فان

$$\overline{MP} = \overline{AS} = \overline{AF} + \overline{FS} = k + r\cos\theta$$

من (١) ، يكون

$$r = e(k + r\cos\theta), \qquad r > 0 \tag{٢}$$

إذا كانت $e \leqslant 1$ ، كما فى حالة القطع الناقص والقطع المكافىء ، فان $|PF| \leqslant |MP|$ ، الذى يعنى أن P تكون دائما على يمين الدليل وأن MP تكون موجبة . ومن ثم :

$|MP| = \overline{MP} = k + r\cos\theta$. إذا كانت $r > 0$ ، فإن $|PF| = r$ وبالتعويض فى (٢) يكون

$$|PF| = e|MP|$$

بحل هذه المعادلة لـ r ، نحصل على

$$r = \frac{ek}{1 - e \cos \theta} \qquad (٣)$$

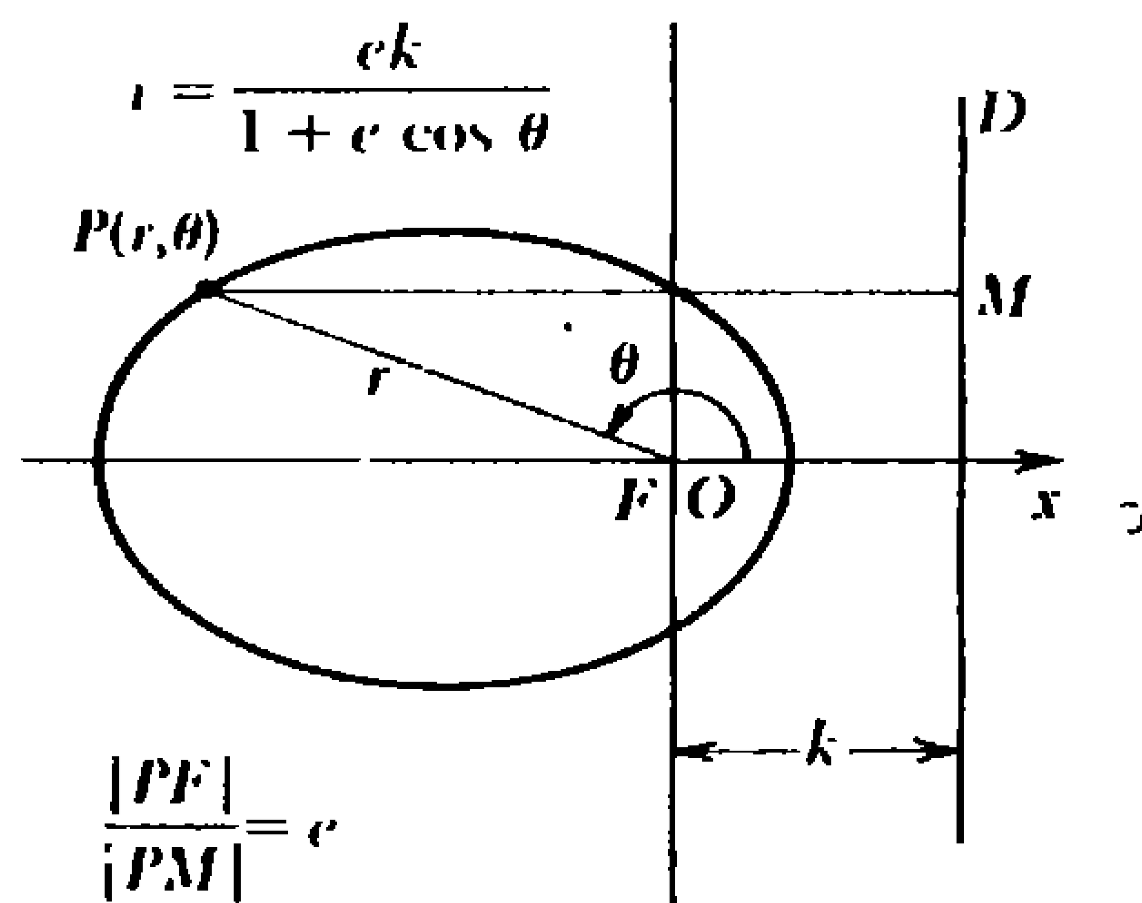
بمتابعة الخطوات السابقة ، يمكننا أن نرى أنه اذا كانت $e \leqslant 1$ ، فان أى نقطة تحقق (٣) يتحتم أن يكون لها $r > 0$ وأنها تكون على القطع . ومن ثم (٣) هى معادلة القطع . يمكن اثبات أنه عندما تكون $e > 1$ ، فان القطع ، الذى هو الآن قطع زائد ، تكون معادلته أيضا (٣) . النقط على الفرع الأيسر للقطع الزائد تناظر $r < 0$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية اذا كان اختلافه المركزى هو $\frac{2}{3}$ ومحوره الأساسى على المحور القطبى ، وبؤرته عند نقطة الأصل ، ودليله الاقرب يمر بالنقطة : $(5 , 180°)$.

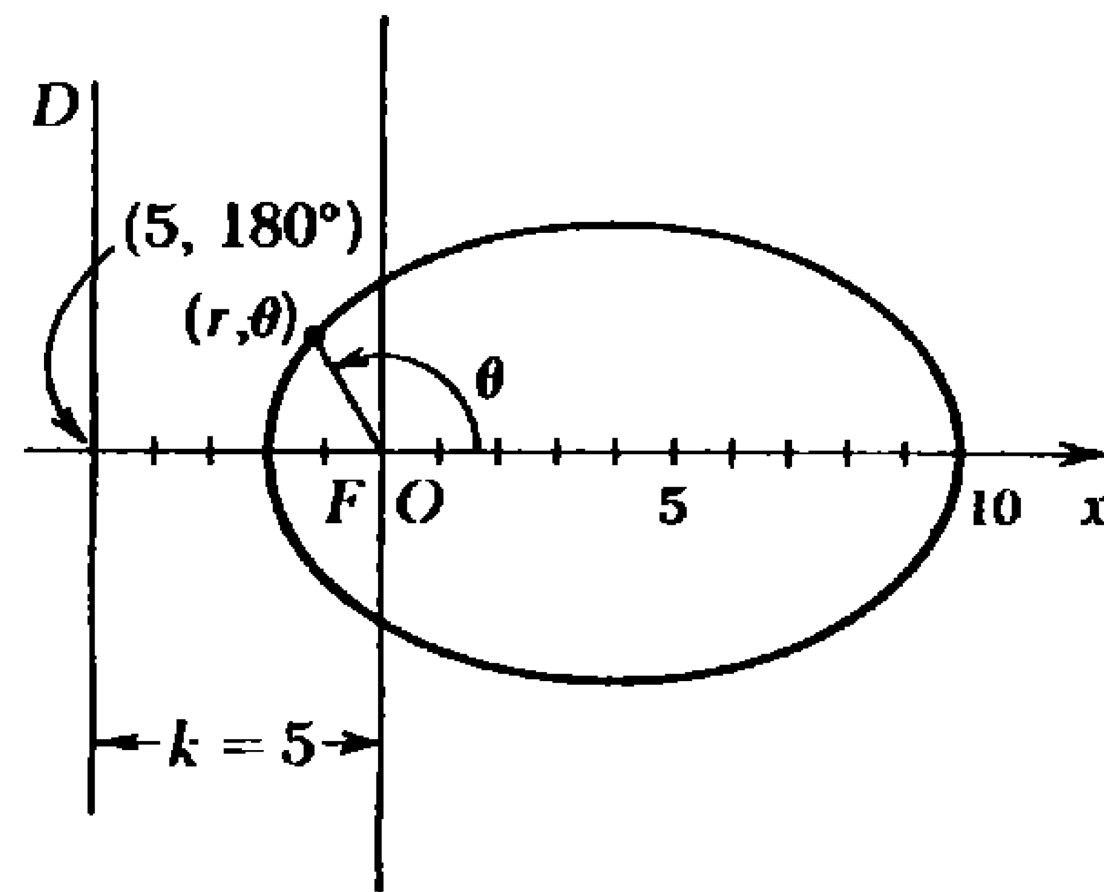
القطع الناقص موضح فى الشكل ٨ ـ ٢٣ . بأخذ : $e = \frac{2}{3}$ و $k = 5$ فى (٣) ، يكون

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos \theta} = \frac{10}{3 - 2 \cos \theta}$$

كمعادلة للقطع الناقص .



شكل ٨ ـ ٢٤



شكل ٨ ـ ٢٣
قطع ناص : $r = 10/(3-2 \cos \theta)$.

إذا استخدمنا البؤرة الأخرى والدليل المناظر ، بحيث كان القطع كما فى الشكل ٨ ـ ٢٤ حيث الدليل D على يمين البؤرة فان المعادلة هى

$$r = \frac{ek}{1 + e \cos \theta} \qquad (٤)$$

اذا وضع القطع بحيث كانت البؤرة عند نقطة الأصل وكان محوره الأساسى عموديا على محوره القطبى ، فان المعادلة هى

$$r = \frac{ek}{1 \pm e \sin \theta} \qquad (٥)$$

تستخدم الاشارة الموجبة أو السالبة تبعا لكون الدليل D ، الذى هو أقرب للبؤرة التى عند نقطة الأصل ، أعلى أو أسفل هذه البؤرة .

إذا ضرب بسط ومقام كل من (٣) و (٤) فى ثابت ، موجب فإن المعادلتين الناتجتين تكونان على الصورة .

$$r=\frac{f}{g\pm h\cos\theta} \qquad (٦)$$

حيث h و g موجبتان . معادلة القطع الناقص فى مثال ١ حصلنا عليها فى هذه الصورة . بالمثل ، (٥) تصبح

$$r=\frac{f}{g\pm h\sin\theta} \qquad (٧)$$

أى معادلة على الصورة (٦) أو (٧) هى معادلة قطع مخروطى حيث البؤرة عند نقطة الأصل والمحور الأساسى على المحور القطبى أو عمودى عليه تبعا لكون المقام يشتمل على $\cos\theta$ أو $\sin\theta$ لانه بقسمة بسط ومقام (٦) ، مثلا ، على g ليصبح الحد الثابت فى المقام هو 1 ، المعادلة تصبح

$$r=\frac{f}{g\pm h\cos\theta}=\frac{f/g}{1\pm(h/g)\cos\theta}$$

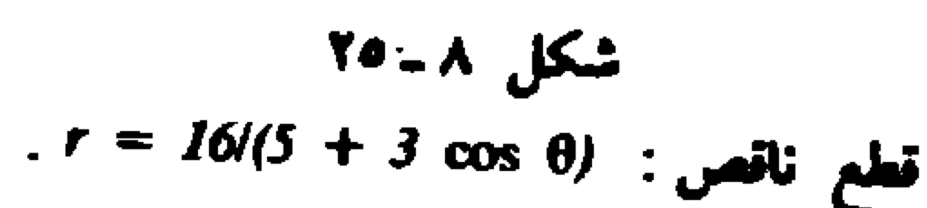
وهذه على الصورة (٣) أو (٤) . أيضا h/g يجب أن تكون الاختلاف المركزى e ، والقطع المخروطى يكون قطعا ناقصا أو قطعا مكافئا أو قطعا زائدا تبعا لكون h/g أقل من أو تساوى أو أكبر من الواحد الصحيح .

مثال ٢ . عين نوع المنحنى $r = 16/(5+3\cos\theta)$ ، وخطط المنحنى .

بما أن المعادلة على الصورة (٦) ، فالشكل البيانى هو قطع مخروطى له بؤرة عند نقطة الأصل ومحوره الأساسى على المحور القطبى . يمكن تعيين نوع القطع بقسمة البسط والمقام على 5 ليصبح الحد الثابت فى المقام 1 :

$$r=\frac{\frac{16}{5}}{1+\frac{3}{5}\cos\theta}$$

هذه المعادلة هى على الصورة (٤) . اذن $e=\frac{3}{5}$ ، والمنحنى هو قطع ناقص . الرأسان هما النقطتان حيث $\theta=\pi$ و $\theta=0$ أى ، $(8,\pi)$ و $(2,0)$ (شكل ٨ ـ ٢٥) . المركز هو النقطة $(3,\pi)$ فى منتصف المسافة بينهما . عندما تكون $\theta=\pi/2$ أو $\theta=3\pi/2$ فان $r=\frac{16}{5}$ ، وهذا يعطينا نقطتين اضافيتين على المنحنى $(\frac{16}{5},3\pi/2)$ و $(\frac{16}{5},\pi/2)$. هذه النقط الاربع تكفى لتخطيط تقريبى للقطع الناقص . اذا أردنا تخطيطا أفضل ، فانه يمكننا ايجاد طرفى نصف المحور الأصغر بتعيين c و a ثم تعيين b من العلاقة $b^2=a^2-c^2$.



شكل ٨-٢٥
قطع ناقص : $r = 16/(5 + 3 \cos \theta)$.

مثال ٣ . عين نوع المنحنى $r = g\,/\,(2 - 4 \sin \theta)$ وخطط المنحنى .

صورة المعادلة توضح أن المنحنى قطع مخروطى له بؤرة عند نقطة الأصل ومحوره الأساسى عمودى على المحور القطبى . بكتابة المعادلة على الصورة

$$r = \frac{\frac{9}{2}}{1 - 2 \sin \theta}$$

بحد ثابت 1 فى المقام ، نرى أن $e = 2$ وأن المنحنى هو قطع زائد مفتوح لأعلى وأسفل .
الرأسان هما النقطتان حيث $\theta = 90$ و $270°$ ومن ثم هما $(\frac{3}{2}, 270°)$ و $(-\frac{9}{2}, 90°)$ (شكل ٨-٢٦) . مركز القطع الزائد فى منتصف المسافة بينهما . نقطتان توجدان بسهولة هما حيث $180°$

شكل ٨-٢٦
قطع زائد : $r = 9/(2 - 4 \sin \theta)$.

و $0 = \theta$ وهما $(\frac{2}{3},180°)$ و $A(\frac{2}{3},0°)$. عندما تقترب $\sin\theta$ من $\frac{1}{2}$ ، وهذا يحدث عندما تقترب θ من $150°$ و $30°$ ، تصبح r لانهائية موجبة أو سالبة ، وذلك يعتمد على أى جانب للزاوية $30°$ والزاوية $150°$ تكون الزاوية θ . هذا يوضح أن الخطين التقريبين هما الخطان الماران بالمركز ويصنعان الزاويتين $150°$ و $30°$ مع الخط القطبى . اذا رسم الخطان التقاربيان ووقعت النقط الاربع التى أوجدناها أعلاه ، فالمنحنى يمكن تخطيطه جيدا بمجرد اليد . عندما تتزايد θ من 0 الى $30°$ تتحرك النقطة P الى اليمين على الفرع العلوى للقطع الزائد من A الى مالا نهاية . عندما تتزايد θ من $30°$ الى $150°$ ، تكون r سالبه والنقطة P تعبر الفرع الادنى للقطع الزائد من اليسار لليمين . عندما تتزايد θ من $150°$ الى $360°$ ، تكون r موجبة ثانية وتعبر النقطة P الفرع العلوى من أقصى اليسار الى A ، مكملة التخطيط .

مقدار قوة الجذب بين الأرض والشمس هو GmM / r^2 ، حيث m و M هما كتلتا الارض والشمس ، r المسافة بينهما ، G ثابت . ولأن هذه القوة متجهة على الخط الواصل بين الشمس والأرض ، فان معادلة مدار الارض حول الشمس يمكن اشتقاقها بسهولة أكثر ، اذا نحن استخدمنا الاحداثيات القطبية ، وليس الاحداثيات المتعامدة ، مع أخذ الشمس عند نقطة الأصل . المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة يمكن ايجادها من قانون نيوتن الثانى للحركة $ma = F$ ، حل المعادلة التفاضلية الناتجة يعطى المعادلة القطبية لمدار الارض . المدار هو قطع ناقص بؤرته عند الشمس . الاختلاف المركزى هو 0.017 تقريبا ، فالمسار يكاد يكون دائرة .

مسائل

١ ـ أوجد معادلة القطع المكافئ بالاحداثيات القطبية حيث المحور الأساسى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الاصل والدليل يمر بالنقطة $(4 , 0°)$.

٢ ـ أوجد معادلة القطع المكافىء بالاحداثيات القطبية حيث المحور الأساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل يمر بالنقطة $(\frac{5}{2},270°)$.

٣ ـ أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{1}{2}$ والمحور الأساسى على المحور القطبى ، والبؤرة عند نقطة الأصل ، والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(6 , 180°)$.

٤ ـ أوجد معادلة القطع الناقص بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{2}{3}$ والمحور الأساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل الأقرب يمر بالنقطة $(3 , 90°)$.

٥ ـ أوجد معادلة القطع الزائد بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى 3 والمحور الاساسى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الاصل والدليل الاقرب يمر بالنقطة $(3 , 180°)$.

٦ ـ أوجد معادلة القطع الزائد بالاحداثيات القطبية حيث الاختلاف المركزى $\frac{3}{2}$ والمحور الاساسى عمودى على المحور القطبى والبؤرة عند نقطة الأصل والدليل الاقرب يمر بالنقطة $(2 , 90°)$.

عين نوع كل من القطوع المخروطية الاتية وخطط الشكل البيانى . أوجد احداثيات الرأسين والمركز ، اذا وجد ذلك .

٧ - $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ ٨ - $r=\dfrac{7}{2-2\sin\theta}$ ٩ - $r=\dfrac{5}{3-2\cos\theta}$

١٠ - $r=\dfrac{12}{1-3\sin\theta}$ ١١ - $r=\dfrac{8}{3-\sin\theta}$ ١٢ - $r=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$

أوجد a , b , c واحداثيات البؤرتين والمركز للقطوع المخروطية الناقصة والزائدة الاتية :

١٣ - $r=\dfrac{5}{3+2\cos\theta}$ ١٤ - $r=\dfrac{4}{2-\sqrt{2}\sin\theta}$

١٥ - $r=\dfrac{6}{1-2\sin\theta}$ ١٦ - $r=\dfrac{6}{4+6\cos\theta}$

١٧ - حول المعادلة $r = 16 / (5 + 3\cos\theta)$ للقطع الناقص فى مثال ٢ الى الاحداثيات العمودية وخطط القطع الناقص بنقل المحاور .

١٨ - أوجد معادلة القطع الناقص العام بالاحداثيات القطبية حيث المركز عند نقطة الاصل والمحور الاكبر على المحور السينى .

١٩ - أوجد ، بالاحداثيات الكارتيزيه ، معادلة القطع المكافىء المتجه الى اليمين حيث المحور على المحور السينى والبؤرة عند نقطة الأصل . بتغيير المعادلة الى احداثيات قطبية اثبت أن الصورة القطبية للمعادلة هى $r = 2p / (1 - \cos\theta)$, $p > 0$.

٢٠ - حقق ان المعادلة (٣) ، $r = ek / (1 - e\cos\theta)$ ، هى معادلة قطع مخروطى بتحويل المعادلة الى احداثيات كارتيزيه . (ارشاد : استخدم المعادلة المكافئة $r = e(k + r\cos\theta)$) .

٢١ - المعادلة (٣) تمثل قطع زائد اذا كان $e > 1$. ماهو ميل كل من خطية التقاربيين ؟

٢٢ - أوجد زاوية تقاطع القطعين المكافئيين $r = 6 / (1 + \sin\theta)$ و $r = 2 / (1 - \sin\theta)$ (ارشاد : انظر المسألة ٥٥ بىند ٨ - ٢) .

٢٣ - قمر تابع فى مدار على شكل قطع ناقص حول الارض حيث مركز الارض هو بؤرة . معادلة المدار بالنسبة الى نظام احداثيات قطبية فيه مركز الارض نقطة الاصل هى : $r = 96,600 / (22 - \cos\theta)$. بفرض أن الارض هى كرة نصف قطرها 4000 miles ، أوجد اكبر وأصغر مسافة للقمر فوق سطح الارض .

٢٤ - قمر تابع فى مدار على شكل قطع ناقص حول الأرض حيث مركز الأرض هو بؤرة . وأعلى نقطة له هى 300 miles فوق سطح الارض ، وأدنى نقطه له ، وهى على الجانب الاخر للارض ، هى 100 miles فوق سطح الارض . اوجد معادلة المدار بالاحداثيات القطبية ، بافتراض أن الارض هى كرة نصف قطرها 4000 miles.

الفصل التاسع

المعادلات البارامترية

٩ ـ ١
المعادلات البارامترية

المعادلات التى على الصورة $y = f(x)$ تصف منحنيات لاتقطع أكثر من مرة واحدة بأى خط رأسى . المنحنيات الاكثر تعقيدا التى تعود تضاعف نفسها يمكن وصفها بمعادلات أعم فى y و x ، مثل $x^3 + y^3 = 3xy$ ، الذى شكله البيانى موضح فى الشكل ٩ ـ ١٠ . المنحنيات التى من هذا النوع عاده تكون دراستها اكثر سهوله باستخدام زوج من المعادلات ومتغير ثالث . دع $g(t)$, $h(t)$ دالتين للمتغير t وضع

$$x = g(t) \qquad \text{و} \qquad y = h(t). \tag{١}$$

كل قيمة للمتغير t تعين قيمة لـ y و x يمكن اعتبارها احداثيات نقطه فى المستوى xy . فئه جميع النقط $(g(t), h(t))$ عاده تكون منحنى . المعادلتان (١) تسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى ، والمتغير t يسمى بارامتر .

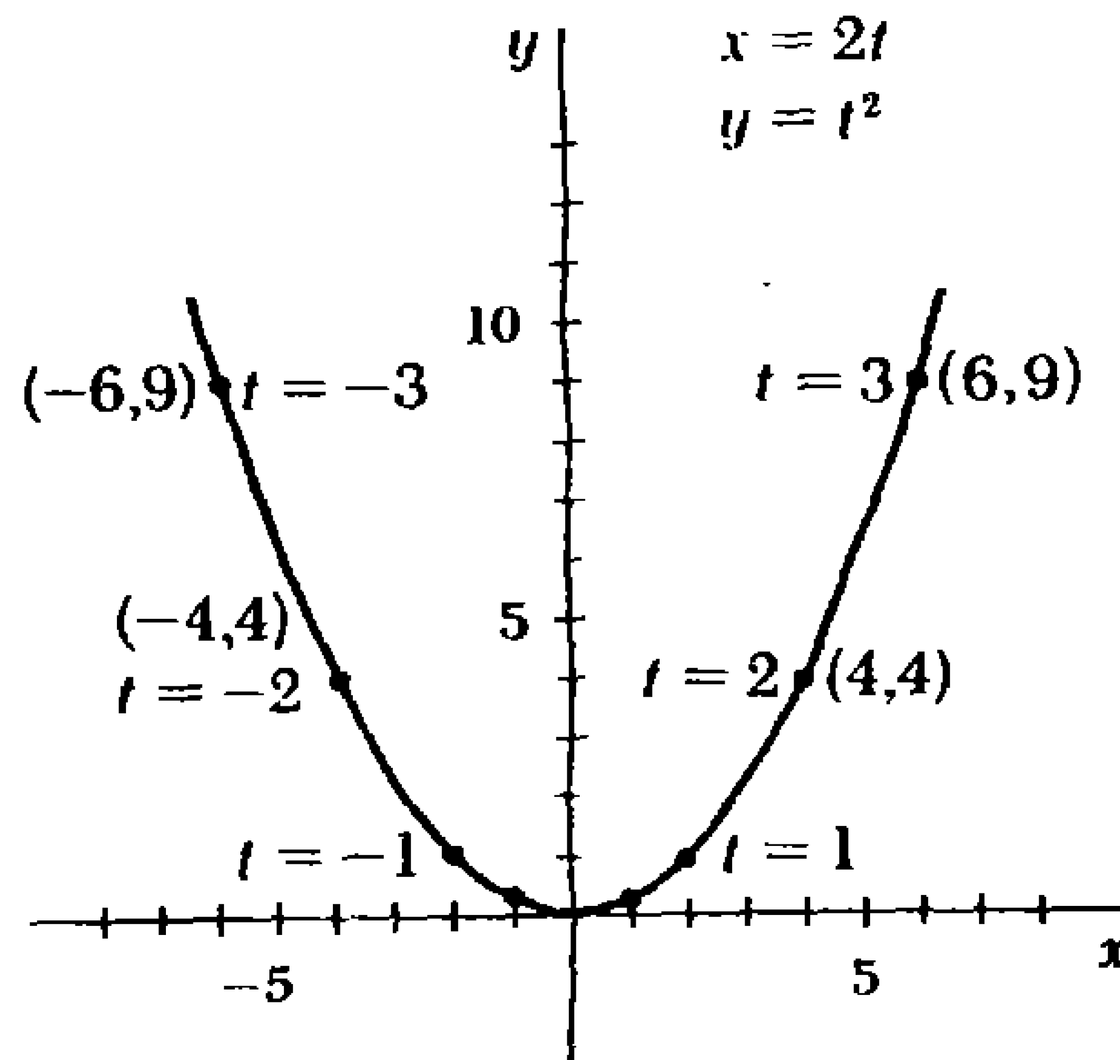
t	(x,y)
-3	$(-6,9)$
-2	$(-4,4)$
-1	$(-2,1)$
$-\frac{1}{2}$	$(-1,\frac{1}{4})$
0	$(0,0)$
$\frac{1}{2}$	$(1,\frac{1}{4})$
1	$(2,1)$
2	$(4,4)$
3	$(6,9)$

مثلا ، المعادلتان $h(t) = t^2$ و $g(t) = 2t$ تعينان المعادلتين البارمتريتين .

$$x = 2t \qquad \text{و} \qquad y = t^2 \tag{٢}$$

عندما $t = 3$ تكون $x = 6 , y = 9$ ، والنقطة المناظرة هى $(6 ,9)$. بعمل جدول للقيم يمكننا تعيين مواقع النقط وتخطيط المنحنى (شكل ٩ ـ ١) .

اذا أجرينا حل المعادلة الاولى فى (٢) للمتغير t وعوضنا هذه القيمه $x /2$ للمتغير t فى المعادلة الثانية ، نحصل على $y = x^2 / 4$ كمعادلة للمنحنى فى x,y فقط . البارامتر قد حذف ، ونرى أن المنحنى قطع مكافىء . فى الواقع كان فى امكاننا تخطيط المنحنى باجراء ذلك أولا وتجنب عمل جدول للقيم .



شكل ٩ ـ ١

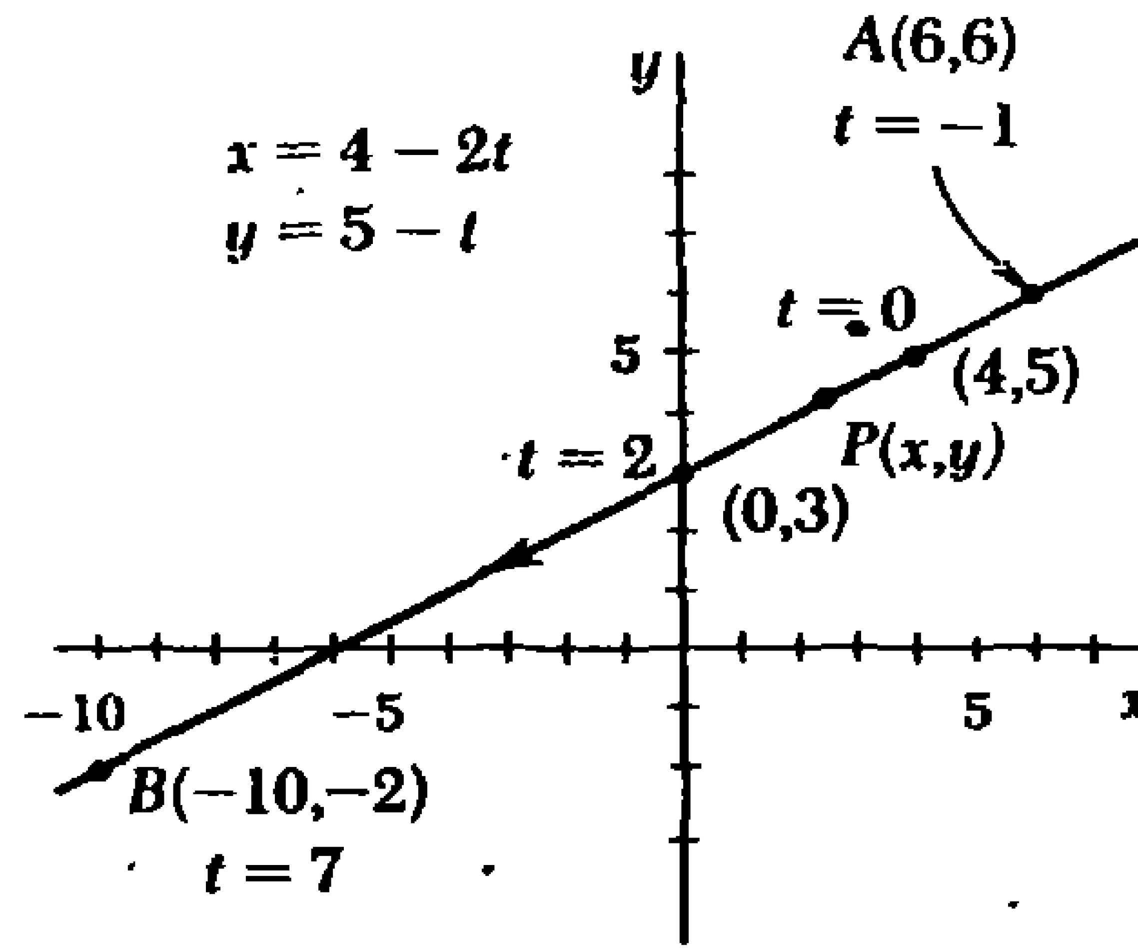
مثال ١ . خطط المنحنى التى معادلتاه البارامتريتان هما $x = 4 -2t , y = 5 - t$

نحذف البارامتر بحل المعادلة الثانية لـ t والتعويض فى المعادلة الأولى ، بذلك نحصل على

$$t = 5 - y,$$
$$x = 4 - 2(5 - y)$$
$$y = \tfrac{1}{2}x + 3.$$

المنحنى هو الخط المستقيم فى الشكل ٩ ـ ٢ .

فى المثال السابق اذا قيد البارامتر t بالفترة $[-1 , 7]$ ، فإن المنحنى يكون فقط القطعة المستقيمة بين النقطتين $B (-10 , -2)$ و $A (6 , 6)$. لتكن P هى النقطة على الخط المستقيم فى مثال ١ المناظرة لقيمة معطاة للمتغير t . عندما تتزايد t تتحرك P على الخط من اليمين الى اليسار . فالمعادلتان البارامتريتان توضحان كيف ترسم نقطة الخط المستقيم عندما يتزايد البارامتر . هذا ليس خاصية ذاتية للخط المستقيم بل يعتمد على المعادلتين البارامتريتين . زوج آخر من معادلتين بارامتريتين لنفس الخط المستقيم هو $x = 2 + 2w , y = 4 + w$ ، لكن الآن عندما تتزايد w ، النقطة P ترسم الخط المستقيم فى الاتجاه العكسى .



شكل ٩ـ٢

عندما تتزايد t ، النقطة P ترسم الخط من اليمين الى اليسار .

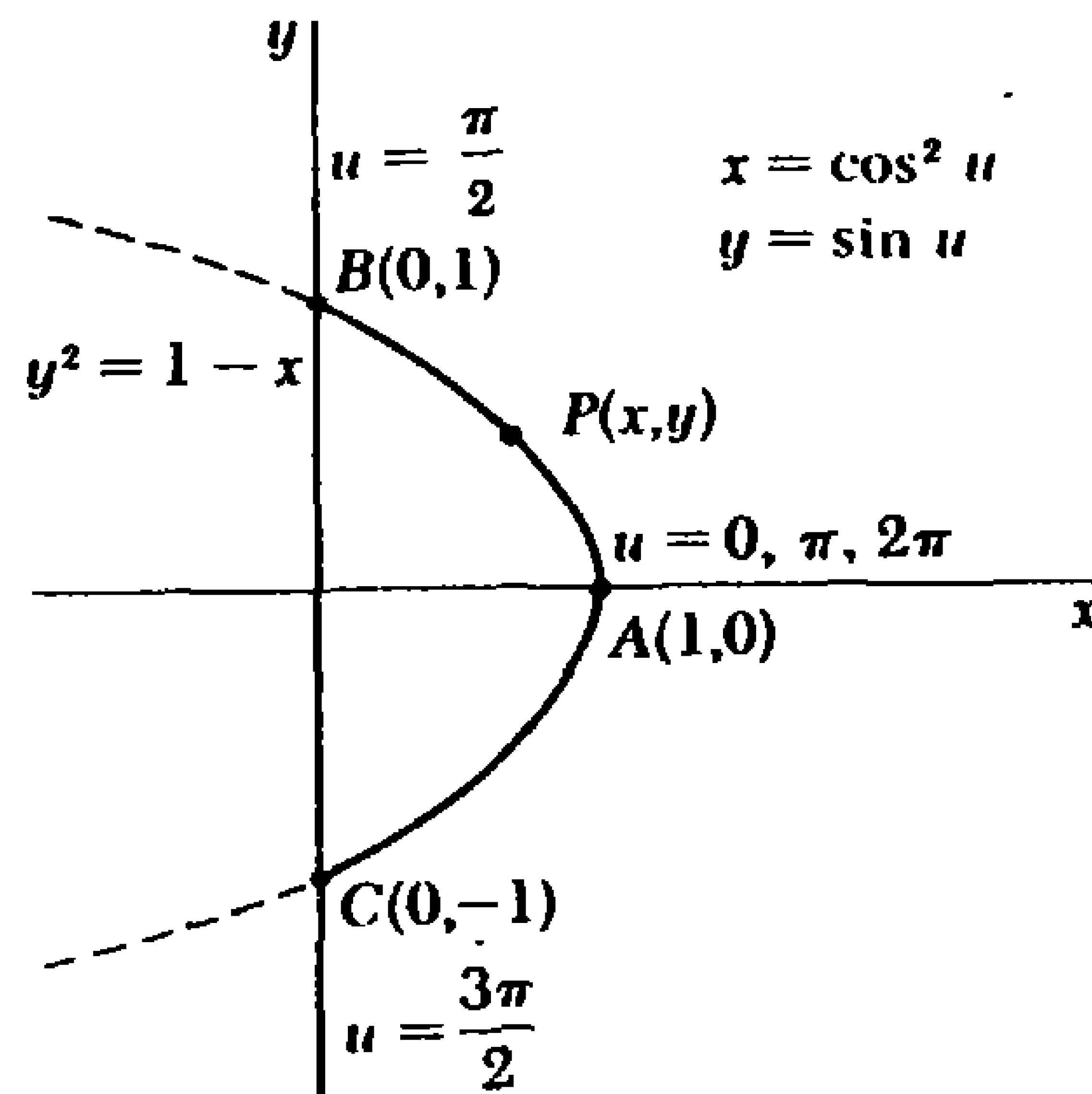
مثال ٢ . ادرس المنحنى الذى معادلتاه البارمتريتان هما

$$x = \cos^2 u, \qquad y = \sin u, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi \tag{٣}$$

يمكننا ايجاد المنحنى بسهولة بحذف البارامتر u ، وذلك باضافة المعادلة الأولى الى مربع الثانية ، فنحصل على

$$x + y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

أى $y^2 = 1 - x$. هذا هو القطع المكافىء المخطط فى الشكل ٩ـ٣ . إلا أن المنحنى الموصوف فى (٣) ليس القطع المكافىء بأكمله . بما أن $y = \sin u$ و $x = \cos^2 u,$ فإن y و x مقيدتين بـ $-1 \leqslant y \leqslant 1$ و $0 \leqslant x \leqslant 1$. المنحنى (٣) هو فقط جزء القطع المكافىء على يمين المحور الصادى . عندما $u = 0$ ، النقطة P تكون عند $A(1,0)$. عندما تتزايد u من 0 الى $\pi/2$ تتناقص x وتتزايد y والنقطة P تتحرك على القطع من A الى $B(0,1)$. عندما تتزايد u من $\pi/2$ الى π تتزايد x



شكل ٩ـ٣

وتتناقص y وتتحرك P من B عائدة الى A . عندما تتزايد u من π الى $3\pi/2$ ، تكون y سالبة والنقطة P ترسم النصف الاسفل للقطع المكافيء من A الى $C(0,-1)$. عندما تتزايد u من $3\pi/2$ الى 2π ، النقطة P تتحرك من C عائدة الى A . اذا سمح للبارامتر u أن يتزايد بعد 2π ، فإن النقطة P مجرد أن تكرر الحركه .

هذا المثال يوضح أن المنحنى المعطى بمعادلتين بارامتريتين قد يكون جزء فقط من الشكل البيانى للمعادلة فى y و x التى نحصل عليها بحذف البارامتر ، وهذا قد يحدث حتى اذا كان البارامتر غير مقيد . عند تخطيط المنحنى يحذف البارامتر ، يجب أن نلاحظ أى قيود متضمنة على x أو y قد تؤدى الى جزء فقط من الشكل البياني للمعادلة غير البارامترية المستخدمة .

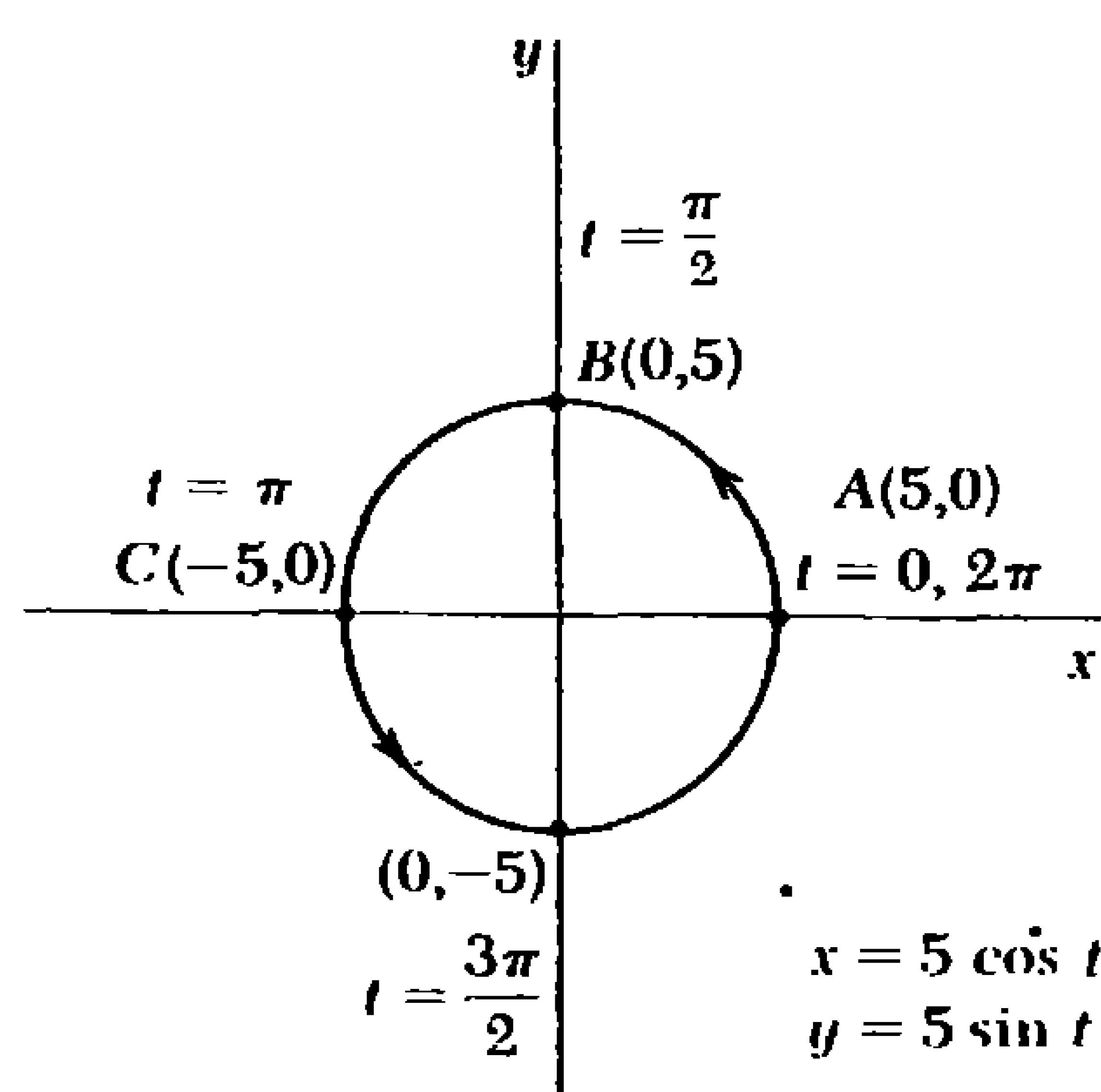
مثال ٣ . الاحداثيان عند الزمن $t \geqslant 0$ لنقطة تتحرك فى المستوى $x\,y$ يعطيان بالمعادلتين $x = 5\cos t\,,\ y = 5\sin t$ صف حركة النقطة .

بتربيع وجمع المعادلتين ، نحذف البارامتر t ونحصل على المعادلة فى y و x للمسار

$$x^2 + y^2 = 25(\cos^2 t + \sin^2 t) = 25$$

المسار هو دائرة مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطرها 5 (شكل ٩ ـ ٤) . عندما $t = 0$ ، النقطة تكون عند $A\ (5,0)$. عندما تتزايد t ، النقطة تتحرك حول الدائرة ضد اتجاه عقرب الساعة ، حتى تصل النقطة $B\ (0,5)$ عندما $t = \pi/2$ والنقطة $C(-5\ ,\ 0)$ عندما $t = \pi$ والنقطة $D(0\ ,\ -5)$ عندما $t = 3\pi/2$. ثم النقطة A مرة أخرى عندما $t = 2\pi$. الحركة الآن تكرر نفسها عندما تتزايد t بعد 2π . لو كانت معادلتا الحركة هما $x = 5\cos t\ ,\ y = -5\sin t$ ، لكانت النقطة تتحرك حول نفس الدائرة لكن فى اتجاه عقرب الساعة .

استخدام الزمن كبارامتر فى إعطاء إحداثيات نقطة تتحرك فى مستوى هو تطبيق هام للمعادلات البارامترية . فى بند ٩ ـ ٤ نعطى مثالا فيه الزمن بارامتر طبيعى . المعادلات البارامترية لمسار نقطة



شكل ٩ ـ ٤

تتحرك تعطى معلومات أكثر عن الحركة مما تعطيه المعادلة غير البارامترية . الأخيرة تعطى فقط المنحنى الذى ترسمه النقطة ، بينما الاولى تصف كيف ترسم النقطة المنحنى وتخبر متى تكون عند نقطة معطاة .

من السهل تحقيق أن الخط المستقيم الذى يصل بين النقطتين (x_2 , y_2) و (x_1 , y_1) له المعادلتان البارامتريتان .

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t \tag{٤}$$

وهاتان يمكن كتابتهما على الصورة

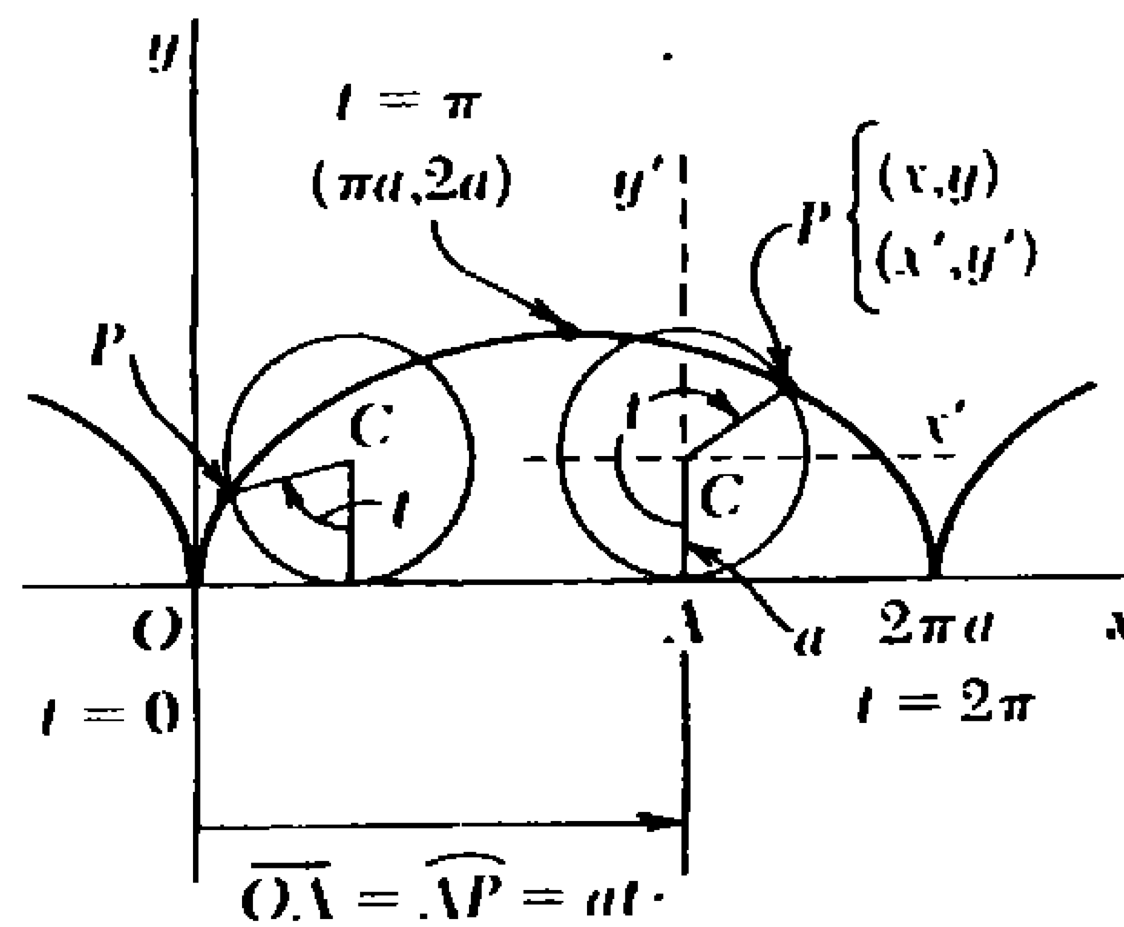
$$x = x_1(1 - t) + x_2t, \quad y = y_1(1 - t) + y_2t \tag{٥}$$

نقطة P على الخط المستقيم تكون عند (x_1 , y_1) عندما $t = 0$ وعند (x_2 , y_2) عندما $t = 1$. قيم t بين $0,1$ تعطى نقطا على القطعة المستقيمة بين (x_2 , y_2) و (x_1 , y_1) فمثلا ، $t = \frac{1}{2}$ تعطى نقطه المنتصف ، $t = \frac{1}{3}$ تعطى نقطة الثلث من (x_1 , y_1) الى (x_2 , y_2) . الصورة البارامترية (٥) حيث t مقيدة بـ $0 \leqslant t \leqslant 1$ تستخدم عادة لتمثيل القطعة المستقيمة بين (x_2 , y_2) و (x_1 , y_1) .

لبعض المنحنيات الخاصة يكون ايجاد المعادلات فى صورة بارامترية أسهل من إيجادها فى الصورة المعتادة غير البارامترية فى y و x فقط . المثال الآتى كلاسيكى .

مثال ٤ . عندما تتدحرج دائرة على خط مستقيم ، فإن أى نقطة ثابتة على الدائرة ترسم منحنى يسمى الدويرى (سيكلويد) . أوجد معادلته .

السيكلويد موضح فى الشكل ٩ ـ ٥ مع وضعين للدائرة المنشئة . سنوجد معادلته في الصورة البارامترية . ليكن المحور السينى هو الخط الذى تتدحرج عليه الدائرة ، واتجاهه فى اتجاه الدائرة



شكل ٩ ـ ٥

السيكلون : $x = a(t - \sin t)$
$y = a(1 - \cos t)$.

التى تتدحرج ، ونفرض أن نقطة الأصل هى إحدى النقط حيث النقطة الثابتة $P(x , y)$ على الدائرة تكون فى تماس مع الخط المستقيم . لتكن C هى مركز الدائرة ، a نصف قطرها ، والبارامتر t القياسى الدائرى للزاوية التى دارها نصف القطر CP . المسافة OA تساوى طول القوس الدائرى $\widehat{AP}$ مقيسا فى اتجاه عقرب الساعة . (إذا لم يكن هذا واضحا ، دحرج الدائرة للخلف حتى $t = 0$ ، فحينئذ تكون P عند نقطة الاصل) . إذن $\overline{OA} = \widehat{AP} = at$. أدخل محورين جديدين y' و x' موازيين للمحورين y و x ، ونقطة الاصل عند C . بالنسبة لهذين المحورين النقطة P لها الاحداثيان (x' , y') . فتا الاحداثيات ترتبطان بالمعادلتين :

$$x = \overline{OA} + x' = at + x', \qquad y = \overline{AC} + y' = a + y' \tag{٦}$$

منظر مكبر للمحورين الجديدين موضح فى الشكل ٦ ـ ٩ . من تعريف الدوال المثلثية ، يكون

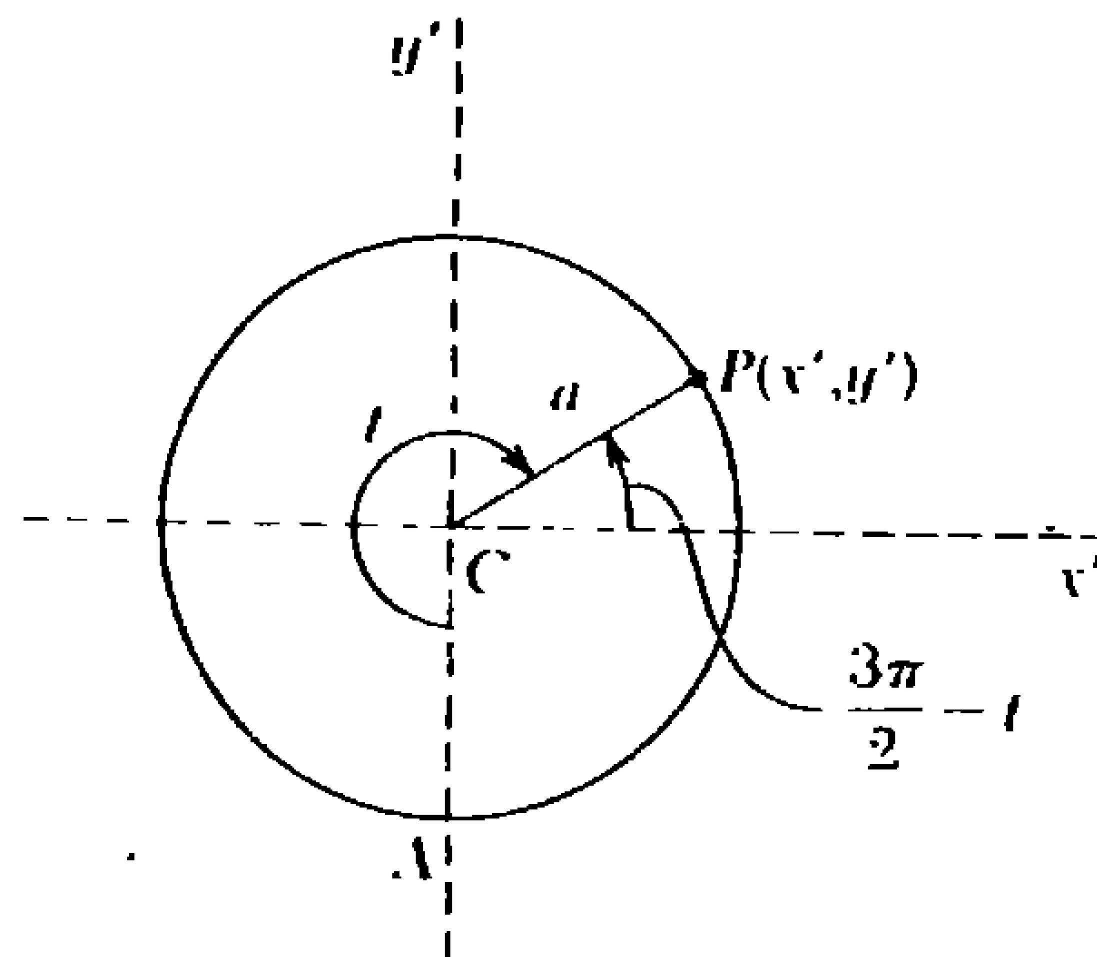
$$x' = a \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a \sin t,$$

$$y' = a \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -a \cos t.$$

بإجراء هذين التعويضين فى (٦) لـ y' و x' ، نحصل على

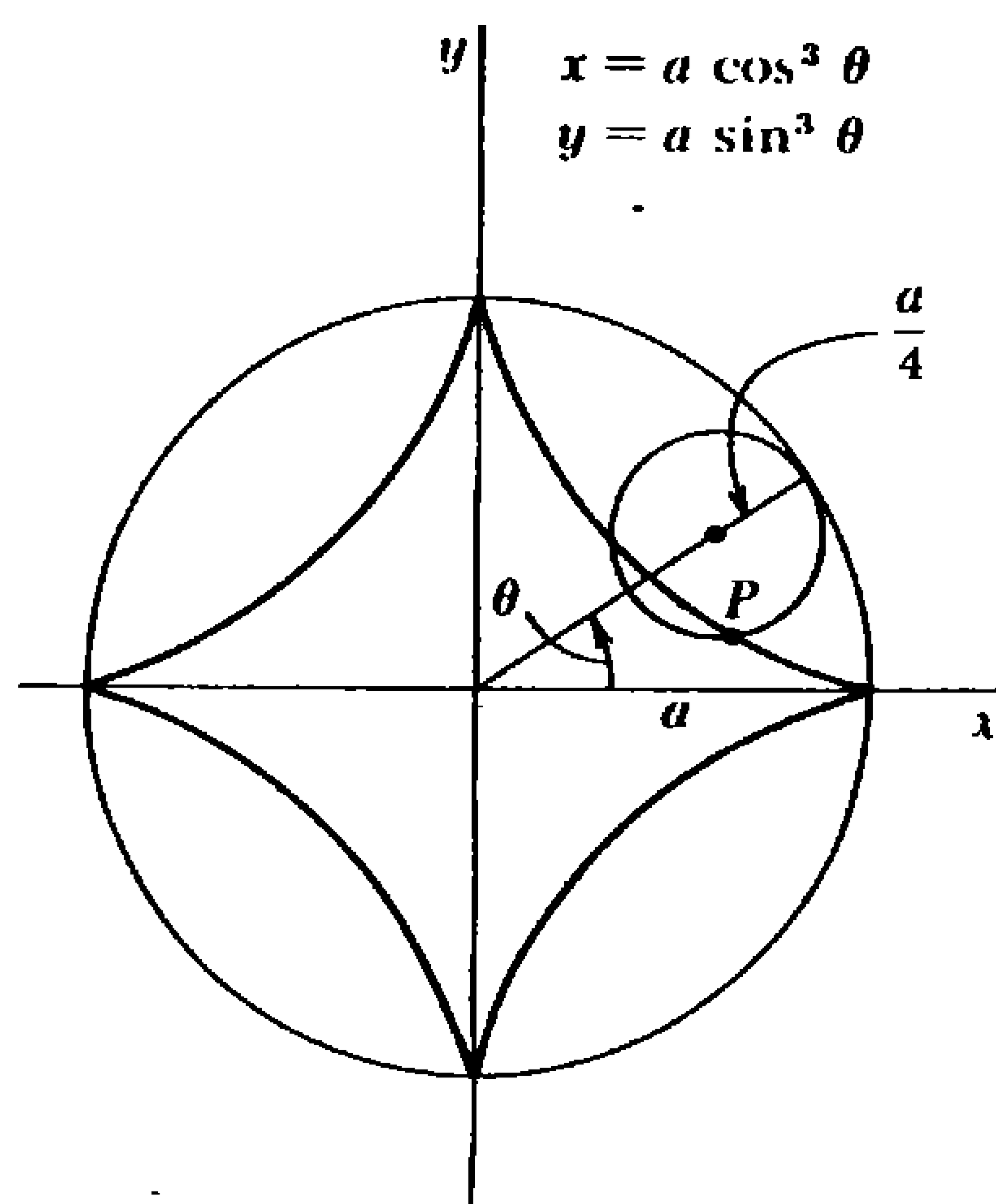
$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \tag{٧}$$

هذان يعطيان الاحداثيات $P(x , y)$ بدلالة t وهما المعادلتان البارامتريتان للمنحنى الدويرى الناشىء من دائرة نصف قطرها a . مع أن البارامتر t يمكن حذفه (انظر المسألة ٣٩) ، الا أن المعادلة الناتجة فى y و x تكون معقدة ويكون من الأسهل دراسة المنحنى من معادلتيه البارامتريتين . بعد دورة واحدة للدائرة ، $t = 2\pi$ وتكون احداثيات النقطة P هى $(2\pi a , 0)$ ، وذلك مايجب أن يكون لان محيط الدائرة هو $2\pi a$.



شكل ٩-٦

بدلا من التدحرج على خط مستقيم ، الدائرة فى مثال ٤ يمكن أن تتدحرج على دائرة أخرى ثابتة ، من الخارج ، وكلتا الدائرتين فى نفس المستوى . المنحنى الذى ترسمه نقطة P على دائرة التدحرج يسمى دويرى فوقى (ابيسيكلويد) . هذا المنحنى كان معروفا جيدا عند القدماء . عندما كان يعتقد أن الارض هى مركز المجموعة الشمسية ، كانت مدارات الكواكب كما ترى من الأرض تبدو أنها دويرات فوقية . اذا كانت الدائرة تتدحرج على الدائرة الثابتة من الداخل ، فالمنحنى الناتج يسمى دويرى تحتى (هيبوسيكلويد) عندما يكون نصف قطر الدائرة المتدحرجة ربع نصف قطر الدائرة الثابتة ، النقطة P تعود مرة أخرى الى نقطة الابتداء بعد أن تكون الدائرة قد تدحرجت مرة على الدائرة الثابتة ، والمنحنى يسمى دويرى تحتى بأربعة أنياب (شكل ٩ ـ ٧) .



شكل ٩ ـ ٧

هيبوسيكلويد بأربعة أنياب

معادلتا البارامتريتان هما

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\sin^3\theta$$

حيث a هو نصف قطر الدائرة الثابتة . أعم من ذلك ، بدلا من دائرتين ، يمكن أن يتدحرج أى منحنى على منحنى آخر . هذه النظرية تستخدم فى تصميم التروس (المسننات) . الاسنان لترسين تتدحرج كل منها على الاخرى ويجب تشكيلها بحيث أنه لايوجد ميل لها للانزلاق عندما تضغط كل منها على الاخرى .

مسائل

خطط وعين نوع كل من المنحنيات ، اذا كان مألوفا ، التى لها المعادلات البارامترية الآتية . صف الحركة لنقطة على المنحنى عندما يتزايد البارامتر من قيمته الصغرى الى قيمته الكبرى . البارامتر ، إذا لم يكن مقيدا ، فيكون من المفهوم أنه يأخذ كل القيم التى تجعل العبارات المعرفة لـ y و x لها معنى .

١ ـ $x = 2t, y = 1 - t$ ٢ ـ $x = 4, y = 3t$ ٣ ـ $x = t^2 - 1, y = t; -1 \leq t \leq 6$

٤ ـ $x = u - 1, y = u^2 - 4; 0 \leq u < \infty$ ٥ ـ $x = \cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq \pi$

٦ ـ $x = -\cos t, y = \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi$ ٧ ـ $x = \cos 2t, y = \sin 2t; 0 \leq t \leq 2\pi$

٨ ـ $x = 2e^\theta, y = 1 - e^\theta$ ٩ ـ $x = p/t^2, y = 2p/t$ حيث p ثابت موجب

١٠ ـ $x = 2s, y = 1/s; s > 0$ ١١ ـ $x = 3 \sin u, y = 2 \cos u$

١٢ ـ $x = 2 + 1/t, y = 2 + t$ ١٣ ـ $x = 3 - 2 \cos r, y = 2 + 4 \sin r$

١٤ ـ $x = t^3, y = t^2$ ١٥ ـ $x = \cos 2\alpha, y = \cos \alpha$

١٦ ـ $x = t + 1/t, \; y = t - 1/t$ (ارشاد : لحذف البارامتر ، اجمع واطرح المعادلتين) .

١٧ ـ $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ (ارشاد : لحذف البارامتر ، اكتب مربعى المعادلتين ثم اجمع)

كل من أزواج المعادلات الآتية يعطى الاحداثيات عند الزمن t لنقطة تتحرك فى المستوى xy . صف الحركة عندما تتزايد t من قيمتها الصغرى الى قيمتها العظمى .

١٨ ـ $x = 2 - t, y = 1 + 3t; 0 \leq t \leq 4$ ١٩ ـ $x = t^2, y = 1 - t^2; -2 \leq t \leq 2$

٢٠ ـ $x = 2t, y = t^3; -1 \leq t \leq 2$ ٢١ ـ $x = \sqrt{t}, y = \sqrt{3 - t}$

٢٢ ـ $x = \cos t, y = 3 \sin t; 0 \leq t \leq \pi$ ٢٣ ـ $x = \sin t, y = \cos^2 t; 0 \leq t \leq 2\pi$

٢٤ ـ اثبت أن كلا من المنحنيات المعطاة معادلتها البارامترية أدناه هو جزء من أو كل نفس القطع المكافىء وصف ذلك الجزء .

(أ) $x = u, y = u^2$ (ب) $x = u^2, y = u^4$ (ج) $x = |u|, y = u^2$

(د) $x = \sin u, y = \sin^2 u$ (هـ) $x = e^u, y = e^{2u}$ (و) $x = e^u, y = e^{2u}; u \geq 0$

٢٥ ـ نقطة تتحرك فى المستوى xy ، تعطى احداثياتها عند الزمن t بالمعادلتين $x = t^2, y = 2t - 1$ ، ما الزمن الذى تأخذه النقطه لتتحرك من النقطة $(\frac{1}{4}, 0)$ الى النقطة $(4 , 3)$ ؟

٢٦ ـ اثبت أن الخط المستقيم المار بالنقطة (a , b) وميله m معادلتاه البارامتريتان هما $x = a + t , y = b + mt$. اوجد المعادلتين البارامتريتين للخط المستقيم الرأسى الذى يمر بالنقطة (a , b) .

٢٧ ـ اثبت أن المعادلتين البارامتريتين فى (٤) هما المعادلتان للخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) .

٢٨ ـ اوجد احداثيات النقطة P على الخط المستقيم الذى يصل بين النقطتين $B(x_2 , y_2)$ و $A(x_1 , y_1)$ بحيث أن : (أ) النقط تكون فى الترتيب ABP و $|BP| = \frac{1}{3} |AB|$
(ب) النقط تكون فى الترتيب PAB و $|PA| = 2|AB|$.

٢٩ ـ أوجد المنحنى الذى يرسمه الطرف الأعلى للوتر البؤرى العمودى للقطع المكافىء $y^2 = 4px$ عندما تتغير p (ارشاد : اوجد المعادلتين البارامتريتين للمنحنى) .

٣٠ ـ أوجد المعادلة فى y و x للدويرى التحتى الذى له أربعة أنياب، $y = a \sin^3 \theta$ و $x = \cos^3 \theta$.

٣١ ـ اوجد المعادلتين البارامتريتين للقطع المكافىء فى الشكل ٩ ـ ١ بحيث أنه عندما يتزايد البارامتر ، تتحرك النقطة على القطع المكافىء من اليمين الى اليسار .

أوجد المعادلات البارامترية للمنحنيات الآتية :

٣٢ ـ $3x + 7y = 2$.

٣٣ ـ الدائرة التى مركزها عند النقطة (h, k) ونصف قطرها r .

٣٤ ـ المحور السينى .

٣٥ ـ $y^2 = -x$.

٣٦ ـ القوس المكافىء $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ (ارشاد : انظر المسألة ٣٠) .

٣٧ ـ أوجد المعادلتين البارامتريتين $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$ للمنحنى القلبى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هى $r = a(1 - \cos \theta)$. (ارشاد : استخدام المعادلات التى تعطى θ و r بدلالة y و x) .

٣٨ ـ أوجد المعادلتين البارامتريتين $x = g(\theta)$, $y = h(\theta)$ للحلزون الزائدى الذى معادلته القطبية هى $r\theta = a$.

٣٩ ـ اثبت أن المعادلة فى y و x لمنحنى الدويرى (٧) التى نحصل عليها بحذف t هى

$$x = a \cos^{-1} \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

٤٠ ـ لتكن دائرة نصف قطرها a تتدحرج على خط مستقيم بدون تزحلق ولتكن نقطة P على بعد b من المركز على نصف قطر ثابت بالدائرة المتدحرجة . مثلا ، النقطة P قد تكون على برمق عجلة عربة أو على شفة عجلة عربة سكة حديد . المنحنى الذى ترسمه النقطة P يسمى التروشويد ، ومنه السيكلويد حالة خاصة . اذا اختير المحور السينى الخط الذى تتدحرج عليه الدائرة ، والمحور الصادى يمر بأدنى موضع للنقطة P ، اثبت أن المعادلتين البارمتريتين للتروشويد هما .

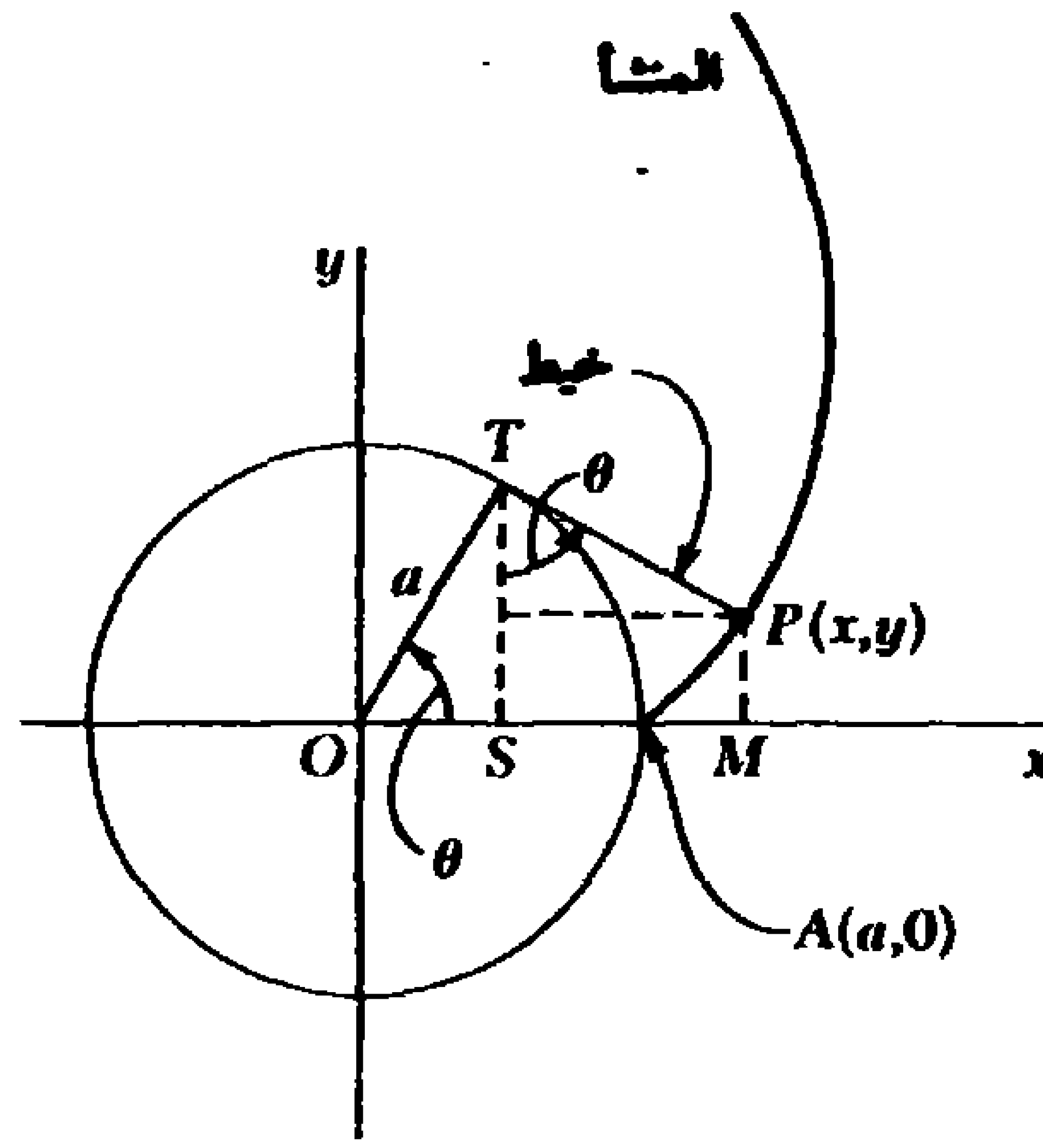
$$x = at - b \sin t, \qquad y = a - b \cos t$$

حيث البارامتر t هو نفسه البارامتر للسيكلويد . اعمل تخطيطا كروكيا للتروشويد فى كل من الحالتين $b < a$ و $b > a$.

٤١ ـ خيط ملفوف حول دائرة يفك فى مستوى الدائرة بينما يظل مشدودا ، نهاية الخيط ترسم منحنى يسمى المنشأ للدائرة (شكل ٩ ـ ٨) . لتكن الدائرة نصف قطرها a ومركزها عند نقطة الأصل O ولتكن النقطة $P(x, y)$ فى نهاية الخيط وضعها الابتدائى عند $A(a, 0)$. جزء الخيط المفكوك يكون مماسا للدائرة عند T . اذا رمز للزاوية AOT بـ θ ، اثبت أن المعادلتين البارامتريتين للمنشأ هما

$$x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

(ارشاد : أوجد طول PT)



شكل ٩ ـ ٨
المنشأ لدائرة

٩ ـ ٢

الميل

عادة يكون من المناسب عند اشتغالنا بالمعادلتين البارامتريتين استخدام y و x بدلا من h و g للرمزين الداليين ، ونكتب $y = y(t)$ و $x = x(t)$ بدلا من $y = h(t)$ و $x = g(t)$. فمثلا ، اذا كانت $y = t^3$ و $x = 1 - t^2$ فحينئذ $y(t) = t^3$ و $x(t) = 1 - t^2$.

ميل منحنى معطى بمعادلتين بارامتريتين يمكن ايجاده مباشرة من المعادلتين . لتكن $y = y(t)$ و $x = x(t)$ المعادلتين البارامتريتين للمنحنى . نفرض أن المنحنى ، أو جزء من المنحنى ، له معادلة غير بارامترية $y = f(x)$. هذا يعنى أن المعادلة

$$y(t) = f(x(t))$$

صحيحة لجميع t في فترة ما . اذا كانت $y(t)$ و $x(t)$, $f(x)$ قابلة للتفاضل ، فباستخدام قاعدة السلسلة يكون

$$y'(t)=f'(x)x'(t)$$

$$f'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{١}$$

هذا يمكن وضعه في الصورة

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$$

من الواضح أن هذا لايكون صحيحا لاى قيمة t حيث $dx/dt=0$.

المماس للمنحنى يكون أفقيا لقيم t حيث $dy/dt=0$ بشرط أن dx/dt تكون موجودة وليست صفرا . بالمثل يمكن اثبات أن المماس يكون رأسيا لقيم t حيث $dx/dt=0$ بشرط أن dy/dt تكون موجودة ولاتساوى صفرا . نوع التماس عندما تكون كل من dx/dt و dy/dt صفرا يمكن تعيينه بتحليل أكثر عمقا .

مثال ١ . أوجد ميل السيكلويد

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t),\qquad a>0$$

(شكل ٩ ـ ٥) عند النقطة حيث $t=\pi/3$ وأوجد النقطة على القوس الاول حيث المماس يكون افقيا .

لدينا $dy/dt=a\sin t$ و $dx/dt=a(1-\cos t)$. ميل السيكلويد يعطى بـ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

عندما $t=\pi/3$ يكون $dy/dx=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}$. اذا كانت t مقيدة بالفترة $[0,2\pi]$ ، التى تناظر القوس الاول للسيكلويد ، فاننا نرى أن $dx/dt=0$ عندما 2π و $t=0$ ، وان $dy/dt=0$ عندما 2π و $t=0,\pi,$. المماس يكون أفقيا عندما $t=\pi$ ، والنقطة المناظرة على السيكلويد هى $(\pi a, 2a)$. الموقف يكون غامضا عندما $t=0$ أو 2π ، حيث كل من dy/dt و dx/dt تساوى صفرا هناك ، لكن من الممكن اثبات أن المماس يكون رأسيا عند كلتا النقطتين .

مسائل

أوجد معادلة المماس للمنحنيات الآتية عند القيمة المعطاة للبارامتر :

١ ـ $x=2t,\ y=t^2-1;\ t=2$

٢ ـ $x=t^2,\ y=t^3;\ t=1$

٣ ـ $x=1/u,\ y=2u;\ u=-1$

٤ ـ $x=4\cos\theta,\ y=3\sin\theta;\ \theta=\pi/4$

٥ ـ $x=\cos 2\alpha,\ y=\sin\alpha;\ \alpha=\pi/3$

٦ ـ $x=2e^t,\ y=1-e^t;\ t=3$

خطط المنحنيات الآتية وأوجد النقط حيث المماسات تكون أفقية أو رأسية :

٧ ـ $x = 2 + t,\ y = 1 - 4t$

٨ ـ $x = t^2 - 2t,\ y = t + 1$

٩ ـ $x = b\cos u,\ y = b\sin u$

١٠ ـ $x = 3 + 4\sin\alpha,\ y = 4 - 3\cos\alpha$

١١ ـ $x = \sin\theta,\ y = \cos^2\theta$

١٢ ـ $x = t^3,\ y = t^2$

١٣ ـ $x = a\sec t,\ y = b\tan t$

١٤ ـ $x = \cos 2s,\ y = \cos s$

١٥ ـ اثبت أن ميل التروشويد

$$x = at - b\sin t, \qquad y = a - b\cos t$$

حيث $a\ ,\ b > 0$ ، يكون دائما محدودا اذا كانت $b < a$ (انظر المسألة ٤٠ ، بند ٩ ـ ١) .

١٦ ـ الكاردويد فى الشكل ٩ ـ ٩ له المعادلتان البارامتريتان

$$x = a(\cos\theta - \cos^2\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

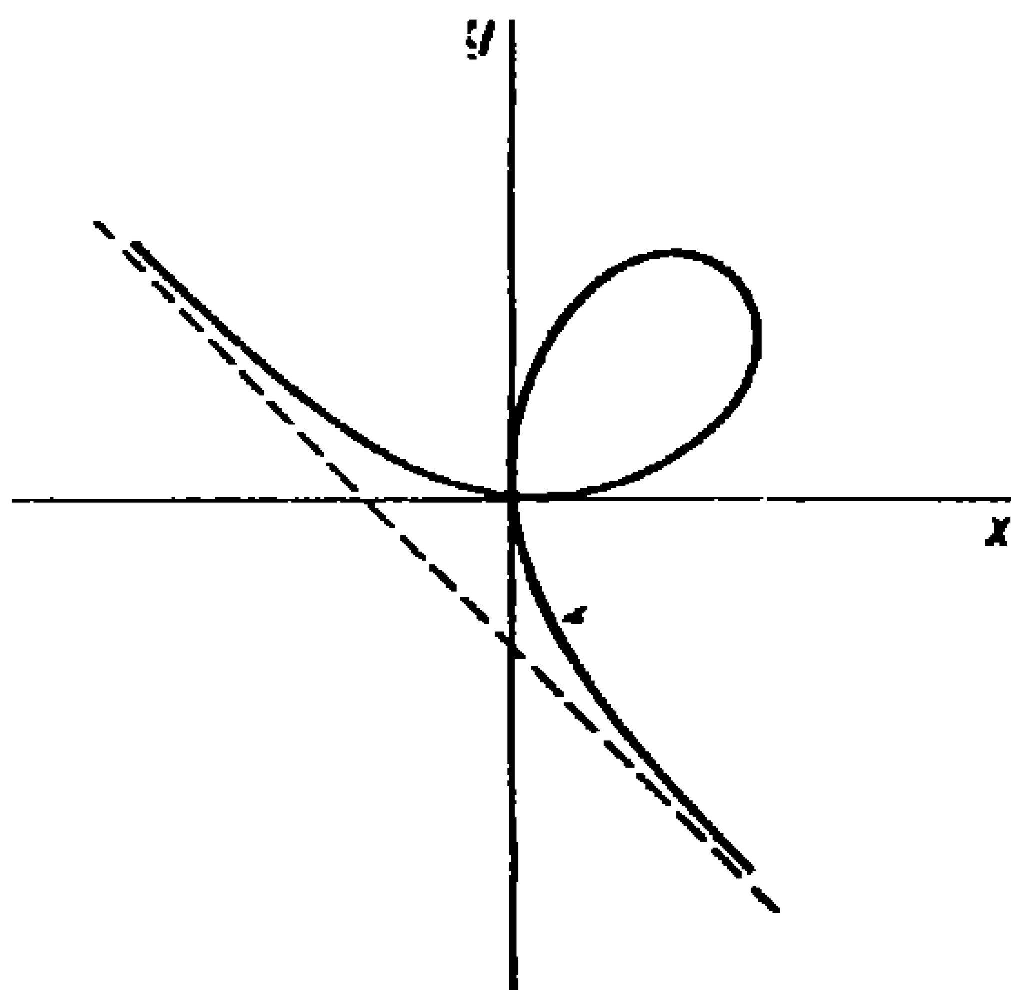
أوجد النقط على الكاردويد حيث المماسات تكون أفقية أو رأسية .

١٧ ـ طيه ديكارت (شكل ٩ ـ ١٠) لها المعادلتان البارامتريتان

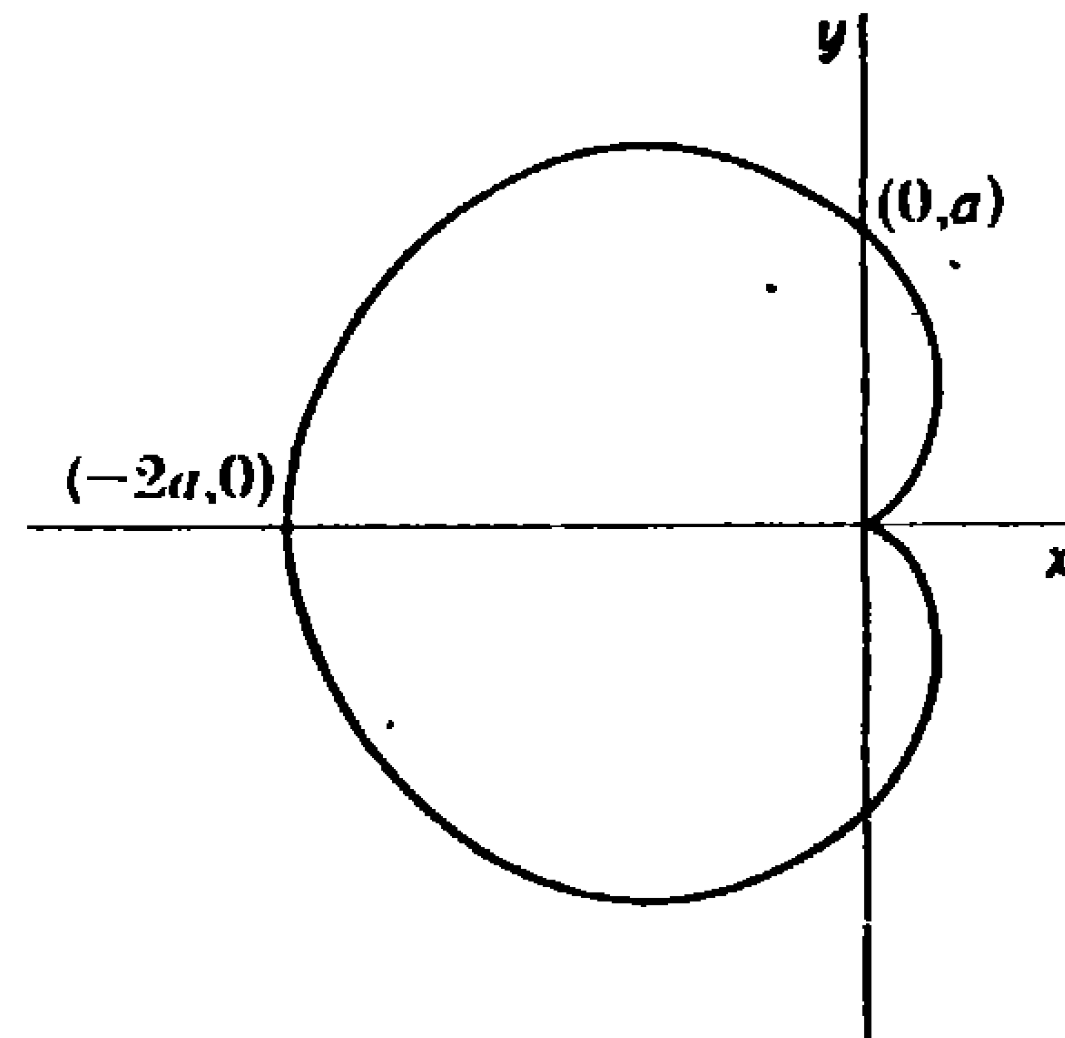
$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

(أ) أوجد النقط التى على المنحنى حيث المماسات تكون أفقية ورأسية .

(ب) ارسم المنحنى عندما تذهب t من $-\infty$ الى ∞



شكل ٩ ـ ١٠
طية ديكارت



شكل ٩ ـ ٩

١٨ ـ اذا كان منحنى بمعادلتى بارامتريتين $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ له معادلة غير بارامترية $y = f(x)$ ، فاثبت أن

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)]^3}.$$

$$\left[\text{ارشاد} : \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}f'(x) = \left(\frac{d}{dt}f'(x)\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}f'(x)}{dx/dt} \right]$$

استخدم المسألة ١٨ لايجاد $d^2y\ /\ dx^2$ للمنحنيات الآتية :

١٩ ـ $x = t - 1,\ y = t^2 + 1$ ٢٠ ـ $x = -u^2/2,\ y = 1 + u$ ٢١ ـ $x = z^3,\ y = z^2$

٢٢ ـ $x = \cos t,\ y = \sin t$ ٢٣ ـ $x = \sin t,\ y = \sin 2t$

٢٤ ـ اثبت أن السيكلويد $x = a(t - \sin t)\ ,\ y = a(1 - \cos t)\ ,\ a > 0$ (شكل ٩ ـ ٥) يكون مقعرا الى تحت فى الفترة $0 < t < 2\pi$ (ارشاد : استخدم المسألة ١٨) .

٢٥ ـ اثبت أن المنحنى $x = t^3 - 4t\ ,\ y = 3t^2 + 4t$ ليس له نقطة انقلاب (ارشاد : استخدم المسألة ١٨) .

٢٦ ـ اثبت أن طول القطعة لأى مماس للهيبوسيكلويد ذى الأنياب الأربعة : $x = a\cos^3\theta\ ,\ y = a\sin^3\theta\ ,\ a > 0$ المحصورة بين محورى الاحداثيات هو مقدار ثابت (شكل ٩ ـ ٧) .

٩ ـ ٣ .
طول القوس

فى هذا البند سنوجد صيغة لطول المنحنى . أولا يجب أن نعرف التعبير . التعريف ينبغى أن يتفق مع أفكارنا البديهية لطول القوس وتكون كافية عمليا لاعطائنا الاجوبة . للخطوط المستقيمة هذا أمر سهل . طول قطعة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(x_2\ ,\ y_2)$ و $(x_1\ ,\ y_1)$ تعرف بالعدد الذى نحصل عليه بصيغه المسافة .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

تعريف طول المنحنى الذى ليس خطا مستقيما سيعتمد على هذا .

ليكن المنحنى له المعادلتان البارمتريتان

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad . \ a \leqslant t \leqslant b$$

حيث $y(t)$ و $x(t)$ متصلتان . يمكن اثبات أن اتصال هاتين الدالتين يضمن أن المنحنى يكون متصلا بالمعنى الهندسى بلا ثقوب ولافجوات كل t تعين نقطة $P(x(t)\ ,\ y(t))$ على المنحنى .

سنفترض أن المنحنى يرسم مرة واحدة بالنقطة P عندما تذهب t من a الى b . هذا لم يكن صحيحا بالنسبة الى القوس المكافىء

$$x = \cos^2 u, \quad y = \sin u, \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi$$

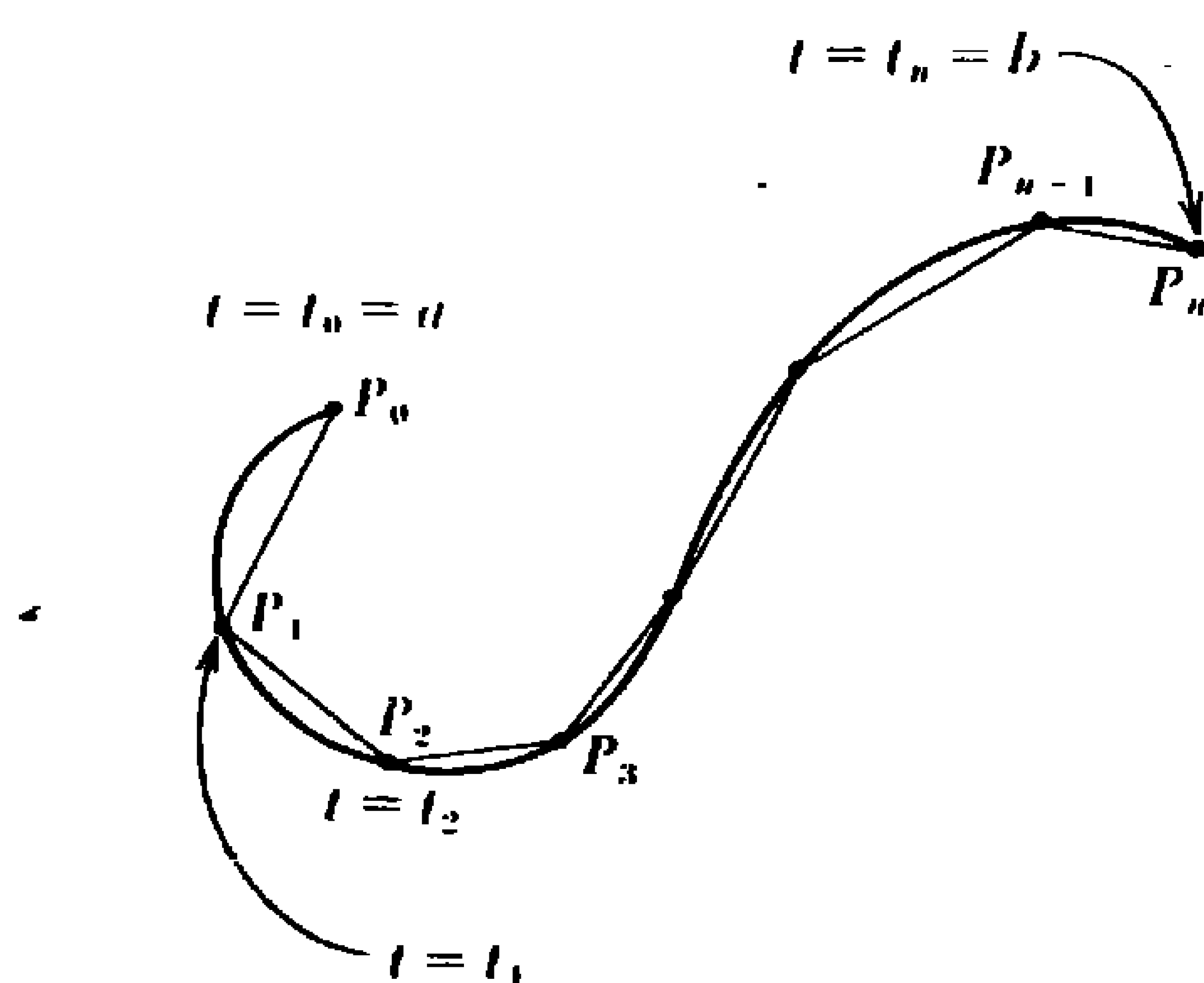
الذي درسناه فى مثال ٢ ببند ٩ - ١(شكل ٩ - ٣) ، لكنه يكون صحيحا للقوس الجزئى AB العين بـ $0 \leqslant u \leqslant \pi/2$. ليكن :

$$p = [a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b]$$

تجزىء للفترة $[a , b]$. الاعداد المقسمة $t_o , t_1 , t_2 , \ldots , t_{n-1} , t_n$ تعين متتابعة من النقط $P_0 , P_1 , P_2 , \ldots , P_{n-1} , P_n$ على المنحنى (شكل ٩ - ١١) . صل كل نقطة بالنقطة التى تعقبها بقطعة مستقيمة . مثل هذه المتتابعة من القطع المستقيمة تسمى مضلعا مرسوما داخل المنحنى حتى اذا كان المضلع غير مقفل . حاصل جمع أطوال القطع المستقيمة هو

$$L_p = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_{n-1}P_n| = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \qquad (1)$$

اذا كان التجزىء دقيقا ، فان النقط P_i تكون قريبة كل من الاخرى بسبب اتصال الدالتين $y(t)$ و $x(t)$ وحاصل الجمع L_p يكون تقريبا جيدا لما نعتقد أنه طول المنحنى ، ويصبح تقريبا أدق كلما زادت دقة التجزىء . من المعقول أن نعرف طول المنحنى بأنه عدد التجمع لحواصل الجمع (١) لجميع التجزيئات P . ليس كما هو الحال فى المساحات حيث التقريب يمكن أن يكون إما أكبر من أو أقل من المساحة ، هنا كل تقريب L_p بقطع مستقيمة يجب أن يكون أقل من طول المنحنى . وعليه فعدد التجمع هو أيضا الحد الاعلى الأقل للتقريبات . بدلا من استخدام عدد التجمع ، يكون من المناسب أن نعرف طول المنحنى بأنه الحد الأعلى الاقل لفئة الـL_p's لجميع التجزيئات p توجد منحنيات حيث فئة الـ L_p's ليس لها حد أعلى أقل ، ومثل هذه المنحنيات ليس لها طول . فئة الـ L_p's يجب فى هذه الحالة أن تكون غير محدودة من أعلى ، ويقال أحيانا أن الطول لانهائى .



شكل ٩ - ١١

٩ - ١ تعريف . ليكن C منحنى معادلتاه البارامتريتان هما

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

حيث الدالتان $y(t)$ و $x(t)$ متصلتان وبحيث أن النقطة $P(x(t), y(t))$ ترسم المنحنى مرة واحدة عندما تذهب t من a الى b . طول المنحنى هو الحد الاعلى الاقل للاطوال L_p للمضلعات المرسومة داخل المنحنى لجميع التجزيئات P للفترة $[a, b]$. اذا لم يوجد حد أعلى أقل ، فان المنحنى ليس له طول .

التعريف يشرح ماهو المقصود بطول المنحنى . النظرية الآتية تخبرنا كيف نوجده . لكن سنفترض أكثر من أن الدالتين $y(t)$ و $x(t)$ متصلتان ، وهو أن الدالتين لهما مشتقتان متصلتان . جميع المنحنيات الأكثر شيوعا تحقق هذا المطلب .

٩ - ٢ . نظرية ليكن C منحنى معادلتاه البارامتريتان هما

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

حيث $y(t)$ و $x(t)$ لهما مشتقتان متصلتان وبحيث أن النقطة $P(x(t), y(t))$ ترسم المنحنى مرة واحدة عندما تذهب t من a الى b . طول المنحنى بين النقطتين المناظرتين لـ b و a موجود ويعطى بالصيغة

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

بالرموز التفاضلية هذا يكون

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

برهان هذه النظرية صعب جدا لاعطائه هنا ، لكن يمكننا اعطاء استدلال مقبول . النقطة P_i على المنحنى المناظرة للبارامتر t_i احداثياتها هى $(x(t_i), y(t_i))$ (شكل ٩ - ١٢) . واذن طول القطعة المستقيمة $P_{i-1}P_i$ فى (١) هو

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2} \qquad (٢)$$

بنظرية القيمة المتوسطة يوجد عددان v_i و u_i فى الفترة الجزئية (t_{i-1}, t_i) بحيث أن

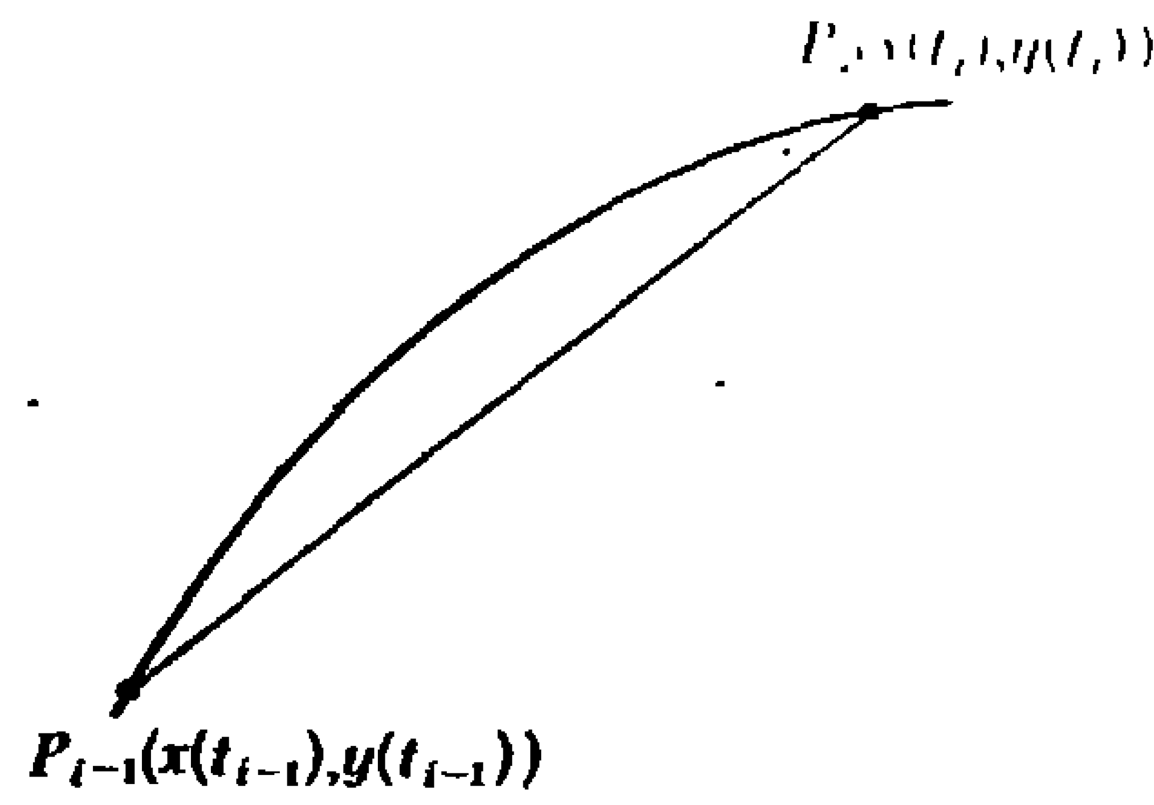
$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(u_i)\, \Delta t_i$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(v_i)\, \Delta t_i$$

حيث $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. بتعويض هاتين فى (٢) ، يكون

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i$$

وطول المضلع (١) المرسوم داخل المنحنى يمكن التعبير عنه هكذا

$$L_p = \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i \qquad (٣)$$



شكل ٩-١٢

اذا كان معيار التجزىء صغيرا ، فان v_i و u_i ، وكلاهما فى الفترة الجزئية (t_{i-1}, t_i) ، تكونان قريبتين من بعضهما ، واتصال $x'(t)$ و $y'(t)$ يتضمن أن L_p فى (٣) لاتختلف كثيرا عن

$$\bar{L}_p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\, \Delta t_i$$

التى هى (٣) مع استبدال v_i بـ u_i . هذا الاخير هو حاصل جمع ريمان للدالة المتصلة

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

واذن الـ $\bar{L}_p$ يجب أن يكون لها عدد تجمع ، حيث التكامل

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt \qquad (٤)$$

هى مجر اسم آخر له . من المقبول أن الـ L_p ، وهى تكاد تساوى الـ $\bar{L}_p$ للمعايير الصغيرة ، تتجمع حول نفس العدد ، وبما أنه يمكن اثبات أنها أقل منه ، فالعدد هو حدها الاعلى الأقل . واذن الطول L للمنحنى يعطى بالتكامل فى (٤) .

الحدان b و a يمكن تعيينهما بتخيل نقطة ترسم المنحنى . فهما قيمتا البارامتر t عند بداية ونهاية المنحنى .

مثال ١ . أوجد طول قوس واحد من الدويرى $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ حيث $a > 0$ (شكل ٩-٥) .

لدينا

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \qquad y'(t) = a \sin t$$

ومن ثم

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}$$
$$= a\sqrt{2(1 - \cos t)}.$$

القوس الأول يرسم عندما تتغير t من 0 الى 2π . واذن طوله يعطى بالصيغة

$$L = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt$$

هذا التكامل يمكن ايجاده باستخدام المتطابقة $1 - \cos t = 2\sin^2 (t/2)$. بما أن $\sin (t/2) \geqslant 0$ لـ $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ ، فيكون $\sqrt{\sin^2 (t/2)} = \sin (t/2)$ ويكون

$$L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a\cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a$$

فالطول ثمانية أمثال نصف قطر الدائرة المنشئة .

أى منحنى معادلته على الصورة $y = f(x)$ له المعادلتان البارامتريتان $x = t\ ,\ y = f(t)$. اذا كانت $f(x)$ لها مشتقة متصلة ، فالنظرية ٩ ـ ٢ توضح أن طول المنحنى $y = f(x)$ بين $x = b$ و $x = a$ يعطى بالصيغة

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad ٩ ـ ٣$$

مثال ٢ . أوجد طول المنحنى $y = x^{3/2}$ بين نقطة الاصل والنقطة $(2\ ,\ \sqrt{8})$.

المنحنى $y = x^{3/2}$ هو النصف العلوى للقطع المكافىء نصف التكعيبى $y^2 = x^3$ ، الموضح فى الشكل ٩ ـ ١٣ . لدينا $dy/dx = f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$ ومن الصيغة ٩ ـ ٣ ، يكون

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx = \tfrac{2}{3}(\tfrac{4}{9})(1 + \tfrac{9}{4}x)^{3/2}\Big|_0^2$$

$$= \tfrac{1}{27}(4 + 9x)^{3/2}\Big|_0^2 = \tfrac{1}{27}(22^{3/2} - 8) \approx 3.53.$$

المنحنى قد يكون له معادلتان قطبيتان بارامتريتان

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b \qquad (٥)$$

ويمكننا اعتبار النقطة التى احداثياها القطبيان هما $(r(t)\ ,\ \theta(t))$ أنها ترسم المنحنى عندما تتزايد t من a الى b . التكامل لطول المنحنى الذى معادلتاه القطبيتان فى (٥) يمكن اشتقاقه من التكامل فى النظرية ٩ ـ ٢ باستخدام المعادلات التى تربط الاحداثيات القطبية بالاحداثيات الكارتيزية :

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t), \qquad y(t) = r(t)\sin\theta(t)$$

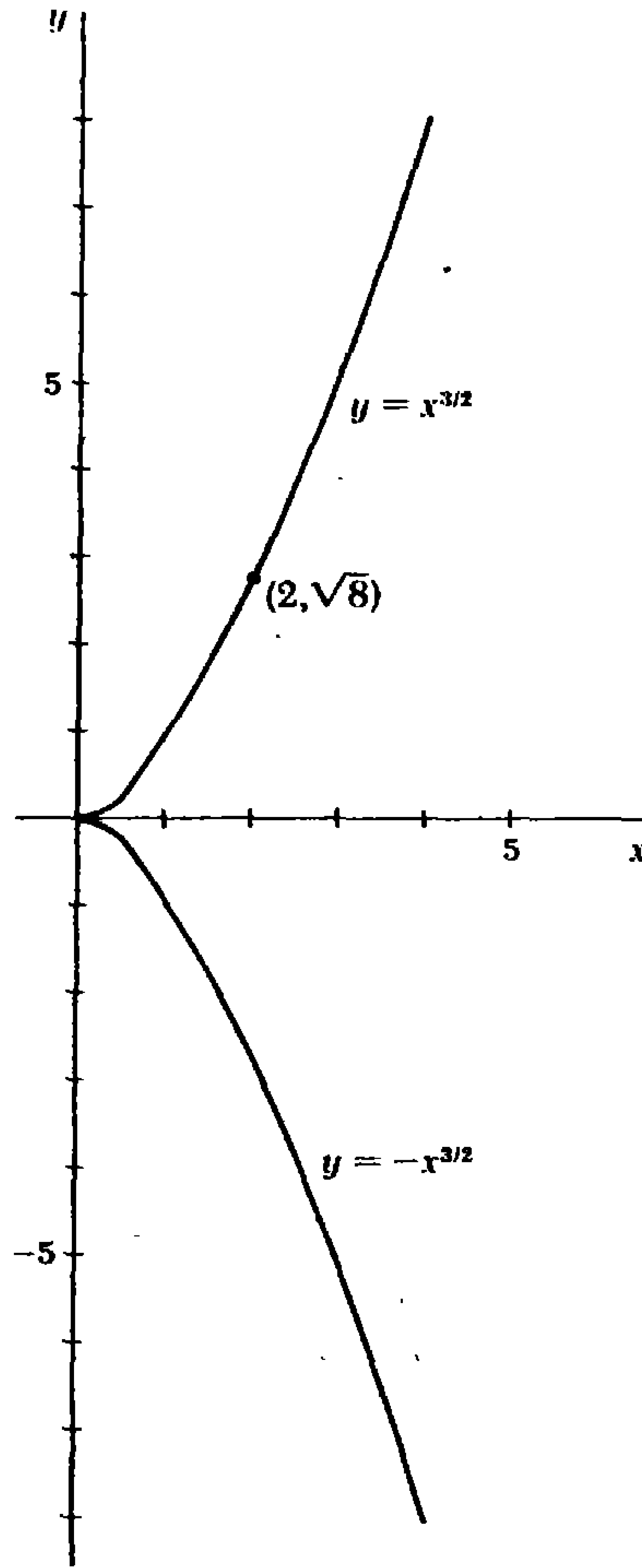
نفترض أن θ و r لهما مشتقتان متصلتان لـ $a \leqslant t \leqslant b$ وأن المنحنى يرسم مرة واحدة عندما تتزايد t من a الى b المشتقتان لهاتين بالنسبة الى t هما

$$x'(t) = -r(t)\sin\theta(t)\theta'(t) + r'(t)\cos\theta(t),$$
$$y'(t) = r(t)\cos\theta(t)\theta'(t) + r'(t)\sin\theta(t).$$

بتربيع طرفى المعادلتين وجمعهما ثم الاختصار ، نحصل على

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = r^2(t)[\theta'(t)]^2 + [r'(t)]^2$$

وبتعويض الطرف الأيمن من هذه المعادلة فى التكامل المذكور فى النظرية 2 - 9 نحصل على التعبير



شكل ٩-١٣

قطع مكافىء نصف تكعيبى $y^2 = x^3$.

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2(t)[\theta'(t)]^2 + [r'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\, dt \quad (٧)$$

الذى يعطى طول المنحنى المعبر عنه بالمعادلتين التطبيقتين البارامتريتين

$$r = r(t),\ \theta = \theta(t),\ a \leqslant t \leqslant b$$

ويمكن تحويل منحنى معطى بالمعادلة القطبية $r = f(\theta)$ إلى الصورة البارامترية بوضع $\theta = t$ ، $r = f(t)$ ، وبهذا تصبح المعادلة ٩-٤ بالصورة .

$$L = \int_a^b \sqrt{f^2(\theta) + [f'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

للدلالة على طول المنحنى $r = f(\theta)$ بين $\theta = a$ و $\theta = b$.

مثال ٣ : أوجد طول القلبى $r = 1 + \sin\theta$.

يبين شكل ٩ ـ ١٤ القلبى المذكور ، وباستخدام الصيغة ٩ ـ ٥ نحصل على

$$L = \int_a^b \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_a^b \sqrt{2 + 2\sin\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\int_a^b \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta.$$

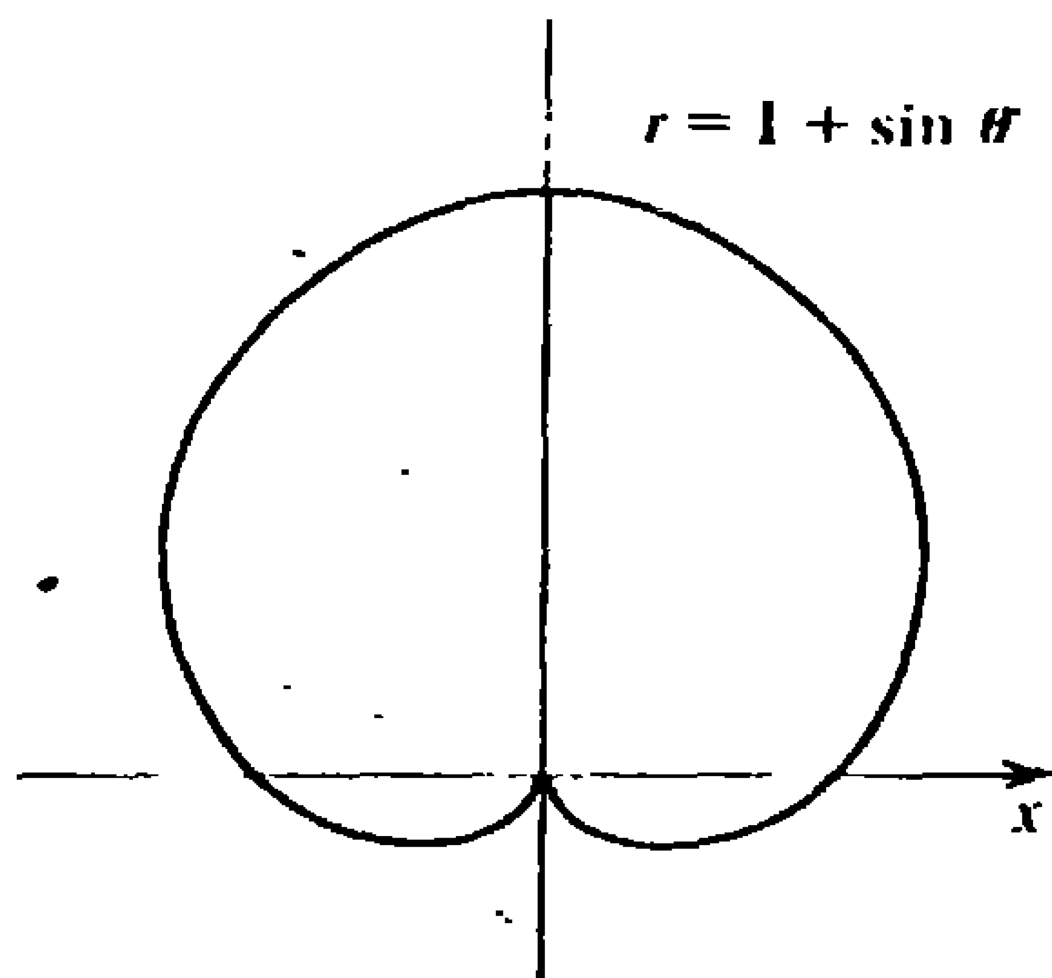
ويرسم القلبى مرة واحدة فى كل مرة تتغير فيها θ بمقدار 2π . ويكون أبسط اختيار للحدود ، إن لم يكن أكثرها طبيعية ، بالبدء عند نقطة الأصل حيث $\theta = -\pi/2$ ثم التقدم مرة واحدة حول المنحنى فى عكس اتجاه عقارب الساعة لننتهي عند $\theta = 3\pi/2$. وبهذه الحدود يصبح التكامل للحصول على L كما يلى :

$$L = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

ويمكن تقييم هذا التكامل بتحويله إلى الصيغة الكسرية ، فنحصل على

$$L = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\,\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

وهنا قد تجد إغراءً للكتابة $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ ، ولكن يجب الحذر لأنه إذا كانت : $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ فإن $\cos\theta \geq \theta$ ويكون $\sqrt{\cos^2\theta}$ ، ولكن إذا كانت $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ فإن $\cos\theta \leq \theta$ ويكون $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$. لهذا يجب أن يكتب التكامل المذكور فى (٦) فى صورة مجموع تكاملين ، المعادلة البارامترية



شكل ٩ ـ ١٤

$$L = \sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta + \sqrt{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta.$$

وهناك طريقة أخرى ، وهى إيجاد طول النصف الأيمن من القلبى المعطى بالتكامل الأول من التكاملين المذكورين فى (٧) ثم مضاعفة النتائج للحصول على L نظرا للتماثل . باتباع هذا المنهج نحصل على

$$L = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta = -4\sqrt{2}(1-\sin\theta)^{1/2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= -4\sqrt{2}(-\sqrt{2}) = 8.$$

ويعطى طول المنحنى $x = x(t)$, $y = y(t)$ فى المدى t (a, t) طبقا للنظرية ٩ - ٢ بالتعبير

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2}\, du$$

حيث استخدمنا u كمتغير التكامل بدلا من t . فإذا اعتبرنا a ثابت ، فإن الطول يتوقف على t ، كما هو مبين بالتعبير الدالى $s(t)$. وطبقا للنظرية ٥ ـ ٧ يمكن الحصول على مشتق للدالة s وهو

$$s'(t) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

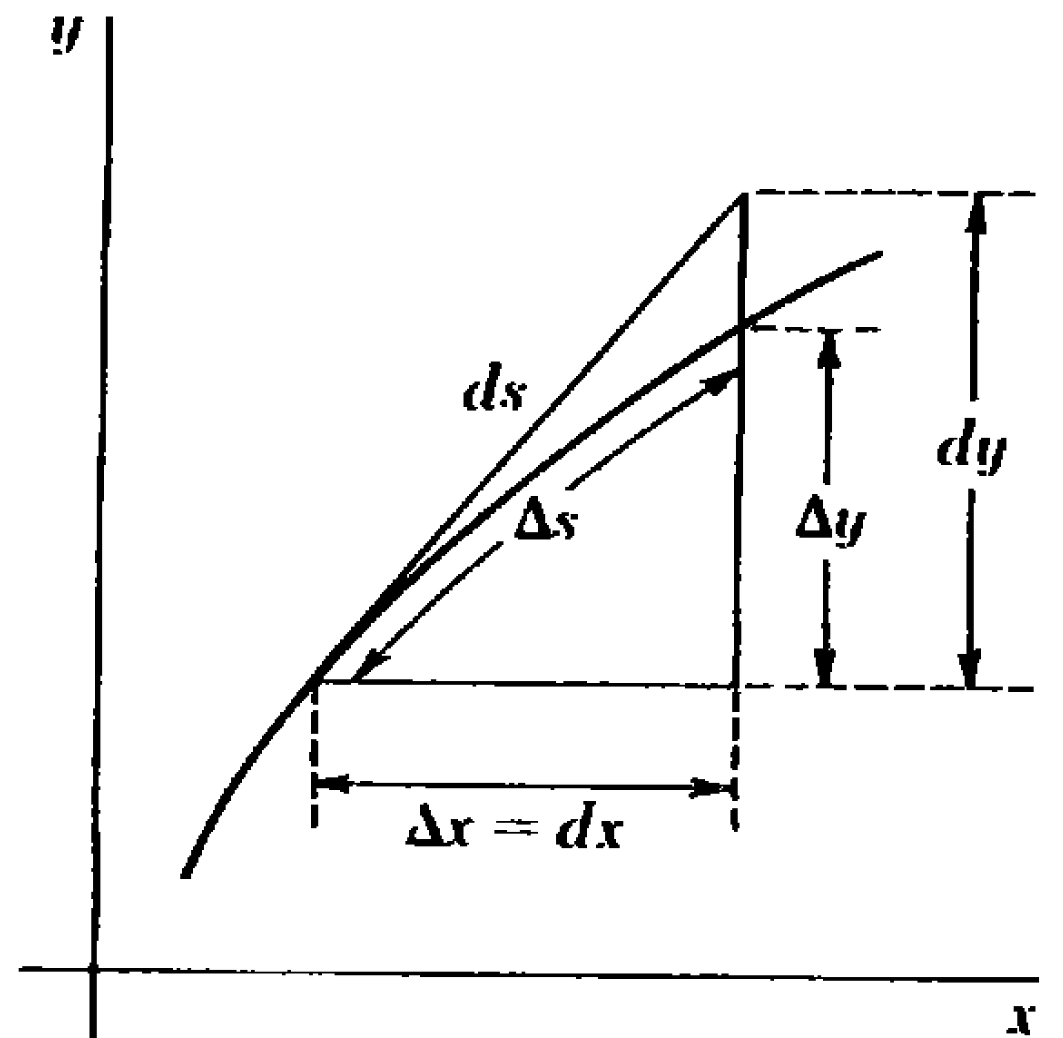
أو بالتعبير التفاضلى

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad (٨)$$

هذا يعطى معدل التغير فى طول القوس s بالنسبة لـ t فإذا عوملت dx , dy , dt , ds على أنها تفاضلات ، فإن المعادلة ، بالضرب فى dt ، تصبح

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

وتبين هذه المعادلة أن التفاضل ds هو طول وتر المثلث قائم الزاوية الذى ضلعاه dx , dy موازيان للمحورين (شكل ٩ ـ ١٥) . هذا الوتر مماس للمنحنى لأن dy/dx هو ميل المنحنى .



شكل ٩ـ١٥

المنحنى الذى معادلته $y = f(x)$ له أيضا معادلتين بارامتريتين $x = t$, $y = f(t)$ وتصبح (٨).

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

التى تعطى معدل التغير فى طول القوس s بالنسبة للمتغير x.

وبالمثل ، للمنحنى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية $r = f(\theta)$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \qquad (٩)$$

مسائل

أوجد طول المنحنيات الآتية :

١ - $x = a \sin u, y = a \cos u, a > 0; 0 \leqslant u \leqslant 2\pi$

٢ - $x = \cos 2t, y = \sin 2t; 0 \leqslant t \leqslant \pi/6$

٣ - $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t; 0 \leqslant t \leqslant \pi$

٤ - $x = \frac{w^2}{4}, y = \frac{w^3}{6}; 1 \leqslant w \leqslant 3$

٥ - $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t; 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

أوجد ولكن لا تحاول أن تقيم التكامل المحدد الذى يمثل طول كل من المنحنيات الآتية :

٦ - $x = \alpha^3 + 2\alpha, y = \alpha^2 - \alpha + 2; 1 \leqslant \alpha \leqslant 4$

٧ - $x = a \cos z, y = b \sin z, a > 0, b > 0; 0 \leqslant z \leqslant 2\pi$

٨ - $x = \ln \cos t, y = t + 1; 0 \leqslant t \leqslant \pi/3$

٩ - $x = w \cos w, y = w \sin w; 0 \leqslant w \leqslant \pi/2$

١٠ - الانفوليوت الدائرة التى نصف قطرها a فى شكل ٩ - ٨ المعادلات البارامترية

$$x = a(\cos\theta + \theta \sin\theta), \qquad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$$

(المسألة ٤١ ، قسم ٩ - ١) . اثبت أن طوله من $\theta = 0$ إلى $\theta = \gamma$ هو $\frac{1}{2} a\gamma^2$.

١١ - المعادلتان البارامتريتان للخط الواصل بين (x_1, y_1) , (x_2, y_2)

هما $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)t$.

إثبت أن التكامل فى نظرية ٩ - ٢ يعطى النتيجة الصحيحة للمسافة بين النقطتين .

١٢ - أوجد الطول الكلى للدويرى النحتى ذى الأربع قمم $x = a\cos^3\theta$ ، $y = a\sin^3\theta$ ، حيث $a > 0$ (شكل ٩ - ٧) .

(تحذير : نظرا لأن $\sqrt{u^2}$ ليس دائما u ، إحسب طول قوس الربع الأول) .

١٣ - ارسم تخطيطيا المنحنى $x = t^3$, $y = t^2$ ، وبين أن طوله بين $t = -1$, $t = 2$ هو

$$\frac{1}{27}(40^{3/2} + 13^{3/2} - 16)$$

(تحذير : $\sqrt{t^2} = -t$ لقيم $v < o$ اقسم القوس الى جزئين واحسب طول كل قسم) .

١٤ ـ لنقطة تتحرك فى مستوى الاحداثيات الاحداثيين $x=t-\sin t$,$y=\cos t-1$ فى الحظة t .
اوجد المسافة التى تتحركها بين $t = 0$, $t = 2\pi/3$.

١٥ ـ لنقطة تتحرك فى مستوى الإحداثيات الإحداثيين $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ عند اللحظة t .
أكتب التكامل الذى يمثل المسافة التى تتحركها بين $t = 1$ و $t = 4$ ولكن لا تحاول حساب قيمته .

أوجد طول كل من المنحنيات الآتية :

١٦ ـ $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x};\ 1 \le x \le 2$ ١٧ ـ $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x;\ 1 \le x \le 5$ ١٨ ـ $y = \sqrt{16 - x^2};\ 0 \le x \le 4$

اكتب التكامل المحدد الذى يمثل طول كل من المنحنيات التالية ولكن لا تحاول حساب قيمته :

١٩ ـ $y = x^2;\ 0 \le x \le a$ ٢٠ ـ $y = \sqrt{x};\ 1 \le x \le 3$ ٢١ ـ $y = \ln(1 - x^2);\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$

٢٢ ـ $y = \ln \csc x;\ \pi/6 \le x \le \pi/2$ ٢٣ ـ $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2};\ -3 \le x \le 3$

٢٤ ـ اوجد بالتكامل محيط الدائرة التى نصف قطرها r.

٢٥ ـ اكتب التكامل الذى يمثل طول محيط القطع الناقص ولكن لا تحاول حساب قيمته . من المعروف أن هذا التكامل ، الذى يسمى بالتكامل الناقصى ، لا يمكن حساب قيمته بدلالة الدوال المعروفة لنا إلا فى حالة الدائرة . الدوال الناقصية وكذلك دوال أخرى معينة معرفة بها دوال هامة فى الرياضة التطبيقية وقد درست على نطاق واسع .

٢٦ ـ اثبت أن طول منحنى السلسلة $y = (a/2)\ (e^{x/a} + e^{-x/a})$ حيث $a > 0$ (مسألة ٧٦ القسم ٧ ـ ٣) ، من أكثر نقطة انخفاضا ، حيث $x = 0$ ، إلى النقطة التى عندها $x = c$ هو $a/2\ (\ e^{c/a} - e^{-c/a}\ )$.

٢٧ ـ ارسم تخطيطيا المنحنى $9\ ay^2 = x\ (\ x - 3a\ )^2$ حيث $a > 0$ ، وبين أن طول الأنشوطة $29\sqrt{3}$.

احسب بالتقريب طول كل من المنحنيات الآتية :

٢٨ ـ $y = x^2$ حيث $0 \le x \le 3$ (باستخدام قاعدة سمبسون) .

٢٩ ـ $25\ y^2 = 4\ x^5$ حيث $0 \le x \le 2$, $y \geqslant$ (باستخدام قاعدة شبه المنحرف) .

٣٠ ـ $y = \ln x$ حيث $1 \le x \le 3$ (باستخدام قاعدة شبه المنحرف) .

٣١ ـ قوس واحد من منحنى جيب الزاوية .

٣٢ ـ اوجد طول المنحنى الذى معادلته على شكل $x = g\ (y)$ كما فى المعادلة 9 - 3 .

اوجد طول كل من المنحنيات التالية (تنويه : انظر المسألة ٣٢) .

٣٣ ـ $x = y^3/6 + 1/2y;\ 1 \le y \le 3$ ٣٤ ـ $x = \sqrt{36 - y^2};\ 0 \le y \le 6$

ارسم تخطيطيا المنحنى المعطى بالمعادلة ذات المحاور القطبية المعطاه واوجد طوله .

٣٥ ـ $r = 2\sin\theta;\ \pi/2 \le \theta \le 3\pi/4$ ٣٦ ـ $r = e^{\theta};\ 0 \le \theta \le 2$

٣٧ ـ $r = a\theta^2,\ a > 0;\ 0 \le \theta \le \pi$ ٣٨ ـ $r = \sin^2(\theta/2);\ 0 \le \theta \le \pi$

٣٩ ـ $r = \sin^3(\theta/3);\ 0 \leq \theta \leq \pi$ (تنويه : $\sin^2(\theta/3) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta/3)]$

٤٠ ـ تحقق من أن الصيغة ٩ ـ ٥ تعطى النتيجة الصحيحة لمحيط الدائرة التى معادلتها بالمحاور القطبية :

(أ) $r = a$ حيث $a > 0$ ،

(ب) $r = a\cos\theta$ حيث $a > 0$.

٤١ ـ اوجد طول القلبى ($r = a(1 + \cos\theta)$ حيث $a > 0$.

(تنويه : لاحظ الحيلة المستعملة فى حساب قيمة التكامل فى المثال ٣) .

٤٢ ـ احسب قيمة التكامل فى (٦) باختيار أكثر طبيعية للحدود $a = 0$ و $b = 2\pi$.

٤٣ ـ خطط المنحنى $r = e^{-\theta};\ \theta \geq 0$ ، اثبت أنه رغم أن المنحنى يدور عدداً لانهائياً من المرات حول نقطة الاصل ، فان طوله يقترب من نهاية .

٤٤ ـ استخدم قاعدة شبه المنحرف لتقريب طول محيط ورقة واحدة من منحنى الوردة ذات الورقات الأربع $r = \sin 2\theta$.

٤٥ ـ اذا كانت المعادلة القطبية لمنحنى هى على الصورة $\theta = g(r)$ ، فأوجد صيغة لطوله مشابهة للصيغة ٩ ـ ٥ . .

٤٦ ـ أوجد المعادلة القطبية للمنحنى الذى عند كل نقطة عليه تكون $ds/d\theta = r^2$ بالنقطة $(\sqrt{2}, 0)$.

٤٧ ـ زورق خفر سواحل يبحث عن مهرب فى ضباب كثيف . انقشع الضباب فجأة ، وظهر المهرب على بعد خمسة أميال ، وفورا اختفى . كابتن الزورق يعرف أن المهرب سيتخذ خطا مستقيما فى السير بأقصى سرعته وهى 20 mph ، لكن لايعرف الاتجاه الذى سيسلكه المهرب . اذا كانت سرعة الزورق هى 30 mph ، ماهو التكتيك الذى ينبغى على كابتن الزورق ان يتبعه ليكون متأكدا من أنه سيعترض المهرب ؟

٤٨ ـ اشتق المعادلة (٩)

٤٩ ـ اتصال مشتقتى $y(t)$ و $x(t)$ استخدم مرتين فى الاستدلال المدعم للنظرية ٩ ـ ٢ . لقد أشير الى الموضع الأول . أين استخدم للمرة الثانية ، ولماذا هو ضرورى ؟

٥٠ ـ اين يفشل الاستدلال المقبول المدعم للنظرية ٩ ـ ٢ لان يكون برهانا ؟

٩ ـ ٤
الحركة فى مستوى

لتكن P نقطة تتحرك فى مستوى الاحداثيات واحداثياها عند الزمن t هما $(x(t), y(t))$ النقطة P ترسم منحنى . المعادلتان البارامتريتان للمنحنى هما

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

حيث الزمن t هو البارامتر . لتكن s هى مسافة P من نقطة ما A على المنحنى ، مقيسة على المنحنى . سنأخذ المسافة موجبة أوسالبة تبعا لكون t تتزايد أوتتناقص عندما تتحرك نقطة على

المنحنى من A الى P . اذا أوجدنا المسافة بالتكامل فى النظرية ٩ ـ ٢ فسيكون لها الاشارة الصحيحة . لقد رأينا فى (٨) ببند ٩ ـ ٣ أن

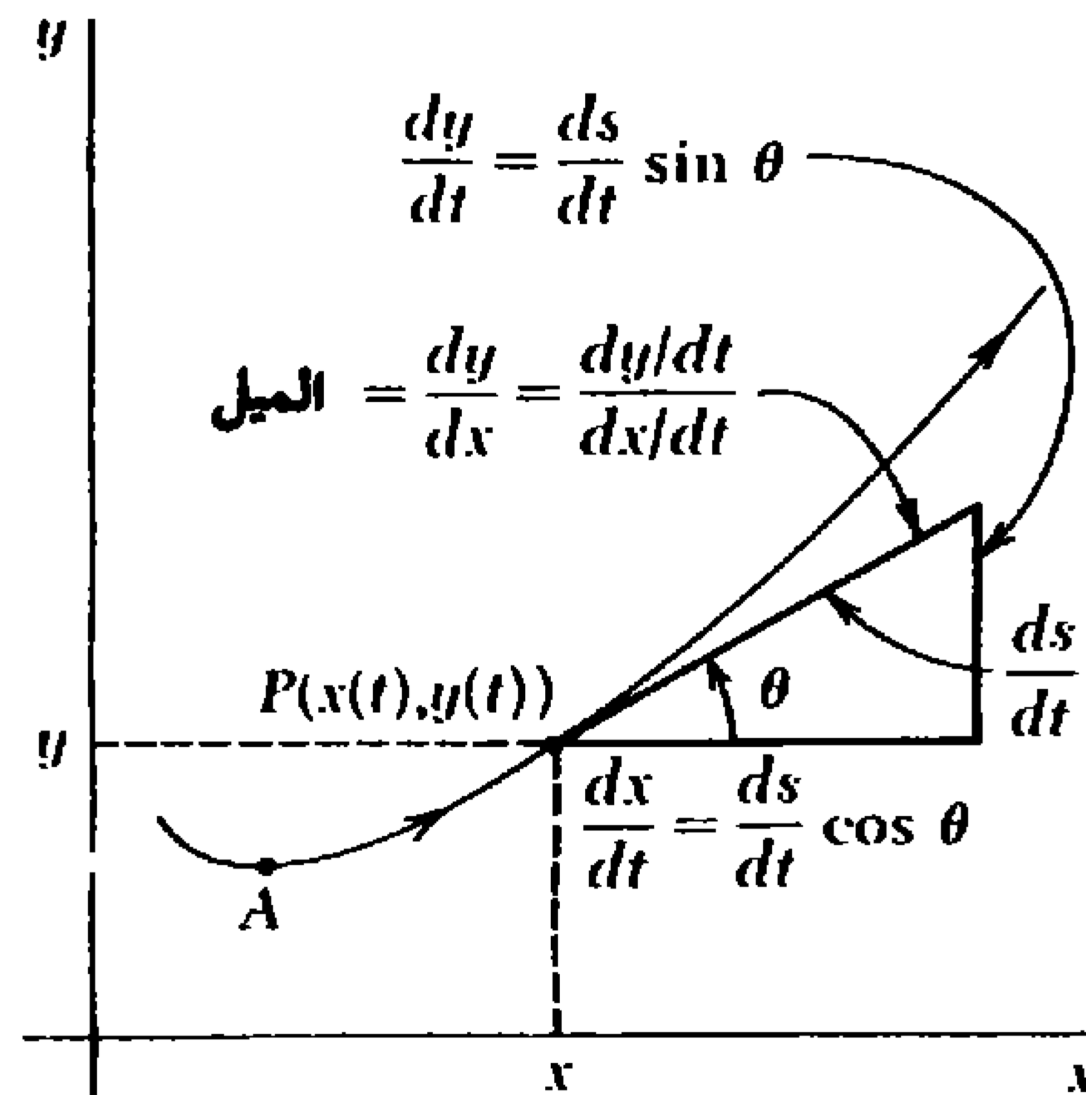
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad (1)$$

الكمية ds / dt هى معدل تغير المسافة بالنسبة الى الزمن فهى مقدار سرعة النقطة عند الزمن t . سوف لانسميها السرعة لأن السرعة هى متجه لايعطى فقط مقدار السرعة ولكن أيضا اتجاه الحركة عند الزمن t . مسقط النقطة P على المحور السينى له احداثى ومن ثم له سرعة dx / dt . (لأن dx / dt تعطى مقدار السرعة واتجاهها لنقطة تتحرك على المحور السينى فان السرعة هى الكلمة الصحيحة هنا) .هذا يشبه بأن ضوءا بعيدا جدا فى اتجاه المحور الصادى يلقى ظلا للنقطة P على المحور السينى أو على أى خط مواز له . سرعة الظل تعطى بـ dx / dt . بالمثل dy / dt هى سرعة مسقط P على المحور الصادى . المعادلة (١) توضح أن ds / dt هو طول وتر مثلث قائم الزاوية ساقاه يوازيان المحورين وطولاهما dy / dt و dx / dt (شكل ٩ ـ ١٦) . لأن $\frac{dy/dt}{dx/dt}$ هو الميل dy / dx للمنحنى عند P ، فان الوتر يكون مماسا للمنحنى هناك . لاحظ أن

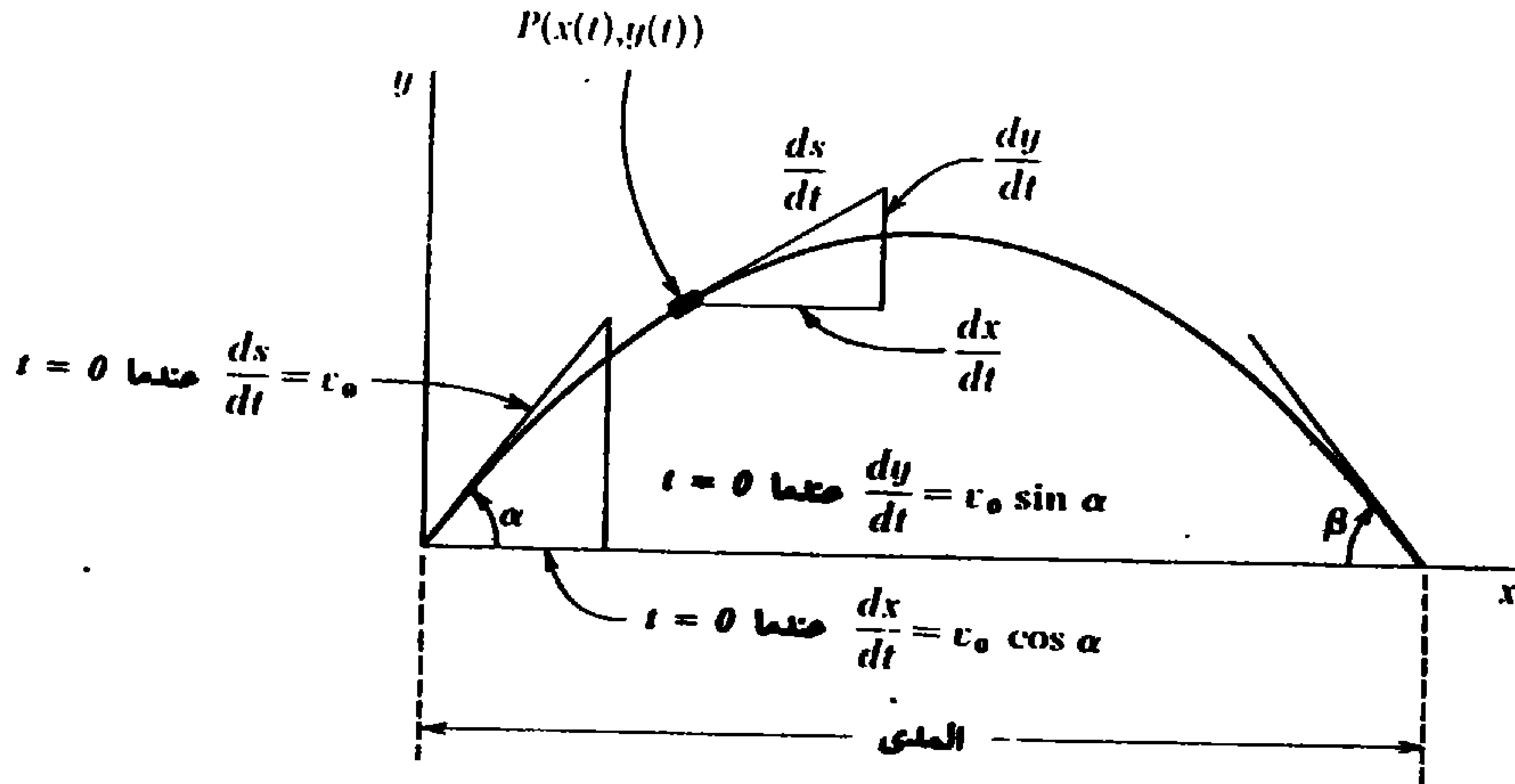
$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin\theta$$

حيث θ هى الزاوية من الخط الافقى الى المماس .

سنشتق معادلة المسير لقذيفة هذا تطبيق هام للمعادلات التفاضلية ويوضح كيف يكون من الطبيعى أن يعطى موضع نقطة تتحرك فى مستوى بزوج من المعادلات البارامترية حيث الزمن هو البارامتر . ندخل محورى احداثيات حيث المحور السينى يكون افقيا ، والمحور الصادى رأسيا ، ونقطة الاصل عند نقطة الابتداء للقذيفة .



شكل ٩-١٦



شكل ٩ - ١٧
قذيفة طائرة

الشكل ٩ - ١٧ يوضح القذيفة الطائرة P . ليكن $(x(t), y(t))$ احداثياها عند الزمن t . القوة الرئيسية المؤثرة على القذيفة هى الجاذبية ، للتبسيط سنفترض أنها القوة الوحيدة . الفقرة التالية تبرر المعادلتين فى (٣) ، والقارىء غير الملم بالمتجهات يمكنه أن يحذفها .

القذيفة تخضع لقانون نيوتن الثانى للحركة

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

(المعادلة (١) ، ببند ٤ - ١١) . هذه المعادلة المتجهة تكافىء المعادلتين اللتين نحصل عليهما بمساواة المركبتين x , y للمتجهين على طرفى المعادلة . وهما

$$ma_x = F_x \qquad \text{and} \qquad ma_y = F_y \tag{٢}$$

حيث a_y و a_x هما المركبتان y و x للعجلة وحيث F_y و F_x هما المركبتان y و x للقوة . قوة الجاذبية تتجه لاسفل ومقدارها mg . وحيث أنها لاتؤثر على الاحداثى x للنقطة P وتعمل على انقاص الاحداثى y ، فان $F_y = -mg$ و $F_x = 0$. الكميتان a_y و a_x هما العجلتان لمسقطى النقطة P على المحورين y و x وتعطيان بـ d^2y / dt^2 و d^2x / dt^2 . باجراء هذه التعويضات ، المعادلة (٢) تصبح ، بعد حذف m ،

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{٣}$$

هاتان هما المعادلتان التفاضليتان اللتان تحكمان حركة القذيفة . بالتكامل نحصل منهما على احداثيى P عند أى لحظة .

التكامل الاول لـ (٣) يعطى

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \qquad \text{و} \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + k_1 \tag{٤}$$

نحتاج الى شروط حدية لتعيين الثابتين k_1 و c_1 . نفرض أن القذيفة تبدأ بزاوية α مع الافقى (زاوية الارتفاع) بسرعة ابتدائية v_0 . هذا يعنى أن $ds / dt = v_0$ عند $t = 0$. من ذلك ومن الشكل ٩ - ١٧ ، يكون $dy /dt = v_0 \sin \alpha$ و $dx / dt = v_0 \cos \alpha$ عند $t = 0$. واذن الثابتان فى (٤) هما $k_1 = v_0 \sin \alpha$ و $c_1 = v_0 \cos \alpha$ ، والمعادلة (٤) تصبح

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \qquad \text{و} \qquad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

التكامل مرة ثانية يعطى

$$x = (v_0 \cos \alpha)t + c_2, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + k_2$$

الثابتان k_2 و c_2 يجب أن يكونا صفرا لان القذيفة كانت عند نقطة الاصل عند $t = 0$. واذن احداثيا القذيفة عند الزمن t هما

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \qquad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \tag{٥}$$

هاتان معا هما المعادلتان البارامتريتان للمسير .

الاجابة عن كثير من الاسئلة الخاصة بحركة القذيفة يمكن الحصول عليها من هاتين المعادلتين . أولا ، الى أى بعد تذهب القذيفة ؟ المسافة على مستوى الأرض بين المدفع ونقطة التصادم تسمى مدى القذيفة . لايجاد المدى نوجد أولا متى تصطدم القذيفة بالارض . من (٥) ، $y = 0$ عندما

$$t = 0 \quad \text{أو} \quad t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

الزمن $t = 0$ يناظر $x = 0, y = 0$. نأخذ القيمة الاخرى للزمن t ، ونعوض بها فى المعادلة الاولى فى (٥) لنوجد المدى

$$\text{المدى} = (v_0 \cos \alpha) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

لايجاد اقصى ارتفاع تصل اليه القذيفة ومقدار السرعة هناك ، نوجد أولا متى تكون عند أعلى نقطة على مسارها . عند هذه النقطة $dy / dx = 0$. بما أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-gt + v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha}$$

فان dy / dx عندما $dy / dt = -g t + v_0 \sin \alpha = 0$ ، أى عندما $t = (v_0 \sin \alpha) / g$. عندما تكون t لها هذه القيمة ، القذيفة تكون عند أعلى نقطة وقيمة y هناك هى

$$\text{أقصى ارتفاع} = -\tfrac{1}{2}g \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g^2} + \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{g}$$

$$= \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}$$

مقدار سرعة القذيفة عن أى زمن t يعطى بالصيغة

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (-gt + v_0 \sin \alpha)^2}$$
$$= \sqrt{v_0^2 - 2gtv_0 \sin \alpha + g^2t^2}.$$

عند أعلى نقطة $t = (v_0 \sin \alpha) / g$ ومقدار السرعة هناك يكون

$$\sqrt{v_0^2 - 2v_0^2 \sin^2 \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha} = \sqrt{v_0^2 - v_0^2 \sin^2 \alpha} = v_0 \cos \alpha$$

لاحظ ان لاجابة هذه الأسئلة عن القذيفة نوجد أولا متى تقع هذه الاحداث . بحذف t يمكن الحصول على المعادلة فى y و x لمسير القذيفة ، والبرهنة على أن المسير هو قطع مكافىء (المسألة ٢٠) . طبعا هذا مع افتراض أنه لاتوجد مقاومة للهواء .

مسائل

افترض أن الارض تكون أفقية فى المسائل الآتية .

الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى معطيان أدناه . أوجد مقدار سرعة النقطة واتجاه حركتها (أى ميل المماس للمسير) للقيمة المعطاة لـ t .

١ - $x = 2t,\ y = t^2 - 2;\ t = 3$

٢ - $x = 2t,\ y = t^3;\ t = 1$

٣ - $x = t^3,\ y = t^2;\ t = 2$

٤ - $x = b \cos t,\ y = b \sin t;\ t = 3\pi/4$

٥ - $x = 2 \sin t,\ y = 4 \cos t;\ t = \pi/2$

٦ - $x = 2 \sin t,\ y = \cos 2t;\ t = \pi/3$

٧ - الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى هما $y = t^2 - 2t + 3$ و $x = t - 1$. ما هو أكبر مقدار وأصغر مقدار لسرعة النقطة فى الفترة $0 \leqslant t \leqslant 3$ ؟

٨ - الاحداثيان عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى هما $x = (t-1)^2,\ y = t^2,\ t \geqslant 0$. متى يكون مقدار السرعة أصغر مايمكن؟ عند أى نقطة يكون مقدار السرعة 10 ft / sec ؟

٩ - اثبت أنه مهما كانت سرعة قطار يتحرك الى الامام ، فانه توجد دائما نقطة ما عليه تتحرك الى الخلف (ارشاد : ادرس النقطة الادنى على شفة العجلة وانظر المسألة ٤٠ ، ببند ٩ - ١) .

١٠ - اطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 200 ft / sec وبزاوية ارتفاع $30°$. أوجد dx / dt , dy / dt ، ومقدار السرعة ، واتجاه القذيفة (أى ميل المماس للمسير) عندما (أ) $t = 2$ ، (ب) $t = 4$ (خذ $g = 32$ ft / sec / sec) .

١١ - ماهو أقصى ارتفاع وماهو زمن الطيران للقذيفة فى المسألة ١٠ ؟

١٢ - أوجد زاويتى ارتفاع مدفع بحيث أنه اذا اطلقت منه قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 1000 ft / sec فانها تصيب هدفا على بعد $20,000$ على نفس المدفع :
(خذ $g = 32$ ft /sec / sec) .

١٣ - اوجد مقدار سرعة قذيفة عند ارتطامها بالأرض .

١٤ - اوجد اكبر مقدار وأصغر مقدار لسرعة قذيفة وأوجد متى يحدثان .

١٥ - اثبت أن القذيفة تصل الى ثلاثة أرباع اقصى ارتفاع لها فى نصف الزمن الذى تصل فيه الى أقصى ارتفاع .

١٦ - اذا ضوعف مقدار السرعة الابتدائية للقذيفة مع بقاء زاوية الارتفاع دون تغيير فبأى عامل يزيد المدى ؟

١٧ - اثبت ان القذيفة تأخذ وقتا لتصل الى اقصى ارتفاع مثل الوقت الذى تأخذه من تلك النقطة الى الارض .

١٨ - لاى زاوية ارتفاع α يكون مدى القذيفة أكبر ما يمكن ؟ اثبت أنه توجد قيمتان للزاوية α تجعلان القذيفة تبلغ أى مدى معطى أقل من المدى الاكبر . ارسم شكلا يوضح كيف يمكن أن يكون هذا .

١٩ - اثبت ان الزاوية β فى الشكل ٩ - ١٧ التى بها ترتطم القذيفة بالأرض هى نفسها زاوية الارتفاع α .

٢٠ - اوجد المعادلة فى y و x لمسير القذيفة واثبت أنه قطع مكافىء .

٢١ - عند لحظة وصول القذيفة أعلى نقطة لها سقط حجر من نفس النقطة . هل الحجر أم القذيفة سيصل الارض أولا ؟

٢٢ - ولد واقف على قمة برج ارتفاعه 100ft يقذف افقيا حجرا بسرعة مقدارها 20 ft / sec . متى سيرتطم الحجر بالأرض ؟ (خذ $g = 32$ ft / sec / sec) . اذا كانت الشمس فوق الرأس مباشرة ، فأوجد مقدار سرعة ظل الحجر على الارض عند أى وقت t . حل نفس المسألة اذا كان الحجر يقذف بسرعة مقدارها 30 ft / sec . ماذا تستنتج من ذلك ، وهل يمكنك اثبات استنتاجك ؟

٢٣ - اشتق من معادلتى مسير قذيفة الصيغة $s = \frac{1}{2}gt^2$ للمسافة التى يهبطها جسم ، يبدأ من سكون ، فى زمن قدره t sec .

٢٤ - اطلقت قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 320 ft sec وبزاوية ارتفاع α ، على جرف رأسى على بعد 960 ft . (خذ $g = 32$ ft / sec / sec) :

(أ) اذا كانت $\alpha = 45°$ ، فعلى أى ارتفاع ترتطم القذيفة بالجرف ؟

(ب) لاى زاوية α سترتطم القذيفة بقاعدة الجرف ؟ (ج) اوجد الزاوية α بحيث أن القذيفة ترتطم بالجرف على أعلى ارتفاع ممكن وأوجد هذا الارتفاع .

٢٥ - اذا كان فى حركة القذيفة التى درسناها فى الكتاب توجد بالاضافة الى قوة الجاذبية قوة ثابتة مقدارها mc تؤثر أفقيا ضد القذيفة ، فان المعادلتين التفاضليتين اللتين تحكمان الحركة ، المناظرتين لـ (٣) ، هما $d^2x / dt^2 = -c$ و $d^2y / dt^2 = -g$ مثل هذه القوة قد تنشأ بسبب الريح المعاكسة ، ولو أن هذا من الصعب تخيله مع عدم وجود مقاومة للهواء أيضا . أوجد احداثيى القذيفة عند الزمن t اذا كان مقدار السرعة الابتدائية هو v_0 وزاوية الارتفاع هى α .

٢٦ ـ يريد رجل أن يقذف كرة خلال طوق رأسى ، مركزة على ارتفاع 16 ft فوق يديه ، بحيث أن الكرة تتحرك أفقيا عقب مرورها خلال الطوق . وهو يقذف الكرة بسرعة مقدارها 40ft / sec .
ماهو البعد الافقى عن الطوق ، الذى يجب أن يقف عنده ليقذف الكرة ؟
(خذ $g = 32$ ft / sec / sec) .

٢٧ ـ حل المسألة ٢٦ بفرض أن الرجل راكب فى عربة تتحرك أفقيا بسرعة ثابتة مقدارها $30\,ft/sec$ فى اتجاه الطوق .

٢٨ ـ مدفع له القدرة على قذف القذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها 1000 ft / sec على خندق للعدو وعلى جانب تل . العدو على بعد أفقى $10,000$ ft ، وعلى ارتفاع 300ft عن المدفع . ماذا ينبغى أن تكون زاوية ارتفاع المدفع ؟ (خذ $g = 32$ ft / sec / sec) .

الاحداثيات $(x(t), y(t))$ لنقطة تتحرك فى مستوى تحقق المعدلات التفاضلية والشروط الحدية الآتية . أوجد $y(t)$ و $x(t)$ وصف حركة النقطة .

٢٩ - $dx/dt = t,\ dy/dt = 1;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

٣٠ - $dx/dt = -\sin t,\ dy/dt = \cos t;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

٣١ - $dx/dt = x,\ dy/dt = x^2;\ x = 2$ and $y = 3$ when $t = 0$

٣٢ - $d^2x/dt^2 = 0,\ d^2y/dt^2 = 0;\ x(0) = 0,\ y(0) = 2,\ x'(0) = -1,\ y'(0) = \frac{1}{3}$

٣٣ - $d^2x/dt^2 = 2t,\ d^2y/dt^2 = 4;\ x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = -4,\ y'(0) = 0$
أوجد طول المسير من $t = 0$ الى $t = 9$.

الفصل العاشر

طرق التكامل

١٠ - ١

الطرق البسيطة للتكامل

فى هذا الفصل سندرس طرق ايجاد التكاملات لأنواع هامة متعددة من الدوال . دعنا أولا نستعرض الطرق التى عرفناها الى الآن . أكثر التكاملات شيوعا هو التكامل الذى على الصورة : $\int g^n(x)\, g'(x)\, dx$. اذا كانت $n \neq -1$ ، فان

$$\int g^n(x) g'(x)\ dx = \frac{g^{n+1}(x)}{n+1} + C.$$

وكمثال على ذلك

$$\int (x^2+1)^{1/2} 2x\ dx = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$$

الحالة المستثناة $n = -1$ تعطى بما يأتى

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\ dx = \ln |g(x)| + C$$

وكمثال على ذلك

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx = \ln |x^2+1| + C$$

ينبغى أن يكون القارىء متيقظا لامكانية التعبير عن الدالة المكاملة فى صورة أخرى . يمكن التعبير عن كسر كحاصل جمع كسرين أو أكثر . مثال ذلك ،

$$\int \frac{x+1}{x^2}\ dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\ dx = \ln |x| - \frac{1}{x} + C$$

قوى ذات الحدين ، مثل $(3x^2+5)^3$ ، كثيرا ما ينبغى فكها ، لكن ليس دائما . قد ينبغى ازاحة مقام الى البسط مع تغيير اشارة الأس أو العكس بالعكس . مثلا

$$\int \frac{3}{e^x}\ dx = \int 3e^{-x}\ dx = -3e^{-x} + C$$

ربما دالة مثلثية يكون من الأفضل التعبير عنها بدلالة دوال مثلثية أخرى . مثلا

$$\int \frac{d\theta}{\csc \theta} = \int \sin \theta\ d\theta = -\cos \theta + C$$

اجراء تغيير لمتغير لتبسيط الدالة المكاملة هو وسيلة نافعة أخرى .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{4x}{3x+2}\,dx$

يمكن تبسيط المقام بوضع $u = 3x + 2$. فيكون $du = 3dx$ ، والتكامل يصبح

$$\int \frac{4x}{3x+2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{u-2}{u}\frac{du}{3} = \frac{4}{9}\int\left(1-\frac{2}{u}\right)du$$

$$= \tfrac{4}{9}(u - 2\ \text{ln}\ |u|) + C = \tfrac{4}{9}(3x + 2 - 2\ \ln\ |3x+2|) + C$$

أخيرا ، هذه الوسائل لاينبغى استخدامها بمعزل . كثيرا ما يجب استخدامها معا أو على التعاقب لاجراء التكامل .

لقد سبق أن أوجدنا التكامل $\int dx/(x^2 - a^2),\ a \neq 0$. التكامل أجرى كما يلى :

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (١)$$

التكامل $\int dx\,/\,(x^2 - a^2)\ ,\ a \neq 0$ يختلف تماما ، ويمكن ايجاده بكتابة الكسر كحاصل جمع كسرين أبسط منه :

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{x+a} + \frac{1}{x-a}\right)$$

ويكون

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{-1}{x+a}\,dx + \int \frac{1}{x-a}\,dx\right) \qquad (٢)$$

$$= \frac{1}{2a}\,(-\ln|x+a| + \ln|x-a|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

مثال ٢ . أوجد $\int \frac{dx}{5x^2-7}$

اذا أخذنا العدد 5 عاملا مشتركا من المقام ، فانه يمكن استخدام (٢) حيث $a = \sqrt{\tfrac{7}{5}}$:

$$\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2-\frac{7}{5}} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{2\sqrt{\frac{7}{5}}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{7}{5}}}{x+\sqrt{\frac{7}{5}}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right| + C.$$

وأيضا ، يمكننا وضع التكامل فى الصورة (٢) باجراء تغيير للمتغير ، $u = \sqrt{5}\,x$. هذا يعطى

$$\int \frac{dx}{5x^2-7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{u^2-7} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left|\frac{u-\sqrt{7}}{u+\sqrt{7}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left|\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{7}}{\sqrt{5}x+\sqrt{7}}\right| + C.$$

تكامل على الصورة $\int dx / (ax^2 + bx + c)$ يمكن اختزاله الى $\int dx / (x^2 \pm a^2)$ باكمال المربع فى المقام واجراء تغيير للمتغير . المثال الاتى يوضح الطريقة .

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7}$

خذ 3 عاملا مشتركا من المقام ، حتى يصبح معامل x^2 و 1 ثم أكمل المربع :

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7} = \int \frac{dx}{3(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3})}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}) - \frac{16}{9} + \frac{7}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x - \frac{4}{3})^2 + \frac{5}{9}}.$$

اذا وضعنا $u = x - \frac{4}{3}$ ، فان التكامل الاخير يكون على الصورة (١) ، ويكون

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 7} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 + \frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9}}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{\frac{5}{9}}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{3u}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{3x - 4}{\sqrt{5}} + C.$$

مثال ٤ . أوجد $\int \frac{2x + 5}{31 + 4x - 4x^2}\, dx$

نبدأ باكمال المربع فى المقام :

$$\int \frac{2x + 5}{31 + 4x - 4x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int \frac{2x + 5}{x^2 - x - \frac{31}{4}}\, dx = -\frac{1}{4}\int \frac{2x + 5}{(x - \frac{1}{2})^2 - 8}\, dx$$

نضع الآن $u = x - \frac{1}{2}$ فنحصل على

$$\int \frac{2x + 5}{31 + 4x - 4x^2}\, dx = -\frac{1}{4}\int \frac{2u + 6}{u^2 - 8}\, du$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\int \frac{2u}{u^2 - 8}\, du + \int \frac{6}{u^2 - 8}\, du\right).$$

التكامل الأول من التكاملين الأخيرين على الصورة $\int g'(u) / g(u)\, du$ ، والتكامل الثانى على الصورة (٢) ومن ثم

$$\int \frac{2x+5}{31+4x-4x^2}\,dx = -\tfrac{1}{4}\left(\ln|u^2-8| + \frac{3}{\sqrt{8}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{8}}{u+\sqrt{8}}\right|\right) + C$$

$$= -\tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{4x^2-4x-31}{4}\right| - \frac{3}{4\sqrt{8}}\ln\left|\frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}}\right| + C.$$

$$= -\tfrac{1}{4}\ln|4x^2-4x-31| + \tfrac{1}{4}\ln 4 - \frac{3}{4\sqrt{8}}\ln\left|\frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}}\right| + C,$$

$$= -\tfrac{1}{4}\ln|4x^2-4x-31| - \frac{3}{4\sqrt{8}}\ln\left|\frac{2x-1-2\sqrt{8}}{2x-1+2\sqrt{8}}\right| + C'.$$

حيث $C' = \tfrac{1}{4}\ln 4 + C$ فهو ثابت اختيارى آخر . كثيرا ما تستخدم حيلة جمع الحدود الثابتة لتعطى صورة أبسط لمعكوس تفاضلى ، وعندما تحتوى هذه الحدود على لوغاريتم فان الحيلة يمكنها أحيانا اعطاء مظهر مختلف تماما للجواب .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

١ - $\int \frac{x^3+x^2+1}{x}\,dx$

٢ - $\int \frac{x^2+a}{x^3}\,dx$

٣ - $\int \frac{d\theta}{\sec\theta}$

٤ - $\int \frac{\sec\theta}{\cot\theta}\,d\theta$

٥ - $\int \frac{e^t+2}{e^t}\,dt$

٦ - $\int \tan z\,dz$

٧ - $\int \frac{2y}{y+1}\,dy$

٨ - $\int \frac{3x-4}{x-4}\,dx$

٩ - $\int \frac{x}{4x+5}\,dx$

١٠ - $\int \frac{x^2+2}{x+3}\,dx$

١١ - $\int \frac{u}{(3u-1)^3}\,du$

١٢ - $\int 3x\sqrt{7-x}\,dx$

١٣ - $\int y(2y+5)^{4/2}\,dy$

١٤ - $\int \frac{e^t}{e^t+2}\,dt$

١٥ - $\int \frac{1+v}{(2+v)^2}\,dv$

١٦ - $\int \left(\frac{1+v}{2+v}\right)^2 dv$

١٧ - $\int \frac{dx}{x^2-9}$

١٨ - $\int \frac{dy}{5+4y^2}$

١٩ - $\int \frac{dx}{2x^2+9}$

٢٠ - $\int \frac{dx}{3-5x^2}$

٢١ - $\int \frac{a}{b^2x^2-c^2}\,dx,\ bc \neq 0$

٢٢ - $\int \frac{4z+1}{z^2+1}\,dz$

٢٣ - $\int \frac{3\theta-1}{9-\theta^2}\,d\theta$

٢٤ - $\int \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx$

٢٥ - $\int e^{\sin z}\cos z\,dz$

٢٦ - $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{5-\cos 3x}}\,dx$

٢٧ - $\int e^{2x}\sin e^{2x}\,dx$

٢٨ - $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

٢٩ - $\int \frac{\sec^2 u}{(1+\tan u)^2}\,du$

٣٠ - $\int \frac{\cos\alpha}{4-\sin^2\alpha}\,d\alpha$

٣١ - $\int \frac{y}{y^4+c^4}\,dy,\ c\neq 0$

٣٢ - $\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$

٣٣ - $\int \frac{5dv}{v^2+2v+5}$

٣٤ - $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

٣٥ - $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$

٣٦ - $\int \frac{2dx}{x^2-8x+25}$

٣٧ - $\int \frac{dy}{4y^2+4y+2}$

٣٨ - $\int \frac{dx}{4-2x-x^2}$

٣٩ - $\int \frac{6dz}{5-4z-z^2}$

٤٠ - $\int \frac{t+3}{t^2+2t}\,dt.$

٤١ - $\int \frac{8x}{4x^2-12x+5}\,dx$

٤٢ - $\int \frac{7}{6x^2+6x}\,dx$

٤٣ - $\int \frac{2-3u}{9u^2+6u-1}\,du$

٤٤ - $\int \frac{5x+2}{x^2-2x+5}\,dx$

٤٥ - $\int \frac{2y+3}{y-3y^2-\frac{1}{6}}\,dy$

٤٦ - $\int \frac{s+1}{4s^2+16s+52}\,ds$

١٠ - ٢

التكامل بالتجزىء

قاعدة مشتقة حاصل ضرب هى

$$D[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

هذا يعنى أن $f(x)\,g(x)$ معكوس تفاضلى للطرف الأيمن ، واذن

$$f(x)g(x) = \int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx$$

وهذا ، باعادة ترتيبه ، يصبح

١٠ - ١ $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

اذا وضعنا $v = g(x)$ و $u = f(x)$ فان $dv = g'(x)\,dx$ و $du = f'(x)\,dx$ ، والصيغة ١٠ - ١ يمكن كتابتها بايجاز هكذا

١٠ - ٢ $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

الصيغة ١٠ - ١ أو الصيغة ١٠ - ٢ المكافئة لها ، والتى تكون صحيحة لجميع g و f اللتين لهما مشتقتان متصلتان ، هى الأساس لطريقة التكامل بالتجزىء الأمثلة الآتية توضح كيفية استخدامها .

مثال ١ . أوجد $\int x\cos x\,dx$ اذا وضعنا

$$f(x) = x \quad \text{و} \quad g'(x) = \cos x,$$

فان $\int f(x)\, g'(x)\, dx$ ، الطرف الأيسر من الصيغة ١٠ ـ ١ ، هو التكامل المطلوب . من هاتين

$$f'(x) = 1 \quad \text{و} \quad g(x) = \sin x$$

والصيغة ١٠ ـ ١ تصبح

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C$$

ينبغى على القارىء أن يراجع هذه النتيجة باجراء التفاضل .

أحيانا يتحتم أن نستخدم التكامل بالتجزىء أكثر من مرة لايجاد التكامل .

مثال ٢ . أوجد $\int x^2 e^x\, dx$.

من المعتاد عند اجراء التكامل بالتجزىء ، استخدام رموز الصيغة ١٠ ـ ٢ . يجب اختيار dv و u بحيث أن $u\,dv = x^2 e^x\, dx$ ضع

$$u = x^2 \qquad dv = e^x\, dx$$

فيكون

$$du = 2x\, dx, \qquad v = e^x$$

وبتعويض هذه القيم فى الصيغة ١٠ ـ ٢ يكون

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx \qquad (1)$$

التكامل الاخير ليس واضحا لكن ، لكونه يشبه وأبسط من التكامل الأول ، يوصى أننا نحاول ايجاده بتكامل آخر بالتجزىء . وفقا لذلك ، ضع

$$u_1 = x \qquad dv_1 = e^x\, dx$$

فيكون

$$du_1 = dx, \qquad v_1 = e^x$$

وبالتالى يكون

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x$$

بتعويض ذالك فى (١) ، يكون

$$\int x^2 e^x\, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

ينبغى على القارىء أن يراجع هذا الجواب باجراء التفاضل .

عند اجراء التكامل بالتجزىء توجد طرق كثيرة لاختيار dv و u . احتمالات أخرى فى المثال الاخير هى :

(أ) $u = x,\ dv = x e^x\, dx$ (ب) $u = 1,\ dv = x^2 e^x\, dx$

(ج) $u = x e^x,\ dv = x\, dx$ (د) $u = e^x,\ dv = x^2\, dx$

لكل من هذه ، $u\,dv = x^2 e^x$ ، لكن ليست جميعها عملية . الاختيار ينبغى أن يكون بحيث أن dv يمكن تكاملها بسهولة لنحصل على v ، والتكامل الثانى فى الصيغة ١٠ ـ ٢ ينبغى أن يكون أسهل

من التكامل الأول . فى (ج) ، (د) فقط يمكننا ايجاد v من dv بسهولة . دعنا نحاول ايجاد $x^2 e^x$ باستخدام (د) . لدينا

$$u = e^x, \qquad dv = x^2\, dx$$
$$du = e^x\, dx, \qquad v = \tfrac{1}{3}x^3$$

والصيغة ١٠ - ٢ تصبح

$$\int x^2 e^x\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 e^x - \int \tfrac{1}{3}x^3 e^x\, dx$$

رغم أن هذا صحيح ، لكن التكامل الاخير يبدو أن ايجاده أصعب من ايجاد التكامل الأصلى . واذا واجهنا هذا الموقف ، ينبغى أننا نعود ونحاول اختيار آخر لـ dv و u . عادة لانحتاج محاولة احتمالات شاذة مثل $dv = (1/x)\, e^x\, dx$ و $u = x^x$ فى المثال السابق . عندما تحتوى الدالة المكاملة على دالة مسترسلة ، يمكننا عادة تجنب اختيار ضعيف لـ dv و u بأخذ dv الجزء المسترسل من الدالة المكاملة ، بشرط أنه يمكن تكامله بسهولة .

الصيغة للتكامل بالتجزىء لتكامل معين هى ، من الصيغة ١٠ - ١ ،

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = \left[f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx\right]_a^b$$
$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx.$$

مثال ٣ . أوجد $\int_0^2 \tan^{-1} x\, dx$

سنحاول التكامل بالتجزىء . الاختيار المناسب الوحيد لـ dv و u هو

$$u = \tan^{-1} x, \qquad dv = dx.$$

ويكون

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = x.$$

وبالتالى يكون

$$\int_0^2 \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x\, dx}{1+x^2}$$
$$= x\tan^{-1} x\Big|_0^2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^2$$
$$= 2\tan^{-1} 2 - \tfrac{1}{2}\ln 5 \approx 1.41.$$

مثال ٤ . أوجد $\int e^x \sin x\, dx$.

يمكننا أن نضع $dv = e^x\, dx$, $dv = \sin x\, dx$. بما أنه لاتوجد أفضلية للاختيار بينهما ، دعنا نختر الأول :

$$u = \sin x, \qquad dv = e^x\, dx$$

فيكون

$$du = \cos x\, dx, \qquad v = e^x$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \qquad (٢)$$

التكامل الثانى لايبدو أنه أسهل من الأول . الاختيار الآخر لـ dv يؤدى الى تعبير مماثل ، ويبدو أننا وصلنا الى طريق مسدود فى محاولاتنا لايجاد التكامل بطريقة التكامل بالتجزىء . لكن دعنا نستمر لايجاد التكامل الثانى فى (٢) بالتجزىء . نضع

$$u_1 = \cos x, \qquad dv_1 = e^x\, dx$$

فيكون

$$du_1 = -\sin x\, dx, \qquad v_1 = e^x$$

وبالتالى يكون

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \qquad (٣)$$

يبدو أننا ندور فى حلقة ، لكن دعنا نستمر . بتعويض (٣) فى (٢) ، يكون لدينا

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\, dx$$

بنقل التكامل الثانى الى الطرف الأيسر من المعادلة ، نحصل على

$$2\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

ويكون

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

لقد كاملنا مرتين ، مرة لايجاد v ومرة أخرى لايجاد v_1 .

التكامل بالتجزىء طريقة قوية لكن ليس بلسما . فعاليته محدودة الى حد كبير بتكاملات الدوال المسترسلة ، سواء كانت بمفردها أو كانت مضروبة فى قوى x . الامثلة والمسائل التى فى هذا البند ، مع أنها ليست شاملة الا أنها تعطى فكرة جيدة عن أنواع الدوال التى تكاملاتها يمكن ايجادها بالتكامل بالتجزىء .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

١ ـ $\int x \sin ax\, dx,\ a \neq 0$ ٢ ـ $\int \ln x\, dx$ ٣ ـ $\int \sin^{-1} 3y\, dy$

٤ ـ $\int x \sec^{-1} x\, dx$ ٥ ـ $\int x/\sqrt{1+4x}\, dx$ ٦ ـ $\int t^3/\sqrt{1+t^2}\, dt$

٧ ـ $\int_1^2 x \ln x\, dx$ ٨ ـ $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$ ٩ ـ $\int_2^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

١٠ ـ $\int x^r \ln x\, dx,\ r$ const ١١ ـ $\int_0^1 (e - e^y) y\, dy$ ١٢ ـ $\int_{-1}^1 x a^x\, dx$

١٣ ـ $\int (1-z) \ln z\, dz$ ١٤ ـ $\int x \sin (7x+1)\, dx$ ١٥ ـ $\int \sec^{-1} (1/w)\, dw$

١٦ ـ $\int \sec^{-1} \sqrt{\theta}\, d\theta$ ١٧ ـ $\int z^2 e^{-z}\, dz$ ١٨ ـ $\int_0^{\pi/4} (3x + x^2) \cos x\, dx$

١٩ - $\int_{-1}^{1} (x + x^3)e^x \, dx$

٢٠ - $\int (\ln x)^2 \, dx$

٢١ - $\int_0 t \sec^2 \frac{t}{2} \, dt$

٢٢ - $\int e^{at} \cos bt \, dt, \; a^2 + b^2 \neq 0$

٢٣ - $\int (\sin^{-1} x)^2 \, dx$

٢٤ - $\int x \sin x^2 \, dx$

٢٥ - $\int \sin (\ln t) \, dt$

٢٦ - $\int z \tan^{-1} z \, dz$

٢٧ - باجراء تغيير للمتغير أوجد $\int \tan^{-1} (x / a) \, dx$ من التكامل

$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)$

الذى أوجدناه فى مثال ٣ .

٢٨ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = x e^{-x}$ بين 3 و 0 .

٢٩ - أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = \sin^{-1} x$ بين 1 و 0 .

٣٠ - اذا دارت المنطقة فى المسألة ٢٨ حول المحور السينى فأوجد حجم الجسم الناتج .

٣١ - أوجد مساحة المنطقة تحت القوس الاول على يمين المحور الصادى للمنحنى $b > 0$ و $y = e^{-x} \cos bx$.

٣٢ - أوجد صيغة تعبر عن $\int x^n e^x \, dx$ بدلالة $\int x^{n-1} e^x \, dx$. استخدم هذا التعبير لايجاد $\int x^4 e^x \, dx$. هل يمكنك ايجاد صيغة للتكامل $\int x^n e^x \, dx$ ، حيث n عدد صحيح موجب ، لاتحتوى على تكامل ؟

٣٣ - اوجد صيغة تعبر عن $\int x^n \sin x \, dx$ بدلالة $\int x^{n-2} \sin x \, dx$. استخدم هذا التعبير لايجاد $\int x^5 \sin x \, dx$ و $\int x^6 \sin x \, dx$.

٣٤ - علق على الاستدلال الاتى . أوجد التكامل $\int dx / x$ بالتجزىء ، بوضع $u = 1 / x$ و $dv = dx$ فيكون $v = x$ و $du = -\, dx / x^2$ ، وبالتالى يكون

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{x} x - \int -\frac{dx}{x} = 1 + \int \frac{dx}{x}$$

واذن $0 = 1$.

٣٥ - عند ايجاد v من dv توجد امكانيات كثيرة لـ v لان $v + c$ هو أيضا معكوس تفاضلى لـ dv لاى ثابت c . فمثلا ، فى مثال ٣ لدينا

$$u = \tan^{-1} x, \qquad dv = dx,$$

$$du = \frac{dx}{1 + x^2}, \qquad v = x + c,$$

$$\int \tan^{-1} x \, dx = (x + c) \tan^{-1} x - \int \frac{x + c}{1 + x^2} \, dx$$

اثبت أن نفس النتيجة نحصل عليها لـ $\int \tan^{-1} x \, dx$ لجميع c وأن هذا يكون صحيحا لاى تكامل $\int u \, dv$ نوجده بالتجزىء .

بالرجوع الى مسألة ٣٥ ، أوجد التكاملين الآتيين باستخدام $v + c$ بدلا من v واختيار الثابت c بحيث يبسط العمل :

٣٦ - $\int_0^1 \ln (y^2 - 1)\, dy$ ٣٧ - $\int x \tan^{-1} x\, dx$

٣٨ - حل المعادلة التفاضلية $y' = x + y$ (ارشاد : المتغيران غير قابلين للفصل . اكتب المعادلة فى الصورة $y' - y = x$ ، اضرب طرفى هذه المعادلة فى e^{-x} ، ولاحظ ان الطرف الايسر الناتج هو مشتقة) .

١٠ - ٣
التكاملات المثلثية

التكاملات المحتوية على دوال مثلثية يمكن أن تكون صعبة . فى هذا البند ندرس بعض الوسائل التى يمكن بها ايجادها . المتطابقات المثلثية

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$
$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

تلعب دورا هاما فى هذه التكاملات .

نتذكر أن $\sec x, \tan x$ و $\sec^2 x$, xos x هى مشتقات $\sec x$ و $\tan x$, $\sin x$ على الترتيب . عندما تكون هذه العوامل موجودة أو يمكن ادخالها ، قد يكون من الممكن التعبير عن التكامل فى الصورة $\int g^n(x)\, g'(x)\, dx$.

مثال ١ . أوجد $\int \sec^4 2x \tan 2x\, dx$

لأن $\sec 2x \tan 2x$ هى مشتقة $\sec 2x$ ماعدا لعامل ثابت ، نشطر العامل $\sec 2x \tan 2x$ ونوجد التكامل بسهولة :

$$\int \sec^4 2x \tan 2x\, dx = \int \sec^3 2x (\sec 2x \tan 2x)\, dx = \tfrac{1}{8} \sec^4 2x + C$$

مثال ٢ . أوجد $\int \tan^3 x\, dx$.

لدينا

$$\int \tan^3 x\, dx = \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx.$$

التكامل الاول هو $\tfrac{1}{2} \tan^2 x$. التكامل الثانى يمكن ايجاده بكتابة $\tan n$ على الصورة $\sin x / \cos x$ وملاحظة أن البسط هو اساسا مشتقة المقام . واذن

$$\int \tan^3 x\, dx = \tfrac{1}{2} \tan^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \tfrac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C$$

مثال ٣ . أوجد $\int \sec x\, dx$.

ايجاد هذا التكامل يعتمد على فكرة :

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} = \ln|\tan x + \sec x| + C.$$

توجد صيغة لـ $\int \sin^n x\, dx$ ، لكن مربكة لدرجة أنه من الافضل استخدام ما يسمى بصيغة الاختزال . لاشتقاقها ، نستخدم تكاملا بالتجزىء . ضع

$$u = \sin^{n-1} x, \qquad dv = \sin x\, dx$$

فيكون

$$du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x\, dx, \qquad v = -\cos x$$

وبالتالى يكون

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\, dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx\\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx\\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx\\ &\qquad - (n-1)\int \sin^n x\, dx.\end{aligned}$$

بنقل التكامل الاخير الى الطرف الايسر للمعادلة ، نحصل على

$$n\int \sin^n x\, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\, dx$$

واذن

$$\int \sin^n x\, dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx \qquad (١)$$

هذا يعبر عن $\int \sin^n x\, dx$ بدلالة التكامل الابسط $\int \sin^{n-2} x dx$. عندما تكون n عددا صحيحا موجبا ، يمكن تطبيق (١) تكراريا حتى يكون التكامل الاخير اما

$$\int \sin^0 x\, dx = \int dx = x \quad \text{أو} \quad \int \sin x\, dx = -\cos x$$

الصيغة مثل (١) التى تعبر عن تكامل بدلالة تكامل أبسط منه ، من نفس النوع ، تسمى صيغة اختزال . صيغ الاختزال لتكاملات قوى الدوال المثلثية الاخرى معطاة فى التذييل أ .

مثال ٤ . أوجد $\int \sin^4 3x\, dx$.

الصيغة (١) لايمكن استخدامها مباشرة لان الدالة المكاملة هنا مختلفة ، لكن باجراء تغيير المتغير $u = 3x$ ، يمكن تكييف التكامل حتى يمكن استخدام (١) حيث $n = 4$:

$$\int \sin^2 u\, du = -\tfrac{1}{2}\sin u \cos u + \tfrac{1}{2}u$$

$$= \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{4}\sin^3 u \cos u + \tfrac{3}{4}\int \sin^2 u\, du) \qquad (٢)$$

نستخدم (١) مرة ثانية ، حيث $n = 2$ ، لايجاد التكامل الاخير ونحصل على

$$\int \sin^2 u\, du = -\tfrac{1}{2}\sin u \cos u + \tfrac{1}{2}u$$

بتعويض ذلك فى (٢) واستبدال u بـ $3x$ ، يكون لدينا

$$\int \sin^4 3x\, dx = -\tfrac{1}{12}\sin^3 3x \cos 3x + \tfrac{1}{4}[-\tfrac{1}{2}\sin 3x \cos 3x + \tfrac{1}{2}(3x)] + C$$

$$= -\tfrac{1}{12}\sin^3 3x \cos 3x - \tfrac{1}{8}\sin 3x \cos 3x + \frac{3x}{8} + C.$$

رغم أن (١) عملية تماما لايجاد $\int \sin^n x\, dx$ لأى عدد صحيح موجب n ، الا أنه عندما تكون n فردية وموجبة قد يفضل القارىء الطريقة الموضحة فى المثال الآتى . وهى لاتشتمل على صيغة ، وتكون أبسط عندما تكون n عددا فرديا صغيرا .

مثال ٥ . أوجد $\int \sin^5 x\, dx$.

لدينا

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x\, dx$$

$$= \int \sin x\, dx - 2\int \cos^2 x \sin x\, dx + \int \cos^4 x \sin x\, dx$$

$$= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x + C.$$

الفكرة فى هذا المثال هى كتابة الدالة المكاملة كحاصل جمع لقوى $\cos x$ مضروبة فى $\sin x$ ، التى هى مشتقة $\cos x$ ماعدا لعامل ثابت . طريقة مماثلة توجد $\int \cos^n x\, dx$ و $\int \sin^n x\, dx$ لأى عدد صحيح فردى موجب n . الطريقة لاتصلح اذا كانت n عددا صحيحا زوجيا . على القارىء أن يجرب $\int \sin^4 x\, dx$ ليرى أين توجد الصعوبة .

التكاملات التى على الصورة $\int \cos mx \cos nx\, dx$ يمكن ايجادها باستخدام المتطابقة المثلثية

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \qquad (٣)$$

التى يمكن تحقيقها بسهولة بفك التعبير بالطرف الايمن .

مثال ٦ . أوجد $\int \cos 2x \cos 5x\, dx$

باستخدام (٣) للتعبير عن حاصل الضرب كحاصل جمع ، لدينا

$$\int \cos 2x \cos 5x\, dx = \tfrac{1}{2}\int [\cos 7x + \cos(-3x)]\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 3x)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{14}\sin 7x + \tfrac{1}{6}\sin 3x + C.$$

صيغ مماثلة لـ (٣) (انظر الأوراق الاخيرة) تمكننا من ايجاد $\int \sin mx \cos 4nx\, dx$ و $\int \sin mx \sin nx\, dx$.

يوجد جدول مختصر للتكاملات فى التذييل أ . توجد جداول اشمل ، مثل : "Tables of integrals" لـ Dwight, 4th ed., Macmillan, New York, 1961 الذى به قائمة باكثر من *1000* تكامل غير معين ومعين . توجد مجموعة أصغر ، لكن وافية ، من التكاملات فى "Standerd Mathematical Tables" , The chemical Rubber company , Cleveland. هذه تحتوى أيضا على جداول اللوغاريتمات ، والجداول المثلثية ، وجداول عددية أخرى ، وهى مرجع ممتاز للرياضى .

لايمكن لجدول مهما كان كبيرا ان يحتوى على كل تكامل يحتمل أن نقابله . بصفة عامة يلزمنا بعض التصرف ، غالبا مالا يكون أكثر من تغيير بسيط للمتغير أو استخدام متطابقة مثلثية . فمثلا ، $\int \cos^2(x/2)dx$ غير مدون التذييل أ، لكن اذا وضعنا $u = x/2$، فالتكامل يصبح $2\int \cos^2 u\, du$ ، وهذا مدون رقم (٦٠) . بالمثل $\int \sqrt{3-5x^2}\, dx$ يوجد بوضع $u = \sqrt{5}\, x$ واستخدام رقم ٢٠ حيث $a = \sqrt{3}$. صورة أخرى للتكامل $\int du / \cos u$ هى $\int \sec u\, du$ التى هى رقم ٥٧ . عند ايجاد تكامل من جدول يجب ملاحظة أى قيود منصوص عنها أو تفهم ضمنيا . فمثلا ، رقم ١٤ (أ) فى التذييل أ له اعداد تخيلية اذا كانت $b < 0$. ومن ثم يكون صحيحا فقط اذا كانت $b > 0$. عندما تكون $b < 0$ يجب أن يستخدم ١٤ (ب) . من الواضح أن ، رقم ٧٨ (أ) لا يكون صحيحا اذا كانت $m = -n$.

مثال ٧ . باستخدام جدول للتكاملات ، أوجد $\int \sec^3 x \tan^2 x\, dx$ التكامل غير مدون فى التذييل أ ، لكن بكتابة الدالة المكاملة كقوى لـ $\sec x$ يمكن استخدام رقم ٧٥ :

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x \tan^2 x\, dx &= \int \sec^3 x(\sec^2 x - 1)\, dx\\ &= \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx\\ &= \tfrac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \tfrac{3}{4}\int \sec^3 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx\\ &= \tfrac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \tfrac{1}{8}\sec x \tan x\\ &\qquad - \tfrac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C,\end{aligned}$$

حيث $-\frac{1}{4}\int \sec^3 x\, dx$ أوجدناه من رقم ٦٩ .

مسائل

استخدم جدولا للتكاملات فقط عند الاشارة الى ذلك .

أوجد التكاملات الآتية :

١ - $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\, dx$

٢ - $\int_{1/2}^{1} \csc^2 \frac{\pi t}{2}\, dt$

٣ - $\int \cos^5 u \sin u\, du$

٤ - $\int \sec^2 w \tan^2 w\, dw$

٥ - $\int \csc^2 z \cot z\, dz$

٦ - $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$

٧ - $\int \frac{b\, dt}{\cos^2 at}, a \neq 0$

٨ - $\int \frac{dx}{\sin x}$

٩ - $\int \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}}\, dy$

١٠ - $\int \cos^3 x\,dx$ ١١ - $\int \sin^7 \frac{x}{2}\,dx$ ١٢ - $\int \cos^6 2x\,dx$

١٣ - $\int \frac{1+\sin\alpha}{\alpha-\cos\alpha}\,d\alpha$ ١٤ - $\int \frac{\csc^2 5s}{1+\cot 5s}\,ds$ ١٥ - $\int (\tan u+\cot u)\,du$

١٦ - $\int \sin x\cos 3x\,dx$ ١٧ - $\int \sin 7x\sin 3x\,dx$ ١٨ - $\int \left(\tan 3v-2\cot\frac{v}{3}\right)dv$

١٩ - $\int (\sec x-1)^2\,dx$ ٢٠ - $\int \cos^3 x\sin^2 x\,dx$ ٢١ - $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

٢٢ - $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$ ٢٣ - $\int \frac{\csc^2 2\phi}{\sqrt{2\cot 2\phi+4}}\,d\phi$ ٢٤ - $\int \tan^5 x\,dx$

٢٥ - $\int \cot^4 3x\,dx$ ٢٦ - $\int \tan^6 z\sec^4 z\,dz$ ٢٧ - $\int \tan^3\frac{\theta}{2}\sec^4\frac{\theta}{2}\,d\theta$

٢٨ - $\int (1+\cos z)^3\,dz$ * ٢٩ - $\int_0^{\pi/4} \tan y\ sec\ y\,dy$ ٣٠ - $\int (\tan 4z-1)^2\,dz$

٣١ - $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (ارشاد : اضرب البسط والمقام فى $1-\sin x$)

٣٢ - $\int \frac{dt}{1-\cos t}$ ٣٣ - $\int \frac{du}{\sin u\cos u}$ ٣٤ - $\int (\tan 3\alpha-\cot 3\alpha)^2\,d\alpha$

٣٥ - $\int \sec^3 y\,dy$ (ارشاد : كامل بالتجزىء) ٣٦ - $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

٣٧ - $\int \tan^3\theta\sec^{3/2}\theta\,d\theta$ ٣٨ - $\int \sqrt{1+\sin\theta}\,d\theta$ (ارشاد : ازل الجذر من البسط)

٣٩ - $\int \cos^2 x\sin^6 x\,dx$ * ٤٠ - $\int \sin^4\frac{x}{3}\cos^4\frac{x}{3}\,dx$ * ٤١ - $\int \frac{\sin^4 t}{\cos^6 t}\,dt$

٤٢ - $\int (\sin 3\alpha-\sin 2\alpha)^2\,d\alpha$ ٤٣ - $\int (\sin 2w+2\cos w)^2\,dw$ *

٤٤ - باستخدام جدول للتكاملات ، أوجد $\int \cos^n x\,dx$ و $\int \sin^n x\,dx$ حيث $n = 1, 2, \dots, 6$.

٤٥ - اثبت أن لأى عدد صحيح موجب n ، يكون $\int_0^{\pi/n} \sin nx\cos nx\,dx = 0$.

٤٦ - أثبت أن $\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi/2$ اذا كانت n عددا صحيحا موجبا .

٤٧ - أوجد طول المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان هما

$$x=\ln\cos t,\qquad y=t+1;\qquad 0\leqslant t\leqslant \pi/3$$

٤٨ - اوجد طول المنحنى الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هى $r = a\sec^2(\theta/2)$, $a>0$, و $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ (يمكن استخدام جدول للتكاملات) .

٤٩ - اوجد طول القوس فى الربع الاول للقطع المكافىء الذى معادلته بالاحداثيات القطبية هى $r = 2/(1+\cos\theta)$ (يمكن استخدام جدول للتكاملات) .

٥٠ - التكامل $\int \tan x\sec^2 x\,dx$ يمكن ايجاده بطريقتين :

* يمكن استخدام جدول للتكاملات .

$$\int \tan x \sec^2 x\, dx = \int \tan x(\sec^2 x)\, dx = \tfrac{1}{2}\tan^2 x,$$
$$\int \tan x \sec^2 x\, dx = \int \sec x(\tan x \sec x)\, dx = \tfrac{1}{2}\sec^2 x.$$

وفق بين الجوابين .

عندما تكون n عددا صحيحا زوجيا موجبا ، طريقة بديلة لصيغ الاختزال لـ $\int \sin^n x\, dx$ ، و $\int \cos^n x\, dx$ هي باستخدام المتطابقين

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{و} \quad \sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

لاختزال الأس . باستخدام هاتين مرة أو أكثر أوجد التكاملات الآتية :

٥١ - $\int \sin^2 x\, dx$ ٥٢ - $\int \cos^4 x\, dx$ ٥٣ - $\int \sin^6 \frac{z}{2}\, dz$

٥٤ - $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$ ٥٥ - $\int \cos^4 2\alpha \sin^4 2\alpha\, d\alpha$

اثبت صيغ الاختزال الآتية باجراء التفاضل . اشتق الصيغة اذا أمكنك ذلك .

٥٦ - $$\int x^n \sin^{-1} x\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

٥٧ - $$\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx$$

٥٨ - $$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\, dx$$

٥٩ - $$\int x^m (\ln x)^n\, dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1}\, dx$$

٦٠ - $$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\, dx$$

٦١ - $$\int \tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

٦٢ - $$\int \sec^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\, dx$$

٦٣ - $$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

٦٤ - اثبت الصيغة (٣) والصيغ المماثلة فى الأوراق الاخيرة لـ $\sin\alpha\cos\beta$ و $\sin\alpha\sin\beta$. أوجد التكاملات الاتية . لأى n و m تكون الصيغة صحيحة ؟ أوجد التكامل للقيم المستثناة لـ m و n .

٦٥ - $\int \sin mx \sin nx\, dx$ ٦٦ - $\int \cos mx \cos nx\, dx$ ٦٧ - $\int \sin mx \cos nx\, dx$

استخدم جدولا للتكاملات الاتية :

٦٨ - $\int \sin^2 4\theta\, d\theta$ ٦٩ - $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ ٧٠ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+2}}$

٧١ - $\int \frac{\sqrt{x+6}}{2x}\,dx$

٧٢ - $\int \frac{du}{u^2(3+u)}$

٧٣ - $\int \frac{4}{x\sqrt{2-3x^2}}\,dx$

٧٤ - $\int (7-3r^2)^{1/2}\,dr$

٧٥ - $\int \frac{dx}{(1-4x^2)^{3/2}}$

٧٦ - $\int \frac{v^2}{\sqrt{16v^2-9}}\,dv$

٧٧ - $\int \alpha \sin \frac{\alpha}{3}\,d\alpha$

٧٨ - $\int e^t \sin \frac{t}{2}\,dt$

٧٩ - $\int \frac{y\,dy}{y^2+2y+3}$

٨٠ - $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+2x-5}}$

٨١ - $\int \sqrt{2x^2+x+1}\,dx$

٨٢ - $\int \sec^3 2\theta\,d\theta$

٨٣ - $\int \cot^4 \frac{x}{2}\,dx$

٨٤ - $\int \frac{dt}{\cos^4 t}$

٨٥ - [illegible] $\cos^{?} 3y\,dy$

٨٦ - $\int \tan^5 x\,dx$

٨٧ - $\int \tan^{-5} x\,dx$

٨٨ - [illegible] $x\,dx$

٨٩ - $\int (\ln 3z)^4\,dz$

٩٠ - $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx$

٩١ - [illegible] $x\,dx$

١٠ - ٤

تكاملات تشتمل على $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$.

كثيرا ماتحدث تكاملات تشتمل على $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ أو $\sqrt{x^2 - a^2}$ قد واجهنا من قبل البسيطة منها ، مثل

$$\int x\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \tfrac{1}{3}(a^2+x^2)^{3/2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C, \qquad a > 0$$

الغرض الرئيسى فى ايجاد تكاملات أكثر تعقيدا تشتمل على هذه الجذور هو حذف الجذر باجراء تغيير للمتغير . هذا يجرى بوضع $x = a\tan\theta$, $x = a\sin\theta$, $x = a\sec\theta$ باختيار التغيير الذى بالارتباط مع احدى المتطابقات

$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta, \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta.$$

$$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$$

يجعل التعبير تحت الجذر مربعا كاملا . الامثلة التالية توضح الطريقة فى الحالات الثلاث .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx,\ a > 0$

اذا وضعنا $x = a\sin\theta$ ، حيث $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية لـ قوس الجيب (arc sine) ، التكامل يصبح

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}{a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta\,d\theta$$

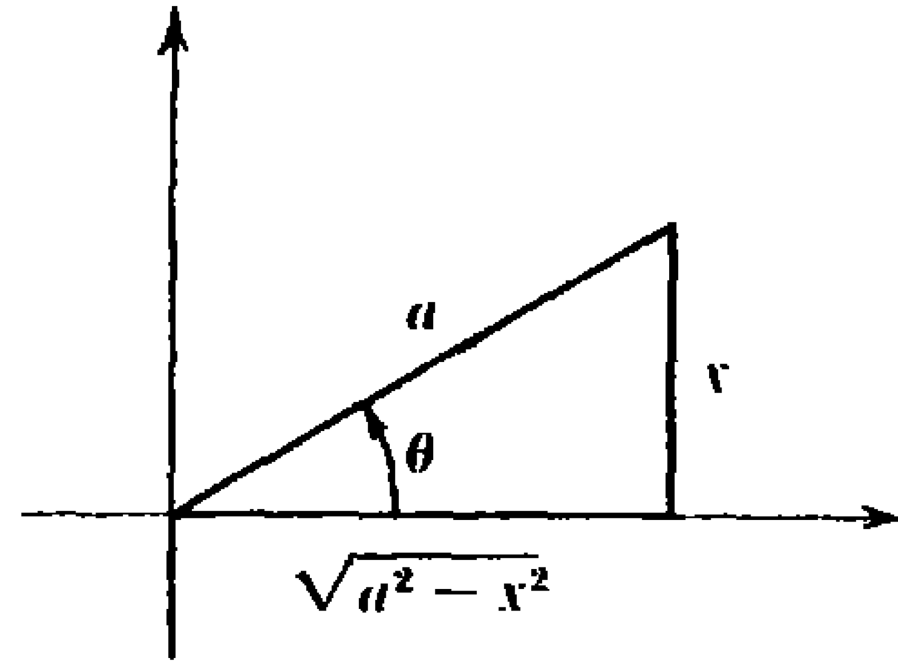
$$= \int \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta.$$

بما أن $\cos\theta \geqslant 0$ لـ $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ فان $\sqrt{\cos^2\theta} = \cos\theta$ والتكامل يصبح

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta = -\cot\theta - \theta + C. \qquad (١)$$

لاحظ كيف حذف التعويض $x = a\sin\theta$ الجذر . يجب الان التعبير عن الجواب بدلالة x بما أن $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ و $\sin\theta = x/a$ فانه يوجد مثلث قائم مثل المثلث بالشكل ١٠ ـ ١ أو انعكاسه فى المحور السينى الذى ساقه الرأسية x ووتره a .



شكل ١٠-١

اذا كانت $\sin\theta = x/a$ فإن $\cot\theta = \sqrt{a^2-x^2}/x$.

الساق الاخرى يجب أن تكون $\sqrt{a^2-x^2}$ ، ومن ثم . $\cot\theta = \sqrt{a^2-x^2}/x$. المعادلة (١) تصبح ، باجراء هذه التعويضات ،

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

مثال ٢ . أوجد $\int \sqrt{2+3x^2}\,dx$

نبدأ بوضع $u = \sqrt{3}x$ ، والتكامل يصبح

$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{2+u^2}\,du$$

الان نجرى تغييرا ثانيا للمتغير ونحذف الجذر بوضع $u = \sqrt{2}\tan\theta$ حيث $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية لقوس الظل (arctangent) . لدينا

$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \sqrt{2(1+\tan^2\theta)}\ \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \sqrt{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta.$$

لان $-\pi/2 < \theta < \pi/2,\ \sqrt{\sec^2\theta} = \sec\theta$ والتكامل يصبح

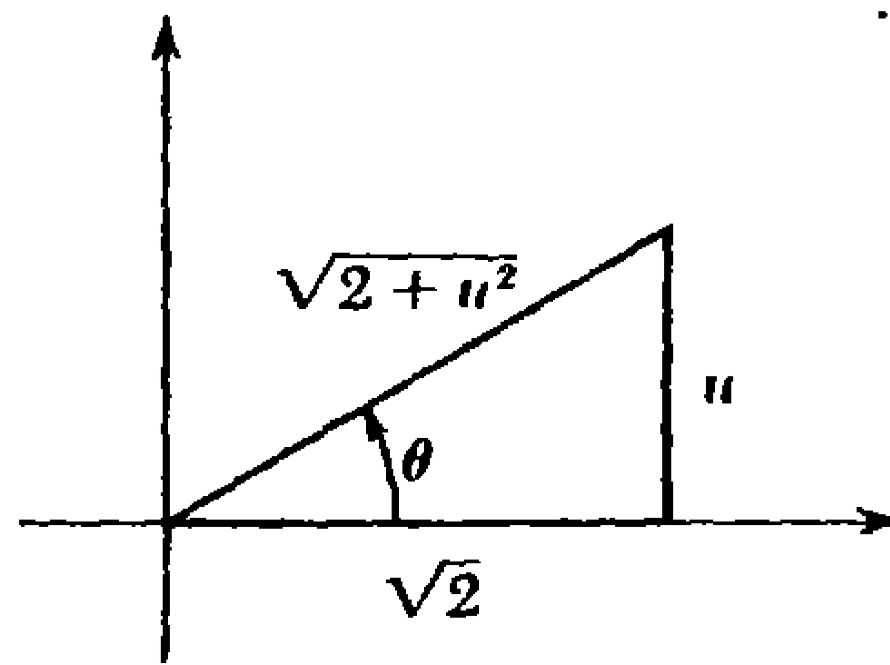
$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \sec^3\theta\,d\theta$$

التكامل الأخير يمكن ايجاده بالتجزىء . وهو رقم ٦٩ بالتذييل أ ويكون

$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} (\tan\theta\sec\theta + \ln|\tan\theta + \sec\theta|) + C \qquad (٢)$$

يجب الآن التعبير عن الجوانب بدلالة x بما أن $\tan\theta = u/\sqrt{2}$ و $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ فالمثلث فى الشكل ١٠ ـ ٢ يوضح أن

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{2+u^2}}{\sqrt{2}}$$



شكل ١٠ـ٢
اذا كان $\tan\theta = u/\sqrt{2}$
فإن $\sec\theta = \sqrt{2+u^2}/\sqrt{2}$.

بتعويض هذه القيم فى (٢) ، يكون لدينا

$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{u\sqrt{2+u^2}}{2} + \ln\left| \frac{u+\sqrt{2+u^2}}{\sqrt{2}} \right| \right) + C$$

الذى يصبح باستبدال u بالقيمة $\sqrt{3}x$

$$\int \sqrt{2+3x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{2+3x^2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left| \frac{\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}}{\sqrt{2}} \right| + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln|\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}| - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln\sqrt{2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{2+3x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}| + C'$$

حيث

$$C' = -(1/\sqrt{3}) \ln \sqrt{2} + C$$

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}}, a > 0$

هذه المرة نحذف الجذر بوضع $t = a \sec \theta$ ، حيث $0 \leqslant \theta < \pi/2$ أو $\pi \leqslant \theta < 3\pi/2$ ، مدى القيم الرئيسية لقوس القاطع (arcsecant) . التكامل يصبح

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \int \frac{a \sec \theta \tan \theta}{a\sqrt{\tan^2 \theta}} d\theta$$

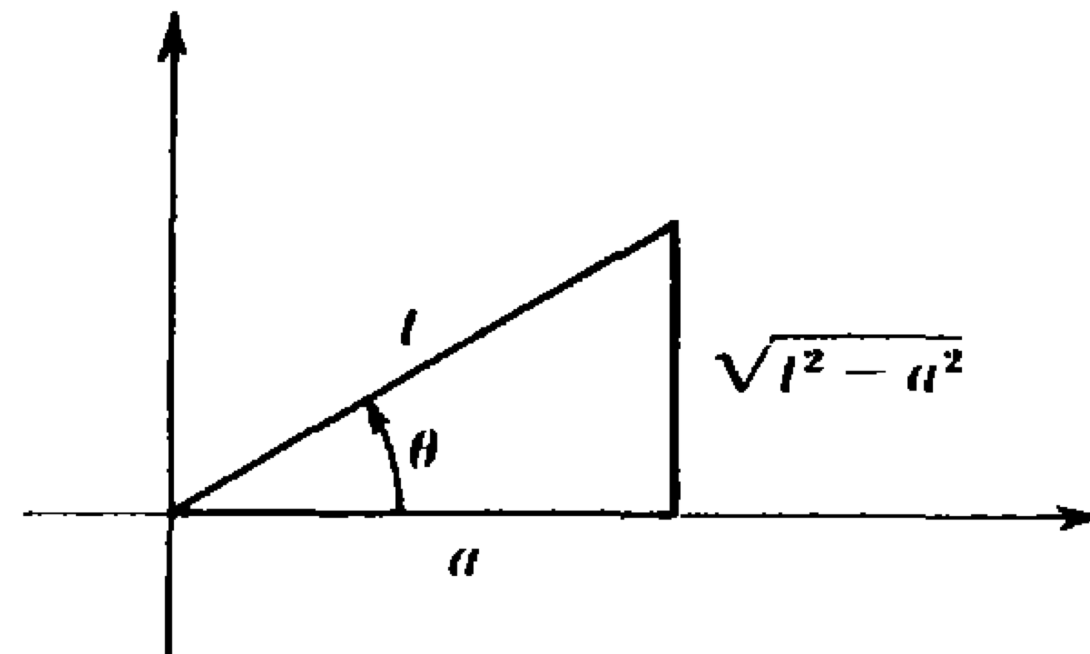
لقيم θ فى أى من الفترتين ، $\sqrt{\tan^2 \theta} = \tan \theta$ ومن ثم

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \int \sec \theta \, d\theta = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C$$

من مثال ٣ ، ببند ١٠ ـ ٣ . ولأن $\sec \theta = t/a$ فان $\tan \theta = \sqrt{t^2-a^2}/a$ (شكل ١٠ ـ ٣) ، ويكون

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln \left| \frac{t}{a} + \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{a} \right| + C$$
$$= \ln |t + \sqrt{t^2-a^2}| + C'$$

يمكن اعطاء قواعد للتعويض الصحيح لايجاد تكامل يحتوى على $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ أو $\sqrt{x^2-a^2}$. لكن من الاسهل أن نتذكر أننا نعوض عن x بـ $a \tan \theta$, $a \sin \theta$ أو $a \sec \theta$ ، الدوال الثلاث التى دوال قوسها معرفة ، مختارين التعويض الذى يؤدى الى مربع كامل تحت الجذر .



شكل ١٠ـ٣

اذا كان $\sec \theta = t/a$

فان

$\tan \theta = \sqrt{t^2-a^2}/a$

التكاملات التى تشتمل على $\sqrt{ax^2+bx+c}$ يمكن اختزالها الى احدى الصور السابقة باكمال المربع .

مثال ٤ . أوجد $\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}\,dx$

أولا نكمل المربع :

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2x+1}{\sqrt{-[x^2-2x]}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2x+1}{\sqrt{-[(x^2-2x+1)-1]}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2x+1}{\sqrt{-[(x-1)^2-1]}}\,dx.$$

بوضع $u = x - 1$ ، التكامل يصبح .

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{6x-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{2u+3}{\sqrt{-(u^2-1)}}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{2u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-u^2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2\sqrt{1-u^2} + 3\sin^{-1}u\right) + C$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{3}\sin^{-1}(x-1) + C.$$

مسائل

أوجد التكاملات الآتية . جميع الثوابت الحرفية موجبة . أهمل أى انفصال للدالة المكاملة عند نهاية فترة التكامل . يمكن استخدام جدول للتكاملات لايجاد التكامل الذى ينتج من التعويض المثلثى .

١ - $\int \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}\,dx$

٢ - $\int \frac{dx}{\sqrt{49-x^2}}$

٣ - $\int \frac{dt}{\sqrt{1-9t^2}}$

٤ - $\int_{-4/3}^{2/3} \frac{dy}{\sqrt{16-9y^2}}$

٥ - $\int \frac{dz}{\sqrt{3-7z^2}}$

٦ - $\int_0^2 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

٧ - $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$

٨ - $\int \frac{dt}{t\sqrt{a^2-t^2}}$

٩ - $\int \sqrt{c^2-x^2}\,dx$

١٠ - $\int x\sqrt{4x^2-25}\,dx$

١١ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$

١٢ - $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}}$

١٣ - $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{b^2+u^2}}$

١٤ - $\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,dx$

١٥ - $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

١٦ - $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

١٧ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-4}}$

١٨ - $\int_0^{a/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2+a^2}}$

١٩ - $\int_0^c \sqrt{c^2+x^2}\,dx$

٢٠ - $\int \frac{dx}{5+x^2}$

٢١ - $\int \frac{x\,dx}{6+x^2}$

٢٢ - $\int \frac{du}{\sqrt{4-(u+2)^2}}$

٢٣ - $\int \frac{dx}{a^2+(x+b)^2}$

٢٤ - $\int_0^a \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\,dy$

٢٥ - $\int \frac{dx}{16x^2-1}$

٢٦ - $\int \sqrt{x^2-5}\,dx$

٢٧ - $\int_2^4 \sqrt{4x^2-9}\,dx$

٢٨ - $\int x^2\sqrt{c^2-x^2}\,dx$

٢٩ - $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx$

٣٠ - $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

٣١ - $\int_{a\sqrt{3}/2}^{a} \frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z^2}\,dz$

٣٢ - $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-b^2}}\,dx$

٣٣ - $\int y^2\sqrt{y^2+a^2}\,dy$

٣٤ - $\int \frac{\sqrt{36-t^2}}{t}\,dt$

٣٥ - $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

٣٦ - $\int_4^5 \frac{dx}{(x^2-9)^{3/2}}$

٣٧ - $\int \frac{dt}{(t^2-9)^2}$

٣٨ - $\int \frac{dv}{(v^2+16)^2}$

٣٩ - $\int \frac{3e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\,dy$

كل من التكاملات الآتية قد أوجدناه من قبل . أوجده ثانية باستخدام تعويض مثلثى .

٤٠ - $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a>0$

٤١ - $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

٤٢ - $\int \frac{dx}{a^2+x^2},\ a\neq 0$

أوجد التكاملات الآتية . يمكن استخدام جدول للتكاملات لايجاد التكامل الذى ينتج من التعويض المثلثى .

٤٣ - $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$

٤٤ - $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2-8x+25}}$

٤٥ - $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

٤٦ - $\int \frac{3dz}{\sqrt{z^2-4z+13}}$

٤٧ - $\int \frac{2dy}{\sqrt{-4y^2+20y+24}}$

٤٨ - $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

٤٩ - $\int \sqrt{2z-z^2}\,dz$

٥٠ - $\int \sqrt{4x^2-4x+26}\,dx$

٥١ - $\int \sqrt{3-2y-y^2}\,dy$

٥٢ - $\int \frac{2t+5}{5+2t+t^2}\,dt$

٥٣ - $\int \frac{x+5}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

٥٤ - $\int \frac{3x-2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

٥٥ - $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y^2+4y+5}}$

٥٦ - $\int \frac{2(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx$

٥٧ - $\int \frac{3u-1}{\sqrt{4u^2-4u+5}}\,du$

٥٨ - $\int \frac{w\,dw}{\sqrt{9+8w-w^2}}$

٥٩ - $\int \frac{x+6}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$

٦٠ - $\int \frac{8z-5}{\sqrt{-4z^2+12z-5}}\,dz$

٦١ - $\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}$

٦٢ - $\int \frac{y\,dy}{(y^2-4y-5)^2}$

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

٦٣ - $\int x \sin^{-1} x \, dx$. ٦٤ - $\int \sec^{-1} x \, dx$. ٦٥ - $\int \frac{\sin^{-1} x}{x^2} dx$.

أوجد طول المنحنيات الآتية

٦٦ $y = x^2; 0 \leqslant x \leqslant a$. ٦٧ $x = u \cos u, y = u \sin u; 0 \leqslant u \leqslant \pi/2$.

٦٨ - قوس القطع المكافىء $y = 3x - x^2$ فوق المحور السينى ٦٩ - $y = \ln x; 1 \leqslant x \leqslant 2$

أوجد طولى المنحنيين الآتيين المعطيين بالاحداثيات القطبية :

٧٠ - $r = a\theta; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. ٧١ - $r = 1/\theta; \pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$ . .

٧٢ - (أ) اذا كانت $v = ds/dt$ فاثبت أن $d^2s/dt^2 = dv/dt = v \, dv/ds$ (ب) باستخدام (أ) حل المعادلة التفاضلية التى تحكم الحركة التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -ks, \qquad k > 0$$

(المعادلة (٣) ، ببند ٦ - ٤) . احصل على الحل المعطى فى (٤) ، ببند ٦ - ٤ .

١٠ - ٥

تكامل الدوال الكسرية

نتذكر أن الدالة الكسرية هى دالة معرفة بخارج قسمة $f(x) / g(x)$ لكثيرتى حدود معاملاتهما حقيقية ، مثلا

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{5x^3 - 4x^2 + x - 2}$$

فى هذا البند سنتعلم كيف نوجد تكامل دالة كسرية . أولا يجب اثبات تمهيدية .

١٠ - ٣ تمهيدية . لتكن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ كثيرات حدود . اذا كان

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} \qquad (١)$$

لجميع قيم x ما عدا تلك التى تجعل $h(x) = 0$ ، فان $f(x) = g(x)$ لجميع قيم x .

البرهان . واضح تماماً أن النتيجة تكون صحيحة لأى x ليست جذراً لـ $h(x)$ اذا يمكن ضرب طرفى (١) فى العدد غير الصفرى $h(x)$ لنحصل على

$$f(x) = g(x) \qquad (٢)$$

لتكن r أى جذر لـ $h(x)$. (٢) تكون صحيحة لجميع x القريبة قرباً كافياً من r ، لكن لا تساوى r وهذا يتضمن أن

$$\lim_{x \to r} f(x) = \lim_{x \to r} g(x)$$

ومن ثم $f(r) = g(r)$ لأن f و g متصلتان اذن $f(x) = g(x)$ لجميع x .

فى الجبر الأولى تعلمنا كيف نعبر عن حاصل جمع كسور ككسر واحد بايجاد مقام مشترك . فمثلا

$$\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-4}=\frac{3(x-4)+5(x-1)}{(x-1)(x-4)}=\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}. \qquad (٣)$$

نفرض أننا نريد ايجاد

$$\int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}\,dx$$

ولا نعلم المعادلة (٣) . اذا أمكننا عكس العملية والتعبير عن الكسر $\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}$ كحاصل الجمع $\frac{3}{x-1}+\frac{5}{x-4}$ لأمكننا إيجاد التكامل بسهولة . لاجراء ذلك ، نحاول إيجاد الثابتين A و B بحيث أن

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}$$

اذا كان يوجد مثل هذين العددين B و A فان

$$\frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

لجميع $x \neq 1, 4$. واذن بالتمهيدية ، يكون

$$8x-17=A(x-4)+B(x-1)$$

لجميع x . بما أن هذه المعادلة صحيحة لجميع x ، فهى صحيحة عند $x = 4$ ، التى تعطى $15 = B\,(3)$ ومنها B يجب أن تكون 5 . بتعويض $x = 1$ ، يكون لدينا $-9 = A(-3)$ ومنها $a = 3$. بعد أن عبرنا عن الدالة المكاملة كحاصل جمع كسرين يمكن تكاملهما ، يمكننا إيجاد التكامل $\int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}\,dx$:

$$\int \frac{8x-17}{(x-1)(x-4)}\,dx=\int \frac{3}{x-1}\,dx+\int \frac{5}{x-4}\,dx$$

$$=3\ln|x-1|+5\ln|x-4|+C.$$

الكسران $5/(x-4)$ و $3/(x-1)$ يسميان الكسرين الجزئيين للكسر : $(8x-17)\,[(x-1)/(x-4)]$. الطريقة التى أوجدنا بها قيمتى B و A تسمى طريقة المعاملات غير المعينة ، B و A هما المعاملان غير المعينين .

نعود الآن الى المسألة الأعم لايجاد التكامل لأى دالة كسرية $f(x)\,/\,g(x)$. سنحاول أن نعبر عن الكسر كحاصل جمع كسور أبسط يمكن أن تكامل . شرطان لازمان للنجاح . الأول هو أن الكسر يجب أن يكون كسراً بالمعنى الصحيح ، أى أن درجة البسط يجب أن تكون أقل من درجة المقام ،

والثانى هو أننا يجب أن نستطيع تحليل المقام كحاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل ومعاملاتها جميعاً حقيقية [نقصد معامل من الدرجة الثانية معاملاته حقيقية ولا يقبل التحليل أنه لا يمكن تحليله كحاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولى معاملاتهما حقيقية . كثيرة الحدود $x^2 + x + 1$ لا تقبل التحليل $x^2 + 2x - 2$ ليست كذلك لأن

$$x^2 + 2x - 2 = (x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})$$

من الممكن اثبات أن مثل هذه العوامل التى من الدرجة الأولى والثانية تكون دائماً موجودة ، لكن من الناحية العملية قد يكون إيجادها صعباً أو مستحيلا . الشرط الأول لا يمثل صعوبة حقيقية . اذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام فانه يمكننا باجراء قسمة مطولة ، التعبير عن الكسر ككثيرة حدود مضافاً اليها كسر درجة بسطه أقل من درجة المقام . فمثلا

$$\frac{x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 7}{x^3 - 2x + 4} = x^2 + 2x + 3 + \frac{2x^2 - 5}{x^3 - 2x + 4}$$

وبالتالى التكامل فى هذه الحالة يمكن اختزاله الى تكامل لكثيرة حدود مضافاً اليه تكامل لكسر بالمعنى الصحيح واذن نحتاج فقط لدراسة مسألة إيجاد $\int [f(x)/g(x)]\,dx$ ، حيث درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$.

نفرض أن المقام $g(x)$ قد حللناه الى حاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل ومعاملات جميعها حقيقية . جمع عوامل $g(x)$ المتشابهة وعبر عن حاصل ضربها كقوة ، لتصبح $g(x)$ على الصورة .

$$\begin{aligned} g(x) = {} & (a_1x + b_1)^{r_1}(a_2x + b_2)^{r_2} \cdots (a_px + b_p)^{r_p} \times \\ & (c_1x^2 + h_1x + k_1)^{s_1}(c_2x^2 + h_2x + k_2)^{s_2} \cdots \\ & (c_tx^2 + h_tx + k_t)^{s_t}, \end{aligned} \tag{٤}$$

حيث لا يوجد عاملان فى الأقواس متشابهان وحيث كل عامل من الدرجة الثانية لا يقبل التحليل . فمثلا ، اذا كان تحليل $g(x)$ هو

$$\begin{aligned} g(x) = {} & (x - 3)(5x^2 + 3x + 1)(2x + 5) \times \\ & (x - 3)(5x^2 + 3x + 1)(5x^2 + 3x + 1) \end{aligned}$$

فانه بعد تجميع العوامل المتشابهة ، يكون

$$g(x) = (x - 3)^2(2x + 5)(5x^2 + 3x + 1)^3$$

الكسر $f(x) / g(x)$ يعبر عنه الآن كحاصل جمع كسور على الصورة

$$\frac{A}{(ax + b)^n} \quad \text{و} \quad \frac{Cx + D}{(cx^2 + hx + k)^m}$$

كما يلى . هذه تسمى الكسور الجزئية لـ $f(x) / g(x)$ ويمكن اجراء تكاملها . الكسور الجزئية تكون مجموعات ، كل مجموعة تناظر واحداً من العوامل التى فى الأقواس فى (٤) . العامل الخطى $a_1x + b_1$ فى (٤) ، يناظره حاصل الجمع ، أى المجموعة ،

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{A_{r_1}}{(a_1x + b_1)^{r_1}}$$

حيث $A_1, A_2, \ldots, A_{r1}$ ثوابت ستعين فيما بعد . لاحظ أن عدد الحدود فى حاصل الجمع هذا يساوى الاس على $a_1x + b_1$ فى (٤) . مناظراً للعامل الخطى $a_2x + b_2$ ، كون حاصل آخر

$$\frac{B_1}{a_2x + b_2} + \frac{B_2}{(a_2x + b_2)^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{B_{r_2}}{(a_2x + b_2)^{r_2}}$$

حيث $B_1, B_2, \ldots, B_{r2}$ ثوابت . كون حواصل جمع مماثلة لكل من العوامل الخطية المختلفة لـ $g(x)$ والتى عددها p . مناظراً للعامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $c_1x^2 + h_1x + k_1$ فى (٤) ، كون حاصل الجمع ، أو المجموعة

$$\frac{C_1x + D_1}{c_1x^2 + h_1x + k_1} + \frac{C_2x + D_2}{(c_1x^2 + h_1x + k_1)^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(c_1x + h_1x + k_1)^{s_1}}$$

حيث $C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots, C_{s1}, D_{s1}$ ثوابت . مناظراً للعامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $c_2x^2 + h_2x + k_2$ ، كون حاصل جمع آخر

$$\frac{E_1x + F_1}{c_2x^2 + h_2x + k_2} + \frac{E_2x + F_2}{(c_2x^2 + h_2x + k_2)^2} + \cdot \cdot \cdot + \frac{E_{s_2}x + F_{s_2}}{(c_2x^2 + h_2x + k_2)^{s_2}}$$

كون حواصل جمع مماثلة لكل من العوامل من الدرجة الثانية التى لا تقبل التحليل لـ $g(x)$ والتى عددها t . الآن ضع $f(x) / g(x)$ تساوى حاصل جمع هذه المجموعات تنشأ عن العوامل الخطية والعوامل من الدرجة الثانية . فمثلا ، اذا كانت

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^5 + 7x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 10x + 1}{(x - 3)^2(2x + 5)(5x^2 + 3x + 1)^3} \qquad (٥)$$

فان $s_1 = 3$ و $r_2 = 1$ و $r_1 = 2$. يناظر العامل الخطى $x - 3$ حاصل الجمع

$$\frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{(x - 3)^2}$$

يناظر العامل الخطى $2x + 5$ الحد الوحيد

$$\frac{B_1}{2x + 5} \qquad (٦)$$

يناظر العامل من الدرجة الثانية الذى لا يقبل التحليل $5x^2 + 3x + 1$ ، حاصل الجمع

$$\frac{C_1x + D_1}{5x^2 + 3x + 1} + \frac{C_2x + D_2}{(5x^2 + 3x + 1)^2} + \frac{C_3x + D_3}{(5x^2 + 3x + 1)^3} \qquad (٧)$$

الآن نضع $f(x) / g(x)$ يساوى حاصل جمع (٥) و (٦) و (٧) ، أى أن

(٨) $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}+\frac{B_1}{2x+5}+\frac{C_1x+D_1}{5x^2+3x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(5x^2+3x+1)^2}+\frac{C_3x+D_3}{(5x^2+3x+1)^3}.$$

كمثال آخر ، اذا كانت

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{5x}{(4x-1)^4}$$

فان $r_1 = 4$ ونضع

(٩) $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{4x-1}+\frac{A_2}{(4x-1)^2}+\frac{A_3}{(4x-1)^3}+\frac{A_4}{(4x-1)^4}$$

فى الأمثلة القادمة سنرى كيف نعين الثوابت ، D_i و C_i و B_i و A_i فى (٨) و (٩) بحيث أن هذه المعادلات تكون صحيحة . يمكن إثبات أن فى التعبير عن أى دالة كسرية بالمعنى الصحيح كحاصل جمع كسور جزئية هذه الثوابت تكون وحيدة .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x^4-2x^3+x^2-2x}\,dx$

نلاحظ أن الدالة المكاملة هى كسر بالمعنى الصحيح ونشرع فى تحليل المقام الى حاصل ضرب عوامل خطية وعوامل من الدرجة الثانية لا تقبل التحليل :

$$x^4-2x^3+x^2-2x=x(x-2)(x^2+1)$$

الآن نكتب الدالة المكاملة كحاصل جمع كسور جزئية . وفقاً لدراستنا أعلاه ، يمكن التعبير عنها فى الصورة

(١٠) $$\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

لثوابت ما D و C و B و A . نوجد الثوابت بطريقة المعاملات غير المعينة . بجمع الكسور على اليمين ، يكون لدينا

$$\frac{6x^3-11x^2+5x-4}{x(x-2)(x^2+1)}=\frac{A(x-2)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-2)}{x(x-2)(x^2+1)}$$

لجميع $x \neq 0, 2$. واذن

(١١) $$6x^3-11x^2+5x-4=A(x-2)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-2)$$

لجميع x ، بالتمهيدية ١٠ ـ ٣ . اذا عوضنا $x = 1$ فى هذه المعادلة ، نرى أن D و C و B و A يجب أن تكون أعداداً بحيث أن

(١٢) $$-4=-2A+2B-C-D$$

بالمثل ، بتعويض $x = -1$ ، يكون

$$-26 = -6A - 2B - 3C + 3D \tag{١٣}$$

غرضنا هو الحصول بهذه الكيفية على أربع معادلات يمكن حلها آنياً لايجاد D و C و B و A . يمكننا تعويض أى أعداد نريدها لـ x فى (١١) . بوجه خاص ، معادلتان بسيطتان نحصل عليهما بتعويض $x = 0$ و $x = 2$:

$$10 = 10B, \qquad -4 = -2A$$

من هاتين المعادلتين الأخيرتين ، $B = 1$ و $A = 2$ ، والمعادلتان (١٢) و (١٣) تختزلان الى

$$C + D = 2, \qquad C - D = 4$$

بحل هاتين المعادلتين آنياً ، نجد أن $D = -1$ و $C = 3$. لقد أوجدنا D و C و B و A ، والتكامل (١٠) هو

$$\int \frac{6x^3 - 11x^2 + 5x - 4}{x(x-2)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{3x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-2| + 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-2| + \tfrac{3}{2}\ln|x^2+1| - \tan^{-1}x + C'$$

$$= \ln|x^2(x-2)(x^2+1)^{3/2}| - \tan^{-1}x + C'.$$

مثال ٢ . أوجد $\displaystyle\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}\,dx$

درجة البسط للدالة المكاملة ليست أقل من درجة المقام . باجراء عملية قسمة مطولة يمكننا كتابة الدالة المكاملة ككثيرة حدود مضافاً اليها كسر بالمعنى الصحيح

$$\frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2} = x + 4 + \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}$$

ومن ثم

$$\int \frac{9x^4 + 48x^3 + 37x^2 - 20x + 3}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x + \int \frac{22x - 5}{9x^3 + 12x^2 - 11x + 2}\,dx. \tag{١٤}$$

المقام فى التكامل الأخير يتحلل الى

$$9x^3 + 12x^2 - 11x + 2 = (x+2)(3x-1)^2$$

لاحظ أن $3x - 1$ عامل مكرر . الدالة المكاملة فى التكامل الأخير يمكن التعبير عنها كحاصل جمع كسور جزئية على الصورة

$$\frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2} = \frac{22x-5}{(x+2)(3x-1)^2} \qquad (١٥)$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{(3x-1)^2}$$

لايجاد C و B و A ، نجمع الكسور على اليمين

$$\frac{22x-5}{(x+2)(3x-1)^2} \quad \frac{A(3x-1)^2 + B(x+2)(3x-1) + C(x+2)}{(x+2)(3x-1)^2} \qquad (١٦)$$

واذن

$$22x - 5 = A(3x-1)^2 + B(x+2)(3x-1) + C(x+2)$$

لجميع x . سنحتاج الى ثلاث معادلات لكى نوجد C و B و A . وبتعويض $x = 0$ و $x = -2$ و $x = \frac{1}{3}$ ، نحصل على

$$\tfrac{7}{3} = \tfrac{7}{3}C, \qquad -49 = 49A, \qquad -5 = A - 2B + 2C$$

ومنها $B = 3$ و $A = -1$ و $C = 1$ ، ويكون من (١٥)

$$\int \frac{22x-5}{9x^3+12x^2-11x+2}\,dx = \int \frac{-1}{x+2}\,dx + \int \frac{3}{3x-1}\,dx + \int \frac{1}{(3x-1)^2}\,dx$$

$$= -\ln|x+2| + \ln|3x-1| - \tfrac{1}{3}(3x-1)^{-1} + C'$$

$$= \ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(3x-1)} + C'$$

بتعويض ذلك عن التكامل بالطرف الأيمن من المعادلة (١٤) يكون

$$\int \frac{9x^4+48x^3+37x^2-20x+3}{9x^3+12x^2-11x+2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left|\frac{3x-1}{x+2}\right| - \frac{1}{3(3x-1)} + C'$$

عند إضافة الكسور الجزئية ، كما فى الخطوة (١٦) ، يجب التأكد أن المقام المشترك هو نفسه مقام الكسر بالطرف الأيسر . والا لا يمكننا أن ندعى أن بسطى الكسرين متساويان . فمثلا ، اذا كتبنا

$$\frac{x^2-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

فصحيح أن

$$\frac{x^2-2}{x^2(x+1)} = \frac{Ax^2(x+1) + Bx(x+1) + Cx^3}{x^3(x+1)}$$

لكن $x^2 - 2$ لا تساوى بسط الكسر على اليمين . هذه الصعوبة يمكن تجنبها باستخدام المقام المشترك البسيط للكسور الجزئية .

اذا أمكن إيجاد عوامل المقام ، فتكامل أى دالة كسرية بالمعنى الصحيح يمكن التعبير عنه بطريقة الكسور الجزئية كحاصل جمع تكاملات على الصورة

$$\int \frac{Cx+D}{(cx^2+hx+k)^m}\,dx \quad \text{و} \quad \int \frac{A}{(ax+b)^n}\,dx$$

حيث m و n عددان صحيحان موجبان وحيث $cx^2 + hx + k$ لا تقبل التحليل . التكامل الأول يمكن إيجاده بسهولة ، لقد أجرينا تكاملات كثيرة مثله . باكمال المربع على $cx^2 + hx + k$ واجراء تغيير للمتغير ، يمكن وضع التكامل الثانى على الصورة

$$\int \frac{Cx+D}{(cx^2+hx+k)^m}\,dx = \int \frac{a'u+b'}{(u^2+q)^m}\,du$$

$$= a'\int \frac{u}{(u^2+q)^m}\,du + b'\int \frac{du}{(u^2+q)^m}$$

حيث $q > 0$ لأن $cx^2 + hx + k$ لا تقبل التحليل . التكامل الأول على اليمين سهل . لايجاد التكامل الثانى ، نجرى التعويض $u = \sqrt{q}\,\tan\theta$. فيكون

$$\int \frac{du}{(u^2+q)^m} = \int \frac{\sqrt{q}\,\sec^2\theta}{q^m\,\sec^{2m}\theta}\,d\theta = q^{1/2-m}\int \cos^{2m-2}\theta\,d\theta$$

التكامل الأخير يمكن ايجاده بصيغة الاختزال رقم ٧٢ فى التذييل (أ) . واذن التكامل لدالة كسرية يمكن ايجاده عندما يمكن ايجاد عوامل المقام .

مسائل

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

١ - $\int \frac{dx}{x(x+1)}$

٢ - $\int \frac{x-1}{x(x+1)}\,dx$

٣ - $\int \frac{x^2}{x(x+1)}\,dx$

٤ - $\int \frac{dx}{x^2-9}$

٥ - $\int \frac{x}{x^2-9}\,dx$

٦ - $\int \frac{dx}{x^2-5}$

٧ - $\int \frac{t+1}{t^2-t}\,dt$

٨ - $\int \frac{x\,dx}{x^2+4x-5}$

٩ - $\int \frac{x^3+1}{x^2-4x+3}\,dx$

١٠ - $\int \frac{12u^2+23u+2}{3-7u-6u^2}\,du$

١١ - $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)},\ a \neq b$

١٢ - $\int \frac{z-1}{(z+1)(2z-1)z}\,dz$

١٣ - $\int \frac{y^2+2}{y^3+y^2-2y}\,dy$

١٤ - $\int_1^3 \frac{y^5+3y^4+2y^3-y^2+4}{y^3+3y^2+2y}\,dy$

١٥ - $\int \frac{x-4}{x^3+x^2}\,dx$

١٦ - $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

١٧ - $\int \frac{z^2}{1+z^2}\, dz$

١٨ - $\int \frac{3t+1}{4t^2-4t+1}\, dt$

١٩ - $\int \frac{dx}{x(x^2+x+2)}$

٢٠ - $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

٢١ - $\int \frac{dx}{x^2+4x-3}$

٢٢ - $\int \frac{dz}{z^3+z^2+z}$

٢٣ - $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{5x^2+7}{x^4+x^2}\, dx$

٢٤ - $\int \frac{x^4+5}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$

٢٥ - $\int \frac{dx}{1-x^3}$

٢٦ - $\int \frac{3\theta^2-1}{(\theta+2)^3}\, d\theta$

٢٧ - $\int_0^1 \frac{2u}{(u^2+1)(u+1)^2}\, du$

٢٨ - $\int^{1} \frac{z^3+1}{(4z^2-1)^2}\, dz$

٢٩ - $\int \frac{4x^3+13x^2+14x+3}{(x+1)^4}\, dx$

٣٠ - $\int \frac{4}{y^4-1}\, dy$

٣١ - $\int \frac{t^4}{(t^2+1)^2}\, dt$

٣٢ - $\int \frac{x^5}{(x^2+7)^2}\, dx$

٣٣ - $\int \frac{z^3+1}{(4z^2+1)^2}\, dz$

٣٤ - $\int \frac{2x^3+x^2-2x+7}{x^4+8x^2+16}\, dx$

٣٥ - $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

٣٦ - $\int \frac{2x^5+2x^4+16x^3+16x^2+31x+32}{(x^2+4)^3}\, dx$

٣٧ - $\int_0^1 \frac{2u^2+u+3}{u^3+u^2+u+1}\, du$

٣٨ - $\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\, dx$

٣٩ - $\int \frac{dx}{x^4+1}$

٤٠ - $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)^2},\ a \neq b$

٤١ - $\int \frac{dx}{(x-a)^2(x-b)^2},\ a \neq b$

٤٢ - $\int \frac{x\, dx}{(x-a)^2(x-b)^2},\ a \neq b$

٤٣ - فى البند ١٠ - ١ أوجدنا $\int dx \,/\, (x^2 - a^2),\ a^2 \neq 0$ ، بكتابة

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{-1}{x+a} + \frac{1}{x-a}\right)$$

وضح كيف فى امكاننا الحصول على هذا التحليل للكسر $1/(x^2 - a^2)$ كحاصل جمع كسور جزئية .

٤٤ - أوجد طول المنحنى $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

٤٥ - فى تفاعل كيميائى معين ، جزىء من مادة يتحد مع جزىء من مادة أخرى ليكونا جزىء من مادة ثالثة . اذا كانت الكميتان الابتدائيتان للمادتين الأولى والثانية هما a و b ، فان الكمية x من المادة الثالثة التى تكون قد تكونت بعد t min تحقق المعادلة التفاضلية : $dx/dt = k(a-x)(b-x)$ حيث k ثابت موجب . أوجد كمية المادة الثالثة بعد t min اذا كان فى الابتداء $x = 0$.

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات :

٤٦ - $\int x \tan^{-1} x\, dx$

٤٧ - $\int x^2 \tan^{-1} \frac{x}{2}\, dx$

٤٨ - $\int \frac{\ln x}{(1+x)^2}\, dx$

٤٩ - $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\, dx$

١٠ - ٦

التكامل بتعويضات متنوعة

عدد صغير نسبياً من التكاملات التى تحتوى على جذور يمكن ايجادها بدلالة دوال مألوفة لنا . طريقة تكون أحياناً حجة هى اجراء تعويض يحذف الجذور . لقد أوضحنا كيف نحوى ذلك للتكاملات التى تحتوى على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ ، ونعطى هنا بعض الأمثلة الأخرى .

مثال ١ . أوجد $\int \frac{dx}{x - x^{4/3}}$

القوة الكسرية يمكن حذفها باجراء التعويض $x = u^3$ ، لأن التكامل عندئذ يصبح

$$\int \frac{dx}{x - x^{4/3}} = \int \frac{3u^2\, du}{u^3 - u^4} = 3 \int \frac{du}{u(1-u)}$$

$$= 3 \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du = 3(\ln |u| - \ln |1-u|) + C$$

$$= 3 \ln \left|\frac{u}{1-u}\right| + C = 3 \ln \left|\frac{x^{1/3}}{1 - x^{1/3}}\right| + C.$$

مثال ٢ . أوجد $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(4 + \sqrt[3]{x+1})}$

كلا الجذرين يمكن حذفهما بوضع $x + 1 = u^6$. اذ يكون

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(4 + \sqrt[3]{x+1})} = \int \frac{6u^5\, du}{u^3(4+u^2)} = 6 \int \frac{u^2}{4+u^2}\, du$$

$$= 6 \int \left(1 - \frac{4}{4+u^2}\right) du = 6 \left(u - 2 \tan^{-1} \frac{u}{2}\right) + C$$

$$= 6 \left[(x+1)^{1/6} - 2 \tan^{-1} \frac{(x+1)^{1/6}}{2}\right] + C.$$

التعويض $x = 1/u$ كثيراً ما يكون ناجحاً

مثال ٣ . أوجد $\int \frac{(x - x^3)^{1/3}}{x^4}\, dx$

نجرى التعويض $x = 1/u$ فنحصل على

$$\int \frac{(x-x^3)^{1/3}}{x^4}\, dx = \int \frac{(1/u - 1/u^3)^{1/3}}{1/u^4} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int u(u^2-1)^{1/3}\, du$$

$$= -\tfrac{3}{8}(u^2-1)^{4/3} + C = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{4/3} + C.$$

التعويضات المستخدمة أعلاه لا تغطى بحال من الأحوال جميع الاحتمالات . قواعد قليلة يمكن اعطاؤها ، وعادة الخبرة هى المرشد الوحيد . كثيراً ما يجب اجراء سلسلة من التعويضات . وقد نحاول تعويضات متنوعة الى أن نحصل على تعويض يجعل التكامل أبسط . ثم نبحث عن تعويض آخر يجعله أبسط . أى تكامل يمكن اختزاله الى إحدى الصور التى سبق دراستها يمكن ، بالطبع ، ايجاده . أخيراً ، نشير الى أن تكاملات كثيرة من الصعب معالجتها ولا يمكن ايجادها بدلالة الدوال العادية . أحد هذه التكاملات هو $\int (\sin x)/x\, dx$.

مسائل

أوجد التكاملات الآتية :

١ - $\int_0^9 \frac{du}{1+\sqrt{u}}$

٢ - $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\, dx$

٣ - $\int \frac{\sqrt{z+1}+2}{\sqrt{z+1}-2}\, dz$

٤ - $\int \frac{t}{(a+bt)^{3/2}}\, dt,\ b \neq 0$

٥ - $\int \frac{y}{(3y+2)^{2/3}}\, dy$

٦ - $\int_0^1 \frac{z^{1/2}}{1+z}\, dz$

٧ - $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$

٨ - $\int \sqrt{\frac{a+y}{b+y}}\, dy,\ a \neq b$

٩ - $\int_1^3 \frac{x\, dx}{\sqrt{2+6x}}$

١٠ - $\int \tan^{-1} \sqrt{u}\, du$

١١ - $\int \frac{t+1}{t\sqrt{t+2}}\, dt$

١٢ - $\int \frac{dz}{z^{1/2}-z^{1/3}}$

١٣ - $\int \frac{x^{3/2}+x^{1/3}}{2x^{1/4}}\, dx$

١٤ - $\int \frac{ds}{s-s^{2/3}}$

١٥ - $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

١٦ - $\int \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}\, dx$

١٧ - $\int \frac{\sqrt{9x^{2/3}+4}}{x^{1/3}}\, dx$

١٨ - $\int_0^3 \frac{dv}{\sqrt{3v}(4+\sqrt[3]{3v})}$

١٩ - $\int \frac{dw}{w+2\sqrt{w}+2}$

٢٠ - $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-3x-4}\, dx$

٢١ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x+x^2}}$ (ارشاد : ضع $x = \frac{1}{u}$)

٢٢ - $\int \frac{dy}{y\sqrt{3y^2-2y-1}}$ (ارشاد : ضع $y = \frac{1}{u}$)

٢٣ - $\int \frac{dz}{z\sqrt{5z-6-z^2}}$ (ارشاد : ضع $z = \frac{1}{u}$)

٢٤ - $\int \frac{du}{u^2\sqrt{1+2u+4u^2}}$ (ارشاد : ضع $u = \frac{1}{z}$)

٢٥ - $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ (ارشاد : اثبت أنه اذا كانت $t = \tan \frac{x}{2}$ ، فان $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$)

٢٦ - $\int \frac{dx}{5\sin x+4}$ (ارشاد : اثبت أنه اذا كانت $t = \tan \frac{x}{2}$ ، فان $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$)

٢٧ ـ أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y = 4x + \sqrt{2x+1},\ y = x - \sqrt{2x+1}$
و $x = 4$ و $x = 10$.

٢٨ ـ أوجد حجم الجسم الناشيء من دوران المساحة تحت المنحنى $y = x + \sqrt{x-7}$ بين 5 و 2 ، حول المحور السينى .

٢٩ ـ أوجد طول المنحنى $y = e^{x},\ 0 \leqslant x \leqslant 2$.

مسائل متنوعة :

لاختبار مقدار ما استوعبه القارىء من الطرق التى درست فى هذا الفصل وما قبله ، نقدم مجموعة متنوعة من التكاملات .

أوجد التكاملات الآتية بدون استخدام جدول للتكاملات . جميع الثوابت الحرفية موجبة

١ ـ $\int \sin (a + bx)\, dx$

٢ ـ $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2}}\, dx$

٣ ـ $\int \frac{\cos x}{8 + 11 \sin x}\, dx$

٤ ـ $\int \frac{\sin 3y}{2 + \cos 3y}\, dy$

٥ ـ $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\, d\theta$

٦ ـ $\int \frac{dv}{\sin^2 2v}$

٧ ـ $\int_0^{\pi} \alpha \cos \frac{\alpha}{3}\, d\alpha$

٨ ـ $\int x^2 \sec^2 x^3\, dx$

٩ ـ $\int \tan \frac{t}{5}\, dt$

١٠ ـ $\int (\cot \theta - 1)^2\, d\theta$

١١ ـ $\int \frac{du}{u^2 - u}$

١٢ ـ $\int \frac{2 - 3y}{3 + 2y - y^2}\, dy$

١٣ ـ $\int v \cot^2 v\, dv$

١٤ ـ $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\, d\theta$

١٥ ـ $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

١٦ ـ $\int \frac{x^{2/3}}{x + 1}\, dx$

١٧ ـ $\int \frac{dw}{\sin (w/2)}$

١٨ ـ $\int \frac{dz}{z \ln 3z}$

١٩ ـ $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$

٢٠ ـ $\int \frac{du}{\sin^3 \frac{1}{2}u}$

٢١ ـ $\int \frac{b - 2x}{b^2 - x^2}\, dx$

٢٢ ـ $\int \frac{3z^2 - 2z - 3}{z^3 - z^2}\, dz$

٢٣ ـ $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{2u + u^2}}$

٢٤ ـ $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

٢٥ ـ $\int \frac{\sqrt{6 + 4 \tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

٢٦ ـ $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$

٢٧ ـ $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\, dx$

٢٨ ـ $\int \frac{dx}{x \ln x^2}$

٢٩ ـ $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

٣٠ ـ $\int \frac{dt}{(t^2 - 1)^2}$

٣١ ـ $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

٣٢ ـ $\int \frac{5e^x\, dx}{e^x + e^{-x}}$

٣٣ ـ $\int \frac{u^3 + 3u}{(u^2 + 1)^2}\, du$

٣٤ ـ $\int_0^2 \frac{y^2\, dy}{(4y^2 + 9)^{3/2}}$

٣٥ ـ $\int \frac{dz}{\sqrt{2 + 9z + 9z^2}}$

٣٦ ـ $\int \frac{\sqrt{1+\alpha} + \sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{1+\alpha} - \sqrt{1-\alpha}}\, d\alpha$

٣٧- $\int \frac{dy}{1-4e^{y}}$

٣٨- $\int x e^{x} \cos x \, dx$

٣٩- $\int e^{-\cos t} \sin t \, dt$

٤٠- $\int \frac{6x+13}{6x^2-7x-3} \, dx$

٤١- $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$

٤٢- $\int \frac{x}{x^4-a^4} \, dx$

٤٣- $\int \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y^4} \, dy$

٤٤- $\int e^{-\theta} \cos^2 \theta \, d\theta$

٤٥- $\int \frac{x^5}{b^6-x^6} \, dx$

٤٦- $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

٤٧- $\int \sqrt{\frac{x}{3+2x}} \, dx$

٤٨- $\int \frac{x^5}{(1-x)^4} \, dx$

٤٩- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}$

٥٠- $\int \frac{y^5+a^5}{y^3+a^3} \, dy$

٥١- $\int \frac{(e^{u}-e^{-u})^2}{e^{u}} \, du$

٥٢- $\int (b^2+r^2) \ln (b^2+r^2) \, dr$

٥٣- $\int \frac{\sin t - \cos t}{1+\sin t+\cos t} \, dt$

٥٤- $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^6+1}}$

٥٥- $\int t \sqrt{\frac{2+t^2}{3+t^2}} \, dt$

٥٦- $\int \frac{du}{u+\sqrt{u^2+c^2}}$

٥٧- $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

الفصل الحادى عشر

تطبيقات التكامل من المعين

١١ - ١

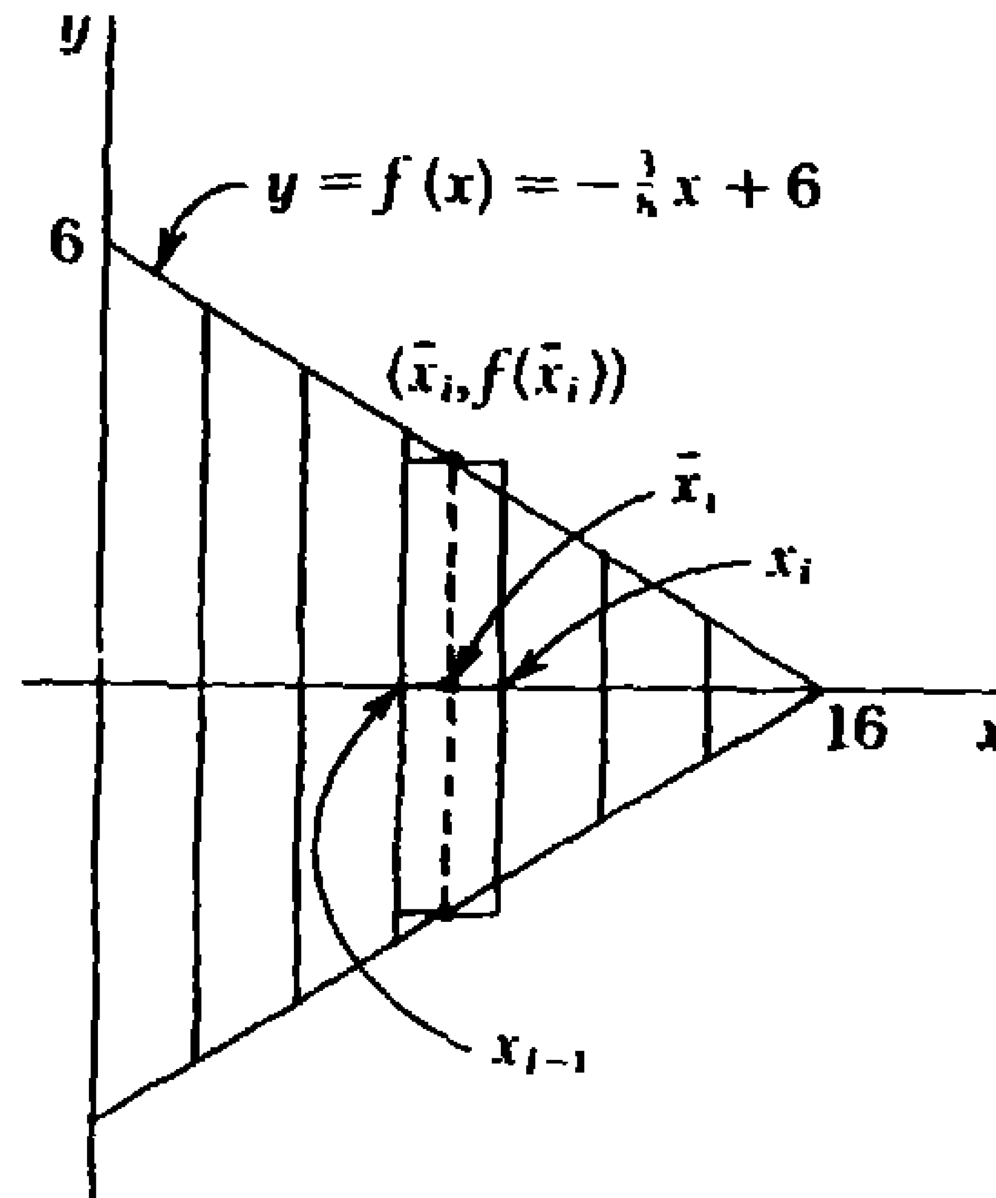
كتلة جسم

الآن وقد أصبح فى امكاننا اجراء تكامل العديد من الدوال ندرس تطبيقات أخرى للتكامل المعين .

كثافة المادة عند نقطة ، بتعبير دارج ، هى كتلة منطقة صغيرة تحتوى النقطة مقسومة على حجم المنطقة . وبلغة أدق ، هى نهاية خارج القسمة هذا عندما يقترب أكبر بعد للمنطقة من الصفر . الكثافة عادة يشار اليها بأنها كتلة وحدة الحجم . فى هذا الفصل سيرمز للكثافة بالرمز ρ . وهى قد تكون ثابتة أو تتغير من نقطة لأخرى . المادة المتجانسة هى التى كثافتها تكون ثابتة . حينئذ تكون كتلة المادة المتجانسة ρV ، حيث V هو حجم المادة . اذا لم تكن الكثافة ثابتة ، فان ρV لا تعطى الكتلة . سنوضح كيف يمكن ايجاد كتلة مادة غير متجانسة باستخدام التكامل .

مثال ١ . لوحة على شكل مثلث متساوى الساقين سمكها 1 وطول قاعدتها 12 وارتفاعها 16 . كثافتها عند أى نقطة تساوى $1/3$ بعد النقطة عن القاعدة . أوجد كتلة اللوحة .

ادخل نظاماً للاحداثيات كما هو موضح فى الشكل ١١ - ١ وقسم المثلث الى شرائط ضيقة



شكل ١١ - ١

بخطوط عمودية على المحور x . سنقرب الى كتلة كل شريط . الشرائط تعين تجزيئاً للفترة $[0, 16]$ على المحور x ،

$$[0 = x_0, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ . \ , x_{n-1}, x_n = 16]$$

اختر نقطة $\bar{x}_i$ فى الفترة الجزئية رقم i ، وكون المستطيل المبين فى الشكل . داخل الشريط الكثافة لا تتغير كثيراً ، وعند أى نقطة هى بالتقريب $\frac{1}{3}\bar{x}_i$.

كتلة اللوحة المستطيلة ، التى تقرب كتلة الشريط رقم i ، هى بالتقريب حاصل ضرب الكثافة عند $\bar{x}_i$ ومساحة المستطيل والسمك الذى هو I ، أى هى

$$(\tfrac{1}{3}\bar{x}_i)2f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

حيث $y = f(x)$ هى معادلة الضلع الأعلى للمثلث . حاصل الجمع

$$\sum_{i=1}^{n} \tfrac{2}{3}\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i \qquad (١)$$

هو تقريب لكتلة اللوحة المثلثية . هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $\frac{2}{3}\,x f(x)$. باستخدام تجزيء دقيق دقة كافية ، الكتلة ٪ للوحة يمكن التقريب اليها الى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع على الصورة (١) . وبالتالى فان الكتلة تعطى بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه ،

$$W = \lim_{w\to 0} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{2}{3}\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

حيث w هى معيار التجزىء . هذه النهاية هى التكامل المعين

$$W = \int_0^{16} \tfrac{2}{3}x f(x)\ dx$$

لايجاد تعبير صريح للدالة $f(x)$ ، نحتاج الى معادلة الضلع الأعلى للمثلث . هذه المعادلة هى

$$y - 6 = -\tfrac{6}{16}(x - 0)$$

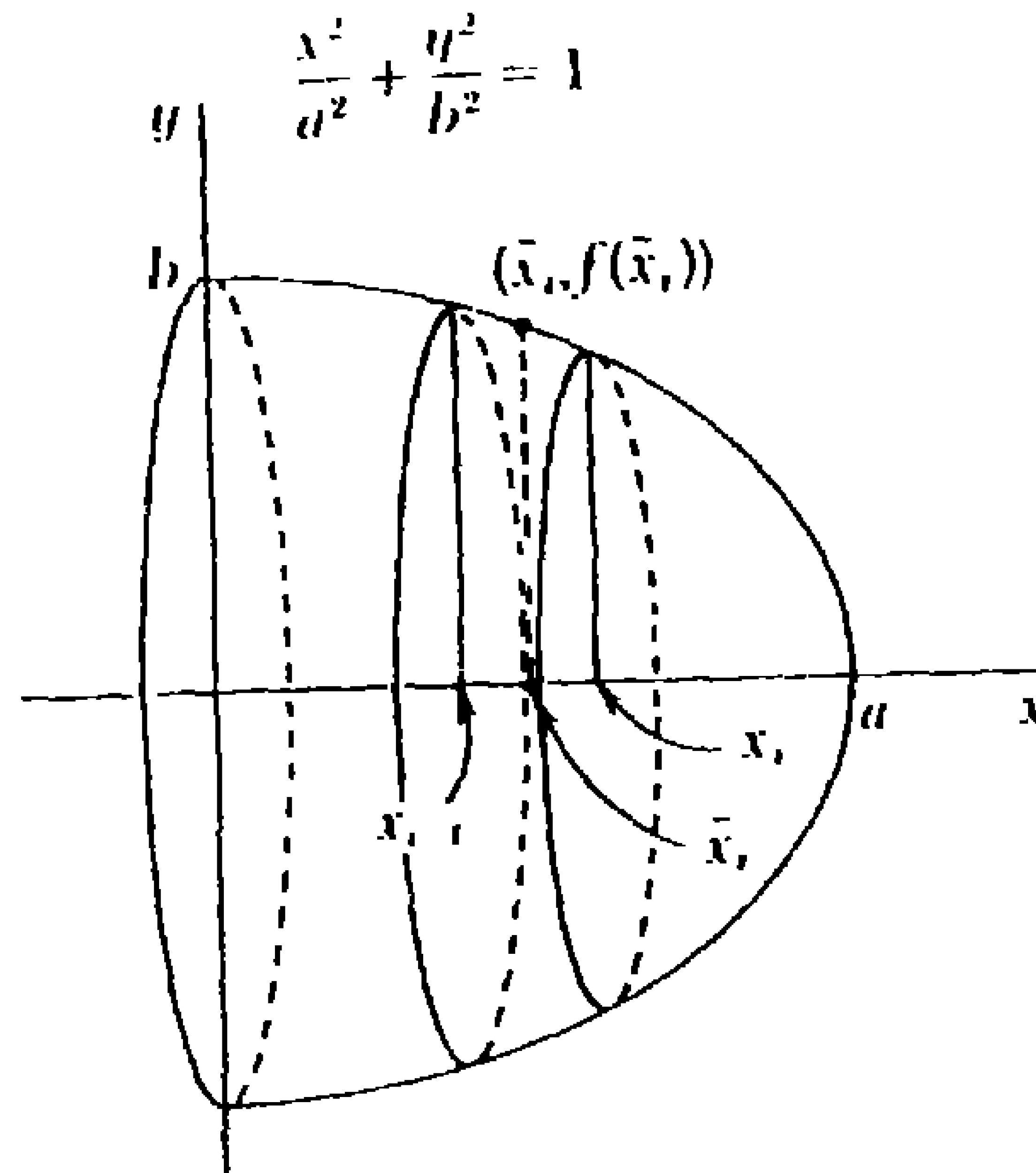
$$y = f(x) = -\tfrac{3}{8}x + 6.$$

اذن

$$W = \int_0^{16} \tfrac{2}{3}x(-\tfrac{3}{8}x + 6)\ dx = \left[-\frac{x^3}{12} + 2x^2\right]_0^{16} = \tfrac{512}{3}$$

مثال ٢ . النصف الأيمن للقطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ يدور حول المحور x ، منشئاً جسماً دورانياً . كثافة الجسم عند أى نقطة تتناسب مع مربع بعد النقطة عن المستوى العمودى على المحور x عند نقطة الأصل . أوجد كتلة الجسم .

نقسم الجسم الى أقراص بمستويات عمودية على المحور x . الأقراص تعين تجزيئاً للفترة $[0, a]$. القرص (رقم i) موضح فى الشكل ١١ ـ ٢ . الكثافة فى القرص رقم i تتغير ، لكن قليلا ، وتكون بالتقريب $k\,\bar{x}_i^2$ ، حيث $\bar{x}_i$ أى نقطة فى الفترة الجزئية رقم i وحيث k ثابت التناسب .



شكل ١١-٢

لتكن $f(\bar{x}_i)$ نصف قطر المقطع الدائرى عند $\bar{x}_i$. عندئذ يكون حجم القرص بالتقريب هو : $\pi f^2(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ ، وكتلته بالتقريب هى $k\pi \bar{x}_i^2 f^2(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ ، نهاية حاصل جمع كتل الأقراص هى التكامل $W = k\pi \int_0^a x^2 f^2(x)\ dx$ وهى كتلة الجسم .

بما أن

$$f(x) = y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

من معادلة القطع الناقص ، فان

$$W = k\pi \int_0^a x^2 \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\ dx = \frac{k\pi b^2}{a^2}\left[a^2\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^a = \tfrac{2}{15}k\pi a^3 b^2$$

مسائل

١ - قضيب AB طوله 12 in ومقطعه دائرة مساحتها 1 in . كثافة القضيب عند أى نقطة تساوى ضعف بعد النقطة عن الطرف A . أوجد كتلة القضيب .

٢ - لوحة على شكل نصف قطع ناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,\ x \geqslant 0$ وكثافتها عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن المحور y . أوجد كتلة اللوحة .

٣ - أوجد كتلة قطعة القطع المكافىء المقطوعة بالوتر البؤرى العمودى اذا كانت (أ) الكثافة عند أى نقطة تساوى بعد النقطة عن محور القطع ، (ب) الكثافة عند أى نقطة تساوى بعد النقطة عن الوتر البؤرى العمودى .

٤ - أوجد كتلة نصف الكرة التى كثافتها عند أى نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن القاعدة .

٥ - مخروط دائرى قام نصف قطره 3 وارتفاعه 8 . كثافته عند أى نقة تساوى مربع البعد عن الرأس لمسقط النقطة على محور المخروط . أوجد كتلة المخروط .

٦ ـ هرم منتظم قاعدته مربعة طول ضلعها a ، وارتفاع الهرم h . كثافته عند نقطة على ارتفاع z وحده من القاعدة هي $h - z$. أوجد كتلة الهرم .

٧ ـ أوجد كتلة الكرة التي كثافتها عند أي نقطة تتناسب مع الجذر التربيعي لبعد النقطة عن المركز (ارشاد : حجم القشرة الكروية الرفيعة التي نصف قطرها الداخلي r ونصف قطرها الخارجي $r + h$ هو بالتقريب $4 \pi r^2 h$).

٨ ـ الكثافة عند أي نقطة على لوحة دائرية سمكها 3 in ونصف قطرها 10 in تتناسب مع مربع بعد النقطة عن المحيط . أوجد كتلة اللوحة .

٩ ـ أوجد كتلة سلك نصف دائري كثافته عند أي نقطة تساوي ضعف بعدها عن قطر نصف الدائرة . (ارشاد : استخدام الاحداثيات القطبية أو المعادلات البارامترية لنصف الدائرة وقرب الى كتلة جزء صغير من السلك . أنظر النظرية ٩ ـ ٢ بند ٩ ـ ٣) .

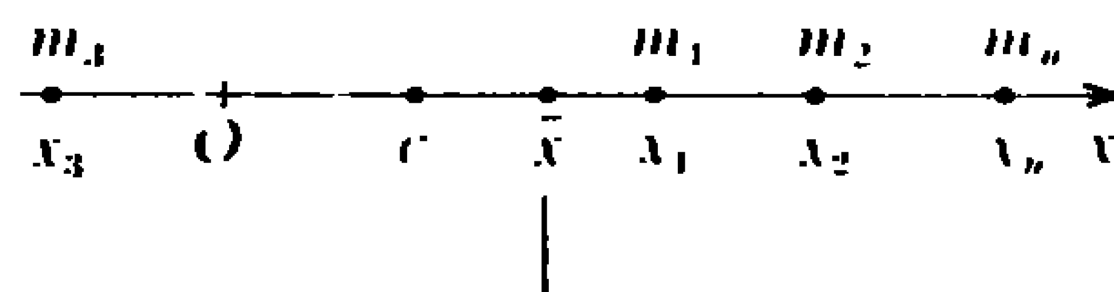
١٠ ـ سلك على شكل النصف العلوي لقوس القطع المكافىء $y^2 = 4x$ ، أحد طرفيه عند نقطة الأصل والطرف الآخر عند النقطة $(4, 4)$. كثافته عند أي نقطة تتناسب مع بعد النقطة عن المحور x . أوجد كتلة السلك (أنظر الارشاد في المسألة ٩) .

١١ ـ ٢
مركز الكتلة لمجموعة محدودة

لتكن c نقطة على خط للاحداثيات (شكل ١١ ـ ٣) . ثقل كتلته m_1 موضوع عند النقطة x_1 يسبب قوة دوران ، أو عزم دوران حول c هذه القوة لا تعتمد فقط على الكتلة ولكن أيضاً على بعد الثقل عن c ، نفس الثقل يسبب قوة أكبر كلما زاد بعده عن c . مقياس مفيد لهذه القوة هو حاصل ضرب m_1 والمسافة الموجهة من c الى x_1 ، أي $m_1(x_1 - c)$. هذا يسمى عزم m_1 حول c . اذا وضع ثقل ثان كتلته m_2 عند x_2 فهو يسهم بقوة دوران ، أو عزم ، يساوي $m_2(x_2 - c)$. قوة الدوران الناشئة عن الثقلين هي حاصل الجمع

$$m_1(x_1 - c) + m_2(x_2 - c)$$

بوجه عام ، اذا وضع n من الأثقال كتلتها $m_1, m_2, \ldots, m_n$ عند النقط $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (شكل ١١ ـ ٣) ، فان عزم المجموعة (قوة الدوران الكلية) حول c يرمز له بالرمز M_c ويعرف بأنه حاصل



شكل ١١ ـ ٣

جمع عزوم الأثقال :

$$M_c = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - c) = m_1(x_1 - c) + m_2(x_2 - c) + \cdots + m_n(x_n - c) \qquad (١)$$

الأثقال على يسار c لها عزوم سالبة وتميل الى احباط تلك التى على يمين c . عزم المجموعة حول نقطة الأصل هو

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (٢)$$

اذا كان خط الاحداثيات مسنداً عند c ، فانه سيميل الى اليمين أو الى اليسار على حسب كون حاصل جمع عزوم الأثقال التى على يمين c أو التى على يسار c الأكبر فى القيمة المطلقة . موضع النقطة c حيث الخط يتزن يجب أن يكون حيث حاصل جمع العزوم يساوى صفراً . هذه النقطة تسمى **مركز الكتلة أو مركز الثقل** للمجموعة لايجادها ، يجب اختيار النقطة c فى (١) بحيث أن $M_c = 0$. من المعتاد أن نرمز لهذه القيمة لـ c بالرمز $\bar{x}$ ومن ثم نبحث عن $\bar{x}$ بحيث أن

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

لكن من (١) و(٢) ،

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} (m_i x_i - m_i \bar{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} m_i = M_0 - \bar{x} W$$

حيث $W = \sum_{i=1}^{n} m_i$ هو حاصل جمع كتل الأثقال .

اذن

$$\bar{x} = \frac{M_0}{W} \qquad (٣)$$

هذا يثبت النظرية الآتية :

١١ - ١ نظرية . مركز الكتلة لمجموعة أثقال على خط الاحداثيات هو عزم المجموعة حول نقطة الأصل مقسوماً على كتلة المجموعة .

مثال ١ . وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 5 lb عند 2 ، 2 lb عند 6 ، 7 lb عند 3 ، 6 lb عند 4 — . أوجد عزم المجموعة حول النقطة 3 ومركز كتلة المجموعة .

من (١) ، يكون

$$M_3 = 5(2 - 3) + 2(6 - 3) + 7(3 - 3) + 6(-4 - 3)$$

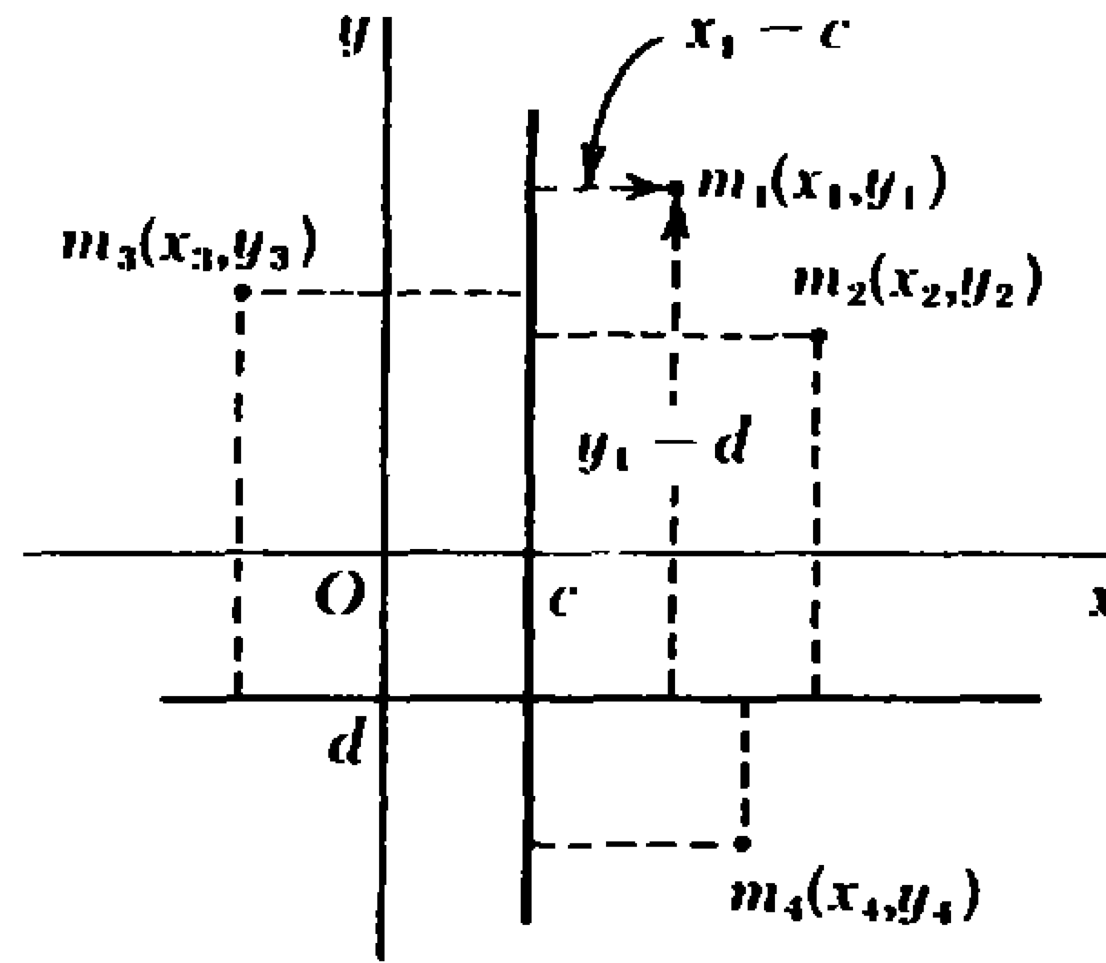
$$= -5 + 6 + 0 - 42 = -41$$

لايجاد مركز الكتلة ، نحتاج ، وفقا لـ (٣) ، الى العزم حول نقطة الأصل والى حاصل جمع الكتل . بما أن

$$M_0 = 5(2) + 2(6) + 7(3) + 6(-4) = 19$$
$$W = 5 + 2 + 7 + 6 = 20$$

فان $\bar{x} = M_0/W = \frac{19}{20}$

اذا وضع ثقل كتلته m_1 عند النقطة (x_1, y_1) فى مستوى الاحداثيات ، فان قوة الدوران الناشئة عنه أو عزمه ، حول الخط المستقيم $x = c$ يعرف بأنه $m_1(x_1 - c)$ (شكل ١١ ـ ٤) ، وهو حاصل



شكل ١١ ـ ٤

ضرب الكتلة فى المسافة الموجهة للثقل من الخط . العزم حول الخط المستقيم $x = c$ لمجموعة أثقال كتلتها $m_1, m_2, \ldots, m_n$ حيث كل m_i تكون عند النقطة (x_i, y_i) يعرف بأنه حاصل جمع العزوم ،

$$M_{x=c} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - c) \qquad (٤)$$

العزم حول المحور y ، يرمز له بـ M_y ونحصل عليه بوضع $c = 0$ ، فهو

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (٥)$$

بما أن (٤) هى نفسها (١) ، فالخط المستقيم $x = x$ الموازى المحور y والذى حوله حاصل جمع العزوم يساوى صفرأيعطى بـ(٣) ، أو بما أن M_y الان تناظر M_0 ، فان

$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} \qquad (٦)$$

حيث $W = \sum_{i=1}^{n} m_i$ هى حاصل جمع كتل الأثقال . اذا كان مستوى الاحداثيات أفقياً ووضع حد سكين تحته على هذا الخط ، فان المجموعة ستتزن على السكين ، طريقة أخرى لنرى ذلك هى أن نتصور أن الأثقال اسقطت على المحور x . تحريكها موازية للمحور y لا يؤثر على اتزان المستوى . لكن من (٣) $\bar{x}$ هى نقطة الاتزان عندما تكون الأثقال على المحور x . بالمثل ، يمكننا

دراسة العزوم حول خط مستقيم $y = d$ مواز للمحور x (شكل ١١ ـ ٤) . عزم المجموعة حول هذا الخط هو

$$M_{y=d} = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i - d)$$

والعزم حول المحور x ، ويرمز له بالرمز M_x هو

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (٧)$$

مجموع العزوم سيكون صفراً حول الخط المستقيم $y = \bar{y}$ ، حيث

$$\bar{y} = \frac{M_x}{W} \qquad (٨)$$

اذا وضع حرف سكين تحت هذا الخط ، فالمجموعة ستتزن فوقه . النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ حيث خطا الاتزان يتقاطعان يجب أن تكون بحيث أن المجموعة سوف تتزن على سن قلم رصاص موضوع تحته . هذه النقطة تسمى **مركز كتلة أو مركز ثقل** المجموعة .

مثال ٢ . وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلي : 4 lb عند $(1, 2)$ ، 3 lb عند : $(5, -3)$ ، 1 lb عند $(-6, 0)$ ، 10 lb عند $(-2, 1)$. أوجد مركز كتلة المجموعة .

لدينا

$$W = \sum_{i=1}^{4} m_i = 4 + 3 + 1 + 10 = 18$$

من (٥) ، (٧) يكون

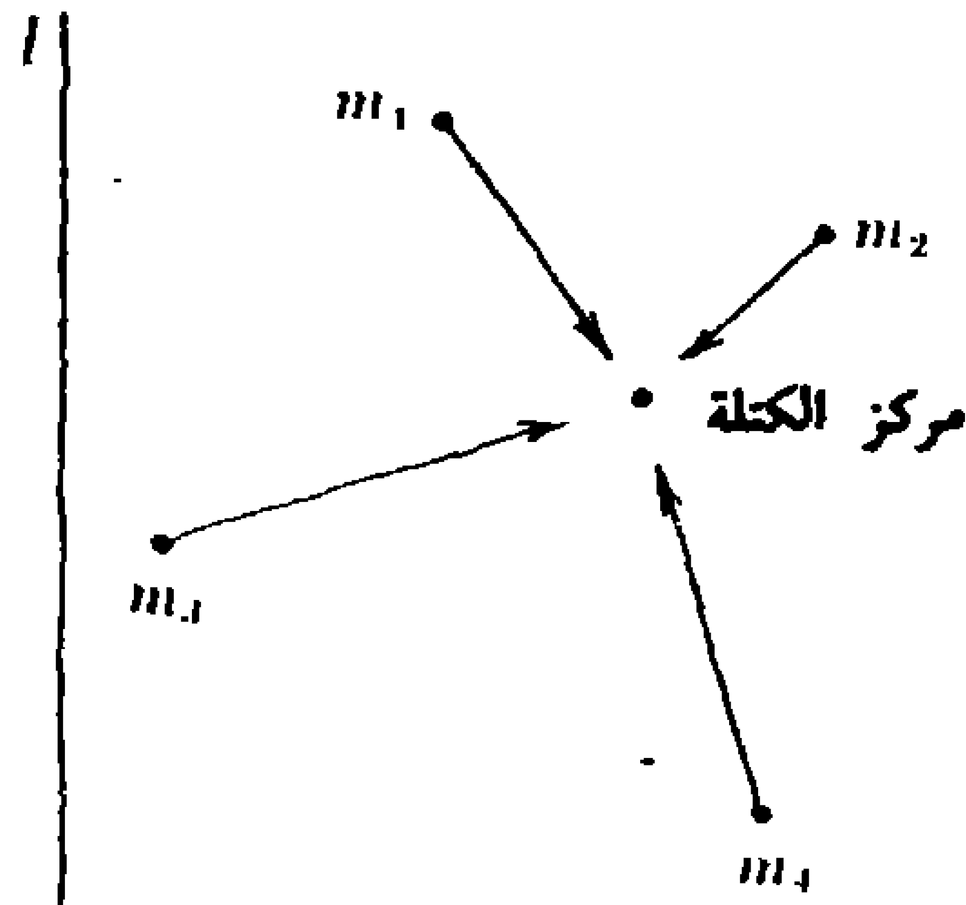
$$M_y = \sum_{i=1}^{4} m_i x_i = 4(1) + 3(5) + 1(-6) + 10(-2) = -7$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{4} m_i y_i = 4(2) + 3(-3) + 1(0) + 10(1) = 9$$

واذن

$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} = -\frac{7}{18}, \qquad \text{و} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{W} = \frac{1}{2}$$

من المعادلة (٦) ، $M_y = W\bar{x}$. هذا ينص على أن عزم المجموعة حول المحور y هو كتلة المجموعة مضروبة في بعد مركز الكتلة عن المحور y . أو من جهة نظر أخرى ، العزم لا يتغير اذا كانت كتلة المجموعة مركزة عند مركز الكتلة هذا هو مصدر المصطلح مركز الكتلة .



شكل ١١ ـ ٥
عزم المجموعة حول l لا يتغير اذا نقلت جميع الأثقال الى مركز الكتلة .

اذا أخذنا أى خط فى المستوى ، فانه بدوران المحورين وانتقالهما الى أن ينطبق المحور y على الخط فهذا لا يؤثر على موضع مركز الكتلة بالنسبة للأثقال . ومن ثم لدينا النتيجة الأعم الآتية (شكل ١١ ـ ٥) .

١١ ـ ٢ نظرية العزم حول خط مستقيم لمجموعة تشتمل على عدد محدود من الأثقال فى مستوى ، لا يتغير اذا نقلت جميع الأثقال الى مركز كتلة المجموعة .

ينتج من هذه النظرية ان كل خط فى المستوى يكون عزم المجموعة حوله يساوى صفراً يجب أن يمر بمركز كتلة المجموعة .

مسائل

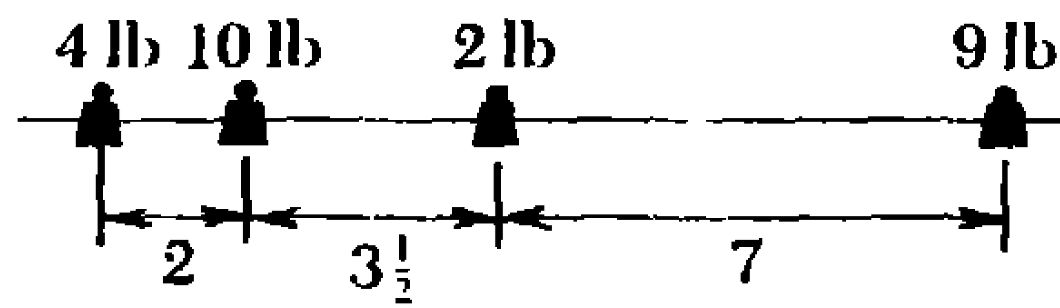
١ ـ وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 2 lb عند -2 ، 6 lb عند $-\frac{5}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ lb عند 0 ، أوجد عزم المجموعة حول 2 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .

٢ ـ وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 1 lb عند 3 ، 10 lb عند -1 ، $\frac{3}{2}$ lb عند 1 ، 5 lb عند 6 . أوجد عزم المجموعة حول -2 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .

٣ ـ وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 10 lb عند 3 ، 15 lb عند -1 ، 6 lb عند -4 ، 8 lb عند -3 ، 10 lb عند 2 . أوجد عزم المجموعة حول 0 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .

٤ ـ وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 2 kg عند -3 ، $\frac{5}{2}$ kg عند -1 ، 3 kg عند $\frac{1}{2}$ ، 7 kg عند 2 ، 1 kg عند 5 . أوجد عزم المجموعة حول -3 وأوجد أيضاً مركز الكتلة .

٥ ـ أوجد مركز كتلة المجموعة التى فى الشكل ١١ ـ ٦



شكل ١١ ـ ٦

٦ ـ وضعت أثقال على خط الاحداثيات كما يلى : 7 lb عند -5 ، 2 lb عند 3 ، 9 lb عند 2 . (أ) أين يوضع ثقل مقداره 3 lb ليكون مركز كتلة المجموعة عند 1 ؟ ، (ب) ما هو الثقل الذى يجب وضعه عند 4 ليكون مركز كتلة المجموعة عند 1 ؟

٧ ـ طفلان كتلتاهما 60 lb و 40 يريدان استعمال مرجيحة طولها 12 ft . (أ) اذا كانت نقطة الارتكاز فى منتصف المرجيحة ويجلس الطفل الأصغر عند أحد طرفيها ، أين يجلس الأكبر لتتزن المرجيحة ؟ (ب) اذا كانت نقطة الارتكاز قابلة للحركة ، فأين توضع لتتزن المرجيحة بطفل عند كل طرف ؟

٨ ـ وضعت أثقال فى مستوى الاحداثيات كما يلى : 2 lb عند $(3, 3)$ ، 6 lb عند $(3, -3)$ ، 4 lb عند $(-3, 3)$ ، 3 lb عند $(-3, -3)$. أوجد مركز كتلة المجموعة .

٩ ـ وضعت أثقال فى مستوى الاحداثيات كما يلى : 3 lb عند $(2, 3)$ ، 1 lb عند $(5, -1)$ ، 4 lb عند $(-2, -2)$ ، $\frac{1}{2}$ lb عند $(-1, 1)$. أوجد مركز كتلة المجموعة .

١٠ ـ وضعت أثقال متساوية على مستوى الاحداثيات عند النقط (a, c) و $(0, b)$ و $(0, 0)$ أوجد مركز كتلة المجموعة .

١١ ـ وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلى : 2 lb عند $(0, 4)$ ، 5 lb عند $(-3, -3)$ ، 8 lb عند $(0, -1)$ ، 11 lb عند $(6, 4)$ ، 4 lb عند $(1, -2)$. أوجد مركز كتلة المجموعة .

١٢ ـ وضعت أثقال على مستوى الاحداثيات كما يلى : 2 kg عند $(2, 6)$ ، 4 kg عند $(2, 4)$ ، 7 kg عند $(2, 1)$ ، 3 kg عند $(2, -2)$ (أ) أين يوضع ثقل مقداره 10 kg ليكون مركز كتلة المجموعة عند نقطة الأصل ؟ (ب) ما هما الثقلان اللذان يجب وضعهما عند $(-4, -6)$ و $(-4, 1)$ ليكون مركز كتلة المجموعة عند نقطة الأصل ؟

١٣ ـ أثبت أن فئة جميع النقط P فى المستوى حيث مجموع مربعات المسافات بين P ونقط معطاة عددها n تكون دائرة مركزها هو مركز كتلة مجموعة أثقال متساوية الكتلة ، موضوع واحد منها عند كل من النقط الـ n .

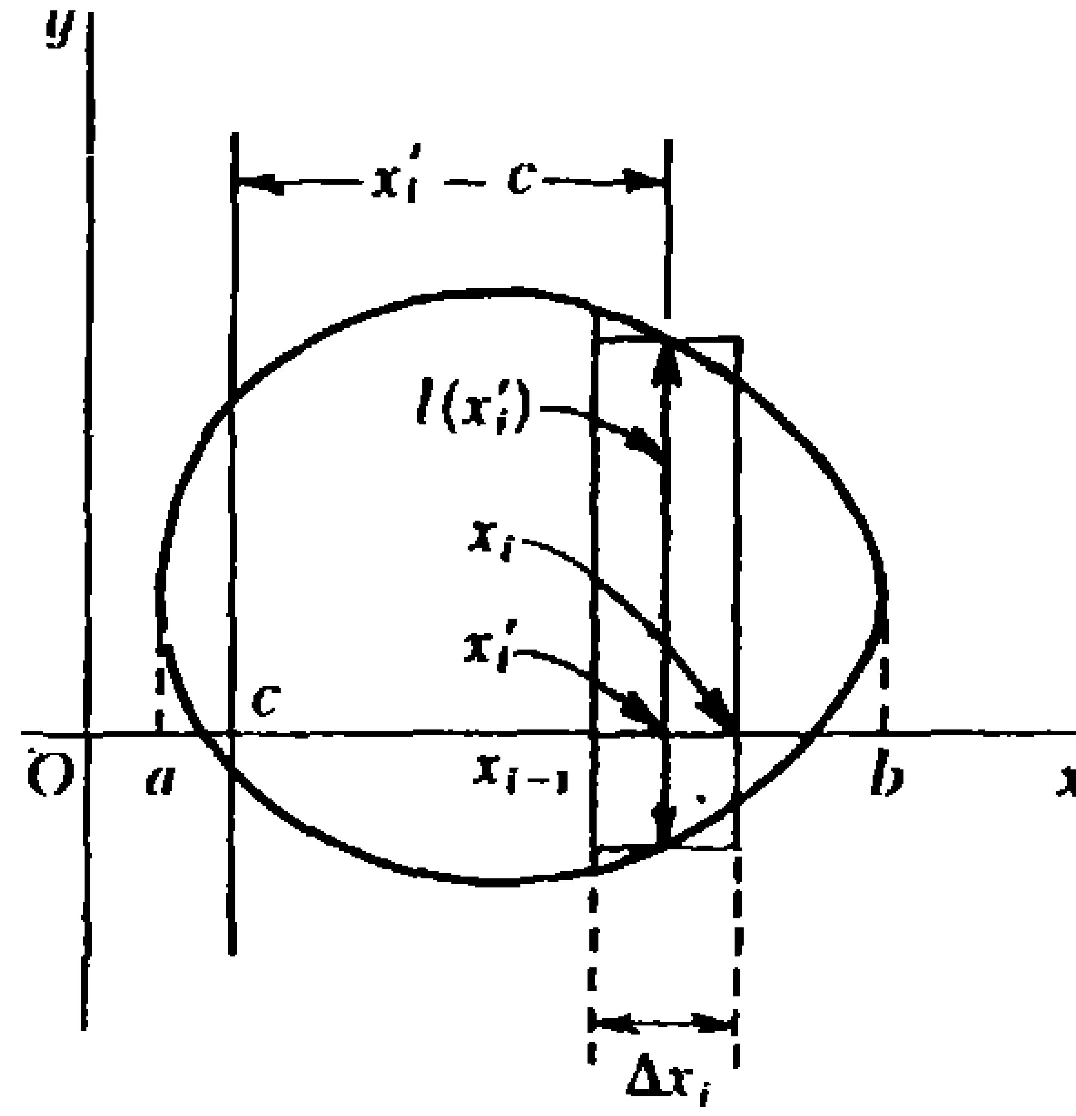
١١ ـ ٣
مركز كتلة منطقة مستوية

الدراسات الفيزيائية تشير الى أن أى منطقة مستوية يكون لها نقطة إتزان . سنوضح كيف يمكن استخدام التكامل لايجادها . من المناسب أن نعتبر أن أى منطقة مستوية لها كتلة ومن ثم كثافة (كتلة وحدة المساحة) عند كل نقطة حتى اذا كانت ليس لها سمك . ليكون هذا مستساغاً فيزيائياً ، يمكننا تصور المنطقة كصفيحة رقيقة .

دراستنا ستكون موازية لدراسة عزم ومركز كتلة مجموعة محدودة . ندرس أولا مسألة ايجاد عزم منطقة فى مستوى الاحداثيات ، حول الخط المستقيم $x = c$. عزم منطقة متغيرة الكثافة يمكن ايجاده بطرق تكامل متقدمة عن الطرق المتاحة لنا الآن . سنعالج فقط الحالة الخاصة والهامة لمنطقة متجانسة . أى أن ، كثافة المنطقة ثابتة . كتلة المنطقة هى حينئذ حاصل ضرب الكثافة فى المساحة . لتكن $a < b$ و a, b ، هما احداثيا طرفى مسقط المنطقة على المحور x (شكل ١١ ـ ٧) ، ولتكن $l(x)$ ترمز الى عرض المنطقة مقيساً على خط عمودى على المحور x عند النقطة x . نقسم المنطقة الى شرائط ضيقة بخطوط عمودية على المحور x . هذه الخطوط تعين تجزيئاً

$$[a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b]$$

للفترة $[a, b]$. فقط الشريط الذى رقمه i موضح فى الشكل . نختار نقطة $\bar{x}_i$ فى الفترة الجزئية رقم i



شكل ١١ ـ ٧

ونكون المستطيل الموضح فى الشكل . مساحة الشريط تقرب بمساحة المستطيل أى $l(x'_i)\ \Delta\ x_i$ وكتلته بـ $\rho l(x_i')\ \Delta\ x_i$ حيث ρ هى الكثافة . عزم الشريط رقم i حول المستقيم $x = c$ يعطى بالتقريب بحاصل ضرب كتلة المستطيل والمسافة الموجهة لـ x_i' من المستقيم $x = c$ ، أى

$$\rho l(x_i')(x_i' - c)\ \Delta x_i$$

هذا التقريب يعتمد على اختيار x'_i ، لكن لشريط ضيق لا يختلف كثيراً . حاصل الجمع لهذه العزوم

$$\sum_{i=1}^{n} \rho l(x_i')(x_i' - c)\ \Delta x_i \qquad (١)$$

هو تقريب للعزم $M_{x=c}$ للمنطقة حول الخط . حاصل الجمع هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $\rho l(x)(x - c)$. سندرس فقط المناطق حيث الدالة l متصلة وحيث جميع الخطوط العمودية على المحور x بين b و a تقطع حدود المنطقة فيما لا يزيد عن نقطتين .

باستخدام تجزىء دقيق دقة كافية يمكننا التقريب الى العزم ، الى أى درجة نريدها من الدقة ، بحواصل جمع على الصورة (١) وبالتالى فالعزم يعطى بالضبط بنهايتها ، التى هى التكامل المعين

$$M_{x=c} = \int_a^b \rho l(x)(x - c)\ dx \qquad (٢)$$

العزم M_y حول المحور y هو الحالة الخاصة $c = 0$:

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x\ dx \qquad (٣)$$

فى كلا (٢) و (٣) حدا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط $l(x)$. العرض $l(x)$ يجب ألا يكون سالباً لجميع قيم x فى الفترة $[a, b]$.

ينبغى علينا أن نشير الى أنه بالرغم من أنه يبدو لنا أننا قد أثبتنا (٢) ، لكن فى الواقع لم نثبت شيئاً لأن عزم منطقة حول مستقيم لم يعرف . عملنا يوضح أن (٢) تعريف معقول للعزم وسنتخذ وجهة النظر هذه .

للمناطق الموضوعة أفقياً ، العزم يقيس التأثير الدوراني للمنطقة حول الخط المستقيم $x = c$. اذا كان العزم موجباً ، فالمنطقة تميل الى الدوران الى أسفل على اليمين واذا كان سالباً فالمنطقة تميل الى الدوران الى أسفل على اليسار . قيمة c حيث العزم يساوى صفراً يرمز لها بالرمز $\bar{x}$. لايجادها ، نبحث عن $\bar{x}$ حيث

$$\int_a^b \rho l(x)(x - \bar{x})\ dx = 0$$

اذا كانت W و A هما مساحة وكتلة المنطقة ، فحينئذ يكون

$$A = \int_a^b l(x)\ dx$$

$$W = \rho A \quad \text{و}$$

$$\int_a^b \rho l(x)(x - \bar{x})\ dx = \int_a^b \rho l(x)x\ dx - \bar{x}\rho \int_a^b l(x)\ dx$$

$$= M_y - \bar{x}\rho A = M_y - \bar{x}W.$$

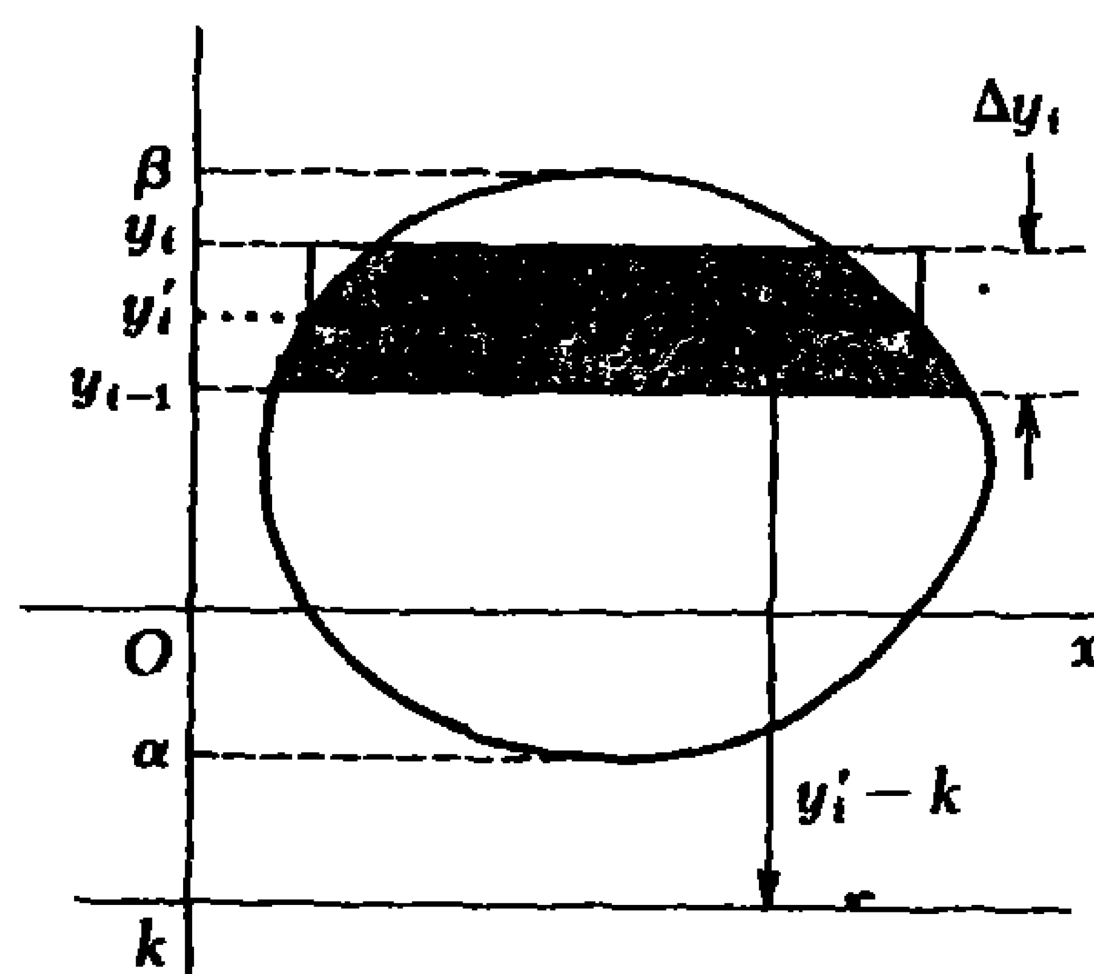
$\bar{x} = M_y/W$: . بما أن العزم يساوى صفراً حول الخط المستقيم $x = \bar{x}$ ، فالمنطقة ستتزن على حد سكين موضوع تحت المنطقة على هذا الخط .

بتقسيم المنطقة الى شرائط عمودية على المحور y (شكل ١١ ـ ٨) نحصل على تعبير مشابه لـ (٢) للعزم حول الخط $y = k$ الموازى لمحور x :

$$M_{y=k} = \int_\alpha^\beta \rho l(y)(y - k)\ dy$$

حيث $l(y)$ هو عرض المنطقة على الخط العمودى على المحور y عند النقطة y ، وحيث $\alpha < \beta$ و β و α الاحداثيان y لأقصى وضعين لهذا الخط . العزم M_x حول المحور x هو الحالة الخاصة $k = 0$:

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho l(y)y\ dy \qquad (٤)$$



شكل ١١ ـ ٨

العزم يكون صفراً حول الخط $y = \bar{y}$ ، حيث $\bar{y} = M_x/W$. المنطقة ستتزن على حد سكين موضوع تحت المنطقة على هذا الخط .

نقطة التقاطع $(\bar{x}, \bar{y})$ لخطى الاتزان هى النقطة حيث اذا وضعت المنطقة على سن قلم ، فانها ستتزن . نقطة الاتزان هذه تسمى مركز الكتلة أو المركز المتوسط للمجموعة . التعبير « المركز المتوسط » عادة يحتفظ به للمناطق المتجانسة مثل التى ندرسها . واذا كانت المنطقة لها كثافة متغيرة ، فان $(\bar{x}, \bar{y})$ ستسمى مركز الكتلة .

١١ ـ ٣ نظرية . الاحداثيان $(\bar{x}, \bar{y})$ للمركز المتوسط لمنطقة مستوية متجانسة يعطيان بالصيغتين

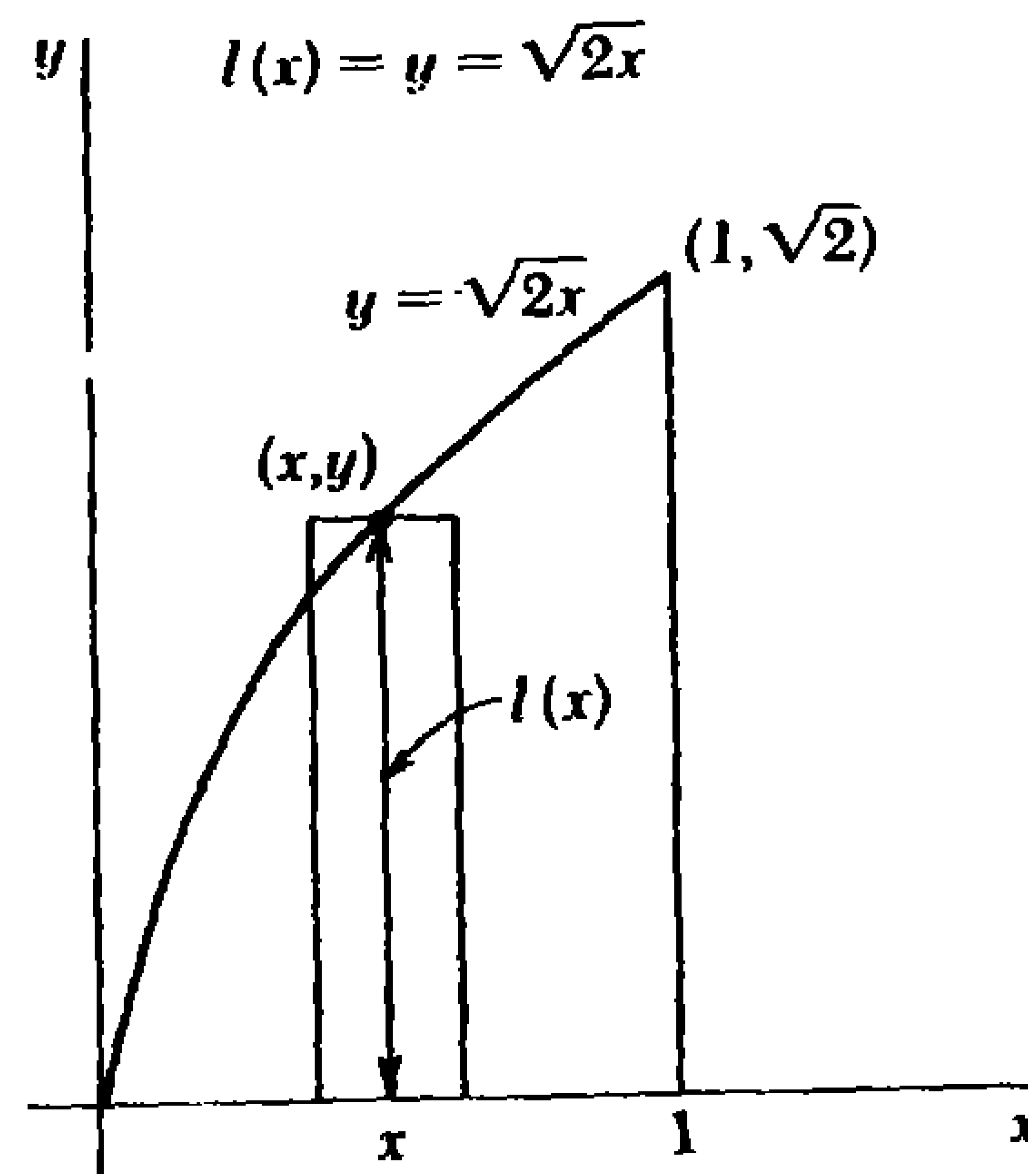
$$\bar{x} = \frac{M_y}{W} \quad \text{و} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{W}$$

حيث M_x و M_y هما عزما المنطقة حول المحورين x و y و W هى كتلتها .

مثال ١ أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بقوس القطع المكافىء الذى معادلته $y = \sqrt{2x}$ ومحور السينات والخط المستقيم $x = 1$.

المنطقة موضحة فى الشكل ١١ ـ ٩ . يجب أن نوجد W و M_y و M_x . لايجاد M_y ، نستخدم (٣) حيث $l(x) = y = \sqrt{2x}$. حدا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(x)$ أى 1 و 0 . واذن

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x \, dx = \int_0^1 \rho \sqrt{2x}\, x \, dx = \rho \sqrt{2} \tfrac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{5} \rho$$



شكل ١١ ـ ٩

مساحة المنطقة تعطى بـ

$$\text{المساحة} = \int_0^1 l(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{2x}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

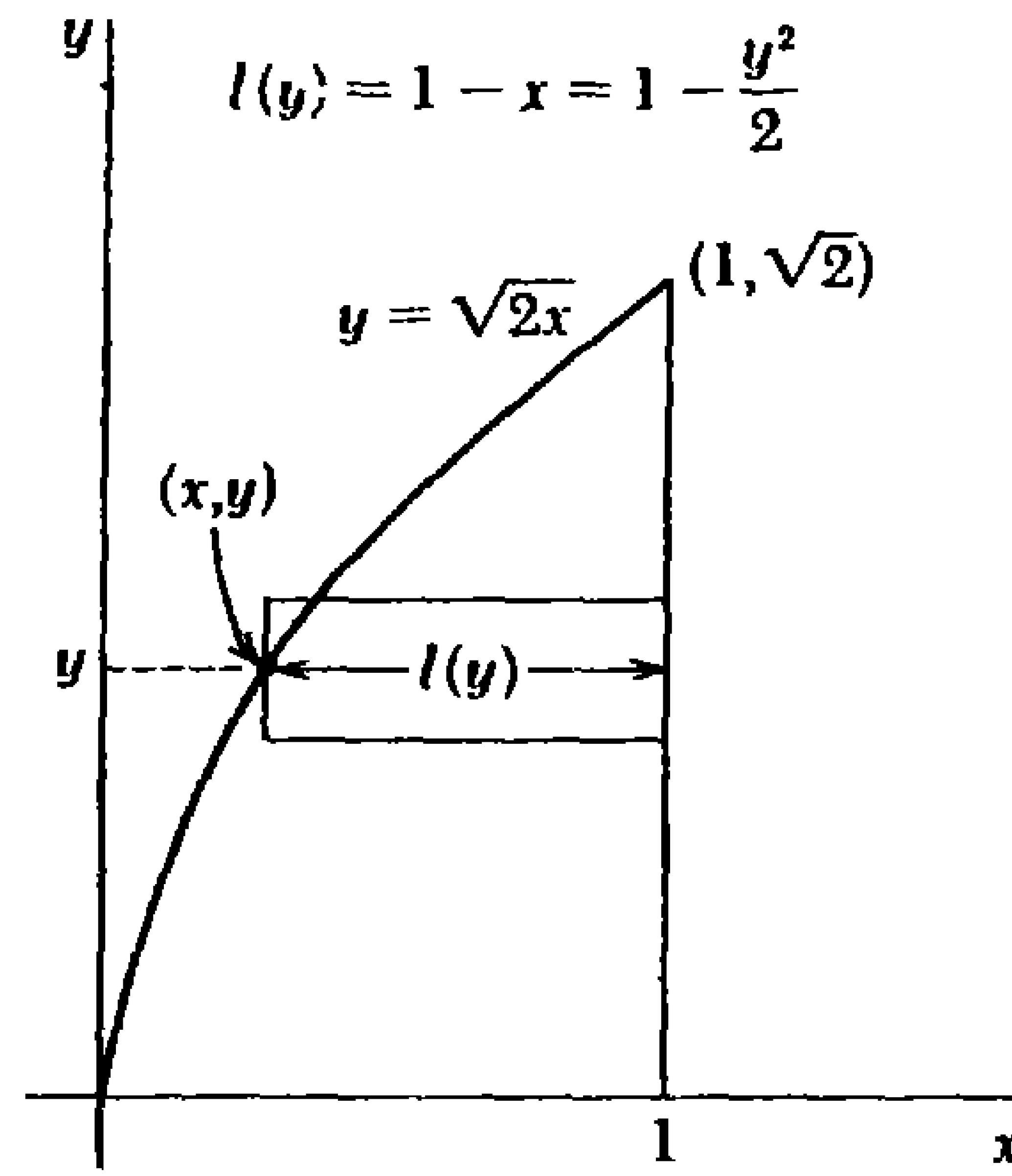
واذن الكتلة هى $W=\rho(2\sqrt{2})/3$ ويكون $\bar{x}=M_y/W=\frac{3}{5}$ لايجاد M_x ، نستخدم شرائط موازية للمحور x (شكل ١١ ـ ١٠) ، (٤) . ويكون لدينا

$$l(y) = 1 - x = 1 - \frac{y^2}{2}$$

حدا التكامل هما $\sqrt{2}$ و 0 ، الاحداثيان y لأقصى وضعين للمستقيم $l(y)$. واذن

$$M_x = \int_\alpha^\beta \rho l(y) y\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \rho\left(1-\frac{y^2}{2}\right) y\,dy = \rho\left[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{8}y^4\right]_0^{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\rho$$

و $\bar{y} = M_x/W = 3/4\sqrt{2}$



شكل ١١ ـ ١٠

مثال ٢ . أوجد المركز المتوسط لمنطقة على شكل نصف دائرة :

نضع نصف الدائرة كما هو موضح فى الشكل ١١ ـ ١١ . معادلتها تكون $x^2+y^2=r^2$ ، حيث r هى نصف القطر . لايجاد M_y ، لدينا

$$l(x) = 2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

حدا التكامل هما الاحداثيان x الأيسر والأيمن لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(x)$ ، أى r و 0 . واذن

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x\,dx = \rho \int_0^r 2x\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$= \rho\left[\tfrac{-2}{3}(r^2-x^2)^{3/2}\right]_0^r = \tfrac{2}{3}r^3\rho$$

المساحة كما نعلمها هى $\frac{1}{2}\pi r^2$. ومن ثم $W=\frac{1}{2}\pi r^2\rho$ ، ويكون

$$\bar{x}=\frac{M_y}{W}=\frac{\frac{2}{3}r^3\rho}{\frac{1}{2}\pi r^2\rho}=\frac{4r}{3\pi}$$

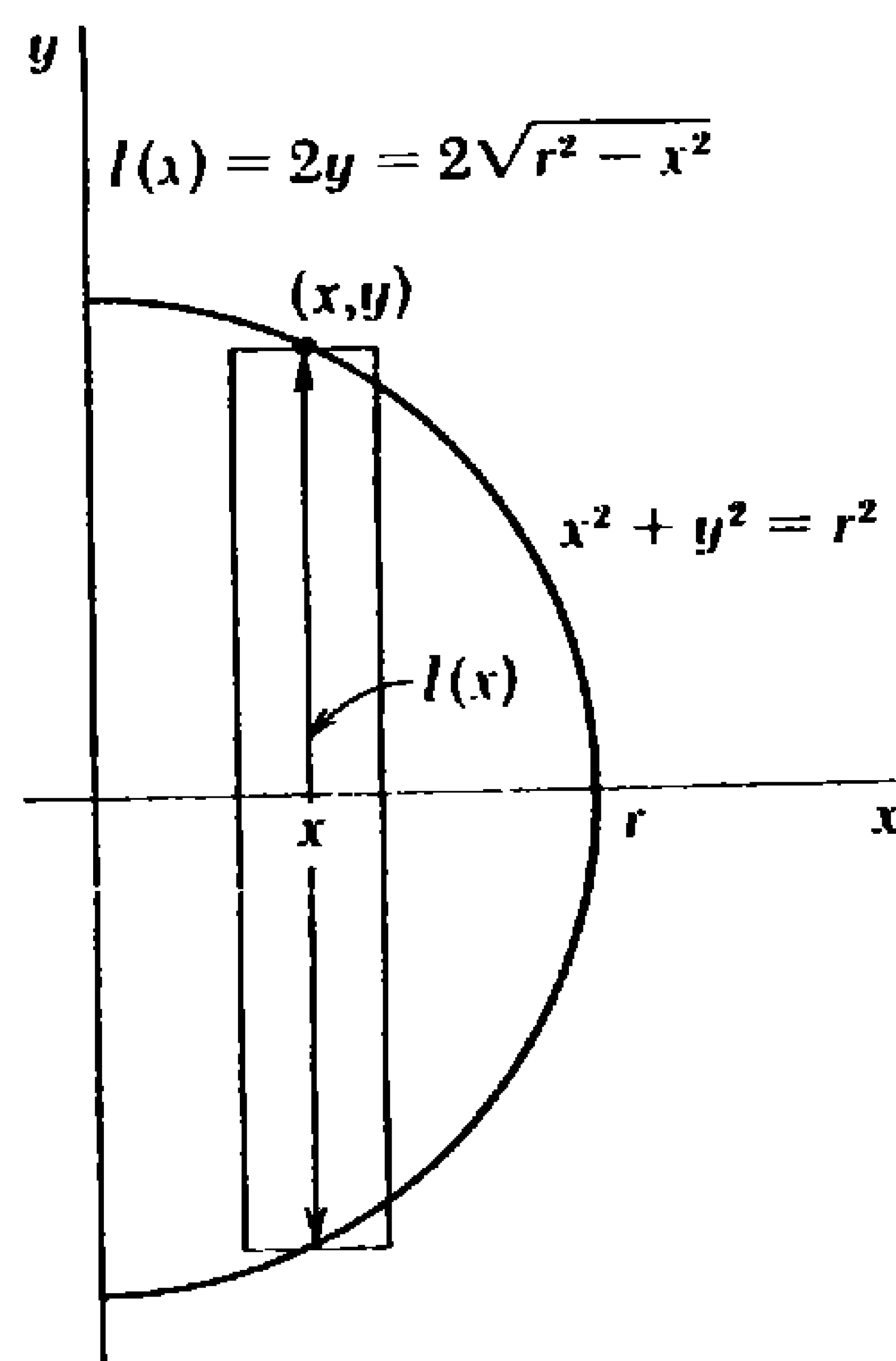
لايجاد M_x ، لدينا (شكل ١١-١٢)

$$l(y)=x=\sqrt{r^2-y^2}$$

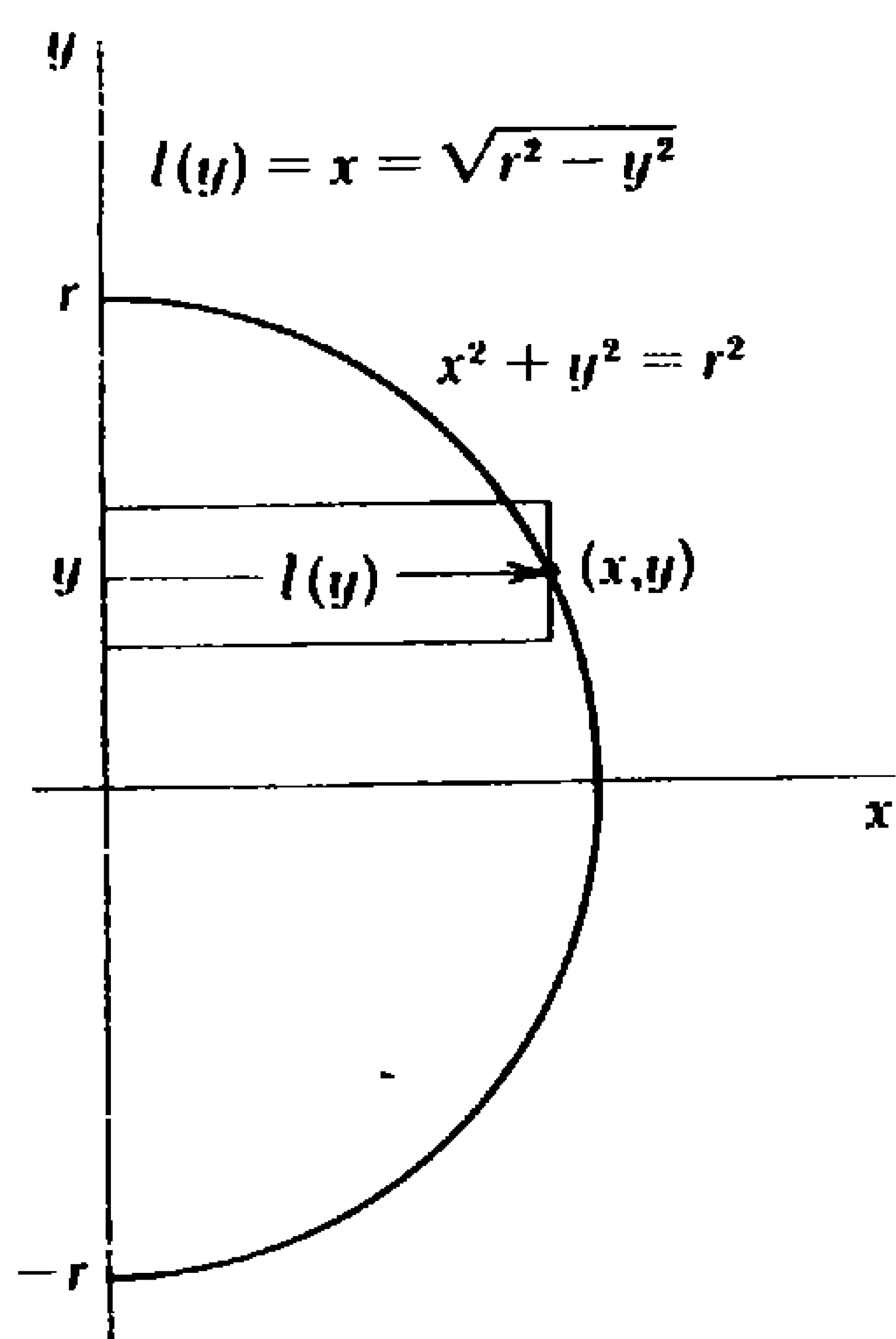
حدا التكامل هما r و $-r$ ، الاحداثيان y لأقصى وضعين للخط المستقيم $l(y)$. اذن

$$M_x=\int_\alpha^\beta \rho l(y)y\,dy=\int_{-r}^{r}\rho y\sqrt{r^2-y^2}\,dy=-\frac{\rho}{3}\left(r^2-y^2\right)^{3/2}\Big|_{-r}^{r}=0$$

وبالتالى $\bar{y}=M_x/W=0$ وهذا ما نتوقعه بسبب تماثل المنطقة .



شكل ١١-١١



شكل ١١-١٢

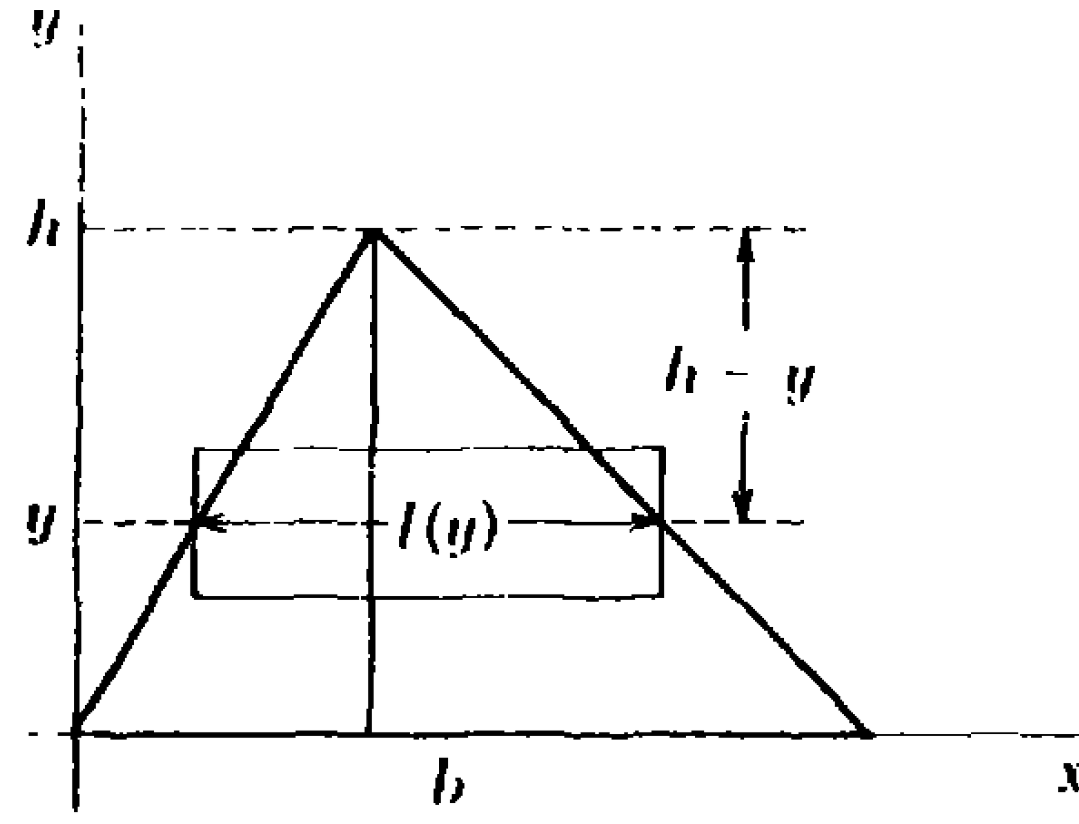
مثال ٣ . أثبت أن المركز المتوسط لمثلث هو نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة .

نضع المثلث كما هو موضح فى الشكل ١١-١٣ وليكن b طول القاعدة و h الارتفاع . فيكون

$$M_x=\int_0^h \rho l(y)y\,dy$$

لايجاد $l(y)$ ، لدينا من المثلثين المتشابهين

$$\frac{l(y)}{b}=\frac{h-y}{h}$$



شكل ١١-١٣

ومن ثم $l(y)=\frac{b}{h}(h-y)$

اذن
$$M_x=\rho\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)y\,dy=\rho\frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right]_0^h=\frac{1}{6}\rho bh^2$$

بما أن $W=\frac{1}{2}\rho bh,\ \bar{y}=M_x/W=\frac{1}{3}h$. اذن المركز المتوسط يقع على الخط الموازى للقاعدة وفى $\frac{1}{3}$ المسافة من القاعدة الى الرأس المقابل . بوضع المثلث بحيث أن أحد أضلاعه الأخرى يكون القاعدة نحصل على نتيجة مماثلة . واذن المركز المتوسط يقع عند تقاطع هذين الخطين ، والخط المناظر الموازى للضلع الثالث يجب أن يمر بهذه النقطة لأن المركز المتوسط يقع عليه أيضاً . بما أن المستقيمات المتوسطة للمثلث أيضاً تتقابل فى نقطة فى ثلث المسافة من كل قاعدة الى الرأس المقابل ، اذن المركز المتوسط يجب أن يكون نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة .

مسائل

أوجد المركز المتوسط لكل من المناطق المحدودة بالمنحنيات أدناه :

١ - $y^2=x,\ x=0,\ y=2$

٢ - $y=x^3,\ y=0,\ x=2$

٣ - $y=x^3,\ x=0,\ y=8$

٤ - $y=\ln x,\ y=0,\ x=e$

٥ - $y=e^x,\ x=0,\ y=2$

٦ - $y^2=c^2-cx,\ x=0$

٧ - $x^2-y^2=1,\ x=4$

٨ - $y=x^2,\ x=y^2$

٩ - $y=\frac{4}{x},\ x+y=5$

١٠ - $y=2x^3,\ y=2x$ (الربع الأول)

١١ - $y=4x-x^2,\ y=2x$

١٢ - $y^2=x,\ y=\frac{1}{2}(x-3)$

١٣ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة محدودة بربع دائرة ونصفى قطريها .

١٤ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة محدودة بربع قطع ناقص ونصفى محوريه الأكبر والأصغر .

١٥ - أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت النصف الأيسر للقوس الأول على يمين المحور y للمنحنى $y=\sin x$.

١٦ ـ أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت المنحنى

$$y = 4 - x^2, x \leqslant 0 \quad و \quad y = 4 - x, x \geqslant 0$$

١٧ ـ أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمحور y والخط المستقيم $y = 8$ والمنحنى $y^2 = x^3$ و $0 \leqslant y \leqslant 8$.

١١ ـ ٤

مركز كتلة منطقة مستوية (تابع)

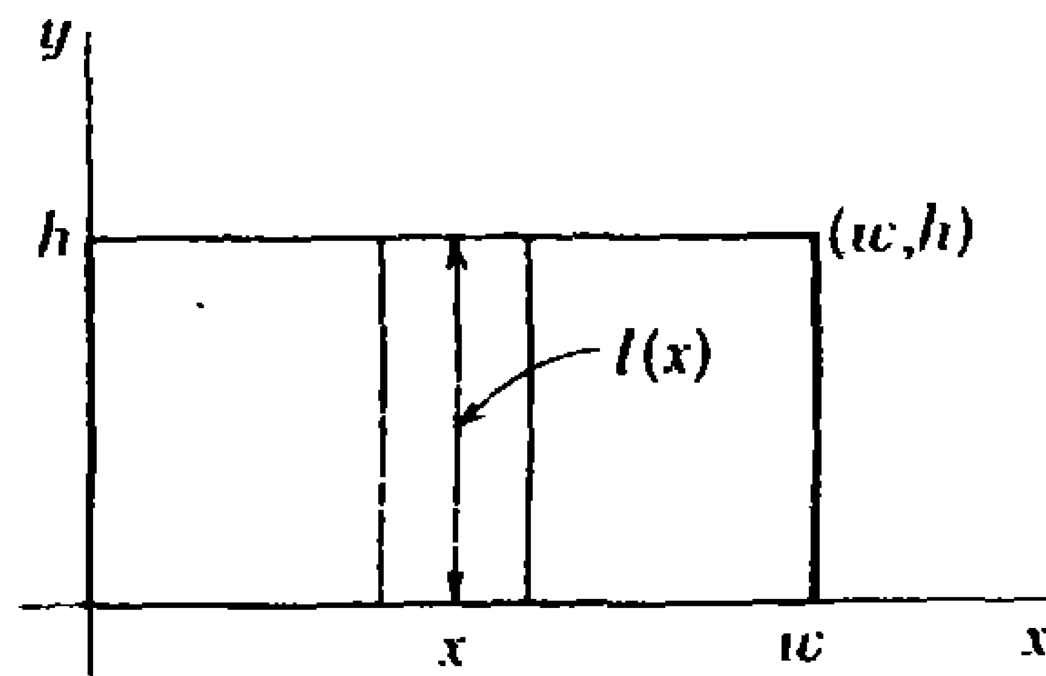
نثبت الحقيقة المعقولة فيزيائياً أن المركز المتوسط للمستطيل يكون عند مركزه . لتكن h و w هما طولا ضلعي المستطيل ونضعه كما هو موضح في الشكل ١١ ـ ١٤ . بما أن $l(x) = h$ فيكون

$$M_y = \int_a^b \rho l(x) x\, dx = \int_0^w \rho h x\, dx = \rho h \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^w = \frac{\rho h w^2}{2}$$

الكتلة هي الكثافة مضروبة في المساحة . واذن $W = \rho w h$ ويكون $\bar{x} = M_y/W = w/2$. رغم أن الاحداثي y للمركز المتوسط يمكن ايجاده بايجاد M_x ، لكن من الأسهل أن نلاحظ أن بتدوير المستطيل الى الجهة الأخرى وتكرار العمل فاننا فقط نستبدل h و w . اذن $\bar{y} = h/2$.

اذا كانت المنطقة لها خط تماثل ، فان مركزها المتوسط يجب أن يقع على هذا الخط . لاننا اذا قسمنا المنطقة الى شرائط ضيقة عمودية على الخط ، فان المركز المتوسط للمستطيل المقرب يقع على خط التماثل وبالتالى فعزم المستطيل حول الخط يساوى صفراً . بناء على ذلك ، فان حاصل جمع العزوم وبالتالى نهاية حاصل الجمع التى هى عزم المنطقة ، يساوى صفراً . هذه الحقيقة كانت تمكننا من الاستنتاج مباشرة أن الاحداثى y للمركز المتوسط لنصف الدائرة في مثال ٢ بالبند السابق هو صفر .

بما أن $\bar{x} = M_y/W$ لأى منطقة ، فان $M_y = W\bar{x}$ ويمكننا أن نستنتج ، تَما فى المجموعات المحدودة ، أن عزم منطقة حول المحور y يساوى عزم ثقل كتلته تساوى كتلة المنطقة موضوع عند مركز الكتلة .



شكل ١١ ـ ١٤

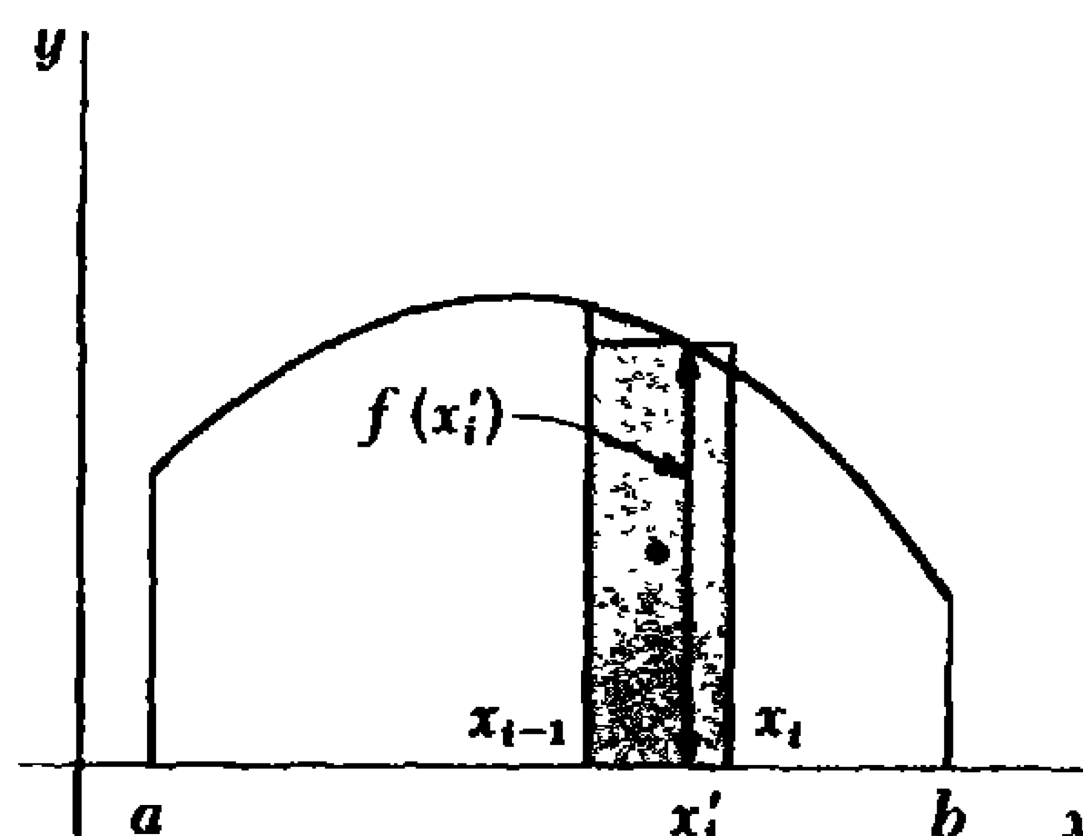
اذا اعطينا اى مستقيم فى المستوى ، فانه يمكننا تدوير المحورين ونقلهما بحيث ينطبق المحور y على الخط ، ويكون لدينا نظير للنظرية ١١ ـ ٢ .

١١ ـ ٤ نظرية عزم منطقة مستوية حول خط ، لا يتغير اذا ركزنا كتلة المنطقة عند مركز الكتلة .

هذه الخاصية يمكن استخدامها لاشتقاق بديل ، وأحيانا صيغة أكثر ملاءمة عن تلك فى (٤) ببند ١١ ـ ٣ ، للعزم حول المحور x لمنطقة مستوية متجانسة تحت منحنى بين b و a .

كما فى حالة العزوم حول الخط $y = c$, نقسم المنطقة الى شرائط ضيقة عمودية على المحور x وندرس المستطيلات المقربة (شكل ١١ ـ ١٥) المركز المتوسط للمستطيل الذى رقمه i هو مركزه ، الاحداثى y له هو $\frac{1}{2} f(x_i)$. عزم المستطيل حول المحور x هو نفسه كما لو كانت كتلة $\rho f(x_i) \Delta x_i$ مركزة عند مركزه و فهو اذن

$$\rho f(x_i') \ \Delta x_i \ \tfrac{1}{2} f(x_i') = \tfrac{1}{2} \rho f^2(x_i') \ \Delta x_i$$



شكل ١١ ـ ١٥

عزم المستطيل حول المحور x مساوى عزم ثقل له نفس الكتلة ، عند المركز المتوسط .

عزم المنطقة يقرب بحاصل جمع هاته . واذن

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho f^2(x) \ dx \qquad (١)$$

نوضح ذلك بأن نوجد بهذه الصيغة العزم حول المحور x للمنطقة فى مثال ببند ١١ ـ ٣ المحدودة بقوس القطع المكافىء $y = \sqrt{2x}$ والمحور x والخط $x = 1$ (شكل ١١ ـ ٩) . لدينا : $y = f(x) = \sqrt{2x}$ ، ومن (١) يكون

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b \rho f^2(x) \ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho 2x \ dx = \rho \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \rho$$

مثال ١ . أوجد المركز المتوسط للمنطقة الموضحة فى الشكل ١١ ـ ١٦ .

المنطقة تتكون من مستطيلين . ضعها على مستوى الاحداثيات كما هو موضح فى الشكل . عزم المنطقة حول كل محور يساوى حاصل جمع العزمين حول كل محور للمستطيلين المكونين للمنطقة . كل مستطيل يمكن استبداله بثقل ، كتلته تساوى كتلة المستطيل ، عند مركزه المتوسط دون تأثير على عزمه . واذن عزما المنطقة هما

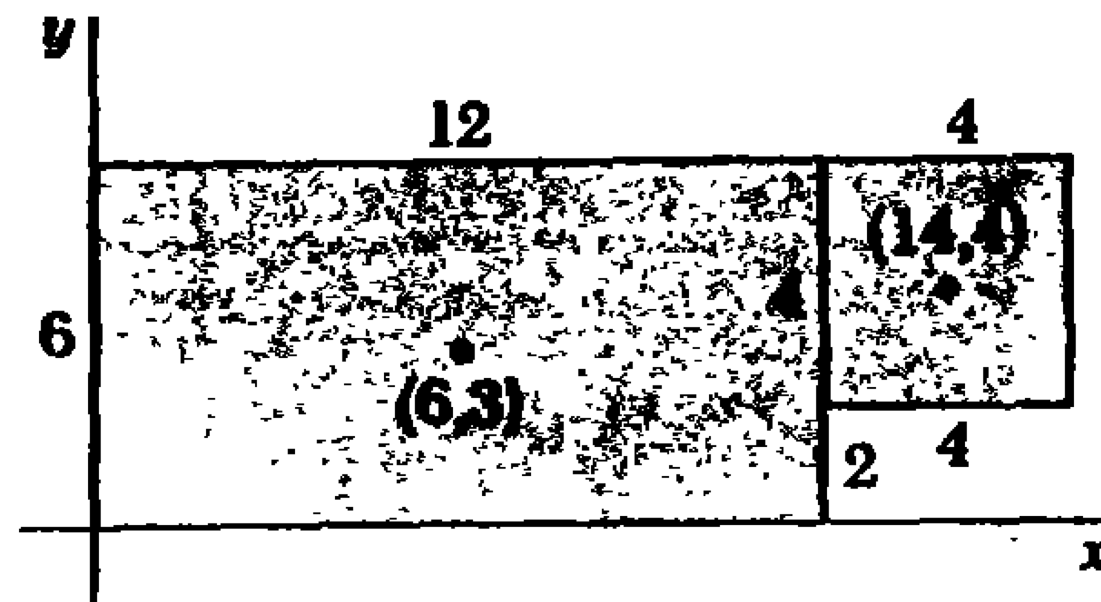
$$M_x = (72\rho)3 + (16\rho)4 = 280\rho$$
$$M_y = (72\rho)6 + (16\rho)14 = 656\rho.$$

لأن

$$W = 72\rho + 16\rho = 88\rho,\ \bar{x} = M_y/W = \tfrac{82}{11} \text{ and } \bar{y} = M_x/W = \tfrac{35}{11}$$

توجد نظرية هامة تربط حجم جسم دورانى بالمركز المتوسط للمساحة المنشئة .

١١ ـ ٥ نظرية بابس Pappus. اذا دارت منطقة مستوية واقعة على جانب واحد لمستقيم فى مستويها ، حول المستقيم ، فان حجم الجسم الناشىء يساوى حاصل ضرب مساحة المنطقة فى المسافة المرسومة بالمركز المتوسط .

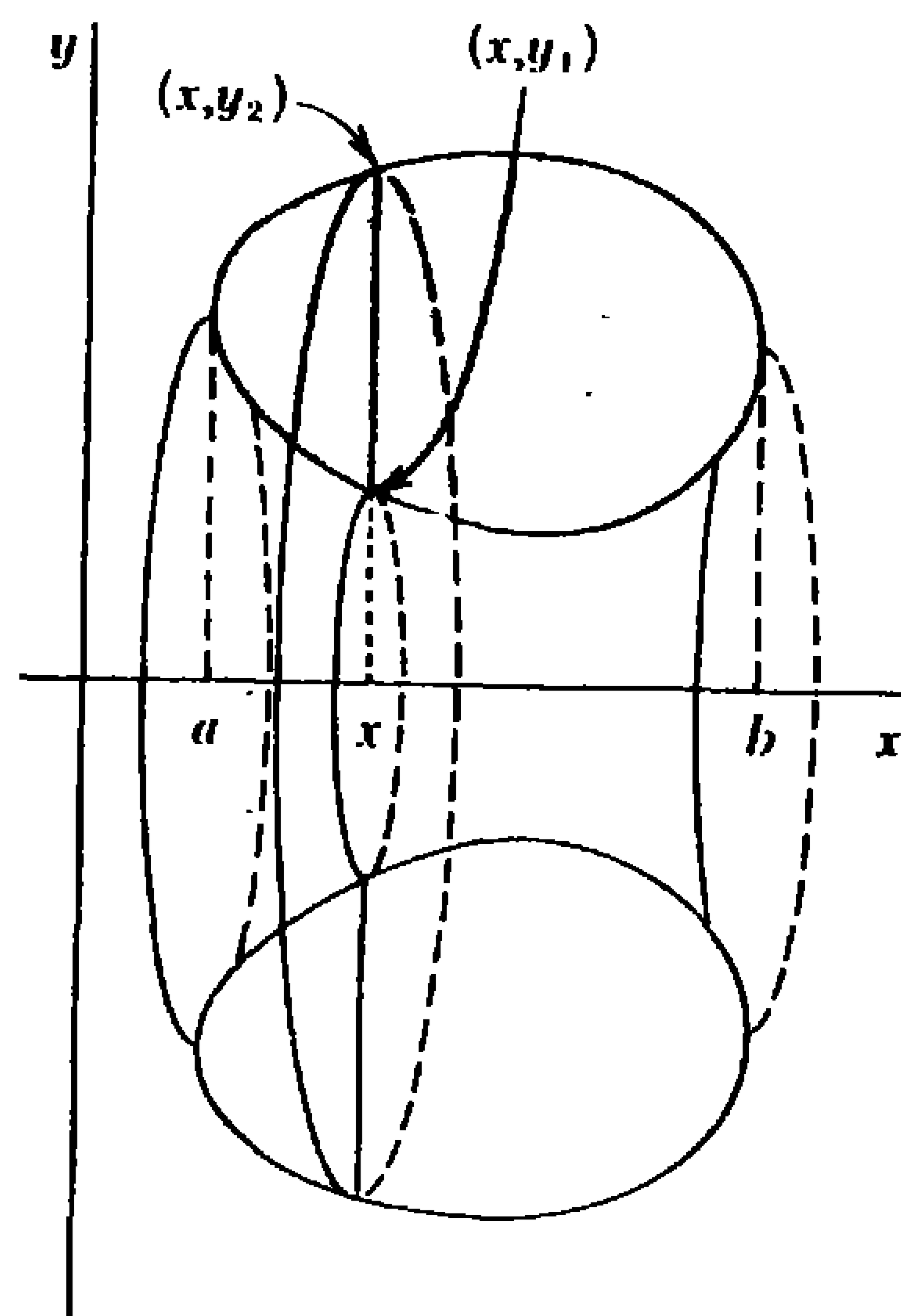


شكل ١١ ـ ١٦

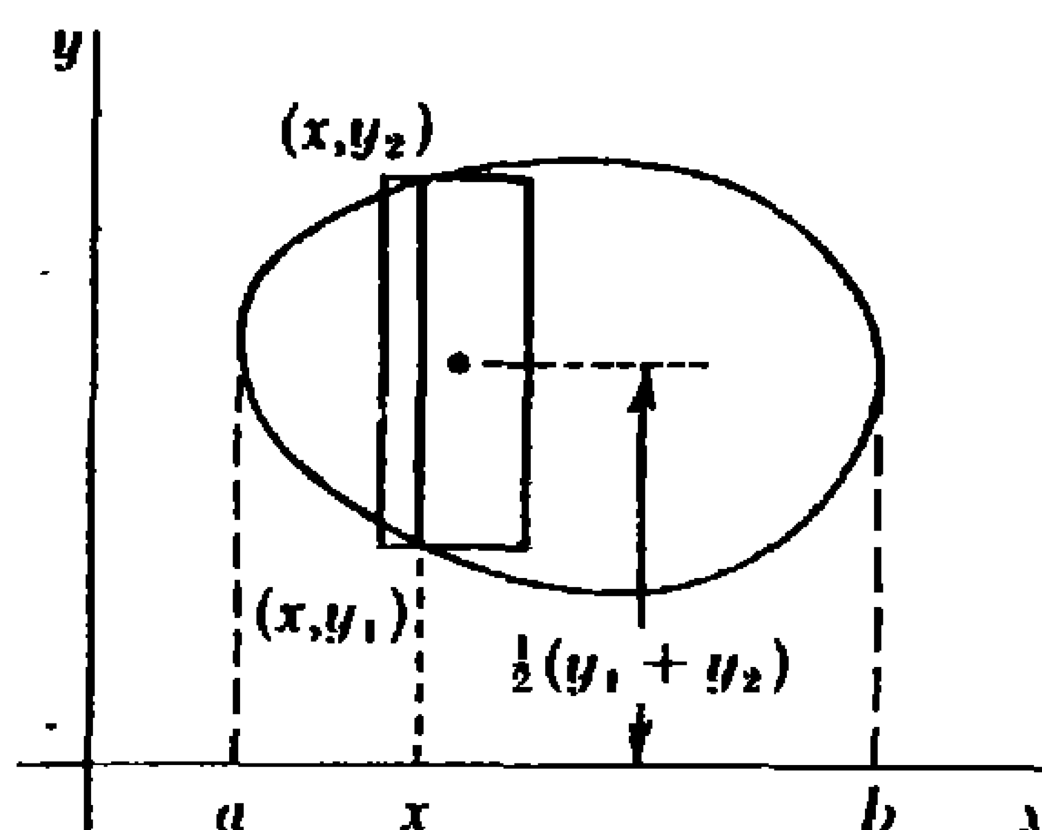
البرهان . ضع المنطقة بحيث أن الخط المستقيم يكون على المحور x (شكل ١١ ـ ١٧) . المستوى العمودى على المحور x عند النقطة x ، يقطع الجسم فى منطقة على هيئة حلقة . اذا كانت y_2 و y_1 هما نصفا قطرى الدائرة الداخلة والدائرة الخارجة ، فحجم الجسم هو

$$V = \int_a^b (\pi y_2^2 - \pi y_1^2)\, dx = \frac{2\pi}{\rho} \int_a^b \rho(y_2 - y_1)\, \frac{y_2 + y_1}{2}\, dx \qquad (٢)$$

المنطقة المنشئة موضحة فى الشكل ١١ ـ ١٨ . الآن $y_2 - y_1$ هو طول المستطيل ، $(y_2 + y_1)/2$ هو الاحداثى y لمنتصفه . حاصل ضربهما فى عرض المستطيل والكثافة هو عزم المستطيل حول المحور x ، ومن ثم التكامل الثانى فى (٢) هو العزم M_x للمنطقة حول المحور x .



شكل ١١ ـ ١٧



شكل ١١ ـ ١٨

اذن $V = (2\pi / \rho) M_x$ ، لكن $M_x = \bar{y}W = \bar{y}\rho A$ ، حيث A هى مساحة المنطقة . اذن : $V = 2\pi \bar{y}A$ ، والنظرية قد برهنت .

مسائل

أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمنحنيات الآتية :

١ ـ $y = 6x - x^2,\ y = 0$ ٢ ـ $y = x^3 - 3x,\ y = 0$ الربع الأول

٣ ـ المنطقة الأكبر $y = 9 - x^2,\ x = -2,\ y = 0$ ٤ ـ $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

٥ ـ $y = e^x + e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$ ٦ ـ $y = \frac{\ln x}{x},\ y = 0,\ x = e$

٧ ـ $y = 4x - x^2,\ y = x$ ٨ ـ $y = x^2 + 2x - 3,\ y = -x^2 + 2x + 5$

٩ ـ $x^2 - y^2 = 1,\ y = 0,\ y = 3$ ١٠ ـ $y = x^2 - 2x - 3,\ y = 2x + 2,\ y = -\frac{1}{3}x + 2$

١١ ـ أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت القوس المركزى للمنحنى $y = \cos x$.

١٢ ـ أوجد المركز المتوسط لقطعة القطع المكافىء المقطوعة بوتره البؤرى العمودى .

١٣ ـ أوجد المركز المتوسط للمنطقة تحت المنحنى $y = 1 / (1 + x^2)$.

١٤ ـ أوجد المركز المتوسط لقطاع دائرى زاويته المركزية θ ونصف قطره r . القطاع الذى زاويته المركزية صغيرة هو تقريب لمثلث . لمثل هذه القطاعات ، هل اجابتك تقرب الى المركز المتوسط للمثلث (أنظر مثال ٣ ـ بند ١١ ـ ٣) ؟

١٥ - أثبت أن كل خط فى المستوى ، يكون العزم حوله لمنطقة فى المستوى صفراً ، يمر بمركز كتلة المنطقة .

أوجد المركز المتوسط لكل من المناطق المحدودة بالمنحنيات القطبية أدناه . (ارشاد : قسم المنطقة الى قطاعات ضيقة ، كما عند إيجاد المساحات . كل قطاع يقرب الى مثلث مركزه المتوسط فى ⅔ المسافة من نقطة الأصل الى المنحنى)

١٦ - $r = e^{\theta},\ \theta = 0,\ \theta = \pi/2\ (0 \leq r \leq e^{\pi/2})$ ١٧ - $r = \theta,\ \theta = \pi/2\ (0 \leq r \leq \pi/2)$

١٨ - $r = a(1 + \cos\theta)$ ١٩ - $r = \sin\theta,\ r = \cos\theta$ ٢٠ - $r = \cos 2\theta$ (العروة اليمنى)

٢١ - التورس هو الجسم الكعكى الناشىء من دوران دائرة حول خط فى مستواها خارج الدائرة . أثبت بنظرية بابس أن حجم التورس هو $2\pi^2 a^2 b$ ، حيث a هى نصف قطر الدائرة المنشئة ، b هى المسافة بين الخط ومركز الدائرة .

٢٢ - مربع ضلعاه يوازيان المحورين ، وطول كل منهما 1 ، ومركزه عند النقطة $(4, 0)$. أوجد بنظرية بابس حجم الجسم الناشىء من دورانه حول المحور y .

٢٣ - أوجد حجم الجسم الناشىء من دوران المنطقة فى المسألة ٢٢ حول الخط المستقيم $y = x$.

٢٤ - أوجد حجم المخروط الدائرى القائم بنظرية بابس .

٢٥ - المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء $y^2 = 4px$ ووتره البؤرى العمودى دارت حول الوتر البؤرى العمودى . أوجد بنظرية بابس حجم الجسم الناشىء هكذا .

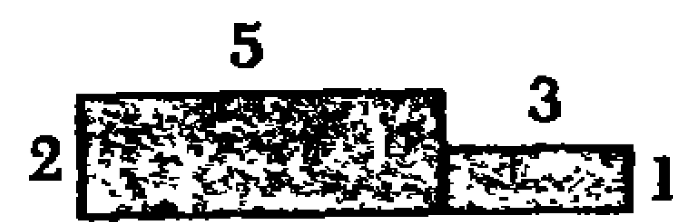
٢٦ - أوجد المركز المتوسط لمنطقة على هيئة نصف دائرة بنظرية بابس وحقق النتيجة فى مثال ٢ ببند ١١ - ٣ .

٢٧ - أوجد بنظرية بابس المركز المتوسط للمنطقة فى الربع الأول المحدودة بالقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ومحورى الاحداثيات .

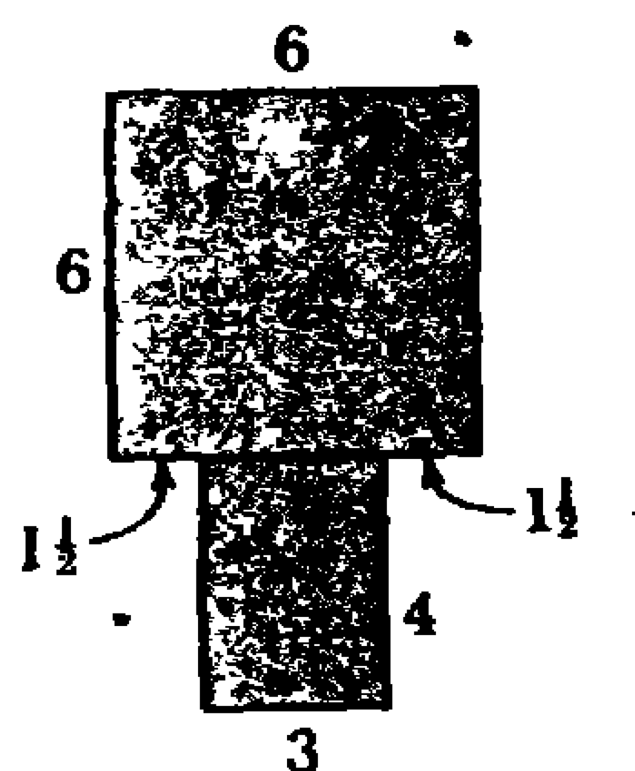
أوجد المركز المتوسط للمنطقة الموضحة فى الأشكال الآتية :

٢٨ - شكل ١١ - ١٩ ٢٩ - شكل ١١ - ٢٠ ٣٠ - شكل ١١ - ٢١

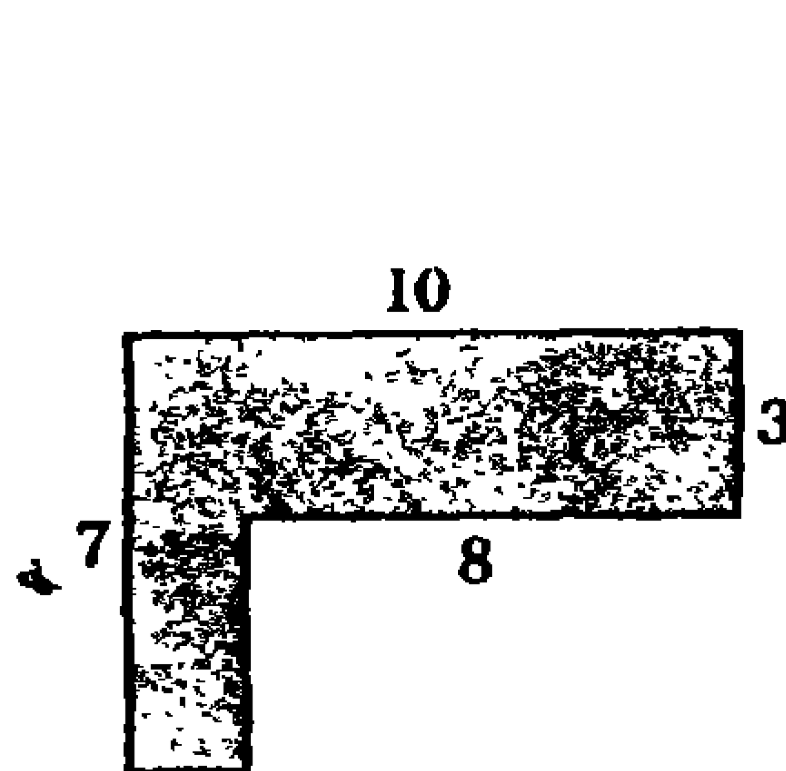
٣١ - شكل ١١ - ٢٢ ٣٢ - شكل ١١ - ٢٣ ٣٣ - شكل ١١ - ٢٤



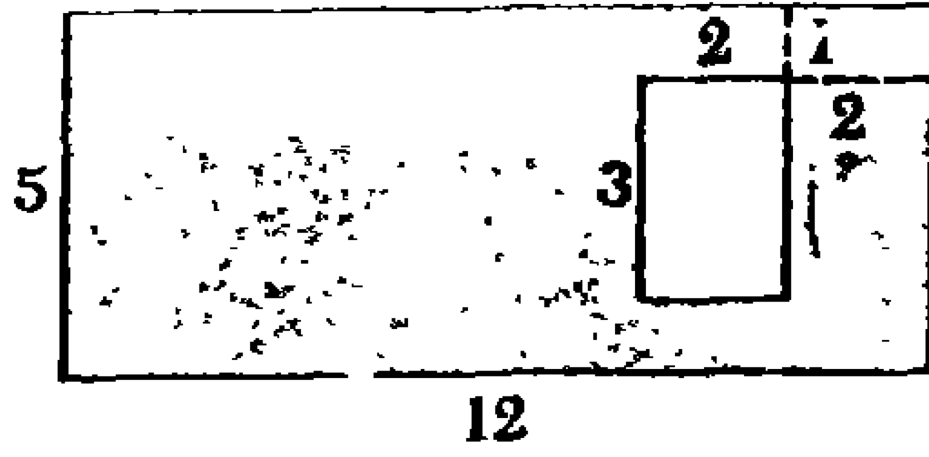
شكل ١١ - ١٩



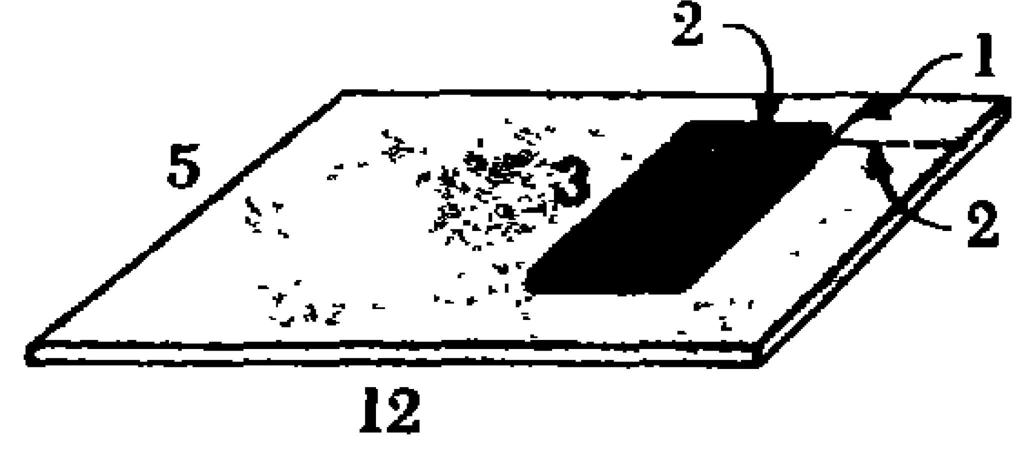
شكل ١١ - ٢٠



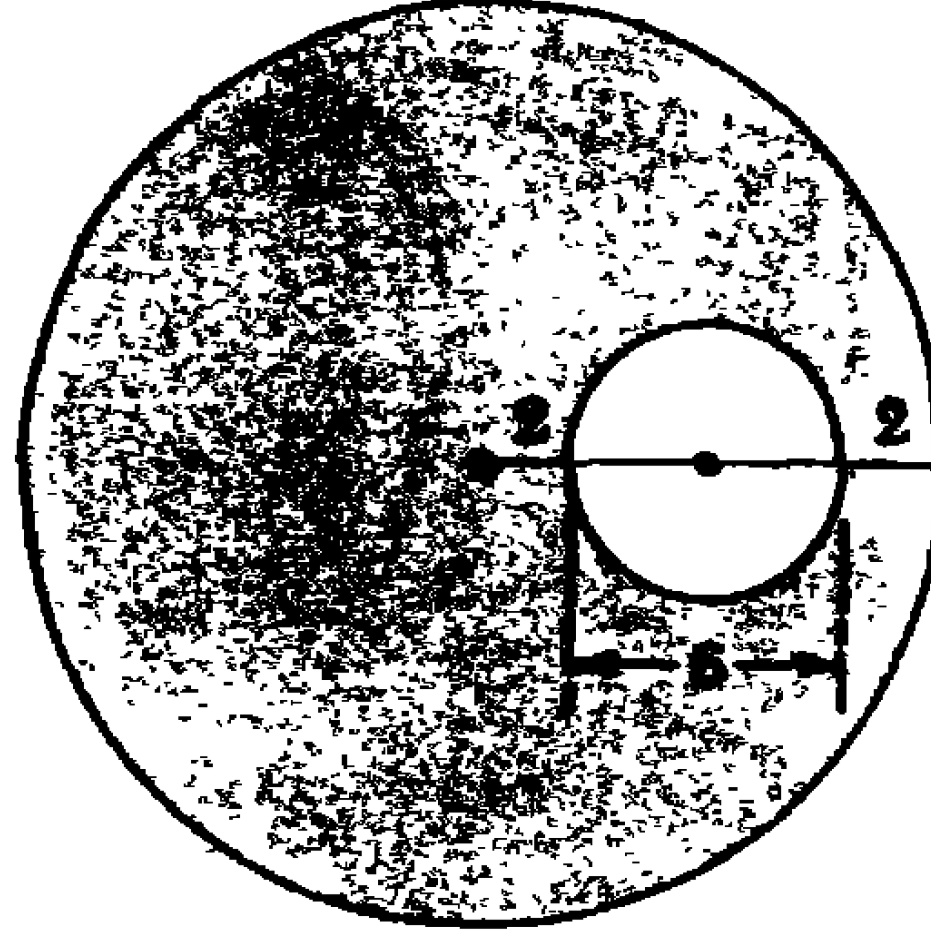
شكل ١١ - ٢١



شكل ١١ ـ ٢٣



شكل ١١ ـ ٢٢



شكل ١١ ـ ٢٤

٣٤ ـ أوجد المركز المتوسط لنصف حلقة محدودة بدائرتين متحدثى المركز . بجعل الدائرة الداخلية تقترب من الدائرة الخارجية ، أثبت أن المركز المتوسط لسلك على شكل نصف دائرة يقطع على خط التماثل على بعد $2r/\pi$ من المركز .

٣٥ ـ أوجد مركز كتلة منطقة على هيئة نصف دائرة وكثافتها عند أى نقطة تساوى بعد النقطة عن القطر الحدى . (ارشاد : ρ ليست ثابتة فى (٢) و (٣) ببند ١١ ـ ٣ . أيضاً $W \neq \rho A$. اذا وضعت المنطقة كما فى الشكل ١١ ـ ١١ ، أثبت أن ، بالرغم من ذلك ، $\bar{x} = M_y/W$) .

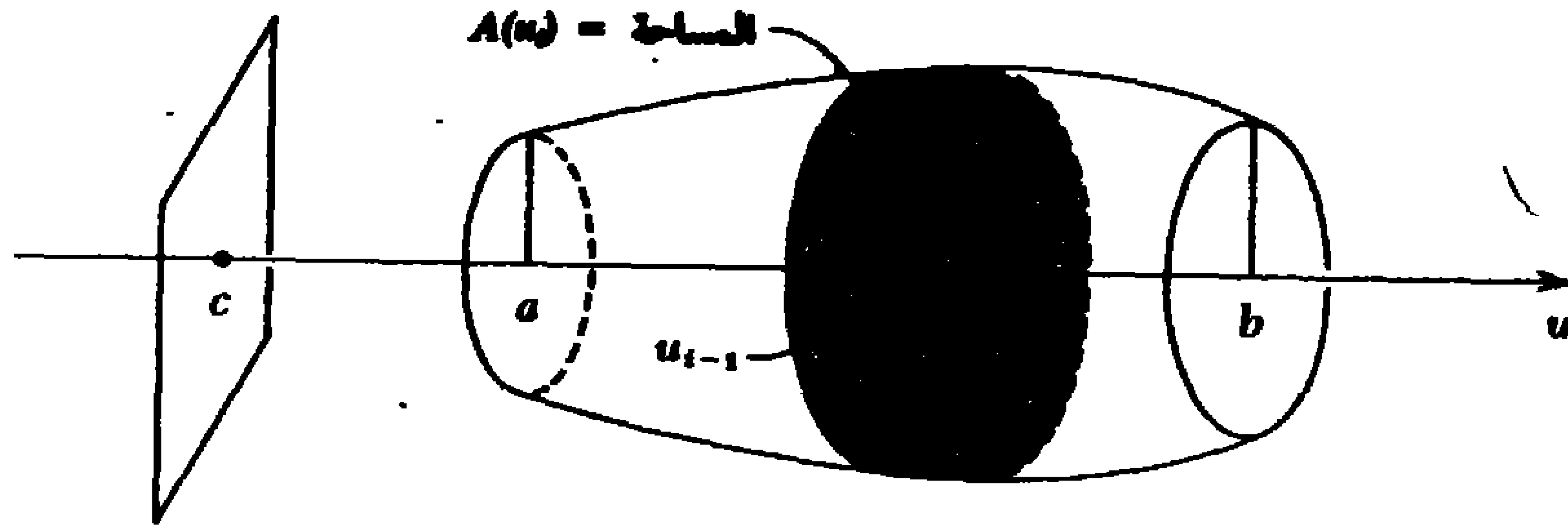
٣٦ ـ أوجد مركز الكتلة لمثلث متساوى الساقين كثافته عند أى نقطة تساوى الجذر التربيعى لبعد النقطة عن القاعدة (أنظر الارشاد فى المسألة ٣٥) .

٣٧ ـ الكثافة عند أى نقطة على قطعة القطع المكافىء $y^2 = 24x$ المقطوعة بالخط المستقيم $x = 6$ تتناسب مع مربع بعد النقطة عن الخط المستقيم . أوجد مركز كتلة القطعة (أنظر الارشاد فى المسألة ٣٥) .

١١ ـ ٥
المركز المتوسط لجسم دورانى

عزم ثقل فى ثلاثة أبعاد يؤخذ بالنسبة الى مستوى وليس بالنسبة الى خط مستقيم ويعرف بأنه حاصل ضرب كتلة الثقل فى المسافة العمودية من المستوى الى الثقل . العزم لمجموعة من الأثقال هو حاصل جمع عزوم هذه الأثقال كل على حده .

من الصعب جداً إيجاد المركز المتوسط لجسم إلا فى أبسط حالة ، وهى حالة الجسم الدورانى المنتظم الكثافة ، والتى سندرسها الآن . لأن الجسم الدورانى متماثل حول محوره ، فان مركزه المتوسط يقع على المحور . لايجاد موضع المركز المتوسط على المحور ، ندخل خط احداثيات u ، يسمى المحور u ، يمتد على محور الجسم (شكل ١١ ـ ٢٥) . نوجد أولا عزم الجسم حول مستوى عمودى على المحور u عند النقطة c .



شكل ١١ ـ ٢٥

حجم الشريحة هو بالتقريب $A(u'_i)\ \Delta\ u_i$.

نقسم الجسم الى شرائح رقيقة بمستويات عمودية على المحور u . لتكن u'_i أى نقطة فى الفترة $[u_{i-1}, u_i]$ المعينة بالشريحة التى رقمها i . اذا كانت $A(u)$ ترمز الى مساحة المقطع الناتج بالمستوى العمودى على المحور u عند النقطة u وكانت ρ هى كثافة المنطقة ، فان كتلة الشريحة رقم i هى بالتقريب $\rho A(u'_i)\ \Delta\ u_i$. عزم الشريحة حول المستوى عند c يعطى بالتقريب بحاصل ضرب كتلة الشريحة فى المسافة الموجهة من c الى u'_i ، أى

$$\rho A(u'_i)(u'_i - c)\ \Delta u_i$$

نهاية حاصل جمع هاته هى

$$M_c = \int_a^b \rho A(u)(u - c)\ du \qquad (١)$$

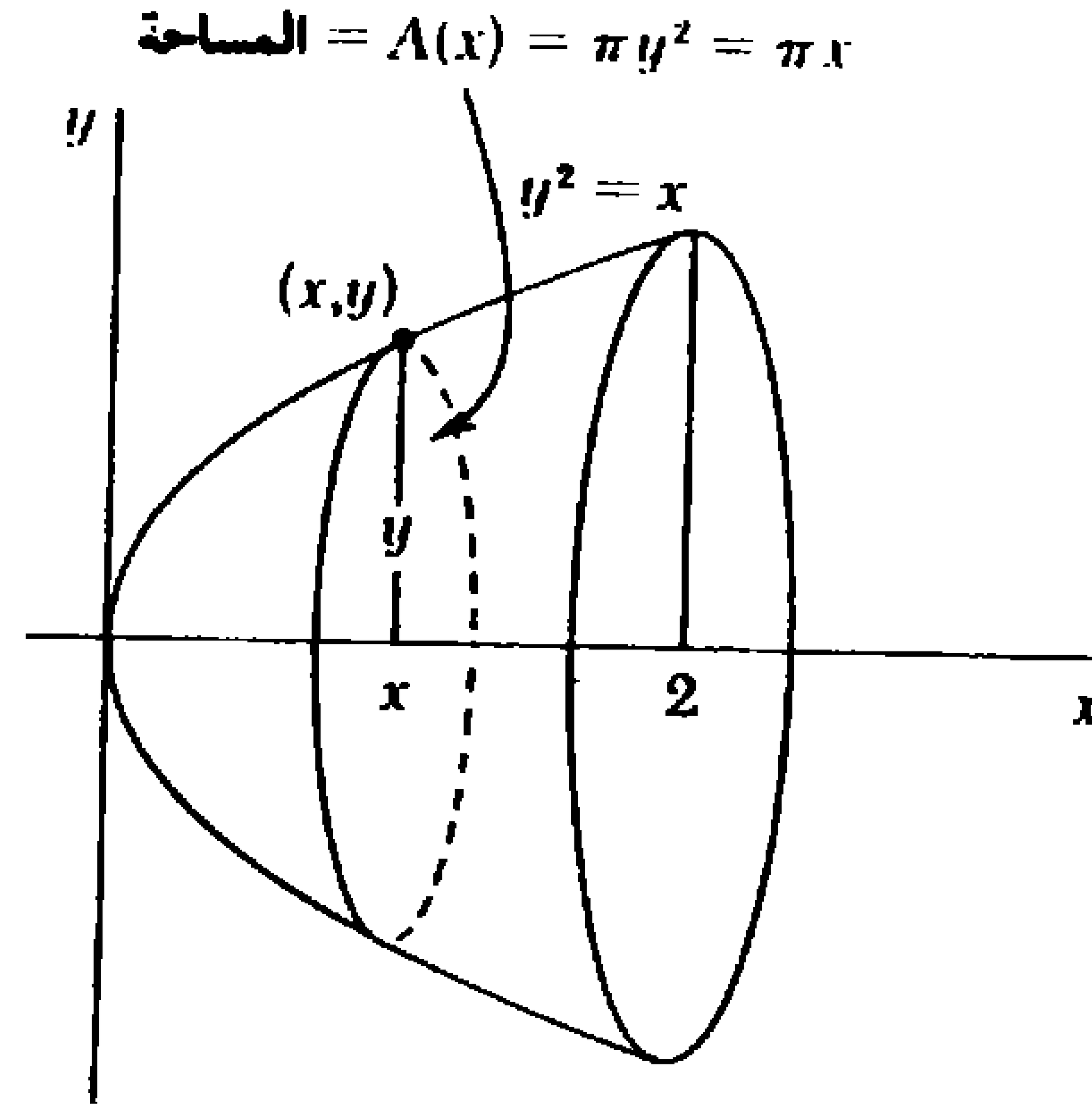
وهى عزم الجسم حول المستوى عند c ، حيث $a < b$ و b و a هما الاحداثيان u لأقصى وضعين على اليسار وعلى اليمين لمستوى الشريحة . العزم M_0 حول المستوى الذى يمر بنقطة الأصل ويتعامد مع المحور u هو

$$M_0 = \int_a^b \rho A(u) u\ du \qquad (٢)$$

اذا كانت V و W هما حجم وكتلة المنطقة ، فان $W = \rho V$ و $V = \int_a^b A(u)\ du$

ومن المعادلة (١) يكون

$$M_c = \int_a^b \rho A(u) u\ du - c\rho \int_a^b A(u)\ du = M_0 - c\rho V = M_0 - cW$$



شكل ١١ - ٢٦

اذن العزم يكون صفراً حول المستوى الذى يمر بالنقطة $\bar{u}$ ، حيث $\bar{u} = M_0/ W$. هذا هو الاحداثى u للمركز المتوسط للجسم .

مثال ١ . أوجد المركز المتوسط للجسم الدورانى الناشىء من دوران المنطقة المحدودة بالقطع المكافىء $x = y^2$ والخط المستقيم $x = 2$ ، حول المحور x .

ندع المحور x هو المحور u ونوجد W وM_0 . التكامل (٢) للعزم M_0 يصبح

$$M_0 = \int_a^b \rho A(x) x \, dx \qquad (٣)$$

لتكن (x, y) نقطة على القطع المكافىء المنشىء (شكل ١١ - ٢٦) . مساحة المقطع عند النقطة x على المحور x هى $A(x) = \pi y^2$. بما أن $y^2 = x$ ، فهذه المساحة يمكن التعبير عنها بدلالة x ، $A(x) = \pi x$. حدا التكامل فى (٣) هنا الاحداثيان x لأقصى وضعين على اليسار وعلى اليمين للمستوى القاطع ، وهما 2 و 0 . اذن

$$M_0 = \int_a^b \rho A(x) x \, dx = \int_0^2 \rho \pi x^2 \, dx = \frac{8\rho\pi}{3}$$

حجم الجسم هو

$$V = \int_0^2 A(x) \, dx = \int_0^2 \pi x \, dx = 2\pi$$

وبالتالى $W = 2\pi \rho$ ، ويكون $\bar{x} = M_0/W = \frac{4}{3}$.

مسائل :

أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من الدوران حول المحور x للمناطق المحدودة بالمنحنيات أدناه :

١ - $y = \frac{4}{x}, y = 0, x = 2, x = 4$

٢ - $x^2 - y^2 = a^2, x = 2a, a > 0$

٣ - $y = e^x, y = 0, x = 0, x = b > 0$

٤ - $y = 2\sqrt{x}, y = 0, x + 2y = 5$

٥ - $y = \ln x, y = 0, x = e$

٦ - $y = e^x + e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1$

٧ - $y = x^2, x = 0, y = 4$ (فى الربع الأول)

٨ - $y = x + 1/x, y = \frac{5}{2}$

أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من الدوران حول المحور y للمناطق المحدودة بالمنحنيات أدناه :

٩ - $y = x^2 + 1, y = 10$

١٠ - $y = x^3, x = 0, y = 4$

١١ - $y^2 = 4px, x = 0, y = c > 0$

١٢ - $x^2 - y^2 = 1, y = 0, y = 2$

١٣ - $y = e^x, y = 0, x = -1, x = 0$

١٤ - $y = \ln x, y = 0, x = e$

١٥ - $y = x^2, y = 0, y = -2x + 8$ (فى الربع الأول)

١٦ - أوجد المركز المتوسط لنصف كرة .

١٧ - أوجد المركز المتوسط لمخروط دائرى قام نصف قطره r وارتفاعه h .

١٨ - أوجد المركز المتوسط للجسم الناتج من دوران النصف الأيمن للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ حول المحور x .

١٩ - اذا دارت المنطقة تحت القوس المركزى وعلى يمين المحور y للمنحنى $y = \cos x$ حول المحور x فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .

٢٠ - اذا دارت المنطقة فى الربع الأول المحدودة بالقطع المكافىء $y = x^2$ والمحور y والخط المستقيم $y = a, a > 0$ حول الخط المستقيم $y = a$ فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .

٢١ - اذا دارت المنطقة فى الربع الأول المحدودة بالقطع الزائد $y = 1/x$ والخطين $y = 2$ و $x = 2$ حول الخط $x = 2$ فأوجد المركز المتوسط للجسم الناتج .

٢٢ - جسم على هيئة مكعب ، طول ضلعه a ، يعلوه نصف كرة قاعدتها لأسفل وقطرها a أوجد المركز المتوسط للجسم .

٢٣ - لعبة على هيئة نصف كرة نصف قطرها 2 يعلوها مخروط نصف قطره 2 وارتفاعه 4 . لكى تستقر اللعبة عندما تهتز على قاعدتها ، مركز الكتلة لها يجب أن يقع أسفل مركز الكرة التى نصف الكرة جزء منها . اذا كانت كثافة المخروط 1 ، فماذا يجب أن تكون كثافة نصف الكرة للاستقرار ؟

٢٤ - هرم ارتفاعه h وقاعدته مربعة وطول ضلعها a . رأسه فوق مركز القاعدة . أوجد المركز المتوسط للهرم .

٢٥ - أوجد مركز الكتلة لنصف كرة كثافتها عند أى نقطة ضعف بعد النقطة عن القاعدة . (ارشاد : ρ ليست ثابتة فى (١) ، (٢) . أيضاً $W \neq \rho V$. أثبت أن ، بالرغم من ذلك ، $\bar{u} = M_0/W$.

٢٦ ـ مخروط دائرى قائم نصف قطره 4 وارتفاعه 8 . كثافته عند أى نقطة تتناسب مع مربع بعد النقطة عن القاعدة . أوجد مركز كتلة المخروط (أنظر الارشاد فى المسألة ٢٥) .

١١ ـ ٦
الشغل

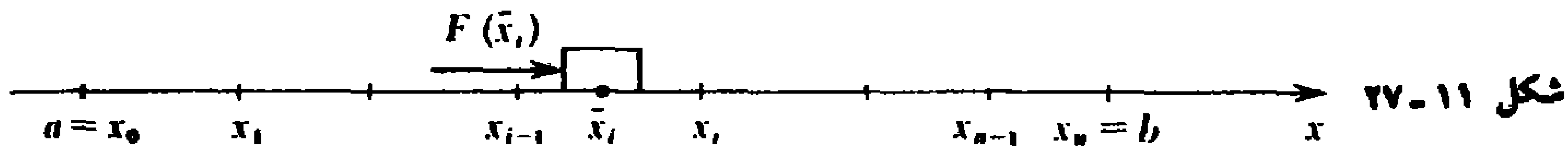
اذا أثرت قوة ثابتة مقدارها F على جسم فحركته مسافة d على خط مستقيم ، فان المقدار E للشغل المبذول على الجسم ، بالقوة ، يعرف بأنه

$$E = Fd \tag{1}$$

فمثلا ، اذا رفع ثقل مقداره 20 lb مسافة 15 ft ، فان مقدار القوة التى يجب أن تؤثر على الثقل لكى تتغلب على الجاذبية هو 20 lb ، والشغل المبذول هو

$$E = 20(15) = 300 \text{ ft-lb}$$

اذا كانت وحدة المسافة هى القدم ووحدة القوة هى الباوند ، فان وحدة الشغل هى قدم ـ باوند . الشغل أيضاً يمكن قياسه بالقدم ـ طن ، جرام ـ سنتيمتر وما يشبه ذلك .



شكل ١١ ـ ٢٧

اذا كانت القوة المؤثرة على الجسم غير ثابتة خلال المسافة d ، فان (١) لا تعطى الشغل المبذول ويجب استخدام طرق منقحة . ليكن الخط المستقيم الذى يتحرك عليه الجسم هو خط الاحداثيات x ولنفرض أن تحت تأثير القوة يتحرك الجسم من a الى b ، حيث $a < b$. لتكن $F(x)$ مقدار القوة عندما يكون الجسم عند النقطة x (شكل ١١ ـ ٢٧) . سندرس فقط الحالة التى تكون فيها القوة $F(x)$ موجهة على الخط ومتصلة : ليكن

$$[a = x_0, x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_{n-1}, x_n = b]$$

تجزيئاً للفترة $[a, b]$. اذا كان معيار التجزىء صغيراً ، فان القوة تتغير لكن قليلا خلال كل فترة جزئية ، وفى الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$ التى هى رقم i ، مقدارها بالتقريب هو $F(\bar{x}_i)$, حيث $\bar{x}_i$ أى نقطة فى الفترة الجزئية . تقريب الى الشغل المبذول على الجسم فى الحركة من x_{i-1} الى x_i هو ، بالمعادلة (١) ، $F(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$ ، والشغل الكلى المبذول فى حركة الجسم من a الى b هو بالتقريب حاصل الجمع

$$\sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i)\ \Delta x_i \tag{2}$$

هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $F(x)$. باستخدام تجزىء دقيق دقة كافية يمكن التقريب الى الشغل الى أى درجة نريدها من الدقة بحواصل جمع على الصورة (٢) ، وتبعاً لذلك يعطى الشغل بالضبط بنهاية حواصل الجمع هذه

$$E = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

حيث w هى معيار التجزىء . هذه النهاية هو التكامل المعين

$$E = \int_a^b F(x)\ dx$$

هذا التكامل يعطى أيضاً تعريفاً مقبولا للشغل المبذول دون القيد $a < b$ بفرض أن نجعل $F(x)$ مقدار القوة باشارتها . نقصد بذلك المقدار نفسه اذا كانت القوة متجهة فى الاتجاه الموجب لخط الاحداثيات وسالب المقدار اذا كان القوة متجهة فى الاتجاه السالب .

١١ - ٦ تعريف . لتكن $F(x)$ مقدار القوة ، باشارتها ، التى تؤثر على جسم عند النقطة x على خط الاحداثيات لتسبب حركته على الخط ، ولنفرض أن القوة متجهة على الخط . كمية الشغل المبذول E على الجسم ، بواسطة القوة ، فى تحريكه من a الى b هى

$$E = \int_a^b F(x)\ dx$$

مثال ١ . زنبرك طوله الطبيعى ، أى طوله غير المشدود ، 12 in ، أوجد الشغل المبذول لاستطالته 3 in .

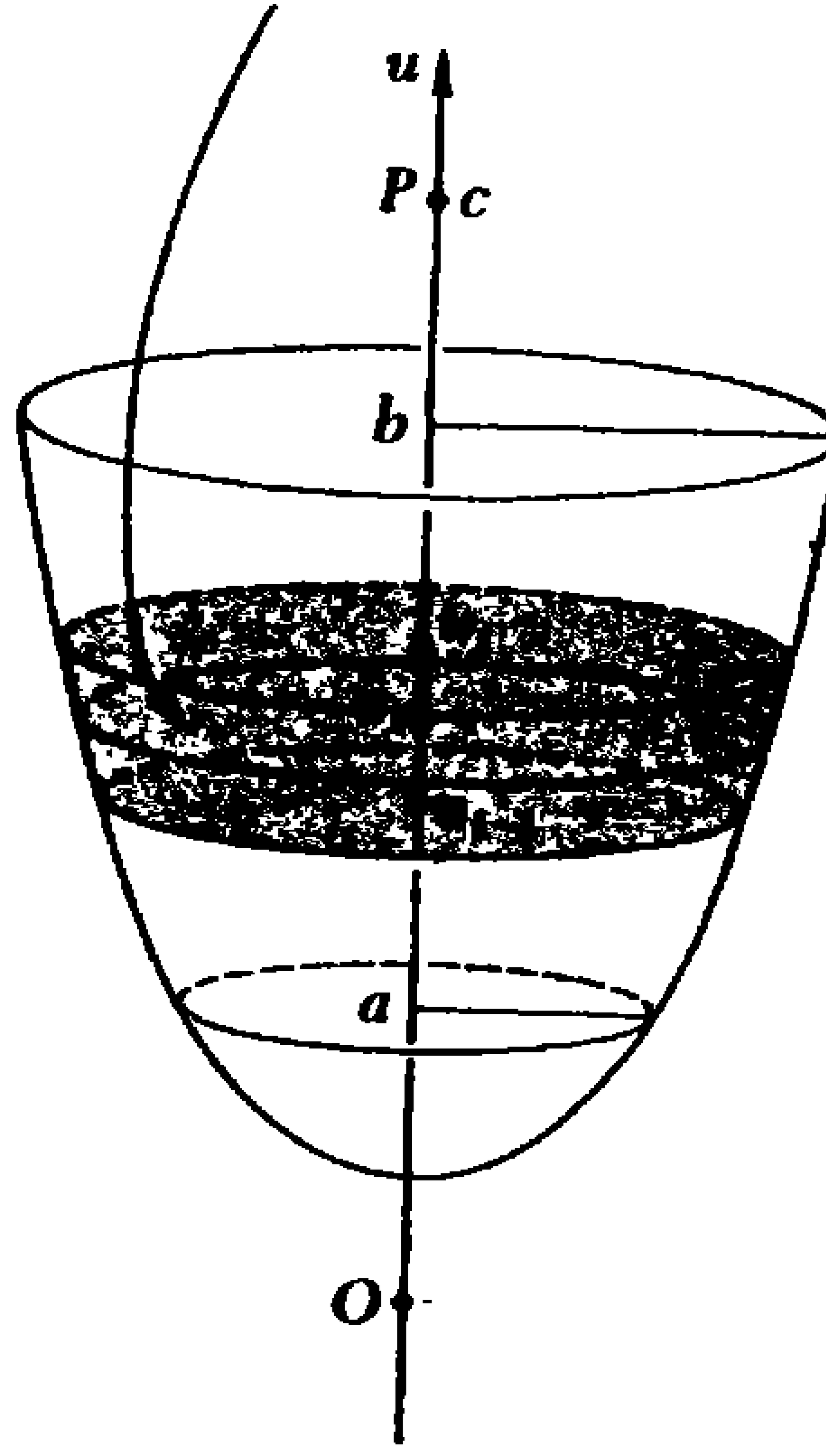
مقدار القوة المطلوبة ليظل الزنبرك فى حالة شد أو ضغط ، بقانون هوك (Hooke) ، يتناسب مع المسافة التى يستطيلها أو يتضاغطها الزنبرك . ندخل خط الاحداثيات x على محور الزنبرك ، وحيث نقطة الأصل عند الطرف غير المثبت للزنبرك عندما يكون فى حالته الطبيعية . اذا كانت $F(x)$ مقدار القوة باشارتها المطلوبة لاستطالة الزنبرك أو تضاغطه مسافة x ، فان بقانون هوك

$$F(x) = kx \qquad (٣)$$

الثابت الموجب k يعتمد على الصلابة والطول الطبيعى للزنبرك ولتعيينه نحتاج معلومات إضافية . نفرض أننا نحتاج الى قوة مقدارها 20 lb ليظل الزنبرك مشدوداً الى مسافة 6 in . عندئذ يكون $20 = k6$ ومنها $k = \frac{10}{3}$ ، (٣) تصبح لهذا الزنبرك الخاص $F(x) = \frac{10}{3}x$. الشغل المبذول لاستطالة الزنبرك 3 in هو ، من التعريف ١١ - ٦ ،

$$E = \int_0^3 \tfrac{10}{3}x\ dx = \tfrac{5}{3}x^2\Big|_0^3 = 15 \text{ in.-lb}$$

مسألة شائعة هى إيجاد الشغل المبذول لضخ كل أو جزء من سائل فى وعاء لنقطة ما فوق أو على نفس ارتفاع المستوى الأصلى للسائل . رغم أن مقدار القوة المطلوبة يكون ثابتاً ، لأنه وزن السائل ، فان السائل قرب قمة الوعاء يرفع مسافة أقصر عن السائل قرب القاعدة ، وعلى ذلك لا يمكن استخدام (١) . يمكننا ، مع ذلك ، إيجاد الشغل المبذول بتقسيم السائل الى شرائح رقيقة أفقية . كل نقطة لأى شريحة واحدة تتحرك بالتقريب نفس المسافة والشغل المطلوب لرفع كل شريحة يمكن التقريب اليه . حاصل جمع كميات الشغل المبذولة ، كل على حدة ، هو تقريب للشغل الكلى .



شكل ١١ ـ ٢٨

سنشرح العملية بتفصيل أكثر . ندخل خط احداثيات u عمودى على سطح السائل ومتجه الى أعلى (شكل ١١ ـ ٢٨) . نقطة الأصل يمكن أن تكون عند أى نقطة مناسبة . لتكن $a < b$ و b و a هما الاحداثيان u لمستوى السائل عند نهاية وبدء عملية الضخ لتكن σ هى وزن وحدة الحجم للسائل . مثلا للماء ، σ هى بالتقريب 62.5 lb/ cu. ft . نقسم السائل الى شرائح أفقية رقيقة بمستويات عمودية على المحور u . هذه تعين تجزيئاً

$$[a = u_0, u_1, u_2, \ . \ . \ . \ . \ , u_{n-1}, u_n = b]$$

للفترة $[a, b]$. لتكن $\bar{u}_i$ أى نقطة فى الفترة الجزئية رقم i أى $[u_{i-1}$ و $u_i]$. اذا كانت $A(u)$ ترمز الى مساحة مقطع السائل بمستوى عمودى على المحور u عند النقطة u ، فان حجم الشريحة رقم i هو بالتقريب $A(\bar{u}_i)\, \Delta u_i$ مقدار القوة اللازمة لرفع هذه الشريحة هو وزنها ، وهذا بالتقريب هو $\sigma A(\bar{u}_i)\, \Delta u_i$. الشغل اللازم لرفع الشريحة رقم i للنقطة P التى احداثيها c هو ، من (١) بالتقريب حاصل ضرب هذا العدد فى المسافة التقريبية $c - \bar{u}_i$ التى ترفعها الشريحة ،

$$(c - \bar{u}_i)\sigma A(\bar{u}_i)\ \Delta u_i$$

حاصل جمع هاته ، يكون

$$\sum_{i=1}^{n} (c - \bar{u}_i)\sigma A(\bar{u}_i)\ \Delta u_i \qquad (٤)$$

هو تقريب للشغل الكلى المبذول لرفع كل الشرائح للنقطة P . كلما زادت دقة التجزىء ، كلما كان التقريب أفضل . نهاية حاصل الجمع هى بالضبط الشغل المبذول . أى أن

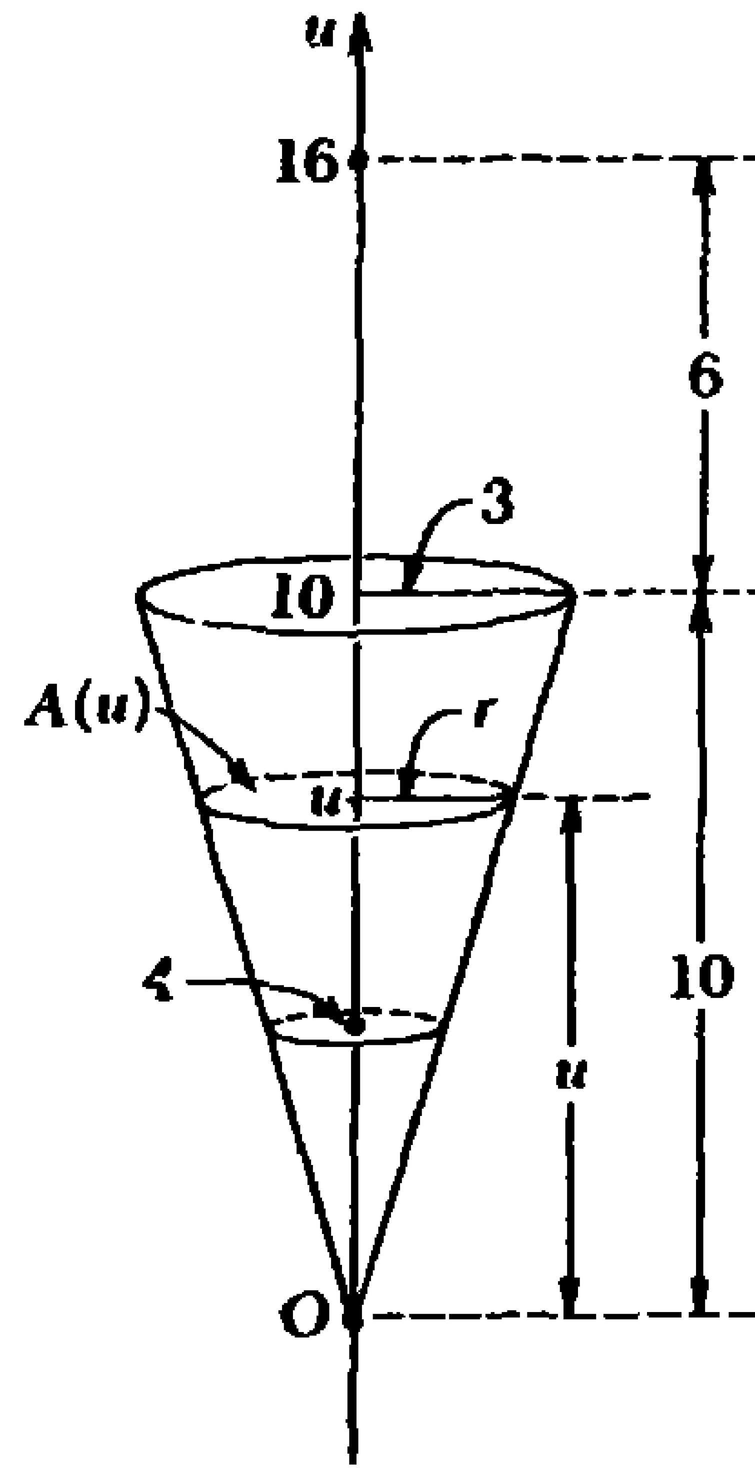
$$E = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} (c - \bar{u}_i)\sigma A(\bar{u}_i)\, \Delta u_i$$

(٥)

$$= \int_a^b (c - u)\sigma A(u)\, du$$

حيث w هى معيار التجزىء .

مثال ٢ . مخروط دائرى قائم ارتفاعه 10 ft وقطر قاعدته 6 ft موضوع كما فى الشكل ١١ ـ ٢٩ ، وهو مملوء بالماء . يضخ الماء منه الى الخارج الى نقطة على ارتفاع 6 ft أعلى القمة الى أن يصبح عمق الماء المتبقى 4 ft . أوجد الشغل المبذول .



شكل ١١ ـ ٢٩

ليكن المحور u هو محور المخروط مع أخذ نقطة الأصل عند رأس المخروط . احداثى c فى (٥) هو 16 . حدا التكامل هما الاحداثيان ، لمستوى سطح الماء عند نهاية وبدء عملية الضخ ، وبالتالى هما $b = 10$ و $a = 4$ اذن من (٥) الشغل المبذول هو

$$E = \int_4^{10} (16 - u)\sigma A(u)\, du$$

اذا كانت r هى نصف قطر الشريحة عند النقطة u ، فان $A(u) = \pi r^2$. لايجاد r بدلالة u ، لدينا من تشابه المثلثات $r/3 = u/10$. اذن

ويكون $A(u) = \pi r^2 = \pi \frac{9}{100} u^2$

$$E = \int_4^{10} (16 - u)\sigma \frac{9\pi}{100} u^2\, du = \frac{9\pi\sigma}{100} \int_4^{10} (16u^2 - u^3)\, du$$

$$= \frac{9\pi\sigma}{100} \left[\frac{16}{3} u^3 - \frac{u^4}{4}\right]_4^{10} = \frac{5751\pi\sigma}{25} \approx 45{,}168 \text{ ft-lb}.$$

مسائل :

١ ـ الطول الطبيعي لزنبرك معين هو 16 in. اذا كانت القوة 8 lb ستضغط الزنبرك الى طول 12 In ، فما مقدار القوة اللازمة لضغط الزنبرك الى طول 9 in. ؟ أوجد الشغل المبذول لضغطه من الطول 12 in الى الطول 9 in .

٢ ـ مقدار قوة جذب الأرض لجسم كتلته m عند أى نقطة داخلها وعلى بعد r من المركز هو mgr / R ، حيث R هى نصف قطر الأرض وحيث g هى عجلة الجاذبية الأرضية عند سطح الأرض . هذا هو وزن الجسم عند هذه النقطة . أوجد الشغل المبذول لرفع جسم من مسافة a تحت سطح الأرض الى السطح .

٣ ـ دلو ماء يزن 24 lb يرفع رأسياً بمعدل 30 ft/ min . وزن الدلو نفسه يهمل . أوجد الشغل المبذول لرفع الدلو 60 ft .

٤ ـ حل المسألة ٣ بفرض أن الماء يتسرب من الدلو بمعدل ثابت مقداره 2 lb/ min .

٥ ـ كتلة وزنها c lb يراد رفعها لقمة مبنى ارتفاعه h ft بحبل مربوط بونش على قمة المبنى . اذا كان الحبل وزنه b lb/ ft ، أوجد الشغل المبذول .

٦ ـ الكترونان يتنافران كل منهما من الآخر بقوة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما . أوجد الشغل المبذول فى حركة الكترون من نقطة 2 units من الكترون ثابت الى نقطة 1 unit بعيداً عن الخط الواصل بينهما .

٧ ـ الكترونان يتنافران كل منهما من الآخر بقوة تتناسب عكسياً مع مربع المسافة بينهما . الكترونان يظلان ثابتين على خط الاحداثيات عند النقطتين 6 و -6 . أوجد الشغل المبذول لتحرك الكترون ثالث على الخط (أ) من النقطة -2 الى النقطة 3 ، (ب) من 10 الى 7 .

٨ ـ أسطوانة طولها h ومقطعها مساحته A ثابتة ، والاسطوانة مقفلة عند طرف واحد . صمام يضغط غازاً فى الاسطوانة . ليكن p الضغط (القوة لوحدة المساحة) على الصمام ، الناتج عن الغاز . اذا كان محور الاسطوانة هو المحور x ، متجهاً نحو الطرف المقفل ، فاثبت أن الشغل المبذول لتحريك الصمام من نقطة x_1 الى نقطة x_2 هو $E = A \int_{x_1}^{x_2} p\, dx$.

٩ ـ بالرجوع الى المسألة ٨ ، أوجد E اذا كانت العلاقة بين الضغط والحجم v للغاز هى $pv = c$ حيث c ثابت ما .

١٠ ـ بالرجوع الى المسألة ٨ ، أوجد E اذا كانت العلاقة بين الضغط والحجم v للغاز هى $pv^{1.4} = c$ حيث c ثابت ما .

١١ ـ صهريج ارتفاعه 6 ft وقاعدته مربعة طول ضلعها 6 ft مملوء بالماء . أوجد الشغل المبذول لضخ نصف كمية الماء فوق قمة الصهريج .

١٢ ـ حل المسألة ١١ اذا كان الماء يضخ خلال أنبوبة فتحتها على بعد 5 ft فوق قمة الصهريج .

١٣ ـ صهريج أسطوانى نصف قطره r وارتفاعه h . أوجد الشغل المبذول لضخ الماء فوق قمة

الصهريج اذا كان (أ) الصهريج ملىء وكل الماء يضخ للخارج ، (ب) الصهريج ملىء بالماء ونصف الماء يضخ للخارج ، (ج) الصهريج ملىء للنصف وكل الماء يضخ للخارج .

١٤ - صهريج مياه مخروطى الشكل ، موضوع كما هو موضح فى الشكل ١١ - ٢٩ ، نصف قطره 2 ft وارتفاعه 6 ft . اذا كان الصهريج مملوءاً لنصفه ، أوجد الشغل المبذول لضخ الماء لقمة الصهريج .

١٥ - وعاء على هيئة نصف كرة نصف قطرها r ft ، ملىء بالماء . أوجد الشغل المبذول لضخ الماء فوق قمة الوعاء .

١٦ - صهريج معين عمقه 8 ft وهو سطح دورانى ناتج من دوران القطع المكافىء $y = \frac{1}{2}x^2$ حول محوره . اذا كان الصهريج ملىء بالماء ، فأوجد الشغل المبذول لضخ الماء الى النقطة 10 ft فوق قمة الصهريج .

١٧ - صهريج أسطوانى أفقى قطره 4 ft وطوله 10 ft ملىء بزيت ثقله 60 lb/ cu ft . يفرغ الصهريج بمضخة موضوعة على ارتفاع أربعة أقدام فوق قمة الصهريج . أوجد الشغل المبذول لتفريغ الصهريج .

١٨ - صهريج تخزين على هيئة نصف كرة نصف قطرها 12 ft ، تعلوها أسطوانة لها نفس نصف القطر وارتفاعه 8 ft . اذا كان الصهريج مليئاً بالسائل لغاية 2 ft من القمة ، فأوجد الشغل المبذول لضخ السائل فوق قمة الصهريج .

١١ - ٧
ضغط السائل

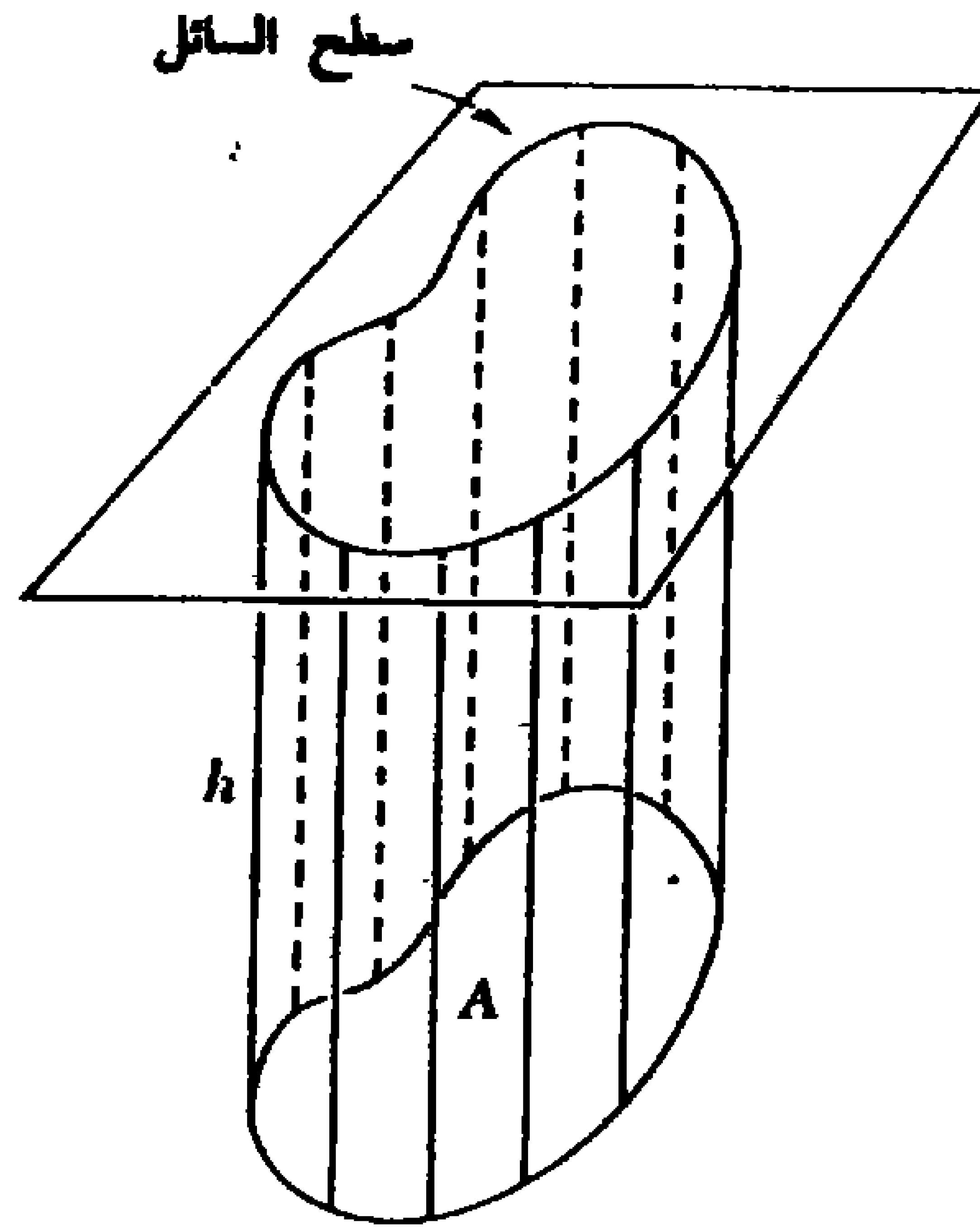
اذا كانت منطقة مستوية أفقية مساحتها A تحت سطح سائل بـ h units ، فان وزن عمود السائل فوق المنطقة يبذل قوة عليها (شكل ١١ - ٣٠) . الوزن هو الحجم Ah للعمود مضروباً فى الوزن σ لكل وحدة حجم للسائل ، وهذا الوزن $Ah\sigma$ يعرف بأنه القوة F على المنطقة ، $F = Ah\sigma$. للماء ، σ تكون بالتقريب 62.5 lb/ cu ft . القوة على وحدة المساحة تسمى ضغط السائل على عمق h اذا كانت p ترمز الى الضغط فان

$$p = \frac{F}{A} = \sigma h$$

والقوة على منطقة أفقية مساحتها A هى

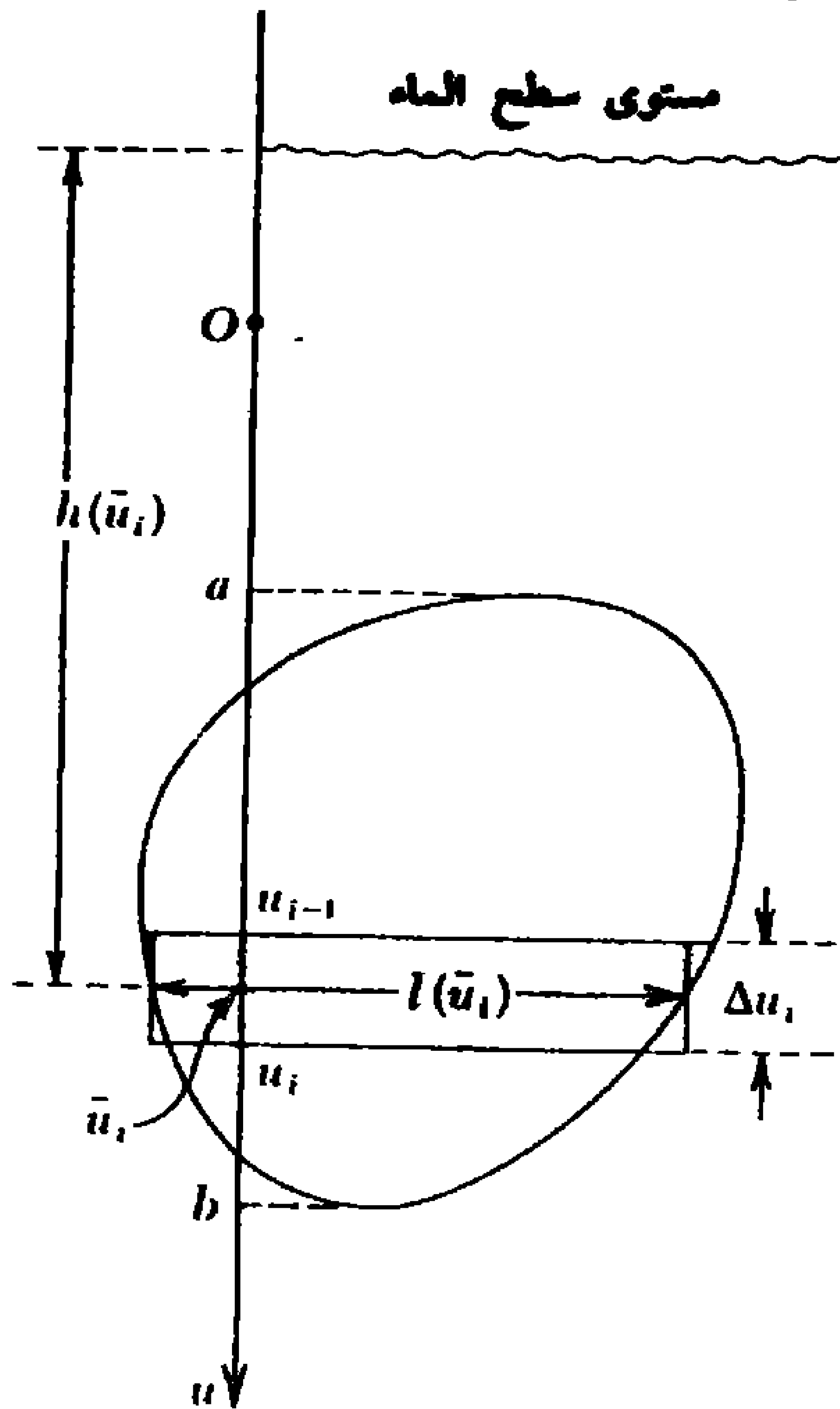
$$F = pA \qquad (١)$$

من أساسيات الفيزياء ، ان عند كل نقطة ، الضغط لا يكون متجهاً فقط لأسفل ، بل بقوة متساوية فى جميع الاتجاهات .



شكل ١١ - ٣٠

ندرس الآن منطقة مستوية رأسية ، مثل تلك التى فى الشكل ١١ - ٣١ . الصيغة (١) لا يمكن استخدامها لحساب القوة عليها . اذ أن الضغط ، ليس حتى بالتقريب ثابت على المنطقة ، بل يتغير بشدة بين القمة والقاعدة . لكن يمكننا التقريب الى القوة بتقسيم المنطقة الى شرائط أفقية ضيقة . الضغط يتغير بكمية صغيرة داخل أى شريط ، وتقريب جيد للقوة على الشريط يعطى بحاصل ضرب مساحة الشريط والضغط عند نقطة ما عليه . حاصل جمع القوى على هذه الشرائط سيقرب الى القوة على المنطقة .



شكل ١١ - ٣١

الضغط على المستطيل هو بالتقريب $\sigma\, h(\bar{u}_i)$. القوة بالتقريب هى الضغط عند $\bar{u}_i$ مضروباً فى مساحة المستطيل .

سنصف ذلك بتفصيل أكثر . ندخل محور احداثيات رأسى u فى مستوى المنطقة . من الممكن أن يكون متجهاً لأعلى أو لأسفل ، ونقطة الأصل يمكن أن تكون عند أى نقطة مناسبة . فى الشكل المحور متجه لأسفل . العرض الأفقى للمنطقة عند النقطة التى احداثيها هو u سيرمز له بالرمز الدالى $l(u)$ والعمق هناك سيرمز له بالرمز $h(u)$. لتكن $a < b$ و b و a هما الاحداثيان u للنقطتين القصويين لمسقط المنطقة على المحور u . ليكن

$$[a = u_0, u_1, u_2, \ . \ . \ . \ . \ , u_{n-1}, u_n = b]$$

تجزيئاً للفترة $[a, b]$. الخطوط المارة بنقط التجزيء وعمودية على المحور u تقسم المنطقة الى شرائط أفقية . لتكن $\bar{u}_i$ نقطة فى الفترة الجزئية $[u_{i-1}, u_i]$ ، وكالمعتاد ، كما هو موضح فى الشكل ، نرسم مستطيلا يقرب الى الشريط . طول المستطيل رقم i هو $l(\bar{u}_i)$ ومساحته هى $A = l(\bar{u}_i)\ \Delta u_i$ ، والضغط على عمق $h(\bar{u}_i)$ هو $p = \sigma h(\bar{u}_i)$. اذا كان الشريط ضيقاً ، فان القوة عليه تكون بالتقريب مساوية للقوة على المستطيل ، وهذه بدورها تساوى بالتقريب pA أى بالتقريب تساوى

$$\sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i)\ \Delta u_i$$

القوة على المنطقة تكون بالتقريب مساوية لحاصل جمع هاته ،

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i)\ \Delta u_i \qquad (٢)$$

هذا هو حاصل جمع ريمان للدالة $\sigma\, h(u)\, l(u)$. سنفترض أن l و h دالتان متصلتان . نهاية حاصل الجمع (٢) عندما تضيق الشرائط هى بالضبط القوة على المنطقة . أى أن

$$F = \lim_{w \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sigma h(\bar{u}_i) l(\bar{u}_i)\ \Delta u_i = \int_a^b \sigma h(u) l(u)\ du$$

حيث w معيار التجزيء .

هذا ما نذهب اليه فى الحالة العامة . فى مسألة خاصة نوجد الآن تعبيرات لـ $l(u)$ و $h(u)$ بدلالة u ونوجد قيمة التكامل .

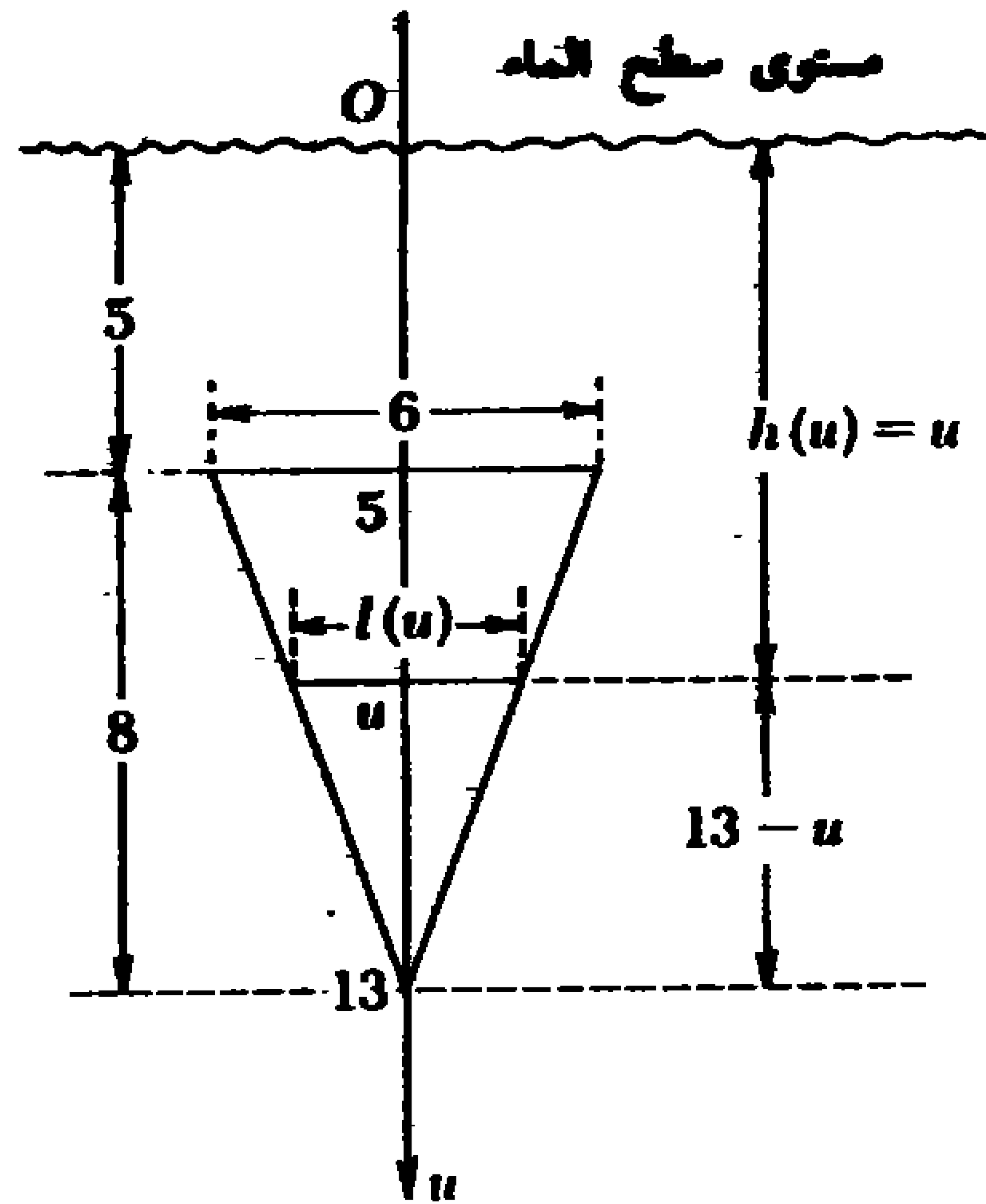
١١ ـ ٧ ضغط المائع . لتكن منطقة مستوية رأسية مغمورة فى سائل وزنه σ لكل وحدة حجم . ندخل محور احداثيات رأسى u . لتكن $h(u)$ عمق السائل عند النقطة u على المحور u ولتكن $l(u)$ العرض الأفقى للمنطقة هناك القوة على المنطقة تعطى بالصيغة

$$F = \int_a^b \sigma h(u) l(u)\ du \qquad (٣)$$

حدا التكامل $a < b$ و b و a ، هما الاحداثيان u لأقصى وضعين للخط الأفقى المتغير المحدد للعرض $l(u)$ لجزء المنطقة المغمور فى السائل . كل من $l(u)$ و $h(u)$ يجب ألا يكون سالباً لجميع u فى $[a, b]$.

لقد تقدمنا بطريقة غير رسمية ولم نعرف ما المقصود بالقوة على منطقة رأسية . من المعقول الآن أن نعرف القوة على المنطقة بأنها التكامل (٣) .

مثال ١ . بوابة رأسية فى سد على صورة مثلث متساوى الساقين طول القاعدة 6 ft والارتفاع 8 ft . القاعدة أفقية وأعلى الرأس المقابل (شكل ١١ ـ ٣٢) . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء 5 ft فوق قمة البوابة .



شكل ١١ ـ ٣٢

ندخل محور الاحداثيات u متجهاً لأسفل ونقطة الأصل عند مستوى سطح الماء . أقصى وضعين للخط الأفقى $l(u)$ هما قاعدة ورأس المثلث . الاحداثيان u لهاتين النقطتين هما 13 و 5 وهما حدا التكامل . العرض $l(u)$ للمثلث عند النقطة التى احداثيها u يمكن إيجاده من تشابه المثلثات :

$$\frac{l(u)}{6} = \frac{13-u}{8}, \qquad l(u) = \tfrac{3}{4}(13-u)$$

العمق عند هذه النقطة هو $h(u) = u$. المعادلة (٣) تعطى القوة

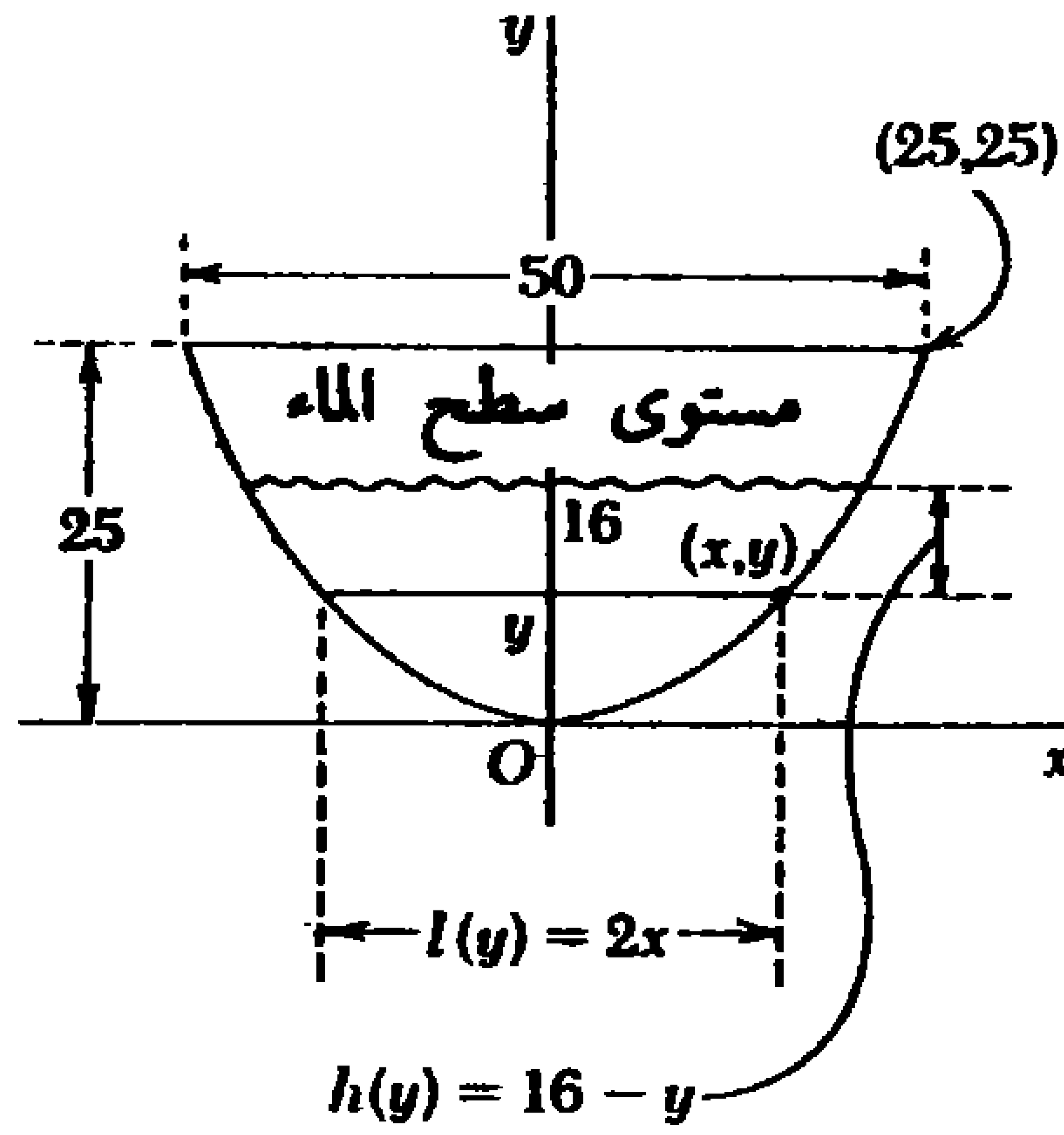
$$F = \int_5^{13} \sigma u \tfrac{3}{4}(13-u)\, du = \frac{3\sigma}{4} \int_5^{13} (13u - u^2)\, du$$

$$= \frac{3\sigma}{4} \left[\frac{13}{2} u^2 - \tfrac{1}{3} u^3\right]_5^{13} = 184\sigma.$$

وحيث أن $\sigma = 62.5$ lb/ cu. ft للماء ، فان

$$F = (184)(62.5) = 11{,}500 \text{ lb}$$

مثال ٢ . سد على شكل قطع مكافىء رأسه الى تحت . قمة السد طولها 50 ft ، وارتفاع السد 25 ft . أوجد القوة على السد عندما يكون عمق الماء . 16 ft .



شكل ١١ - ٣٣

السد موضح فى الشكل ١١ - ٣٣ . نحتاج الى معادلة للقطع المكافىء ولكى نحصل على أبسط صورة نأخذ المحور u متجهاً الى أعلى ونقطة الأصل عند الرأس ونسميه المحور y . نحتاج أيضاً الى المحور x متجهاً الى اليمين ، كما فى الشكل . الصيغة (٣) تصبح الآن

$$F = \int_a^b \sigma h(y) l(y)\, dy \qquad (٤)$$

يوجد ضغط فقط على جزء السد تحت الماء . اذن حدا التكامل هما $y = 16$ و $y = 0$. العمق عند النقطة y هو $h(y) = 16 - y$ لايجاد عرض القطع المكافىء عند y ، نحتاج الى معادلته هذه ستكون على الصورة $y = ax^2$. بما أن القطع المكافىء يجب أن يمر بالنقطة $(25, 25)$ ، اذن $a = \frac{1}{25}$ ، والمعادلة تكون $y = x^2 / 25$. اذن

$$l(y) = 2x = 10\sqrt{y}$$

لاحظ أن $l(y)$ و $h(y)$ ليسا سالبين لـ $0 \leqslant y \leqslant 16$. المعادلة (٤) تعطى للقوة

$$F = \int_0^{16} \sigma (16 - y) 10\sqrt{y}\, dy = 10\sigma \int_0^{16} (16y^{1/2} - y^{3/2})\, dy$$

$$= 10\sigma \left[\tfrac{32}{3} y^{3/2} - \tfrac{2}{5} y^{5/2}\right]_0^{16} = \tfrac{8192}{3}\sigma.$$

مسائل :

١ - لوح مستطيل الشكل بعداه 5 ft و 3 غمس رأسياً فى سائل بالضلع الأكبر أفقياً . أوجد القوة على جانب واحد للوح اذا كانت (أ) القمة فى سطح السائل ، (ب) القمة على بعد 4 ft أسفل سطح السائل ، (ج) القمة على بعد 1 ft أعلى سطح السائل .

٢ ـ بوابة رأسية فى سد على هيئة مثلث متساوى الساقين قاعدته أفقية والرأس المقابل لأسفل . ارتفاع المثلث 6 ft وطول القاعدة 10 ft . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء (أ) عند قمة البوابة ، (ب) أعلى من قمة البوابة بمسافة 2 ft ، (ج) أسفل قمة البوابة بمسافة 2 ft .

٣ ـ حوض للمياه طرفه مثلث قائم متساوى الساقين ووتره أفقى . طول كل ضلع 2 ft . أوجد القوة على الطرف عندما يكون الحوض مملوءاً بالماء .

٤ ـ برميل زيت أسطوانى قطره 3 ft وطوله 5 ft ، موضوع على جانبه . أوجد القوة على طرف واحد عندما يكون البرميل مملوءاً الى نصفه بزيت ثقله 60 lb/cu. ft .

٥ ـ واجهة سد خرسانى على شكل قطع مكافىء رأسه لأسفل . عرضه 6 ft عند القمة وارتفاعه 4 ft . عارضة خشبية رأسية على قمة السد تزيد ارتفاعه بمقدار 2 ft أخرى . أوجد القوة على الجزء المسلح للسد عندما يكون الماءعمقه 6 ft .

٦ ـ لوح على شكل قطع ناقص طولا محورية الأكبر والأصغر 6 in و 10 مقطوع على طول المحور الأكبر . غمس اللوح رأسياً فى سائل بحيث أن المحور الأكبر يكون فى السطح . أوجد القوة على جانب واحد من اللوح .

٧ ـ أوجد القوة على جانب واحد للوح مربع الشكل طول ضلعه 3 ft ، مغمور فى سائل بحيث أن أحد أقطاره يكون رأسياً وركنه الأعلى يكون فى السطح .

٨ ـ بوابة رأسية فى سد على شكل شبه منحرف متساوى الساقين أبعاده ووضعه موضحان فى الشكل ١١ ـ ٣٤ . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى سطح الماء 8 ft فوق قمة البوابة .

٩ ـ أوجد القوة على وجه واحد للوح محدود بالقطعين المكافئين $y^2 = 2(6 - x)$ و $y^2 = 2x$ ومغمور فى سائل حيث المحور y الموجب الى أعلى والسائل مجرد يغطى اللوح .

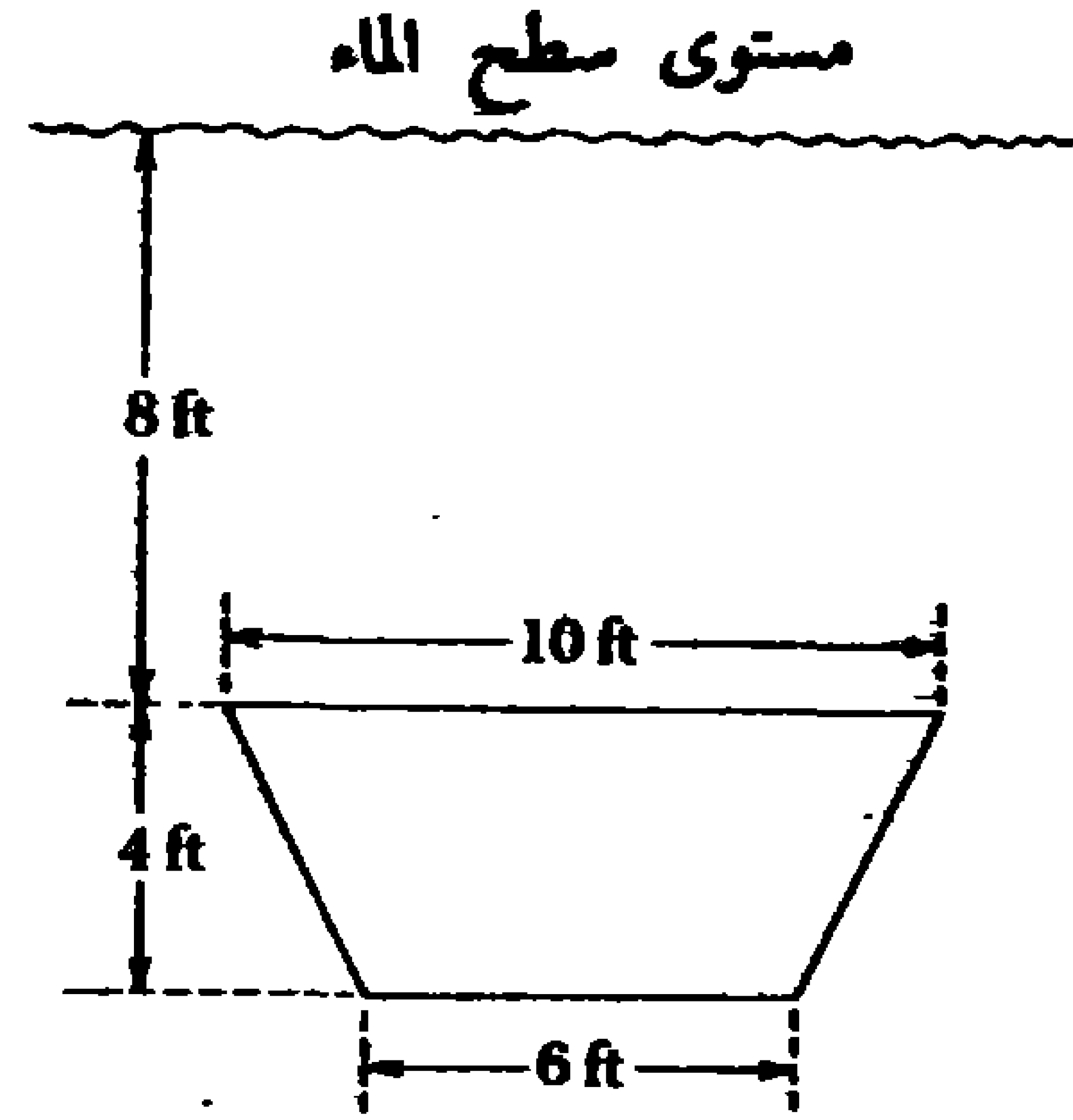
١٠ ـ بوابة مستطيلة الشكل فى خزان ، طولها 10 ft ، وارتفاعها 5 ft والضلع الأكبر لها أفقى . اذا كانت 50,000 lb هى أكبر قوة يمكن تحملها بأمان ، ما هو الارتفاع فوق قمة البوابة الذى يمكن السماح للماء أن يرتفع عليه ؟

١١ ـ سد له بوابة دائرية رأسية نصف قطرها 2 ft . أوجد القوة على البوابة عندما يكون مستوى الماء على مسافة 8 ft فوق مركز البوابة .

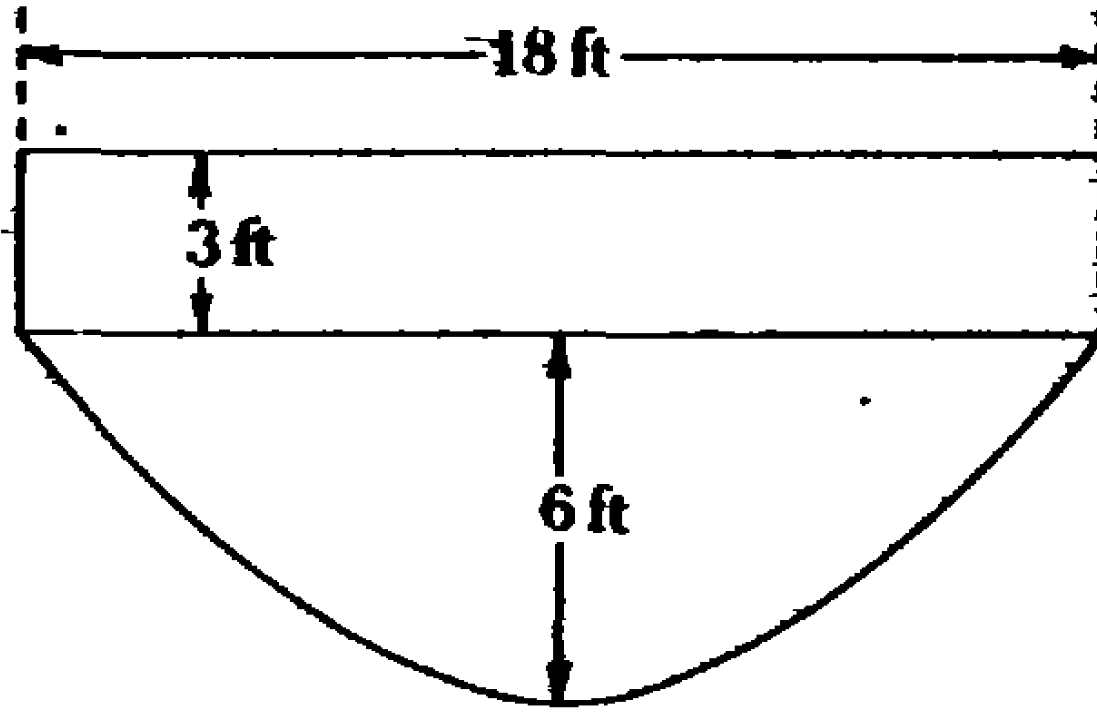
١٢ ـ واجهة سد على شكل قطع مكافىء رأسه لأسفل ، ارتفاعه 6 ft وعرضه 18 ft عند القمة ، يعلوه مستطيل ارتفاعه 3 ft (شكل ١١ ـ ٣٥) . أوجد القوة على السد عندما يكون الماء عند القمة .

١٣ ـ بوابة رأسية فى سد ، على شكل مثلث بضلع أفقى والرأس المقابل أعلى ذلك الضلع وأسفل السطح بمقدار $d > 0$ ft . طول القاعدة b ft ، والارتفاع هو c ft أثبت أن القوة على البوابة هى نفس المقدار بصرف النظر عن شكل المثلث .

١٤ ـ الوزن لوحدة الحجم لسائل افتراضى ليس ثابتاً بل بسبب قابليته للانضغاط يزداد الوزن مع العمق ، ويكون على عمق h مساوياً لـ $c(1 + \sqrt[3]{h})$ حيث c ثابت . أوجد القوة على جانب واحد للوح رأسى على شكل مثلث قائم طولا ضلعيه 6 in و 4 مغمور فى السائل بالضلع الأصغر أفقياً وأعلى الرأس المقابل وعلى بعد 4 in تحت السطح .



شكل ١١ـ٣٤



شكل ١١ـ٣٥

١٥ ـ سد يعترض نهراً ، له بوابة مربعة رأسية طول ضلعها 2 ft ، وأضلاعها أفقية ورأسية . النهر فى وقت الفيضان ، ويرتفع مستوى سطح الماء بمعدل 1.5 ft فى اليوم . ما هى القوة التى على البوابة عندما يكون الماء على ارتفاع 6 ft فوق قمة البوابة ، وما معدل زيادة القوة وقتئذ ؟

١٦ ـ جانب من صهريج مستطيل طوله 6 ft وارتفاعه 4 ft . صب سائل ثقله σ_1 لوحدة الحجم لعمق 2 ft فى الصهريج . صب سائل آخر أخف ثقله σ_2 لوحدة الحجم بحرص فوق سطح الأول بدون أى مزج ولعمق إضافى مقداره 1 ft . أوجد القوة على جانب الصهريج . اذا امتزج السائلان امتزاجا كلياً فهل القوة على جانب الصهريج تزيد أم تنقص ؟ .

١٧ ـ أثبت أن القوة على جانب واحد لمنطقة مستوية رأسية مغمورة فى سائل هى $\sigma \bar{h} A$ ، حيث σ وزن وحدة الحجم للسائل ، $\bar{h}$ عمق المركز المتوسط للمنطقة ، A مساحة المنطقة .
استخدم ذلك لتحقيق النتيجة التى حصلنا عليها للقوة على البوابة المثلثية فى مثال ١ .

١٨ ـ أوجد القوة على البوابة الدائرية فى المسألة ١١ بطريقة المسألة ١٧ .

١٩ ـ أوجد بطريقة المسألة ١٧ القوة التى على البوابة المثلثية فى المسألة ١٣ (أنظر مثال ٣ ، بند ١١ ـ ٣) .

٢٠ ـ بوابة مربعة رأسية فى سد ، طول ضلعها 2 ft ولها ضلع أفقى . مستوى سطح الماء هو 6 ft فوق قمة البوابة . أوجد العزم بسبب قوة الماء على البوابة حول خط أفقى على بعد c ft تحت السطح . (ارشاد : قرب الى العزم بسبب القوة على شريط أفقى ضيق) . دعمت البوابة بقضيب أفقى . ليكون للقضيب تأثير ، يجب وضعه بحيث لا يوجد ميل لدوران البوابة حوله . أين ينبغى وضع القضيب ؟

الفصل الثانى عشر

الصور غير المحدودة

١٢ - ١

قاعدة لوبيتال (L'Hospital)

النظرية عن نهاية خارج قسمة دالتين ،

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \qquad (١)$$

لا تكون صحيحة اذا كانت نهاية المقام صفراً . اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ وكانت $\lim_{x\to a} f(x)$ محدودة ، فان الكسر يكون كبيراً عندما تكون x قريبة من a ونكتب $\lim_{x\to a} [f(x)/ g(x)] = \pm\infty$ ، رغم أنه لا توجد نهاية بالمعنى الصحيح للكلمة . اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ، فان الكسر $f(x)/g(x)$ يقال أنه غير محدد على الصورة $0/0$ عند a . فى هذه الحالة $\lim_{x\to a} [f(x)/ g(x)]$ قد توجد ، رغم أن (١) لا تفيد فى ايجادها . مثال ذلك ، $\lim_{x\to 3}[(x^2-9)/(x-3)]$ ، التى أوجدناها بوسيلة جبرية بسيطة :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

فى الماضى عالجنا كل نهاية على حده ، وبعضها أوجدنا قيمته بعد مجهود كبير ، مثل $\lim_{h\to 0} [(e^h-1)/h] = 1$ ، التى احتجنا اليها فى إيجاد مشتقة e^x . نظرية هامة اكتشفها الرياضى السويسرى برنولى (Johannes Bernoulli ، ١٦٦٧ - ١٧٤٨) لكن نسبت خطأ الى الرياضى الفرنسى لوبيتال (Guillaume François de L'Hospital ١٦٦١ - ١٧٠٤) تعطينا طريقة بسيطة وعامة لايجاد مثل هذه النهايات . مضمون النظرية هو أنه اذا كانت $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ ، فعندئذ يكون

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (٢)$$

إذا كانت النهاية الثانية يمكن إيجادها ، وعادة يكون ايجاده أسهل من إيجاد الأولى . لايجاد $\lim_{x\to3}[(x^2-9)/(x-3)]$ بهذه النظرية ، نضع $g(x)=x-3$ و $f(x)=x^2-9$ فيكون

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{2x}{1}=6$$

مثال ١ . أوجد $\lim_{x\to0}[(e^{2x}-1)/x]$

الكسر غير محدد على الصورة $0/0$ عند 0 لأن $\lim_{x\to0}x=0$ و $\lim_{x\to0}(e^{2x}-1)=0$. قاعدة خارج القسمة (١) لا يمكن استخدامها لايجاد نهاية الكسر . نوجدها باستخدام (٢) ، بوضع $g(x)=x$ و $f(x)=e^{2x}-1$ ، فيكون

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

يمكن أيضاً استخدام الطريقة لايجاد $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ عندما تكون $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ و $\lim_{x\to a}f(x)=\infty$. مثل هذه الكسور يقال انها غير محددة على الصورة ∞/∞ عند a . قبل اعطاء أمثلة أخرى لاستخدام قاعدة لوبيتال ، كما تسمى الطريقة ، سنذكر نصها بعناية أكثر ونبرهن صحتها . لهذا الغرض سنحتاج الى تعميم لنظرية القيمة المتوسطة .

١٢ - ١ نظرية كوشى (Cauchy) . لتكن f و g دالتين متصلتين فى الفترة المقفلة $[a, b]$ وقابلتين للتفاضل فى الداخل (a, b) ، وبحيث أن $g'(x)$ تختلف عن الصفر فى كل الفترة (a, b) . عندئذ توجد z فى (a, b) بحيث أن

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

البرهان . من الدالتين f و g كون الدالة u كما يلى :

$$u(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$$

فتكون u متصلة فى الفترة $[a, b]$ (لماذا ؟) ، ويكوّن

$$u'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)-[g(b)-g(a)]f'(x) \qquad (٣)$$

لجميع x فى (a, b) . أيضاً

$$u(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=u(b)$$

الدالة u تحقق شروط نظرية رول ٤ - ٧ ، ومن ثم توجد z فى (a, b) بحيث أن $u'(z)=0$. اذن من (٣) ، يكون

$$[f(b)-f(a)]g'(z)-[g(b)-g(a)]f'(z)=0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

الخطوة الأخيرة تكون صحيحة فقط إذا كان $g(b) - g(a) \neq 0$ و $g'(x) \neq 0$. الأولى صحيحة بالفرض ، السبب للثانية نتركه للقارىء مع الارشاد أنه يستخدم نظرية رول .

لاحظ أن نظرية كوشى تختزل إلى نظرية القيمة المتوسطة عندما $g(x) = x$.

١٢ - ٢ قاعدة لوبيتال . لتكن $\lim_{x\to a} g(x)=0$ و $\lim_{x\to a} f(x)=0$ أو $\lim_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$. اذا كانت الدالتان g و f قابلتين للتفاضل فى جوار منقوص ما $\bar{W}$ لـ a وكانت $g'(x)$ تختلف عن الصفر فى كل W ، فعندئذ . يكون

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (٤)$$

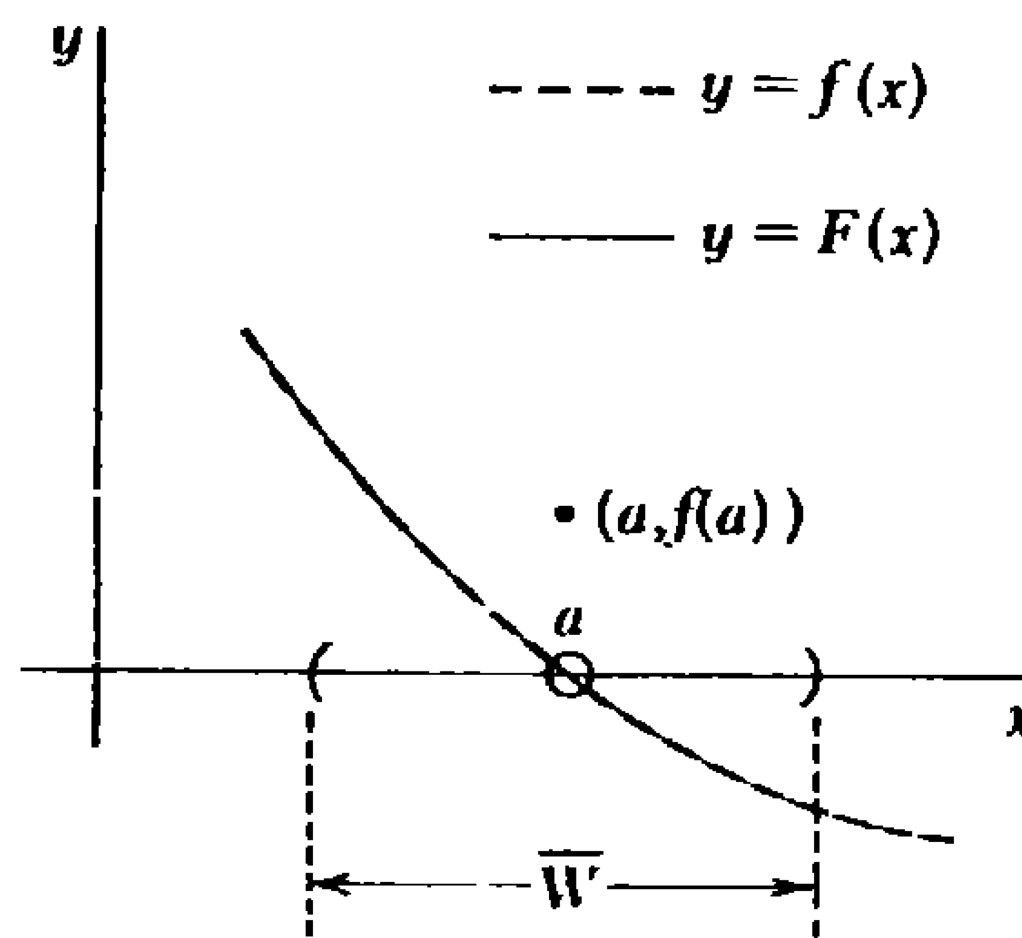
بفرض أن النهاية الثانية تكون موجودة أو تكون لا نهائية . القاعدة أيضاً صحيحة عندما تكون نهائية . فى هذه الحالة الجوار المنقوص $\bar{W}$ لـ a يستبدل بفترة لا نهائية ما (d, ∞) .

البرهان . سنبرهن فقط الحالة $0/0$. برهان الحالة ∞/∞ أصعب الى حد كبير وسيحذف . نفرض أن $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ وأن a عدد محدود قد نود تطبيق نظرية كوشى على g و f على الفترة $[a, x]$ (أو $[x, a]$ إذا كانت $x < a$) ، لكن f أو g قد لا تكون متصلة أو حتى معرفة عند a . نتجنب هذه الصعوبة بتعريف دالتين جديدتين G و F تتطابقان مع g و f ، الا ربما عند a ، ومتصلتين عند a (شكل ١٢ - ١) . الدالتان هما

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a, \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a, \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

(لماذا الدالتان G و F متصلتان عند a ؟) نظراً لأن G و F تتطابقان مع g و f فى $\bar{W}$ ، فهما تكونان قابلتين للتفاضل هناك . لكل x فى $\bar{W}$ يوجد بنظرية كوشى عدد z بين x و a بحيث أن

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(z)}{G'(z)}, \qquad x \neq a$$



شكل ١٢ - ١

F متصلة عند a رغم أن f قد لا تكون .

بما أن x تختلف عن a ، فيكون $G(x) = g(x)$ و $F(x) = f(x)$.

أيضاً $F(a) = G(a) = 0,\ F'(z) = f'(z),\ G'(z) = g'(z)$ ، والمعادلة أعلاه تبسط الى

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (٥)$$

نفرض أن $\lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]$ توجد وتساوى k ، مثلا هذا يعنى أن $f'(w)/g'(w)$ تكون قريبة من k لجميع w القريبة من a . إذا كانت x هى احدى هذه الأعداد w القريبة من a ، فإن z تكون أقرب إلى a ، اذ أنها تقع بين x و a ، وبالتالى تكون $f'(z)/g'(z)$ قريبة من k . واذن من المعادلة (٥) $f(x)/g(x)$, تكون قريبة من k . هذا يبين أن $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = k$ ويثبت (٤) . إذا كان $\lim_{x\to a}[f'(x)/g'(x)] = \pm\infty$ ، فان استدلالا مماثلا يبين أن $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = \pm\infty$ ويثبت (٤) لهذه الحالة . هذا يكمل البرهان عندما تكون a عدداً محدوداً .

نفرض الآن أن a لا نهائية ، فيكون $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. التعويض $x = 1/y$ يحول $f(x)/g(x)$ إلى كسر يمكن تطبيق قاعدة لوبيتال لقيمة محدودة a عليه . لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{D_y f(1/y)}{D_y g(1/y)}$$

بقاعدة السلسلة يكون

$$D_y f\left(\frac{1}{y}\right) = f'\left(\frac{1}{y}\right) D_y\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{و} \quad D_y g\left(\frac{1}{y}\right) = g'\left(\frac{1}{y}\right) D_y\left(\frac{1}{y}\right)$$

واذن

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{f'(1/y)D_y(1/y)}{g'(1/y)D_y(1/y)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

هذا يكمل البرهان .

قد يلزم استخدام قاعدة لوبيتال أكثر من مرة لايجاد النهاية ، كما فى المثال الآتى :

مثال ٢ . أوجد $\lim_{x\to 0}[(\cos x - 1)/x^2]$

بما أن $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ نستخدم قاعدة لوبيتال للحصول على

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} \qquad (٦)$$

بما أن $\lim_{x\to 0}\sin x = \lim_{x\to 0} 2x = 0$ ، الكسر الأخير صورة غير محددة ، التى بدورها يمكن ايجادها بقاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=-\frac{1}{2}$$

توجد أيضاً طريقة أخرى . لايجاد مشتقة $\sin x$ احتجنا الى اثبات أن $\lim_{x\to 0}[(\sin x)/x]=1$. يمكننا ايجاد النهاية الأخيرة فى (٦) كما يأتى :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{2}(1)=-\frac{1}{2}$$

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x\to\infty}[(\ln x)/x^2]$

الكسر غير محدد على الصورة ∞/∞ . بقاعدة لوبيتال يكون

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

عند استخدام قاعدة لوبيتال أكثر من مرة ، يجب تبسيط الكسر $f'(x)/g'(x)$ قبل استخدام القاعدة مرة ثانية . وإلا ، قد نحصل على كسر أكثر تعقيداً .

مثال ٤ . أوجد $\lim_{x\to 0^+}[(\cot x)/\ln x]$

بما أن $\lim_{x\to 0^+}\cot x=\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ نستخدم قاعدة لوبيتال لنحصل على

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x}{\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\csc^2 x}{1/x}$$

الكسر الثانى غير محدد على الصورة $-\infty/\infty$ ، لكن قبل استخدام قاعدة لوبيتال مرة ثانية نبسط الكسر إلى

$$\frac{-\csc^2 x}{1/x}=\frac{-x}{\sin^2 x}$$

الذى يكون غير محدد على الصورة $0/0$. قاعدة لوبيتال تعطينا

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2\sin x\cos x}=-\infty$$

مثال ٥ . أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3+3x^2+1}{4x^5+x-2}$

بدلا من استخدام قاعدة لوبيتال ، من الأسهل قسمة البسط والمقام على أعلى قوة لـ x ، هنا x^5 ، ونوجد النهاية بقاعدة خارج القسمة للنهايتين :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^3+3x^2+1}{4x^5+x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{4+\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}\right)}=\frac{0}{4}=0$$

نحذر القارىء من نقطتين . أولا ، يمكن استخدام قاعدة لوبيتال ، فقط للكسور غير المحددة التى على الصورة $0/0$ أو ∞/∞ . ثانياً ، البسط والمقام للكسر $f(x)/g(x)$ يجرى تفاضلهما كل على حده ، وليس الكسر ككل .

مسائل

أوجد النهايات الآتية :

١ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$

٢ - $\lim\limits_{y\to -3} \frac{y^2-9}{y+3}$

٣ - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2}$

٤ - $\lim\limits_{x\to -6} \frac{x^2+2x-24}{x^2-36}$

٥ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

٦ - $\lim\limits_{r\to 1} \frac{r-1}{\ln r}$

٧ - $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{x}$

٨ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

٩ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\cos x}$

١٠ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2(1-\cos x)}$

١١ - $\lim\limits_{w\to 0} \frac{1-w}{w^2}$

١٢ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^n},\ n>0$

١٣ - $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$

١٤ - $\lim\limits_{b\to a} \frac{b-a}{b^n-a^n},\ a\neq 0$

١٥ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{x^2}$

١٦ - $\lim\limits_{u\to \pi/2} \frac{\sec u}{\tan u}$

١٧ - $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\ln\cos\theta}{\theta}$

١٨ - $\lim\limits_{t\to b} \frac{t^3-bt^2-b^2t+b^3}{t^2-b^2}$

١٩ - $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4+4x^3-x^2-16x-12}{x^4-4x^3-x^2+16x-12}$

٢٠ - $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{1/2}-x^{1/3}}{x^{2/3}-x^{1/2}}$

٢١ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x-x}{x-\sin x}$

٢٢ - $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tan t-\sin t}{1-\cos t}$

٢٣ - $\lim\limits_{y\to \pi/2} \frac{\ln\sin y}{(2y-\pi)^2}$

٢٤ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

٢٥ - $\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^u-2+e^{-u}}{1-\cos 3u}$

٢٦ - $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$

٢٧ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-e^x}{x}$

٢٨ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

٢٩ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{-1}x-x}{x^3}$

٣٠ - $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta-1}{\theta\sin\theta}$

٣١ - $\lim\limits_{t\to \pi/2} \frac{t\sin t-\pi/2}{\cos t}$

٣٢ - $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sqrt{25+h}-5}{h}$

٣٣ - $\lim\limits_{\alpha\to \pi/2} \frac{\tan\alpha}{\tan 3\alpha}$

٣٤ - $\lim\limits_{u\to 1} \frac{\sqrt{u}-\frac{1}{2}(1+u)}{(u-1)^2}$

٣٥ - $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sqrt{2+z}-\sqrt{2-z}}{z}$

٣٦ - $\lim\limits_{t\to 0} \frac{a^t-b^t}{t},\ a>0,\ b>0$

٣٧ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$

٣٨ - $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{(x-\pi/2)^2}{\sec x}$

٣٩ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(1/x)}{x+1}$

٤٠ - $\lim\limits_{a\to 0} \frac{ae^{2a}-e^{-2a}-a+1}{e^{2a}-1}$

٤١ - $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\tan u+\sec u-1}{\tan u-\sec u+1}$

٤٢ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x\cos x}{x-\sin x}$

٤٣ - $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta-\tan\theta}{\sin^3\theta}$

٤٤ - $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\sqrt{1+s}-(1+s/2)}{s^2}$

٤٥ - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\right)}{x^{n+1}}$ ، n عدد صحيح موجب .

٤٦ - أوجد $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x^2 - x + 10}{x^3 + 3x - 1}$ بقاعدة لوبيتال وبالطريقة المستخدمة فى مثال ٥ .

أوجد النهايات الآتية :

٤٧ - $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}, n > 0$ ٤٨ - $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2-1}$ ٤٩ - $\lim_{x\to\infty} \frac{2+x^2}{1-3x^2}$

٥٠ - $\lim_{z\to\infty} \frac{z^4-1}{z}$ ٥١ - $\lim_{x\to\infty} \frac{\tan^{-1} x}{x}$ ٥٢ - $\lim_{u\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}u^2 + u + \frac{1}{3}}{u^3 - 1}$

٥٣ - $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3 + x^2 + \sqrt{2}x + 6}{4x^3 - 2x - 2}$ ٥٤ - $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x}$ ٥٥ - $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

٥٦ - $\lim_{x\to\infty} \frac{\tan x}{x}$ ٥٧ - $\lim_{y\to\infty} \frac{y^4 + 3y^3 - 7y^2 - 18}{y^4 - 3y^3 - 7y^2 + 18}$ ٥٨ - $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^6 + x^4 - x^2 + 1}{x^3 + x}$

٥٩ - $\lim_{x\to\infty} x^{10}e^{-x}$ ٦٠ - $\lim_{z\to\infty} \frac{z \ln z}{z + \ln z}$ ٦١ - $\lim_{s\to\infty} \frac{s - \sin^{-1} s}{\tan^{-1} s - s}$

٦٢ - $\lim_{x\to\infty} \frac{8x^{3/2} + 6x^2 + 2\sqrt{x}}{4x^2 - \sqrt{x} - 7}$ ٦٣ - $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{b^{\ln x}}, b > 0$

٦٤ - خطط المنحنى $y = (\ln x)/x$

٦٥ - عند برهنة الصيغة $D \sin x = \cos x$ فى بند ٦-٣ احتجنا للنهاية $\lim_{x\to 0} [(\sin x)/x]$ واثبتنا أنها ١ . حقق هذه مرة أخرى بقاعدة لوبيتال . حتى إذا كنا قد عرفنا قاعدة لوبيتال عند ذلك الوقت ، لماذا لم يكن فى إمكاننا استخدامها لايجاد النهاية ؟

٦٦ - الدالة $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$ غير معرفة عند 0 . عين قيمة لـ $f(0)$ بحيث تكون f متصلة عند 0 .

٦٧ - أثبت أن $\lim_{x\to\infty} (x^n/e^x) = 0$ لكل n .

٦٨ - أوجد $\lim_{\alpha\to 1} \frac{1 - e^{-s(1-\alpha)}}{1 - \alpha e^{-s(1-\alpha)}}$ (هذه النهاية ظهرت فى مسألة تبادل حرارى فى العلوم الهندسية) .

٦٩ - صيغة حاصل الجمع لمتوالية هندسية .

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

ليست صحيحة إذا كانت $r = 1$. أثبت مع ذلك ، أن

$$\lim_{r\to 1} \sum_{i=0}^{n} ar^i = \lim_{r\to 1} \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

٧٠ - يبدو أنه عندما تكون r قريبة من 1 ، تكون قيمة $\int_1^a \frac{dx}{x^r}$ قريبة من قيمة $\int_1^a \frac{dx}{x}$ لجميع $a > 0$. أثبت أن هذا صحيح .

٧١ - أثبت أن ميل المنحنى الدويري (السيكلويد) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ عند نقطة P يصبح لا نهائياً عندما تقترب P من نقطة الأصل .

٧٢ - لأي قيمة لـ k تكون $\lim_{x \to 0} [(x - \sin x)/x^k]$ محدودة ؟ . أوجد قيمة النهاية .

٧٣ - المعادلة التفاضلية التي تحكم حركة جسم هابط بسرعة معتدلة في وسط له مقاومة مثل الهواء هي $dv/dt = g - (k/m)v$ ، حيث الثابت غير السالب k يعتمد على المقاومة وحيث m هي الكتلة ، v سرعة الجسم . في الفراغ $k = 0$ إذا كانت v_0 هي السرعة الابتدائية ، فأوجد v كدالة للزمن t وأثبت أنه لكل قيمة لـ t ، تعتمد v على k اعتماداً متصلاً .

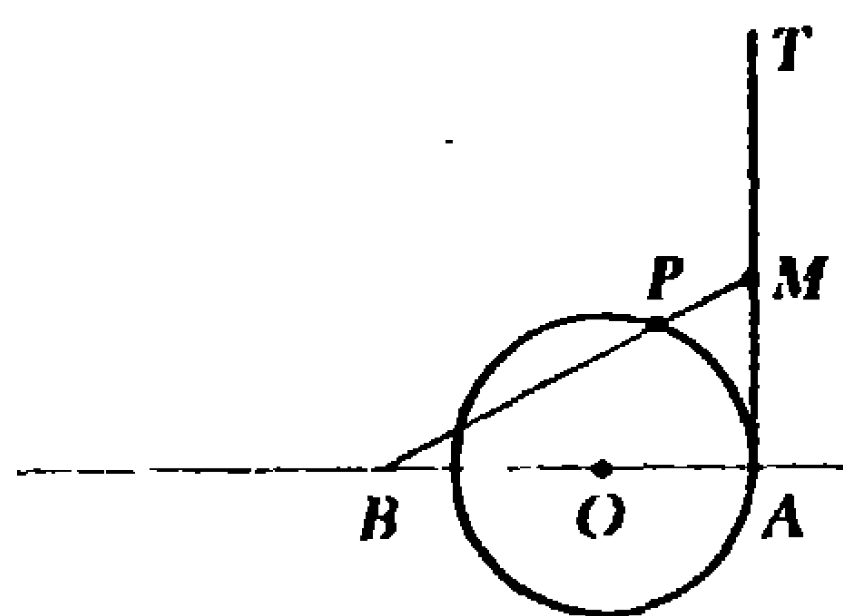
٧٤ - في الشكل ١٢ - ٢ الخط المستقيم AT مماس عند A للدائرة التي مركزها عند O . لكل نقطة P على الدائرة قرب A ، نختار M على AT بحيث أن المسافة $|AM|$ تساوي طول القوس $\overset{\frown}{AP}$. لتكن B نقطة تقاطع الخط MP مع خط القطر AO . أوجد الموضع النهائي لـ B عندما تقترب P من A .

٧٥ - أوجد الخلل في البرهان المختصر الآتي لنظرية كوشي بنظرية القيمة المتوسطة ، توجد z في (a, b) بحيث أن $f(b) - f(a) = (b - a) f'(z)$. بالمثل ، $g(b) - g(a) = (b - a) g'(z)$. اقسم المعادلة الأولى على الثانية واحصل على النظرية .

٧٦ - أشرنا في بند ١ - ٢ أن الرمز $0/0$ لا يمثل عدداً . هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لتحديد عدد له .

٧٧ - قرب نهاية برهان نظرية كوشي أكدنا أن $g(b) - g(a) \neq 0$. لماذا يكون هذا كذلك ؟

٧٨ - أعط استدلالا قاطعاً مستخدماً الجوارات ، لجزء برهان قاعدة لوبيتال ١٢ - ٢ الذي يتلو المعادلة (٥) والذي أثبتنا فيه أنه اذا كانت $\lim_{x \to a} [f'(x)/g'(x)] = k$ فان $\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)] = k$.



شكل ١٢ - ٢

١٢ - ٢

الصور غير المحددة $0(\infty), 0^0, 1^\infty, \infty^0, \infty - \infty$

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ ، فان قيمة النهاية $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x)$ لا تكون واضحة ، لأن العامل الأول يميل لجعل حاصل الضرب صغيراً بينما الثاني يميل لجعل

حاصل الضرب كبيراً . حاصل ضرب $f(x)\,g(x)$ يقال أنه غير محدد على الصورة $0(\infty)$ عند a . النهاية يمكن ايجادها بكتابة $f(x)\,g(x)$ فى إحدى الصورتين

$$\frac{g(x)}{1/f(x)} \quad \text{أو} \quad \frac{f(x)}{1/g(x)}$$

هاتان غير محددتين على الصورة $0/0$ أو ∞/∞ ، ويمكن استخدام قاعدة لوبيتال .

مثال ١ . أوجد $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

بما أن $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ ، لدالة $x \ln x$ غير محددة على الصورة $0(-\infty)$. نضعها فى الصورة ∞/∞ — ونستخدم قاعدة لوبيتال :

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ، فان قيمة $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ لا تكون واضحة . الأساس $f(x)$ يميل لجعل $f(x)^{g(x)}$ قريبة من الصفر بينما $g(x)$ تميل لجعلها قريبة من 1 . فهى غير محددة على الصورة 0^0 . صورتان أخريان غير محددتين لـ $f(x)^{g(x)}$ هما ∞^0 و 1^∞ فى مثل هذه الحالات يمكن إيجاد النهاية باستخدام اللوغاريتمات لاحضار الأس الى تحت كعامل .

مثال ٢ . أوجد $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

الدالة غير محددة على الصورة 0^0 . ضع

فيكون

$$\ln y = x \ln \sin x$$

فالمسألة تختزل الى الحالة $0(\infty)$. لدينا

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0^+} (x \ln \sin x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln \sin x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)/(\sin x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} (-x^2 \cot x).$$

النهاية الأخيرة أيضاً على الصورة $0(\infty)$. بالاستمرار ، يكون

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0$$

لدينا نهاية $\ln y$ ونحتاج الى نهاية y . اتصال اللوغاريتم يتضمن أن

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \ln (\lim_{x\to 0} y)$$

اذن $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$ و $\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0$

مثال ٣ . أوجد $\lim_{x\to\infty}(1+2/x)^x$

الدالة غير محددة على الصورة 1^∞ . ضع $y=(1+2/x)^x$

فيكون

$$\ln y = x \ln (1+2/x)$$

وهذه غير محددة على الصورة $\infty(0)$. لدينا

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2/x)}{1/x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2/x^2}{1+2/x}}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2/x}=2.$$

بما أن $\lim_{x\to\infty}\ln y=\ln(\lim_{x\to\infty}y)$ ، اذن $\lim_{x\to\infty}y=e^2$.

الدوال $1/x,\ 1/x^2$ و $1/x+3$ جميعها تصبح لا نهائية عندما تقترب x من 0^+ . لكن

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2}=\infty, \qquad (١)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{x^2}=-\infty, \qquad (٢)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{x}+3\right)-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}3=3.$$

هذه الأمثلة توضح أنه اذا كانت $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ ، فان الفرق $f(x)-g(x)$ يكون غير محدد على الصورة $\infty-\infty$. النهاية $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]$ قد يكون من الصعب ايجادها ، لكن إحدى الطرق هي أن نحاول التعبير عن $f(x)-g(x)$ فى صورة كسر $F(x)/G(x)$. لقد عملنا ذلك فى (١) و (٢) . اذا كان الكسر غير محدد على الصورة $0/0$ أو ∞/∞ ، فيمكننا استخدام قاعدة لوبيتال . احتمال آخر هو أن نحاول إيجاد $\lim_{x\to a}e^{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to a}[e^{f(x)}/e^{g(x)}]$ حيث الكسر غير محدد على الصورة ∞/∞ .

مثال ٤ . أوجد $\lim_{\theta\to\pi/2}(\tan\theta-\sec\theta)$

الدالة غير محددة على الصورة $\infty-\infty$ عند $\pi/2$. من السهل التعبير عنها فى صورة كسر :

$$\lim_{\theta\to\pi/2}(\tan\theta-\sec\theta)=\lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)=\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}$$

النهاية الأخيرة يمكن ايجادها بقاعدة لوبيتال . لدينا

$$\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}=\lim_{\theta\to\pi/2}\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=0$$

مسائل

أوجد النهايات الآتية :

١ - $\lim_{\alpha\to 0} \alpha \csc 4\alpha$ ٢ - $\lim_{\theta\to\infty} \theta e^{1/\theta}$ ٣ - $\lim_{u\to-\infty} u^2 e^u$ ٤ - $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

٥ - $\lim_{\theta\to 0^+} x^{1/x}$ ٦ - $\lim_{t\to 0} t^{\sqrt{t}}$ ٧ - $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^x$ ٨ - $\lim_{x\to\infty} (\tan x)^x$

٩ - $\lim_{u\to 0} u^{\sin u}$ ١٠ - $\lim_{x\to\infty} (1+1/x)^x$ ١١ - $\lim_{h\to 0} (1+ah)^{1/h}$ ١٢ - $\lim_{y\to 0} (2-3y)^{5/y}$

١٣ - $\lim_{y\to\infty} (y+e^y)^{a/y}$ ١٤ - $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$ ١٥ - $\lim_{u\to\pi/2} (\sin u)^{\tan u}$ ١٦ - $\lim_{t\to\infty} t \sin(1/t)$

١٧ - $\lim_{x\to 0} (\cos \sqrt{x})^{1/x}$ ١٨ - $\lim_{\theta\to 0^+} (1/\theta)^{\tan\theta}$ ١٩ - $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\ln x}$ ٢٠ - $\lim_{t\to 0} (1+t)^{\ln t}$

٢١ - $\lim_{x\to 0} (-\ln x)^x$ ٢٢ - $\lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$ ٢٣ - $\lim_{x\to\infty} (1+e^{-x})^x$ ٢٤ - $\lim_{z\to 0} z^{a/\ln z}$

٢٥ - $\lim_{z\to\infty} z^{a/\ln z}$ ٢٦ - $\lim_{u\to\infty} \frac{\sin u}{u^2 \ln u}$ ٢٧ - $\lim_{u\to 0^+} \frac{u \ln u}{u + \ln u}$ ٢٨ - $\lim_{x\to\infty} (x^{1/x} - 1)$

٢٩ - $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^x$

٣٠ - اذا كانت $f(x) = x^2 \ln x,\ x > 0$ ، كيف يجب تعريف f عند $x = 0$ لتكون متصلة على اليمين هناك ؟ خطط الشكل البيانى لـ f .

٣١ - لأى قيمة لـ p توجد النهاية $\lim_{x\to 0} x^p \ln x$ ؟

٣٢ - خطط المنحنى $y = x \ln x - x$.

٣٣ - خطط المنحنى $y = x^x,\ x > 0$.

أوجد النهايات الآتية :

٣٤ - $\lim_{z\to 1} \left(\frac{1}{\ln z} - \frac{z}{\ln z}\right)$ ٣٥ - $\lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{\sin y} - \frac{1}{y}\right)$ ٣٦ - $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x)$

٣٧ - $\lim_{r\to 2} \left(\frac{1}{\sqrt{r-2}} - \frac{1}{r-2}\right)$ ٣٨ - $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$ ٣٩ - $\lim_{y\to\infty} \frac{\sqrt{y+1} - \sqrt{y}}{y}$

٤٠ - $\lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$ (ارشاد : $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$) .

٤١ - $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ ٤٢ - $\lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)$

٤٣ - $\lim_{u\to\pi/2} \left(u \tan u - \frac{\pi}{2} \sec u\right)$ ٤٤ - $\lim_{z\to\infty} (\sqrt{z^2+z} - z)$

٤٥ - $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x)$ ٤٦ - $\lim_{x\to\pi/2^-} (\sec 5x - \tan x)$

٤٧ - $\lim\limits_{x\to\infty} [\ln (x+a)^{x} - \ln x]$

٤٨ - $\lim\limits_{y\to 0} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\tan^{-1} y}\right)$

٤٩ - $\lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{u}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{\tan u}\right)$

٥٠ - $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x)$

٥١ - $\lim\limits_{x\to\infty} \left(xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt\right)$

٥٢ - $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \left(\frac{1}{\ln \alpha}\int_\alpha^1 \frac{\sin x}{x}\,dx\right)$

٥٣ - لماذا يتضمن اتصال اللوغاريتم أن $\lim\limits_{x\to a} [\ln f(x)] = \ln [\lim\limits_{x\to a} f(x)]$؟ لقد استخدم ذلك فى مثالى ٢ ، ٣ .

٥٤ - اذا كانت $F(u) = \lim\limits_{x\to 0} [(1+3ux)^{1/x} - (1+ux)^{1/x}]$ فأوجد $\lim\limits_{u\to 0} [F(u)/u]$.

الفصل الثالث عشر

التكاملات المعتلة

١٣ ـ ١

التكاملات بحدود لا نهائية

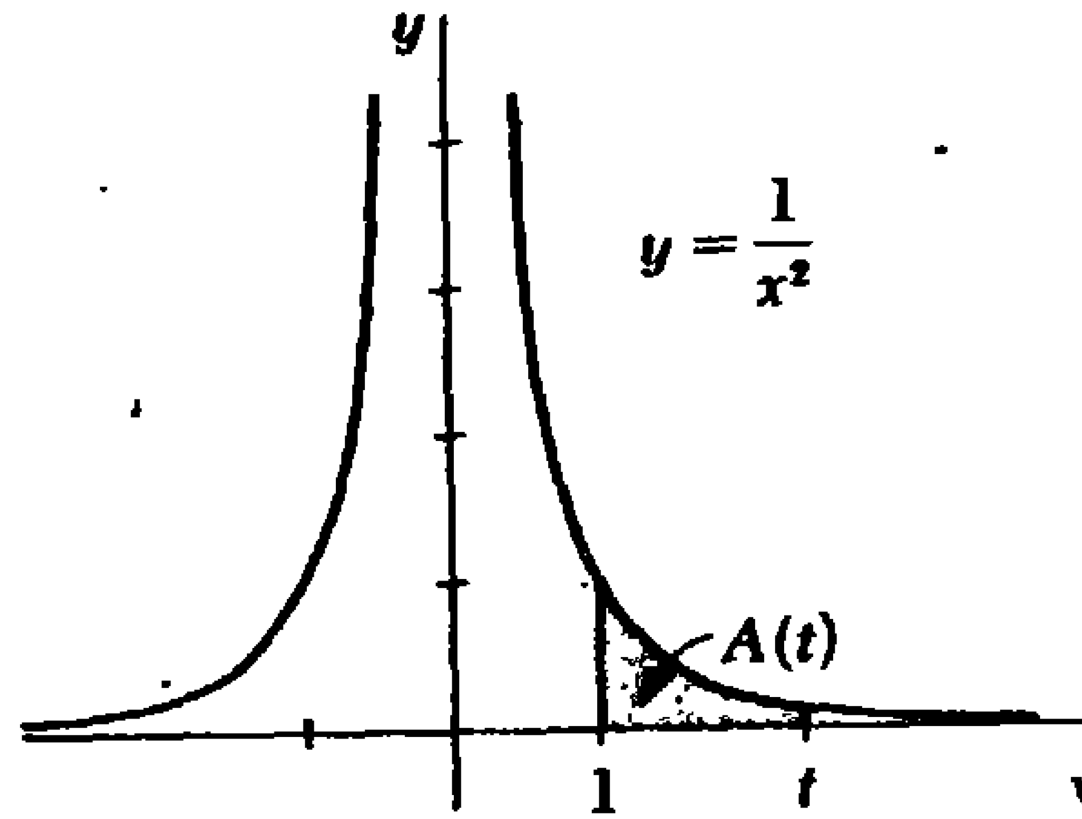
المساحة $A(t)$ للمنطقة تحت المنحنى $y = 1/x^2$ من 1 الى t ، حيث $t > 1$ (شكل ١٣ ـ ١) ، تعطى بالصيغة

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{t} + 1$$

عندما تقترب t من ∞ ، تقترب المساحة من 1 . أى أن ،

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1\right) = 1$$

من الطبيعى أن نرمز الى $\lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}\, dx$ بالرمز $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ ونعتبر التكامل ممثلا لمساحة المنطقة تحت المنحنى على يمين $x = 1$ ، مع أن المنطقة مفتوحة على اليمين . التكاملات بحد لا نهائى تسمى تكاملات معتلة وستعرف الآن .



شكل ١٣ ـ ١

١٣ ـ ١ تعريف . اذا كانت الدالة f متصلة لجميع $x \geqslant a$ ، فإن

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

بفرض وجود النهاية . اذا كانت النهاية توجد ، فالتكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)\,dx$ يقال انه يوجد أو يتقارب . اذا كانت النهاية لا توجد ، فالتكامل يتباعد . بالمثل ،

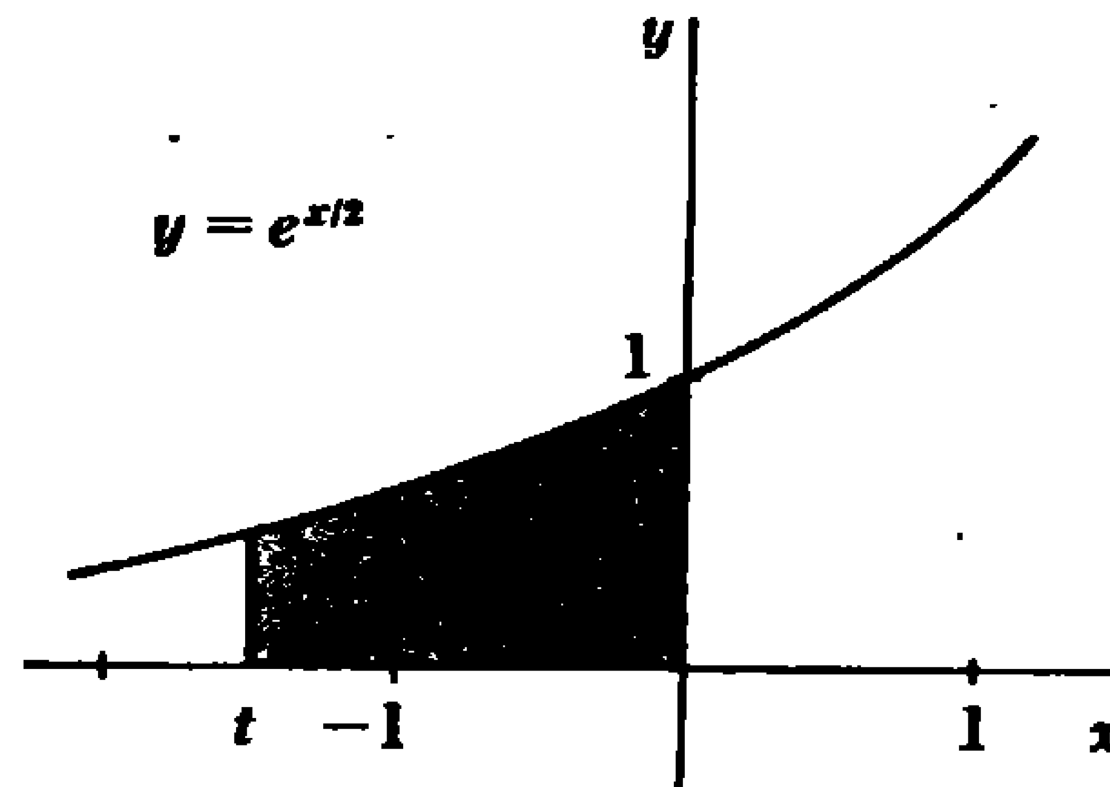
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$$

مثال ١ . أوجد $\int_{-\infty}^0 e^{x/2}\,dx$

المنحنى $y = e^{x/2}$ موضح فى الشكل ١٣ ـ ٢ . لدينا

$$\int_{-\infty}^0 e^{x/2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 e^{x/2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} 2e^{x/2}\Big|_t^0$$
$$= \lim_{t\to-\infty} 2(1 - e^{t/2}) = 2.$$

التكامل المعتل يتقارب ، والمنطقة تحت المنحنى على يسار المحور y يمكن اعتبار أن لها مساحة .



شكل ١٣ ـ ٢

مثال ٢ . أوجد $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

لدينا

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln |x|\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

النهاية لا توجد ، فالتكامل المعتل يتباعد . مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ على يمين 1 لا نهائية .

اذا كان الدالة f متصلة فى كل مكان ، فإن التكامل $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ ، يعرف هكذا

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx \qquad (1)$$

حيث c أى عدد . كلا التكاملين المعتلين على يمين المتساوية يجب وجودهما لوجود $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

مثال ٣ . أوجد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$

باختيار $c = 0$ فى (١) ، يكون

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$
$$= \lim_{t\to-\infty} [-\tfrac{1}{2} \ln (1+t^2)] + \lim_{s\to\infty} \tfrac{1}{2} \ln (1+s^2).$$

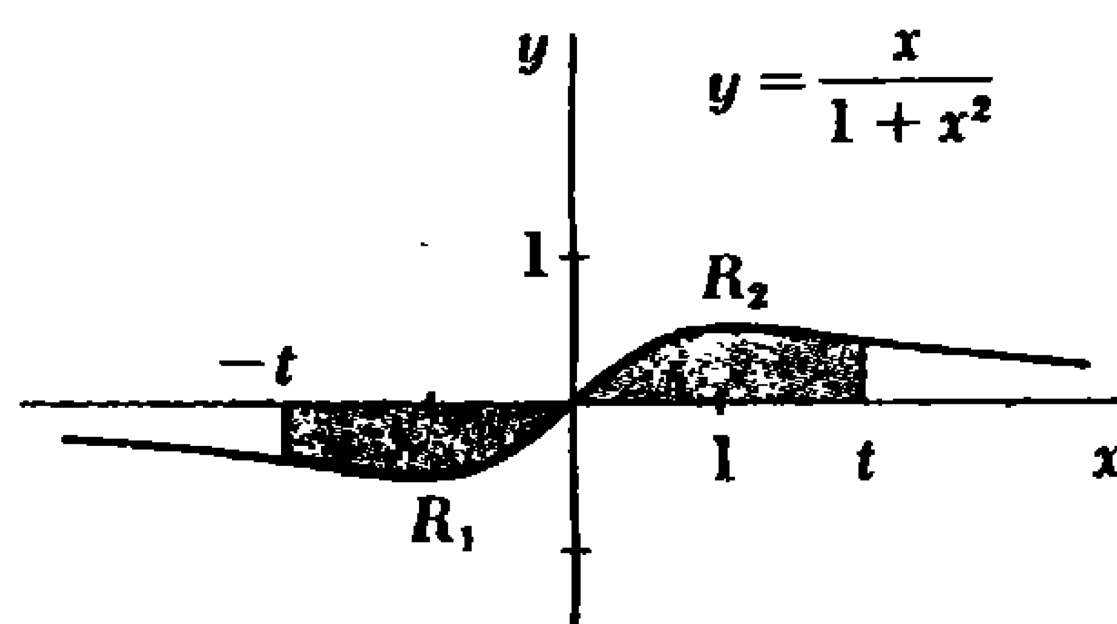
النهاية الأولى لا توجد ، ومن ثم التكامل لا يوجد . النهاية الثانية أيضاً لا توجد . ليس صوابا أن نعلل كما يلى عند إيجاد قيمة هذا التكامل .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \frac{x}{1+x^2}\, dx \qquad (٢)$$
$$= \lim_{t\to\infty} \tfrac{1}{2}[\ln (1+t^2) - \ln (1+(-t^2))]$$
$$= \lim_{t\to\infty} 0 = 0.$$

التكامل على اليمين فى (٢) يمكن كتابته على الصورة

$$\int_{-t}^{t} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \int_{-t}^{0} \frac{x}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{t} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

التكامل الثانى على اليمين يمثل مساحة المنطقة R_2 فى الشكل ١٣ ـ ٣ ، والتكامل الأول يمثل السالب لمساحة المنطقة R_1 . من الواضح أن حاصل الجمع يساوى صفراً ، لكن كلا من التكاملين ليس له نهاية .



شكل ١٣ ـ ٣

مسائل

أوجد قيمة كل من التكاملات المعتلة الآتية اذا كانت توجد :

١ - $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

٢ - $\int_{20}^\infty \frac{dy}{\sqrt[3]{y}}$

٣ - $\int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^{3/2}}$

٤ - $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

٥ - $\int_{-\infty}^3 \frac{dx}{(7-x)^2}$

٦ - $\int_0^\infty e^{-cx}\,dx,\ c>0$

٧ - $\int_0^\infty \sin t\,dt$

٨ - $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x}}$

٩ - $\int_{-\infty}^2 \frac{dv}{\sqrt{6-v}}$

١٠ - $\int_1^\infty \frac{dr}{1+r^2}$

١١ - $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

١٢ - $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

١٣ - $\int_3^\infty \frac{dz}{z^2-1}$

١٤ - $\int_{-\infty}^0 x^2e^x\,dx$

١٥ - $\int_5^\infty \frac{du}{u^2-3u}$

١٦ - $\int_0^\infty \tan^{-1}x\,dx$

١٧ - $\int_1^\infty \frac{\ln u}{u^2}\,du$

١٨ - $\int_0^\infty x^ne^x\,dx$

١٩ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

٢٠ - $\int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{z^2+2z+2}$

٢١ - $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$

٢٢ ـ أوجد مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = xe^{-x}$ على يمين نقطة الأصل .

٢٣ ـ أوجد طول ذلك الجزء من المنحنى الحلزونى الذى معادلته القطبية $r = e^\theta$ الذى يناظر $\theta \leqslant 0$.

٢٤ ـ خطط المنحنى $y = (\ln x)/x$. أوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة الواقعة تحت المنحنى وفوق المحور x .

٢٥ ـ فى مثال ٢ أثبتنا أن مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ من 1 الى ∞ تكون لا نهائية . اثبت أن حجم الجسم القرنى الناشىء من دوران هذه المنطقة حول المحور x هو π . بما أن مساحة المنطقة المنشئة لا نهائية ، فلا يوجد دهان كاف فى العالم ليغطيها . الآن ضع القرن فى وضع رأسى وفتحته الى أعلى واملأه بالدهان . ستكون π cu ft كافية . عندما تسحب المنطقة المنشئة ، من القرن ، ستتغطى من الناحيتين . اشرح هذا التناقض الظاهرى .

٢٦ ـ المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x^p$ على يمين الخط $x = 1$ دارت حول المحور x ، فأنشأت جسماً . لأى قيم لـ $p > 0$ يكون الجسم له حجم ؟

٢٧ ـ أوجد المركز المتوسط للمنطقة المحدودة بالمنحنى $y = e^{-x}$ والمحورين x و y الموجبين .

٢٨ ـ اثبت أنه بالرغم من أن المنطقة تحت المنحنى $y = 1/(1+x^2)$ على يمين المحور y لها مساحة ، لكن ليس لها مركز متوسط .

٢٩ ـ لأى قيم لـ n يوجد التكامل $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^n}\,dx$ ؟

٣٠ ـ اذا كان $\int_a^\infty f(x)\, dx$ يتباعد وكانت $f(x) \geqslant 0$ لجميع $x \geqslant a$ ، فاثبت أن $\int_a^\infty f(x)\, dx = \infty$
(إرشاد : ضع $S_n = \int_a^n f(x)\, dx$ ودع M أى عدد . أثبت أنه يجب أنه يوجد عدد N بحيث أن $S_N > M$ ، وبالتالى $S_n > M$ لجميع $n \geqslant N$) .

٣١ ـ أثبت أن خاصية الجمع للتكامل تظل صحيحة للتكاملات بحد لا نهائى . أى أن ، اذا كانت f متصلة فى كل مكان وكان $\int_b^\infty f(x)\, dx$ يوجد ، فإن $\int_a^\infty f(x)\, dx$ يوجد لكل عدد b ويكون

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

٣٢ ـ التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ عرف فى (١) بـ $\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx$ حيث c أى عدد . هذا التعريف لا يكون له معنى اذا لم نحصل على نفس القيمة لكل اختيار لـ c . أثبت أن هذا يكون فعلا . (إرشاد : أنظر المسألة ٣١) .

١٣ ـ ٢

التكاملات بدوال مكاملة لا نهائية

البرهان المعطى فى بند ٥ ـ ٩ لوجود التكامل المعين $\int_a^b f(x)\, dx$ (١) مبنى على اتصال f فى الفترة المقفلة $[a, b]$. اذا كانت $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ فإن الدالة f لا تكون متصلة على اليسار عند b ، ويمكن إثبات عدم وجود التكامل . رغماً عن ذلك ، فالنهاية

$$\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

قد توجد . اذا كان كذلك ، فإننا نعرف التكامل (١) ليكون ذلك العدد .

١٣ ـ ٢ تعريف . اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة $(a, b]$ وكانت $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

بالمثل ، اذا كانت f متصلة فى الفترة $[a, b)$ وكانت $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ فإن

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

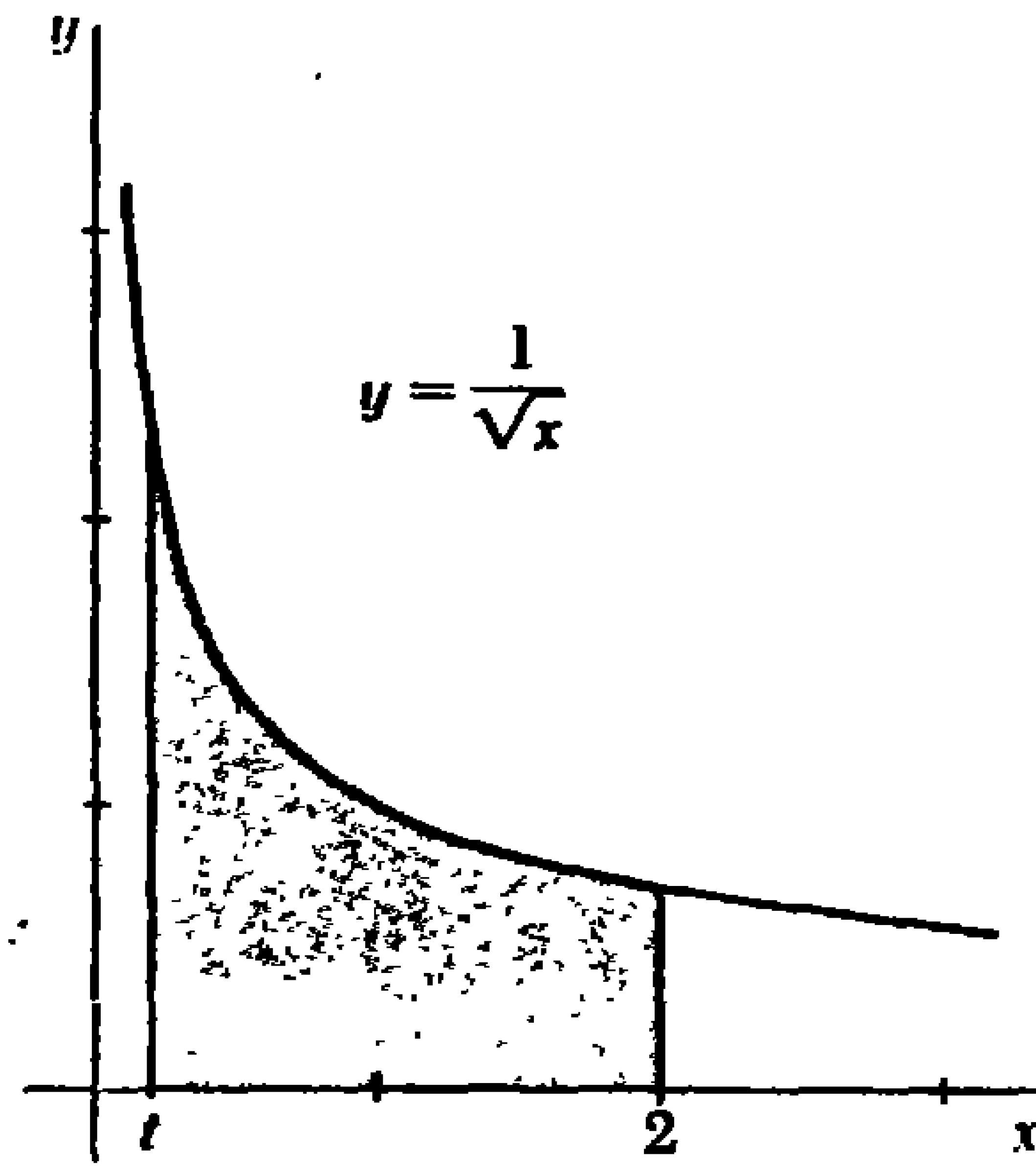
هذه التكاملات أيضاً تسمى تكاملات معتلة ويقال انها توجد أو تتقارب اذا كانت النهايات موجودة ، وأنها تتباعد اذا كانت النهايات غير موجودة .

مثال ١ . أوجد $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

بما أن $\lim_{x\to 0^+} (1/\sqrt{x}) = \infty$ ، فالتكامل معتل . من التعريف ١٣ ـ ٢ ، لدينا

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} 2x^{1/2}\Big|_t^2 = \lim_{t\to 0^+} 2(\sqrt{2} - t^{1/2}) = 2\sqrt{2}$$

التكامل يتقارب . التكامل يمكن اعتباره ممثلا لمساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/\sqrt{x}$ بين 2 و 0 ، رغم أن المنطقة مفتوحة عند القمة (شكل ١٣ ـ ٤) .



شكل ١٣ - ٤

مثال ٢ . أوجد $\int_0^{\pi/2} \tan y \, dy$

التكامل معتل لأن $\tan y$ تصبح لا نهائية عند $\pi / 2$. لدينا .

$$\int_0^{\pi/2} \tan y \, dy = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \int_0^t \tan y \, dy = \lim_{t \to (\pi/2)^-} \Big[-\ln \cos y\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t \to (\pi/2)^-} [-\ln \cos t] = \infty$$

فالتكامل لا يوجد .

اذا كانت الدالة f متصلة فى فترة التكامل $[a, b]$ ما عدا عند نقطة داخلية c حيث تصبح لا نهائية ، فإننا نعرف

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx \qquad (٢)$$

بفرض أن كلا من التكاملين المعتلين على اليمين يوجدان . اذا كان أحدهما لا يوجد ، فان التكامل $\int_a^b f(x) \, dx$ لا يوجد .

مثال ٣ أوجد $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

التكامل معتل لأن الدالة المكاملة تصبح لا نهائية عند $x = 1$ داخل فترة التكامل . لدينا

$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \int_{-2}^{t} (x-1)^{-1/3} \, dx + \lim_{s \to 1^+} \int_{s}^{2} (x-1)^{-1/3} \, dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} \tfrac{3}{2}[(t-1)^{2/3} - (-3)^{2/3}] + \lim_{s \to 1^+} \tfrac{3}{2}[1 - (s-1)^{2/3}]$$

$$= -\tfrac{3}{2}(-3)^{2/3} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{2}(1 - 9^{1/3}).$$

اذا كانت الدالة f متصلة فى الفترة (c_1, c_2) وتصبح لا نهائية عند c_2 و c_1 ، فإننا نعرف

$$\int_{c_1}^{c} f(x)\ dx = \int_{c_1}^{d} f(x)\ dx + \int_{d}^{c_2} f(x)\ dx$$

حيث d أى عدد بين c_2 و c_1 ، وذلك بفرض أن كلا التكاملين المعتلين على اليمين يوجدان .

اذا كانت f متصلة فى الفترة $[a, b]$ ما عدا عند $c_1, c_2, \ldots, c_n$ حيث $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ ، وتصبح لا نهائية عند كل c_i ، فإننا نعرف

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{c_1} f(x)\ dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\ dx + \cdots$$
$$+ \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\ dx + \int_{c_n}^{b} f(x)\ dx$$

بفرض أن كلا من التكاملات المعتلة على اليمين يوجد .

اذا كانت $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ، فإن التكامل $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ يكون معتلا على أساسين . نعرفه بأنه حاصل جمع تكاملين معتلين من نوعين سبق دراستهما :

$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \int_a^{c} f(x)\ dx + \int_c^{\infty} f(x)\ dx$$

حيث c أى عدد أكبر من a .

مثال ٤ أوجد $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

لدينا

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^{-2/3}\ dx + \lim_{s \to \infty} \int_1^s x^{-2/3}\ dx$$
$$= \lim_{t \to 0^+} 3(1 - t^{1/3}) + \lim_{s \to \infty} 3(s^{1/3} - 1).$$

النهاية الثانية لا توجد ، والتكامل يتباعد .

مسائل

أوجد قيمة كل من التكاملات المعتلة الآتية اذا كان يوجد :

١ - $\int_0^3 \frac{u\ du}{\sqrt{9 - u^2}}$ ٢ - $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t - 1}}$ ٣ - $\int_0^1 \frac{dt}{t^{0.99}}$ ٤ - $\int_0^{\pi/2} \cot \alpha\ d\alpha$

٥ - $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, a > 0$ ٦ - $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos t}} dt$ ٧ - $\int_0^1 x \ln x\ dx$ ٨ - $\int_0^1 (\ln x)^2\ dx$

٩ - $\int_{3}^{10} \frac{dx}{x^2-9}$

١٠ - $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sec\theta \, d\theta$

١١ - $\int_{0}^{\pi/2} \frac{du}{1-\sin u}$

١٢ - $\int_{-1}^{1} x^{-4} \, dx$

١٣ - $\int_{-1}^{4} \frac{dr}{r^{2/3}}$

١٤ - $\int_{-2}^{1} \frac{dz}{\sqrt[3]{z+1}}$

١٥ - $\int_{0}^{2a} \frac{dt}{(t-a)^2}$

١٦ - $\int_{0}^{3c} \frac{z\,dz}{(z^2-c^2)^{2/3}}$

١٧ - $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+2x-1}$

١٨ - $\int_{0}^{3} \frac{dz}{z^3-3z^2+4}$

١٩ - $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-4x+1}$

٢٠ - $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{2x^3+9x^2+12x+4}$

٢١ - $\int_{0}^{6} \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} \, dx$

٢٢ - $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

٢٣ - $\int_{-1}^{2} \frac{dz}{z^2-1}$

٢٤ - $\int_{0}^{2} \frac{du}{(u-1)(u-2)}$

٢٥ - $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x^3-7x^2+10x}$

٢٦ - $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$

٢٧ - $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

٢٨ - $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$

٢٩ - $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

٣٠ - $\int_{-1}^{\infty} \frac{du}{u^4}$

٣١ - $\int_{-1}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}}$

٣٢ - $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x}$

٣٣ - $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x-1}$

٣٤ - $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3-1}$

٣٥ - لأى قيم p يوجد التكامل $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^p}$

٣٦ - التكامل أدناه يجب أن يكون موجباً لأن دالته المكاملة موجبة فى كل مكان . لكن

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$$

اشرح ما هو الخطأ ، واذا كان التكامل محسوباً خطأ ، فأوجد قيمته الصحيحة .

٣٧ - خطط المنحنى $y = x \ln x$. أوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة فوق المنحنى وتحت المحور x .

٣٨ - خطط المنحنى $y = \csc^2 x$ وأوجد المساحة ، اذا كانت توجد ، للمنطقة تحت المنحنى بين π و 0 .

٣٩ - اذا كانت f متصلة فى الفترة $[a, b]$ ، فإن $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ يكون موجوداً . أثبت أن

$$\lim_{t \to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

أى أنه لا يوجد ضرر اذا استخدم التعريف ١٣ - ٢ عندما تكون f متصلة عند b . (إرشاد : $\int_{a}^{t} f(x)\,dx$ دالة لـ t . لقد أكدنا أن هذه الدالة متصلة من جهة اليسار عند b) .

٤٠ - لتكن f متصلة فى فترة التكامل $[a, b]$ ما عدا عند نقطة داخلية c ، حيث تصبح لا نهائية . وضح بمثال أن التكامل المعتل $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. لا يمكن إيجاده دائماً كما يلى :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \right]$$

لماذا هذه المعادلة لا تكافئ (٢) ؟

الفصل الرابع عشر

المتجهات المستوية

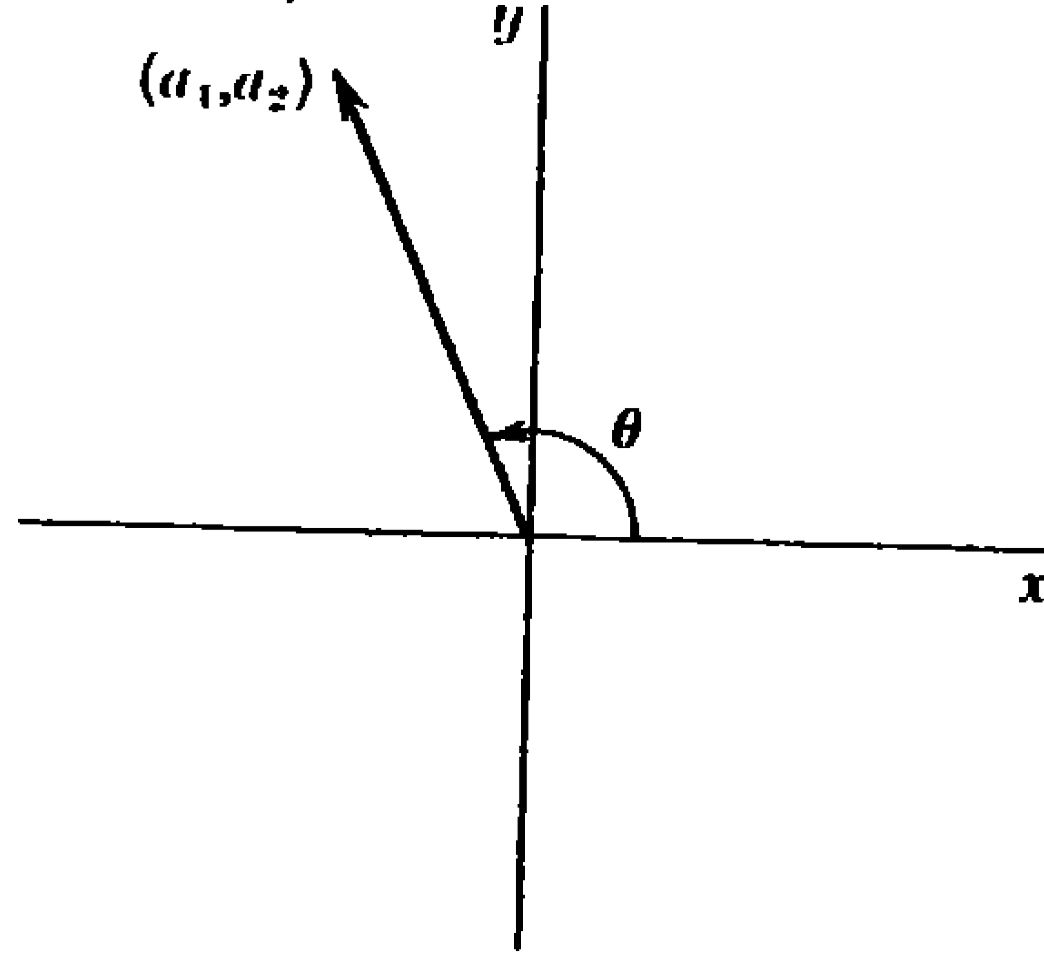
١٤ - ١

المتجهات

عملياً ، استخدمت المتجهات فى الفيزياء منذ أكثر من قرن . بعد ذلك وعلى درجة لا تقل فى الأهمية ظهرت المتجهات فى الرياضيات . الرياضيون يدرسون المتجهات من وجهة نظر مختلفة ، وفكرة الفضاء المتجه تكاد تكون قد أثرت على كل فرع من الرياضيات ، وبعمق فى كثير منها . سوف ندرس المتجهات ليس فى الحالة العامة جداً ولكن فى حالة خاصة مفيدة وبسيطة .

المتجه فى مستوى هو زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (a, b) . أمثلة على المتجهات هى $(0,\sqrt{3})$ و $(-1,\frac{2}{7})$ و $(2, 4)$ و $(4, 2)$. ترتيب الأعداد مهم ، فالمتجه $(4, 2)$ يختلف عن المتجه $(2, 4)$. توجد أنواع أخرى من المتجهات علاوة على المتجهات المستوية ، لكن سوف ندرس فقط المتجهات المستوية ، وللاختصار سندعوها مجرد متجهات . العددان b و a يسميان مركبتى المتجه (a, b) . يعرف المتجهان بأنهما متساويان إذا واذا فقط كانت مركباتهما المتناظرة متساويه . أى أن ، $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ إذا وإذا فقط كان $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$. سنرمز للمتجهات بحروف يونانية ونقول ، مثلا ، المتجه $\alpha = (1, 2)$. الحروف الصغيرة الرومانية سترمز الى الأعداد الحقيقية .

المتجهات تشبه أحداثيات نقط ، وفى الواقع ، لكل متجه (a, b) يمكن تخصيص نقطة فى المستوى هى النقطة التى احداثياها هما (a, b) . أى أن كل متجه يناظر نقطة فى المستوى ، وبالعكس ، كل نقطة تناظر متجهاً . لهذا السبب يكون عادة من المناسب أن نشير الى المتجه $\alpha = (1, 2)$ ، مثلا ، كأنه النقطة α . يمكننا رسم قطعه مستقيمة من نقطة الأصل للنقطة (a_1, a_2) ، كما فى الشكل ١٤ - ١ ، ونضع سهماً عند نقطته الطرفية . قطعة الخط المستقيم هذه لها اتجاه ، يقاس بالزاوية θ فى الشكل ، ولها طول . أى أن كل متجه يمكن تمثيله بقطعة مستقيمة متجهة



شكل ١٤-١

خارجة من نقطة الأصل . هذه القطع المستقيمة المتجهة هى المتجهات فى الفيزياء . الفيزيائى يسمح لمتجهاته بالتحرك موازية لنفسها فى المستوى . نحن سوف لا نفعل ذلك . متجهاتنا ، أو بالأحرى القطع المستقيمة المتجهة المناظرة ، ستظل دائما خارجة من نقطة الأصل فيما عدا حرية التحرك يوجد اختلاف جوهرى بين متجهات الفزيائيين ومتجاهتنا . أحياناً ، خاصة عند دراسة وجهة هندسة أو فيزيائية للمتجهات ، سوف نشير الى القطع المستقيمة المتجهة كمتجهات من سياق الحديث سيكون واضحاً ما إذا كنا نعتبر المجه كزوج من الأعداد ، أو نقطة ، أو قطعة مستقيمة متجهة خارجة من الأصل . سنقصد باتجاه المتجه اتجاه القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة .

من المتجهين $\alpha = (a_1, a_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ يمكن تكوين متجه آخر $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ بجمع مركباتهما المتناظرة هذا المتجه الجديد يسمى حاصل جمع β و α ويرمز له بالرمز $\alpha + \beta$. أى أن

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

بالمثل ، الفرق بين β و α هو

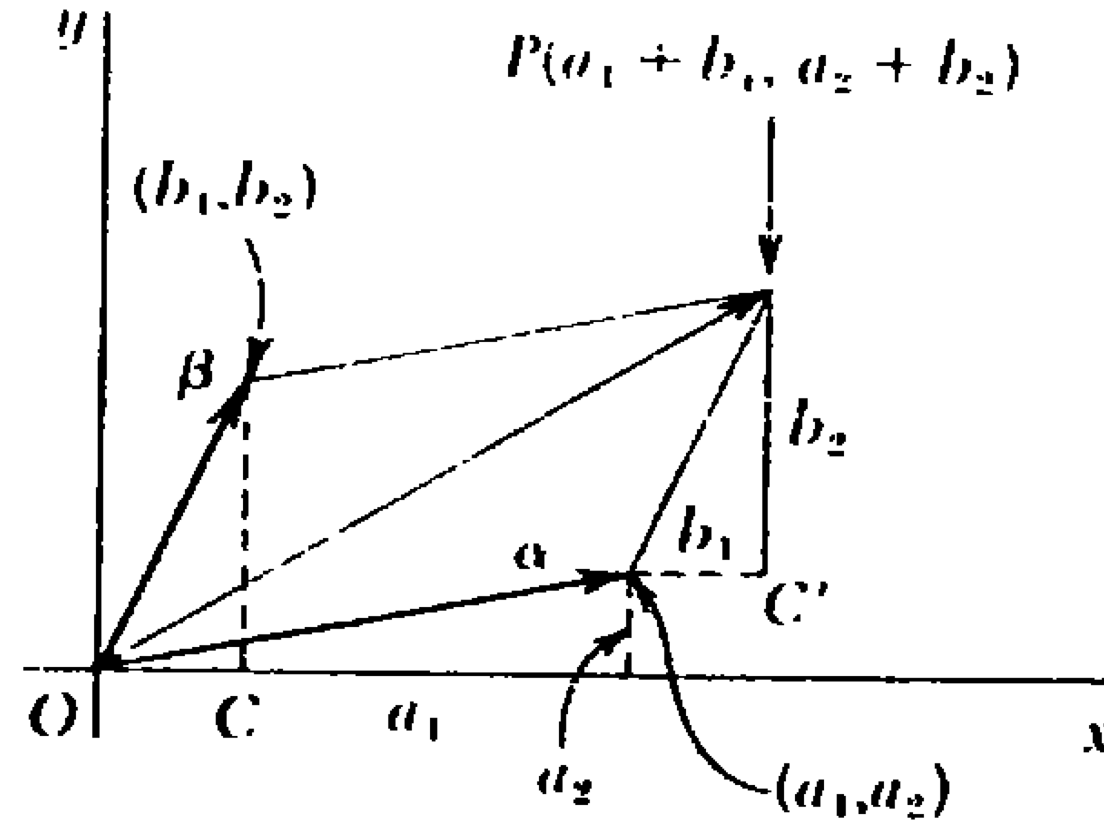
$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \quad (1)$$

فمثلا ، إذا كان $\beta = (4,-5)$ و $\alpha = (1,2)$ ، فان

$$\alpha + \beta = (1 + 4, 2 + (-5)) = (5,-3)$$

$$\alpha - \beta = (1 - 4, 2 - (-5)) = (-3,7)$$

حاصل جمع متجهين له تفسير هندسى مفيد . المتجهان $\beta = (b_1, b_2)$ و $\alpha = (a_1, a_2)$ موضحان فى الشكل ١٤ - ٢ مع القطعتين المستقيمتين المتجهتين المناظرتين لهما . ارسم المثلث $\alpha C' P$ يطابق المثلث القائم الزاوية $O C \beta$ وموضوعاً كما هو موضح فى الشكل . النقطة P احداثياها هما $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ فهى تناظر المتجه $\alpha + \beta$. الشكل $O\alpha P\beta$ متوازى أضلاع ، اثنان من أضلاعه هما $O\beta$ و $O\alpha$ والقطر OP هو القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة للمتجه $\alpha + \beta$. هذا يعطى قاعدة متوازى الأضلاع لجمع المتجهات . القطعة المستقيمة المتجهة المناظرة لحاصل جمع المتجهين β و α هى قطر متوازى الأضلاع الذى اثنان من أضلاعه هما القطعتان المستقيمتان المتجهتان المناظرتان للمتجهين β و α .



شكل ١٤ - ٢

إذا كان $\gamma = (c_1, c_2)$ متجهاً ثالثاً ، فان

$$(\alpha + \beta) + \gamma = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2)$$
$$= ([a_1 + b_1] + c_1, [a_2 + b_2] + c_2)$$
$$= (a_1 + [b_1 + c_1], a_2 + [b_2 + c_2])$$
$$= (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$
$$= \alpha + (\beta + \gamma).$$

هذا يثبت أن ، كما فى حالة الأعداد الحقيقية ، جمع المتجهات يتبع قانون الدمج . بالمثل ، يمكن أثبات $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ لأى متجهين β و α فالجمع يتبع أيضاً قانون الابدال (المسألة ٣٤) .

المتجه $(0, 0)$ يسمى المتجه الصفرى ويرمز له بـ 0 . وهو ليس له اتجاه . رغم أن المتجه الصفرى يختلف عن العدد صفر ، فنفس الرمز يستخدم لكليهما ، من سياق الحديث يكون واضحاً أى صفر هو المقصود . المتجه الصفرى له الخاصية أن

$$\alpha + 0 = \alpha$$

لأى متجه α (المسألة ٣٥) .

طول المتجه α يسمى عادة مقدار المتجه ويرمز له بالرمز $|\alpha|$. بنظرية فيثاغورث ينتج من الشكل ١٤ - ١ أنه إذا كان $\alpha = (a_1, a_2)$ ، فان

$$|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

بما أن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يمكن أن يكون صفراً فقط إذا كان $a_1 = a_2$ فان $\alpha = 0$ إذا وإذا فقط كان $|\alpha| = 0$. لاحظ أن طول المتجه هو عدد غير سالب .

أى متجهين ، أو أكثر ، يكونان على استقامة واحدة إذا كانت القطعتان المستقيمتان المتجهتان المناظرتان لهما تقعان على نفس الخط المستقيم المار بنقطة الأصل . فالمتجهات $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ و $(1, 2)$ و $(4, 8)$ على استقامة واحدة .

المتجه الذى نحصل عليه بضرب كل مركبة للمتجه $\alpha = (a_1, a_2)$ فى عدد حقيقى c يرمز له بالرمز $c\alpha$. أى أن

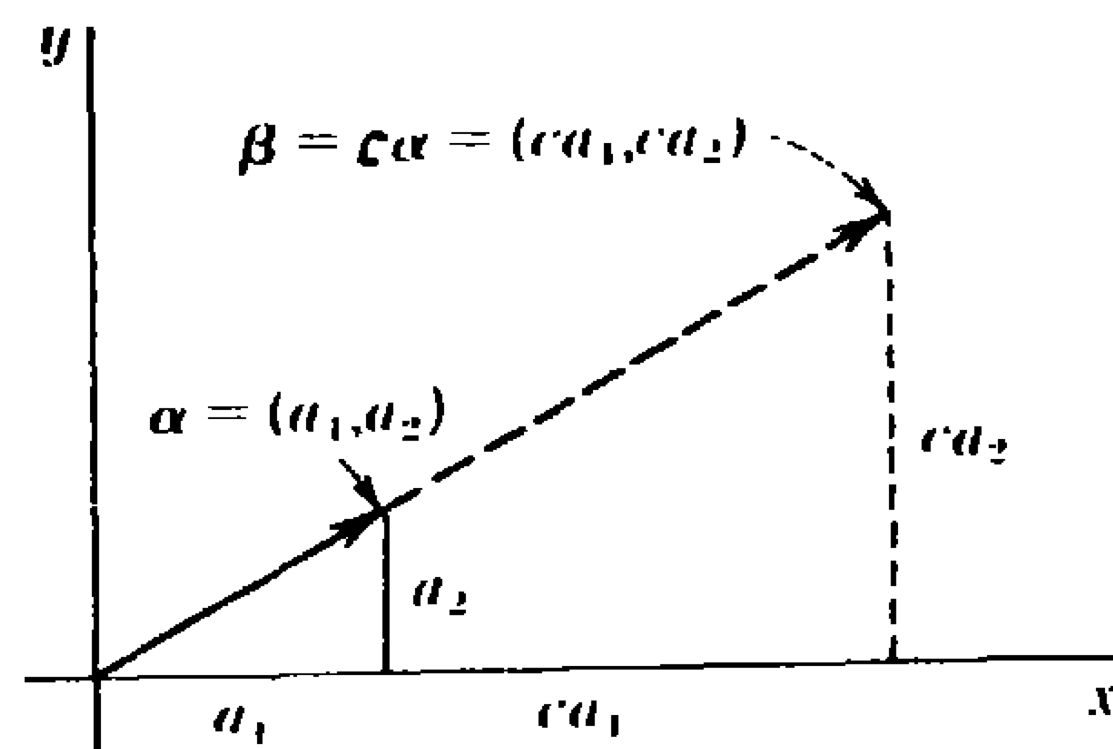
$$c\alpha = c(a_1,a_2) = (ca_1,ca_2) \qquad (٢)$$

فمثلا ، إذا كان $\alpha = (1, 2)$ ، فان $3\alpha = 3(1, 2) = (3, 6)$. واضح من المثلثين المتشابهين فى الشكل ١٤ ـ ٣ أن المتجهين β و α يكونان على استقامة واحدة إذا وإذا فقط كان $\beta = c\alpha$ لعدد ما c . إذا كان c موجباً ، فان $c\alpha$ له نفس الاتجاه مثل α ؛ اذا كان c سالباً ، فان $c\alpha$ له الاتجاه العكسى . نترك للقارىء ان يتحقق أن

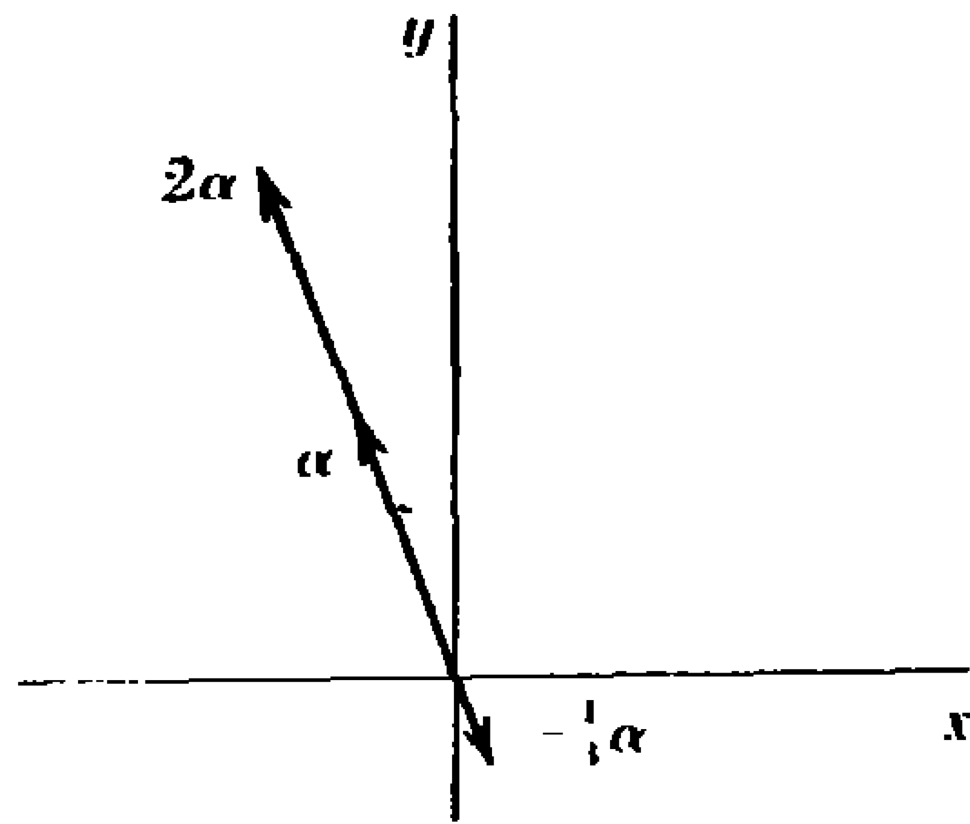
$$|c\alpha| = |c||\alpha|$$

لأى عدد c وأى متجه α(المسألة ٣٧) . واذن المتجه $c\alpha$ يكون أطول أو أقصر من α تبعاً لكون $|c| > 1$ أو $|c| < 1$. فمثلا ، المتجه 2α طوله ضعف طول المتجه α ويتجه فى نفس الاتجاه ، والمتجه $-\frac{1}{3}\alpha$ طوله ثلث طول المتجه α ويتجه فى الاتجاه المضاد (الشكل ١٤ ـ ٤) .

من المعتاد عند معالجة المتجهات أن نشير إلى الأعداد الحقيقية كمقادير عددية . حاصل الضرب $c\,\alpha$ فى (٢) هو حاصل ضرب مقدار عددى ومتجه ويسمى حاصل ضرب عددى لتمييزه عن أنواع أخرى من حواصل الضرب المشتملة على متجهات .



شكل ١٤ ـ ٣



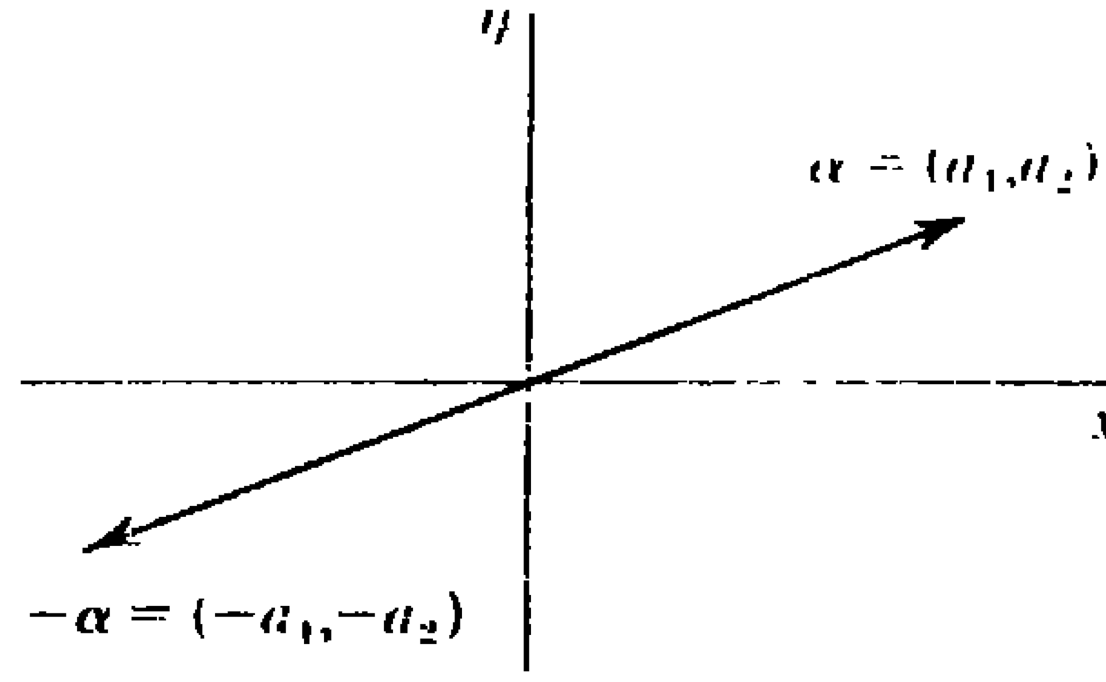
شكل ١٤ ـ ٤

لاحظ أن حاصل الضرب العددى هو متجه . حاصل الضرب العددى $c\alpha$ سيكتب أحياناً αc ، وحاصل الضرب $(c/d)\,\alpha$ سيكتب $c\,\alpha/d$.

سالب المتجه $\alpha = (a_1, a_2)$ يعرف بأنه المتجه $(-a_1, -a_2)$. أى أن

$$-\alpha = -(a_1,a_2) = (-a_1,-a_2)$$

وبالتالى فان $-\alpha = (-1)\,\alpha$. هذا المتجه له نفس الطول مثل α لكنه يتجه فى الاتجاه المضاد (شكل ١٤ ـ ٥) . من (١) ، يكون $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.



شكل ١٤-٥

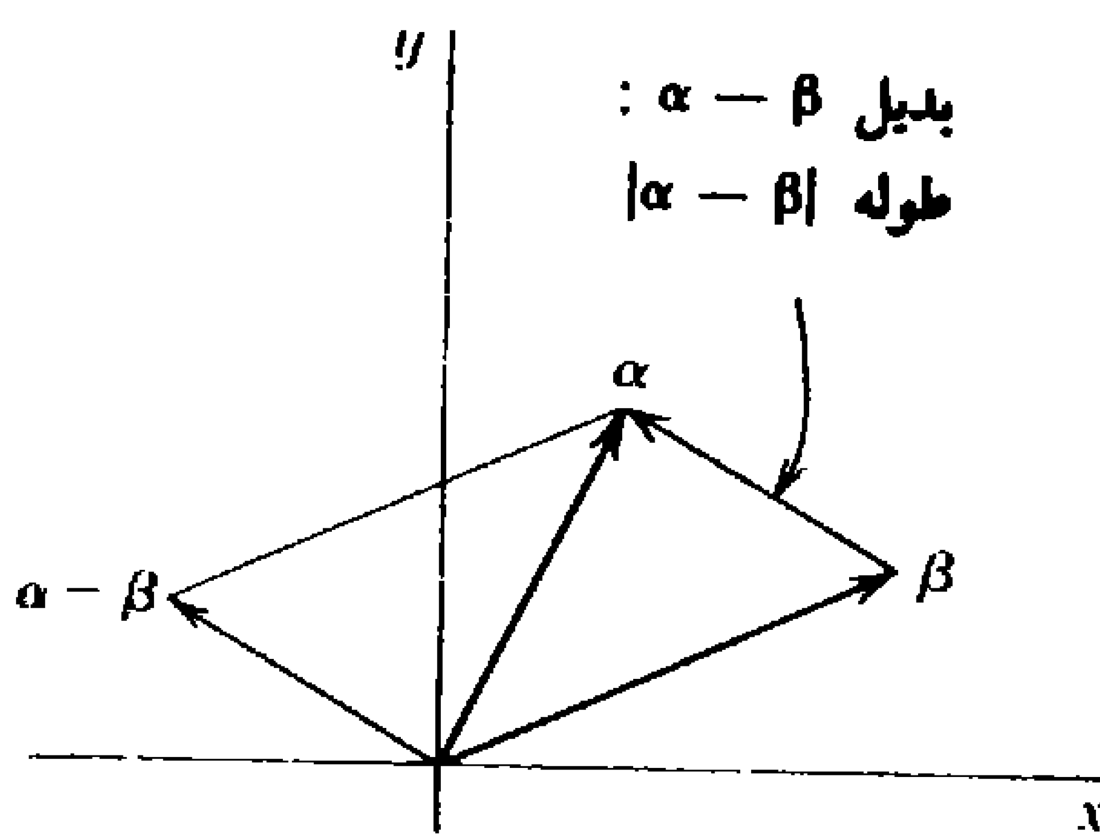
من السهل إثبات أن $c\,0 = 0$ ، حيث c أى عدد حقيقى وحيث 0 هو المتجه الصفرى وأيضاً أن $0\alpha = 0$ ، حيث α هو أى متجه ، الصفر على اليسار هو العدد صفر ، والصفر على اليمين هو المتجه الصفرى (المسألة ٣٦) . صحيح أيضاً (المسألة ٤١) أن لأى متجهين β و α ولأى مقدارين عدديين (عددين حقيقيين) d و c ، يكون

$$c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta, \qquad c(d\alpha) = (cd)\alpha$$
$$(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha, \qquad 1(\alpha) = \alpha.$$

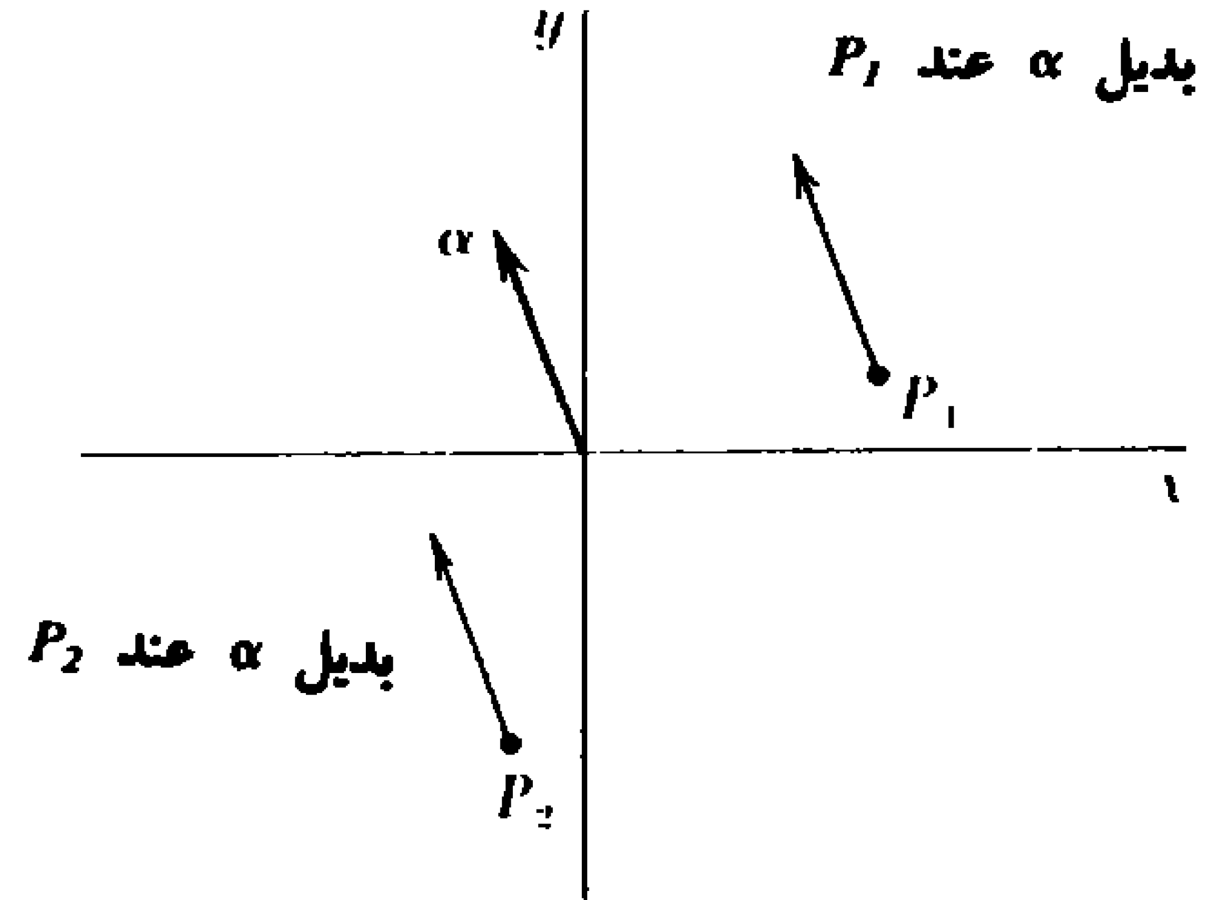
هذه ، وخواص المتجهات التى ذكرناها من قبل ، تكفى لتؤكد أن المتجهات تسلك مثل الأعداد الحقيقية بالنسبة الى الجمع والطرح والضرب فى عدد فمثلا : $-(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta$, $\frac{5}{4}(\alpha/5 + \beta) = \frac{1}{4}(\alpha + 5\beta)$, $(\alpha - \beta) + 2\beta = \alpha + \beta$.

ليكن α متجهاً . من كل نقطة P فى المستوى يمكن رسم قطعة مستقيمة لها نفس الطول والاتجاه مثل α . نسمى مثل هذه القطعة المستقيمة المتجهة البديل للمتجه α عند P (شكل ١٤-٦) . من المناسب اعتبار المتجه α كالبديل لنفسه عند نقطة الأصل . المتجه له بدائل كثيرة ، بديل لكل نقطة فى المستوى . وبالعكس كل قطعة مستقيمة متجهة هى بديل لمتجه ما .

بما أن $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ ، فالمتجه α هو حاصل جمع β و $\alpha - \beta$ ، والمتجه $\alpha - \beta$ يجب ان يبدو كما فى الشكل ١٤-٧ . لاحظ أن القطعة المستقيمة المتجهة من رأس المتجه β الى رأس



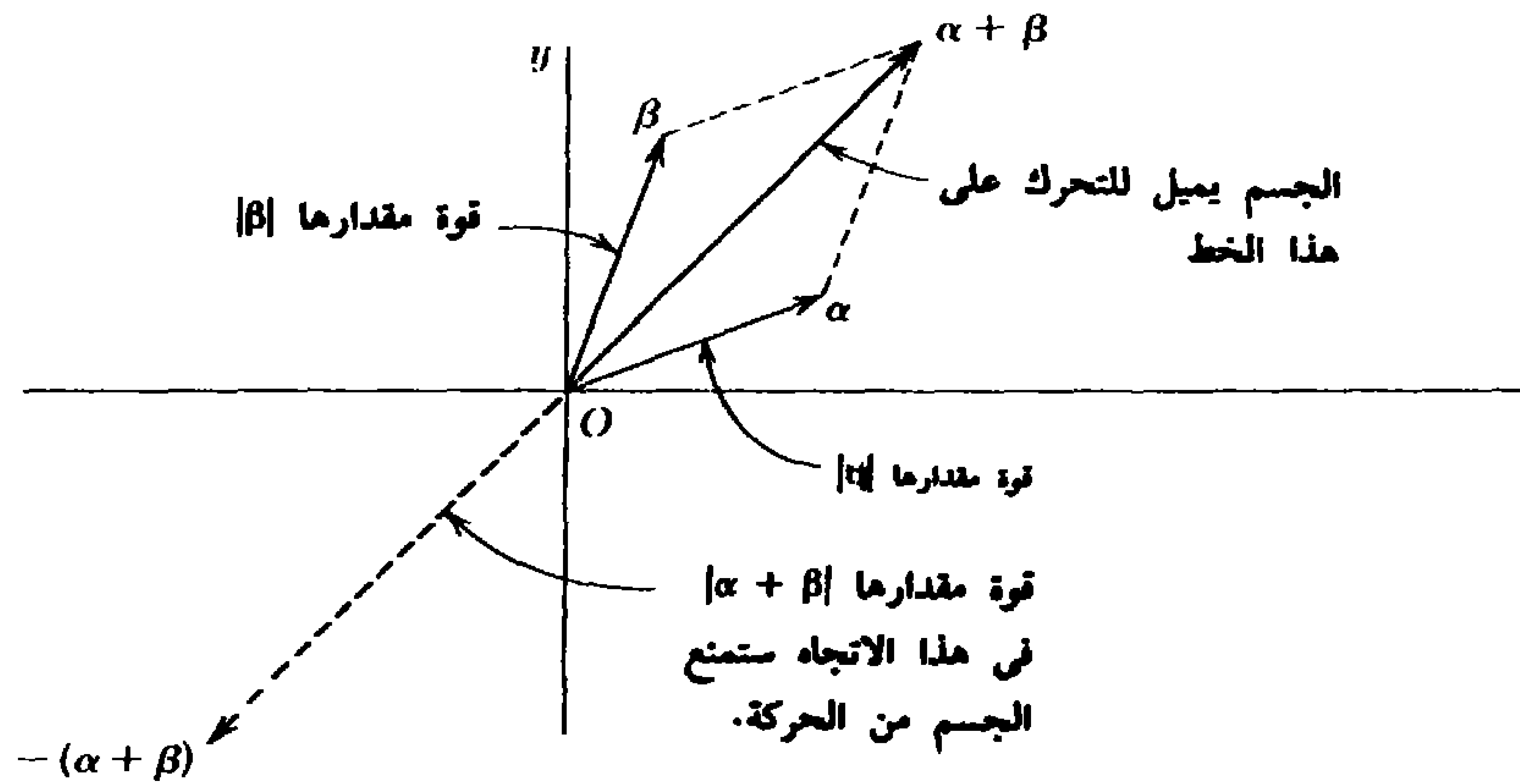
شكل ١٤-٧



شكل ١٤-٦

المتجه α هو البديل للمتجه $\beta - \alpha$ عند β . المتجه يكون صفراً إذا وإذا فقط كان طوله صفراً . إذن $\alpha = \beta$ إذا وإذا فقط كان $|\alpha - \beta| = 0$.

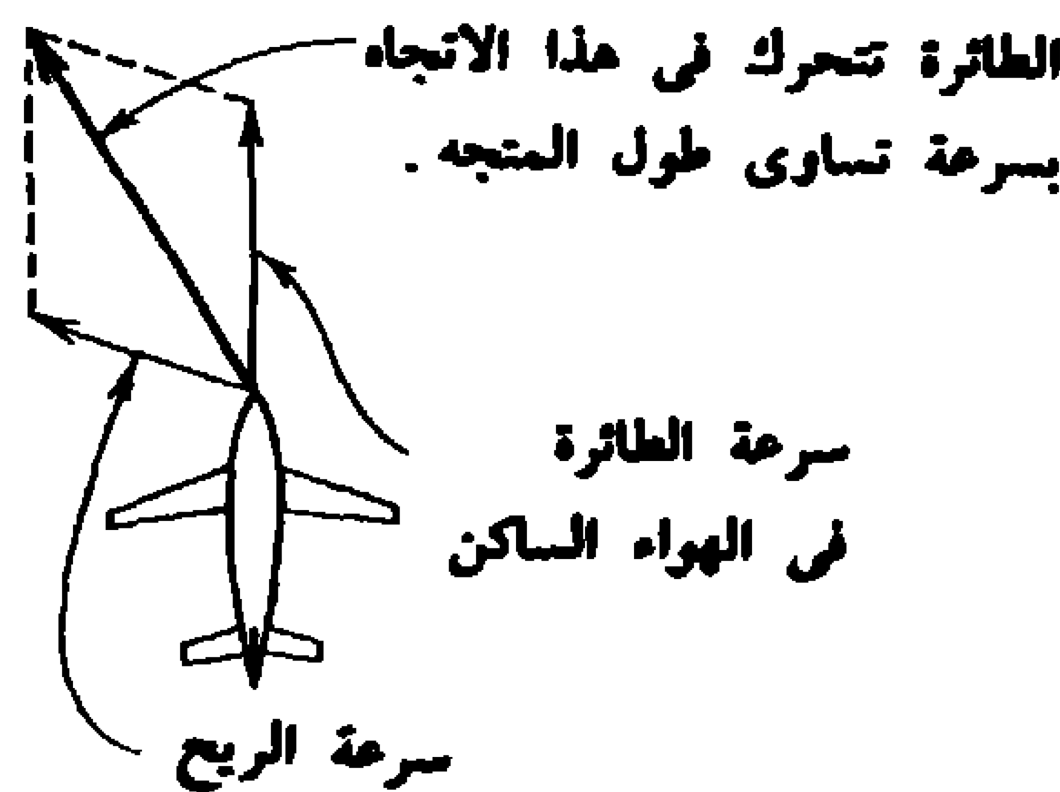
حاصل الجمع لمتجهين له تفسيرات فيزيائية كثيرة . نفرض أن قوتين تؤثران فى اتجاهين مختلفين وتشدان جسماً عند O . يمكن تمثيل القوتين بمتجهين β و α يقعان على خطى تأثير القوتين ويتجهان فى اتجاه القوتين وطولاهما يساويان مقدارى القوتين (شكل ١٤ ـ ٨) . نفس التأثير على الجسم يمكن انجازه بقوة واحدة ، تسمى القوة المحصلة ، تؤثر فى اتجاه $\alpha + \beta$ ومقدارها يساوى ذلك المتجه . القوة التى تستخدم فى الاتجاه المضاد للمتجه $\alpha + \beta$ ولها نفس المقدار ستتوازن تماماً مع القوتين على امتداد β و α . والجسم سوف لا يتحرك . وذلك لأن حاصل جمع المتجهات $-(\alpha + \beta)$ و β و α هو المتجه الصفرى .



شكل ١٤ ـ ٨

أى قوة مؤثرة على جسم يمكن تمثيلها ببديل لمتجه عند الجسم . التأثير الكلى لمجموعة من القوى هو حاصل جمعها المتجه . اتجاهه وطوله يعطيان اتجاه ومقدار القوة المحصلة .

سرعة جسم متحرك يمكن تمثيلها بمتجه عند نقطة الأصل أو ببديل للمتجه عند الجسم . اتجاه المتجه أو متجه بديل له هو اتجاه الحركة ، وطوله هو مقدار السرعة . سرعة الطائرة فى الهواء الساكن يمكن تمثيلها بمتجه بديل عند الطائرة مشيراً إلى الأمام (شكل ١٤ ـ ٩) . سرعة الريح



شكل ١٤ ـ ٩

يمثلها متجه بديل عند الطائرة مشيراً إلى اتجاه هبوب الريح . متجه حاصل جمع الاثنين سيشير إلى الاتجاه الذى تتحرك فيه فعلا ، وطوله سيكون مساوياً لمقدار سرعة الطائرة .

إذا أثرت عدة قوى على جسم ، وكان تأثير كل على حدة سيسبب حركة الجسم فى اتجاه معين بسرعة معينة ، فان هذه السرعات يمكن تمثيلها بمتجهات عند نقطة الأصل أو ببدائل للمتجهات عند الجسم . الاتجاه الفعلى لحركة الجسم تحت تأثير القوى هو حاصل جمع المتجهات ، وسرعته هى طول حاصل الجمع .

مسائل

أوجد حاصل جمع وفرق (الأول ناقص الثانى) أزواج المتجهات الآتية . ارسم القطعتين المستقيمتين المتجهتين اللتين تمثلان المتجهين ، أكمل متوازى الأضلاع ، الذى اثنان من أضلاعه هما المتجهان المعطيان ، ووضح كلا من متجهى حاصل الجمع والفرق كقطعة مستقيمة متجهة .

١ - $(2,1), (1,5)$ ٢ - $(1,0), (-1,4)$. ٣ - $(-10,-4), (\frac{19}{2},4)$ ٤ - $(a,b), (0,0)$

٥ - $(3\epsilon_1 + 5\epsilon_2)$ $(-\epsilon_1 + \epsilon_2)$ حيث $\epsilon_2 = (0,1)$ و $\epsilon_1 = (1,0)$.

أوجد حاصل ضرب المتجه والمقدار العددى . ارسم القطعتين المستقيمتين اللتين تمثلان المتجه ومتجه حاصل الضرب العددى .

٦ - $(2,-4), \frac{1}{2}$ ٧ - $(\frac{1}{3},6), -3$ ٨ - $(0,0), c$ ٩ - $(a,b), 0$

إذا كان $\delta = (0,0)$ و $\alpha = (0,1), \beta = (-3,2), \gamma = (3,\frac{1}{2})$ فأوجد ووقع المتجهات الآتية :

١٠ - $-\beta, 2\beta, -\frac{1}{3}\beta, 3\alpha + \beta$ ١١ - $-\sqrt{2}\gamma, \alpha - \gamma, (\alpha + \beta)(-\frac{1}{2})$

١٢ - $5\delta, 2\beta - \alpha + 3\gamma, -2(\gamma - \beta) + \frac{1}{3}(\alpha + \gamma)$

عين أياً من التعبيرات الآتية متجهات ، وأياً منها أعداد ، وأياً منها لا معنى له . فى الحالة الأخيرة إشرح لماذا التعبير لا معنى له . الحروف الإغريقية ترمز الى متجهات والحروف الرومانية ترمز الى أعداد .

١٣ - $6\alpha + 3$ ١٤ - $\alpha/4.$ ١٥ - $(6 + \alpha)\beta$ ١٦ - $(\alpha - 5\beta)\alpha$

١٧ - $\alpha^2 - 4\alpha + 4\gamma$ ١٨ - $8|2\alpha - 7\beta|$ ١٩ - $|(3\alpha)\gamma|$ ٢٠ - $3|\alpha\gamma|$

٢١ - $|3\alpha|\gamma$ ٢٢ - $c\alpha + d\beta$ ٢٣ - $(\alpha - 2\beta)/7$ ٢٤ - $\gamma\alpha + \delta\beta$

٢٥ - $(\alpha + 2\beta)/\delta$ ٢٦ - $\sqrt{\alpha + \beta}$

حل معادلات المتجهات الآتية للمتجه α :

أوجد المتجه الذى بديله عند النقطة الأولى من كل زوج أدناه يكون القطعة المستقيمة المتجهة من النقطة الأولى إلى الثانية :

٥٢ ـ $(3,0), (5,\frac{1}{4})$ ٥٣ ـ $(0,-\frac{1}{2}), (4,-7)$ ٥٤ ـ $(1,3), (-1,1)$ ٥٥ ـ $(a,b), (c,d)$

٥٦ ـ كيان β و α متجهين . أثبت أنه عندما تتغير t من 0 إلى 1 ، رأس المتجه $(1-t)\alpha + t\beta$ يرسم القطعة المستقيمة من α إلى β . [ارشاد : أنظر(٥)، ببند ٩ ـ ١] .

٥٧* أثبت أن كلا من القيمتين المطلقتين لمركبتى المتجه أقل من أو تساوى طول المتجه . وضح هذا هندسياً . هل يمكن ان يحدث التساوى ؟

٥٨ ـ أوجد متجهاً طوله الوحدة وله نفس الاتجاه مثل $(-6,\sqrt{2})$.

٥٩ ـ أوجد متجهاً طوله الوحدة ويتجه فى الاتجاه المضاد للمتجه $(\frac{1}{4},\frac{1}{3})$.

٦٠* أوجد متجهاً طوله الوحدة وله نفس الاتجاه مثل المتجه (a_1, a_2) .

٦١ ـ ارسم بديلا متجهاً يمثل قوة مقدارها $3\ lb$ تؤثر على جسم عند النقطة $(4,-1)$ فى اتجاه $120°$. أوجد احداثيى رأس البديل المتجه .

٦٢ ـ قوتان تشدان جسماً عند نقطة الأصل ، القوة الأولى مقدارها $2\sqrt{2}\ lb$ وفى الاتجاه $\pi/4$ والقوة الثانية مقدارها $6\ lb$ وفى الاتجاه $-\pi/3$. ارسم المتجهين الممثلين للقوتين ، كون متوازى الأضلاع ، وارسم المتجه الممثل للقوة المحصلة . أوجد مقدار واتجاه القوة المحصلة .

٦٣ ـ سرعة طائرة فى الهواء الساكن هى $300\ mph$ فى اتجاه $90°$. تهب ريح سرعتها $60\ mph$ فى اتجاه $-60°$ ما هو اتجاه ومقدار سرعة الطائرة ؟

١٤ ـ ٢

حاصل الضرب الداخلى

هذا البند يقدم فكرتين مفيدتين فى نظرية المتجهات : الضرب الداخلى لمتجهين والتركيبة الخطية للمتجهات .

ليكن $\beta = (b_1,b_2)$ و $\alpha = (a_1,a_2)$ متجهين . العدد الحقيقى $a_1b_1 + a_2b_2$ يسمى حاصل الضرب الداخلى (أو حاصل الضرب العددى للمتجهين β و α ويرمز له بالرمز α . β . أى أن

$$\alpha \cdot \beta = (a_1,a_2) \cdot (b_1,b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

فمثلا ، إذا كان $\beta = (8,-1)$ و $\alpha = (2,3)$ ، فان

$$\alpha \cdot \beta = 2(8) + 3(-1) = 13$$

لاحظ أن حاصل الضرب الداخلى هو عدد . النظرية الآتية تعطى بعض خواص حاصل الضرب الداخلى .

١٤ ـ ١ نظرية لجميع المتجهات γ و β و α ولأى عدد c ، يكون

$(i)\ \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

$(ii)\ \alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma$

$(iii)\ (\beta \pm \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha \pm \gamma \cdot \alpha$

$(iv)\ (c\alpha) \cdot \beta = c(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot (c\beta)$

$(v)\ 0 \cdot \alpha = 0$

$(vi)\ \alpha \cdot \alpha \geqslant 0$ و $\alpha \cdot \alpha = 0$ إذا وإذا فقط كان

البرهان سنبرهن (ii) والجزء الأول من (vi) ونترك براهين الخواص الأخرى للقارىء (المسألة ١) .

(ii) ليكن $\gamma = (c_1, c_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ و $\alpha = (a_1, a_2)$. فيكون $\beta \pm \gamma = (b_1 \pm c_1, b_2 \pm c_2)$

ومن تعريف حاصل الضرب الداخلى ، يكون

$$\alpha \cdot (\beta \pm \gamma) = a_1(b_1 \pm c_1) + a_2(b_2 \pm c_2)$$
$$= (a_1b_1 + a_2b_2) \pm (a_1c_1 + a_2c_2)$$
$$= \alpha \cdot \beta \pm \alpha \cdot \gamma.$$

(vi) حاصل جمع مربعات لا يمكن أن يكون سالباً إذن

$$\alpha \cdot \alpha = a_1^2 + a_2^2 \geqslant 0 \qquad (١)$$

حيث أن $|\alpha| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ فإن المعادلة (١) تبين أن

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \alpha}$$

١٤ ـ ٢

يوجد تعبير بسيط ومفيد لجيب تمام الزاوية بين متجهين بدلالة حاصل الضرب الداخلى لهما . ليكن β و α متجهين غير صفريين ولتكن θ الزاوية بينهما ، حيث $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$. بالرجوع الى الشكل ١٤ ـ ١٠ ، لدينا بقانون جيب التمام

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB| \cos \theta$$

أو بلغة المتجهات

$$|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha|\,|\beta| \cos \theta \qquad (٢)$$

الآن من المعادلة ١٤ ـ ٢ ،

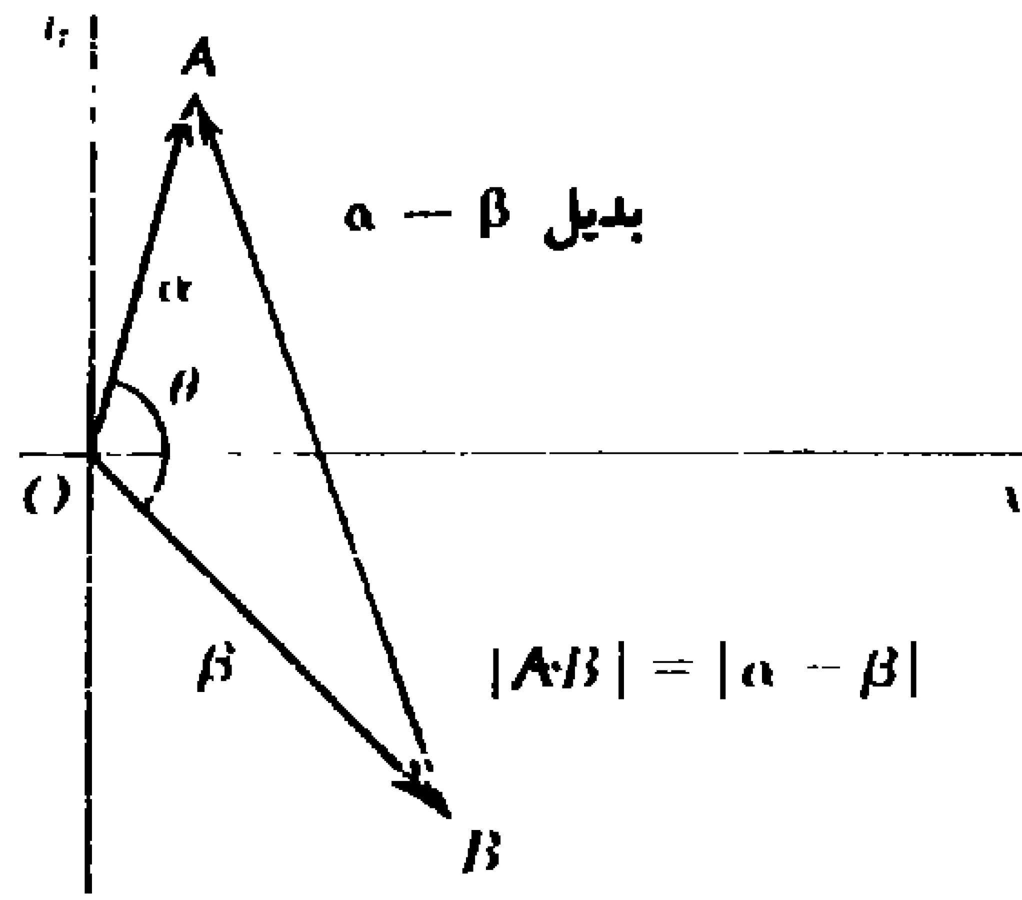
$$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)$$

ليس من الصعب ، باستخدام النظرية ١٤ ـ ١ ، اثبات أن

$$(\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = |\alpha|^2 - 2(\alpha \cdot \beta) + |\beta|^2 \qquad (٣)$$

(المسألة ٢) . بمساواة الطرفين الأيمنين للمعادلتين (٢) و(٣) ، يكون لدينا

$$-2|\alpha|\,|\beta| \cos \theta = -2(\alpha \cdot \beta)$$



شكل ١٤ـ١٠

ومن ثم

$$\cos \theta = \frac{\alpha \cdot \beta}{|\alpha|\,|\beta|} \qquad (٤)$$

من هذا التعبير يمكن ايجاد θ بالاستعانة بجدول جيوب التمام . بما أن $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$ ، توجد زاوية واحدة فقط θ جيب التمام لها هو العدد بالطرف الأيمن من (٤) .

مثال ١ . أوجد الزاوية بين المتجهين $(-2, 1)$ و $(3, 2)$.

اذا فرضنا أن $\beta = (-2, 1)$ و $\alpha = (3, 2)$ فان جيب تمام الزاوية بين المتجهين β وα هو ، باستخدام (٤) ،

$$\cos \theta = \frac{3(-2) + 2(1)}{\sqrt{9+4}\ \sqrt{4+1}} = \frac{-4}{\sqrt{65}} \approx -0.49614$$

اذن $\theta \approx 119° 45'$

بما أن $0 \leqslant \theta \leqslant 180°$ ، فإن $\cos \theta = 0$ اذا واذا فقط كانت $\theta = 90°$ ، ونستنتج من (٤) النظرية الآتية :

١٤ـ٣ نظرية . المتجهان β وα يكونان متعامدين اذا وإذا فقط كان $\alpha \cdot \beta = 0$.

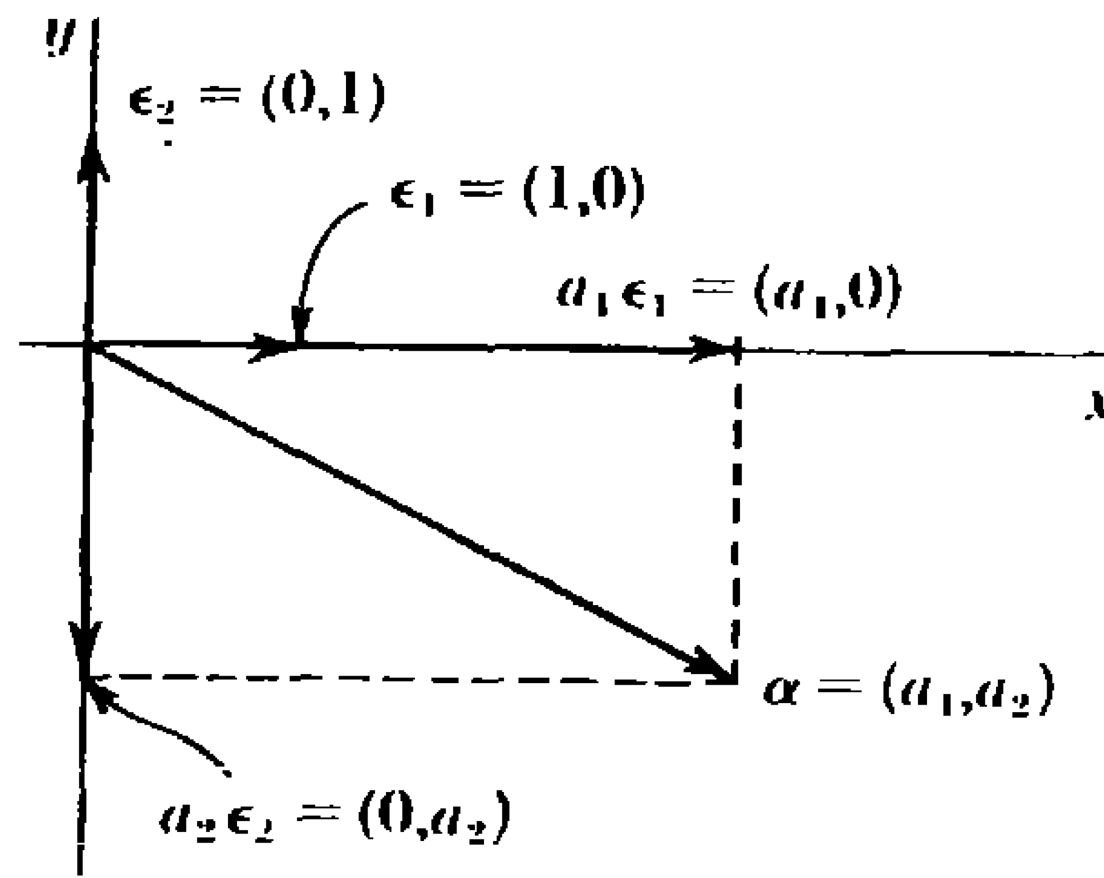
فمثلا المتجهان $\beta = (10, 4)$ و $\alpha = (-2, 5)$ متعامدان لأن $\alpha \cdot \beta = (-2)(10) + (5)(4)$.
حتى تنطبق على جميع المتجهات ، نعتبر أن المتجه الصفرى عمودى على كل متجه .

ليكن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ مجموعة من المتجهات . حاصل جمع على الصورة : $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n$ ، حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ أعداد ، يسمى تركيبة خطية للمتجهات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. الأعداد $c_1, c_2, \ldots, c_n$ تسمى معاملات المتجهات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. فمثلا ، اذا كان $\alpha_2 = (-6, \frac{1}{2})$ و $\alpha_1 = (2, 1)$ ، فان المتجه $2(2,1) + 5(-6,\frac{1}{2})$ هو تركيبة خطية للمتجهين α_1 و α_2 . هذه التركيبة الخطية هى المتجه $(-26,\frac{9}{2})$ ، وقد أوضحنا أن $(-26,\frac{9}{2})$ يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين $(-6,\frac{1}{2})$ و $(2, 1)$.

المتجهان $\epsilon_2 = (0, 1)$ و $\epsilon_1 = (1, 0)$ ، اللذان طول كل منهما الوحدة ويقعان على المحور السينى والمحور الصادى ، على الترتيب ، لهما أهمية خاصة لأنهما يتعامدان . أى متجه $\alpha = (a_1, a_2)$ يمكن كتابته على الصورة

$$\alpha = (a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2)$$
$$= a_1(1,0) + a_2(0,1) = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2$$

أى أن كل متجه يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين ϵ_2 و ϵ_1 . الشكل ١٤ ـ ١١ يوضح ذلك هندسياً . كثيراً ما يكون من المطلوب التعبير عن متجه كتركيبة خطية لمتجهين معطيين ليسا على استقامة واحدة . المثال الآتى يوضح كيف نجرى ذلك .



شكل ١٤ ـ ١١

كل متجه α يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين ϵ_2 و ϵ_1 .

مثال ٢ . عبر عن المتجه $\gamma = (-4, 8)$ كتركيبة خطية للمتجهين $\beta = (1, -1)$ و $\alpha = (2, 6)$.

نبحث عن عددين b و a بحيث أن

$$(-4,8) = a(2,6) + b(1,-1)$$

بتعريف حاصل ضرب عدد ومتجه حاصل جمع متجهين ، يكون

$$a(2,6) + b(1,-1) = (2a,6a) + (b,-b) = (2a + b,\ 6a - b)$$

لكى يكون هذا المتجه الأخير مساوياً للمتجه $(-4, 8)$ ، يجب أن تحقق b و a المعادلتين

$$2a + b = -4, \qquad 6a - b = 8$$

بحل هاتين المعادلتين معاً ، نرى أن $b = -5$ ، $a = \frac{1}{2}$ اذن $\gamma = \gamma = \frac{1}{2}\alpha - 5\beta$.

مسائل :

١ ـ أثبت أجزاء النظرية ١٤ ـ ١ التى لم تبرهن فى الكتاب ، أى الأجزاء (أولا) و (ثالثاً) و (رابعاً) و(خامساً) والجزء الثانى من (سادساً) .

٢٩ _ $-4\alpha + 3\beta = 6(\delta - \alpha)$

$(-2,7)$ ٣٣ - $(a, 1 + b)$

β و α .

ث 0 هو المتجه الصفرى . (ب) أثبت أن
مو العدد صفر ، والصفر الأيمن هو المتجه

α . أشرح معنى الخطوط الرأسية فى هذه

كان $|\beta| = |\alpha|$ ؟
$c\alpha$ — يمكن أن يعنى أياً من هذين دون

و c يكون

$(c + d)\alpha = c\alpha + d\alpha$

$1(\alpha) = \alpha$

ل $(1, -4)$ ويكونان على استقامته .
ـن على استقامة الأول :

$(9,12$ ٤٥ - $(2,7), (r,5)$

$(2,3)$

لى استقامة المتجه $4\alpha - 3\beta$.

ن على استقامة واحدة إذا وإذا فقط كانت
ت c لا يساوى صفراً بحيث أن $b_2 = ca_2$
و (a_1, a_2) يكونان على استقامة واحدة إذا

P . ارسم المتجه α وبديلة عند P .
$\alpha = (-5,6), P = (4,$

٢ ـ أثبت أن $|\beta|^2 + (\alpha \cdot \beta)2 -$
٣ ـ حقق متباينة chy - Schwarz
و $(-1, 3)$ ، $\alpha = $ (ب) ()
(ارشاد : ضع $= (b_1, b_2)$
٤ ـ حقق متباينة المثلث $|\beta| + |\alpha$
(ب) $\beta = (3, 4)$ و $(5, 1)$
هندسياً لمتباينة المثلث . هل
شفارتر (المسألة ٣) .
٥ ـ عمم متباينة المثلث (المسألة ٤
أوجـ $|\alpha_n| + \ldots + |\alpha_2| + |\alpha_1|$
الى أزواج النقط الآتية :

٦ - $(2,3), (1,7)$ ٧ - $5,4)$

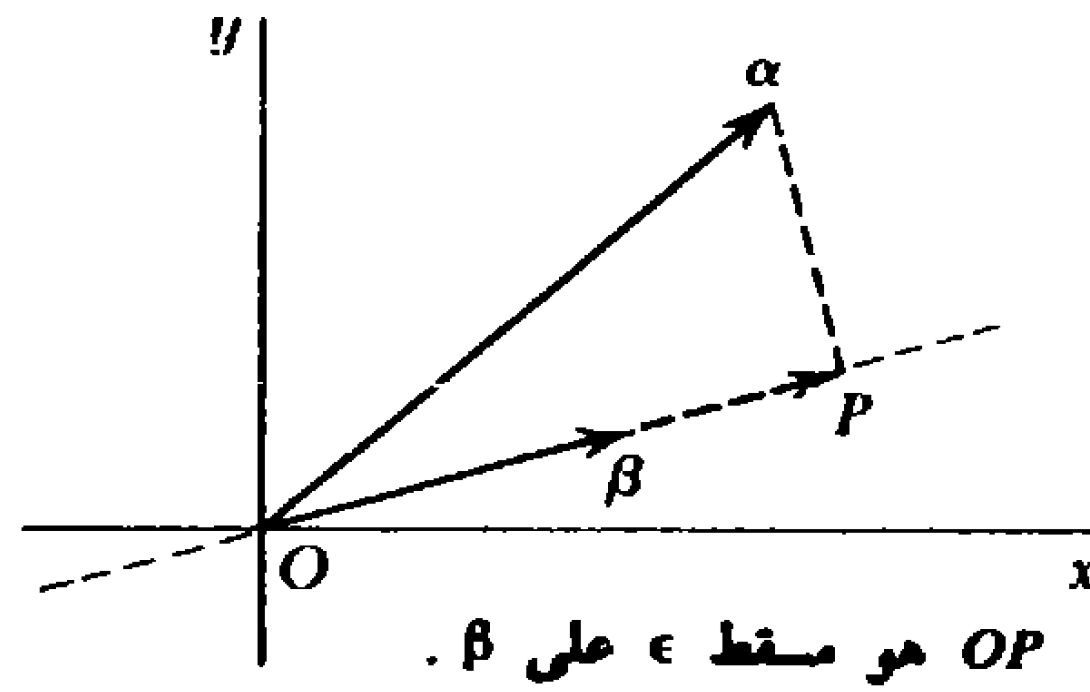
أوجد زوايا المثلث الذى رؤوسه

١٠ - $A(-1,1), B(2,-1), C(4,4)$
١٢ - $A(2,0), B(6,2), C(-1,4)$

١٣ ـ عين قيمة a بحيث أن الزاوية
١٤ ـ أوجد $a_1\, a_2$, بحيث أن المتجه
زاوية $30°$ مع الاتجاه الموجـ
١٥ ـ أثبت أن المتجهين $3\sqrt{2}\epsilon_2$
١٦ ـ عين b بحيث أن المتجه 2
١٧ ـ (أ) أوجد جميع المتجهات ا
وأثبت هندسياً أن كلا منها يتعا
منها الوحدة وتتعامد مع المتـ
١٨ ـ أثبت أن الشرط $\alpha \cdot \beta = 0$ لتعام
مقلوب ميل الآخر . لاحظ أن
كان أحد المتجهين رأسياً .
١٩ ـ أثبت أن المتجه الوحيد العمـ
٢٠ ـ أثبت أن المتجهين $(\phi, \sin \phi$
وأثبت أن الزاوية من المتجه β ا
$\cos(\theta - \phi)$ بدلالة مركبات

٢١ ـ ليكن $\alpha = (a, b)$ متجهاً غير صفرى . أرمز الى طوله بالرمز r والى زاوية ميله على محور السينات بالرمز θ . فيكون $\alpha = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. هذان هما الاحداثيان القطبيان للمتجه α . اذا دار المتجه α زاوية $90°$ ضد اتجاه عقرب الساعة ، فاننا نحصل على المتجه $\beta = (r \cos (\theta + 90°)$ و $r \sin (\theta + 90°))$ حقق أن حاصل الضرب الداخلى للمتجهين β و α يساوى صفراً .

٢٢ ـ مسقط المتجه α على المتجه β هو المتجه الذى قطعته المستقيمة المتجهة هى مسقط القطعة المستقيمة التى تمثل المتجه α على خط المتجه β (شكل ١٤ ـ ١٢) . (أ) أوجد مسقط المتجه $(3, 3)$ على المتجه $(5, 2)$ (ارشاد : فى الشكل ١٤ ـ ١٢ ، $OP = c\beta$ لعدد ما c . عين c بحيث أن الخط المستقيم $P\alpha$ يكون عمودياً على OP) . (ب) أوجد مسقط المتجه $(5, 2)$ على المتجه $(3, 3)$. (ج) أوجد مسقط المتجه $(4, 1)$ على المتجه $(-\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$.
(د) أثبت أن طول مسقط المتجه α على المتجه $0 = \beta$ هو $|\alpha . \beta| / |\beta|$.



OP هو مسقط α على β .

شكل ١٤ ـ ١٢

٢٣ ـ أثبت بمثال أن $\alpha . \beta = \alpha . \gamma$ لا يتضمن أن $\beta = \gamma$. أثبت أنه اذا كان $\alpha . \beta = \alpha . \gamma$ لكل α ، فان $\beta = \gamma$ (ارشاد : $\alpha . \beta = \alpha . \gamma$ يتضمن أن $\alpha . (\beta - \gamma) = 0$)

٢٤ ـ أثبت أن $|\alpha - \beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$. فسر هذه المعادلة كنص عن ضلعى وقطرى متوازى الأضلاع .

٢٥ ـ أثبت أن $\alpha - \beta$ يكون عمودياً على $\alpha + \beta$ اذا وإذا فقط كان $|\alpha| = |\beta|$. أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة .

٢٦ ـ المتجهان β و α يكونان ضلعين من متوازى أضلاع . أثبت أن متوازى الأضلاع يكون مستطيلا اذا واذا فقط كان $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$.

٢٧ ـ ليكن $\beta \neq 0$ و α متجهين ثابتين . أعتبر مجموعة المتجهات التى على الصورة $\alpha + t\beta$ ، حيث t عدد . خطط المتجهات $\alpha + t\beta$ لقيم متعددة للعدد t وأثبت أن رؤوس هذه المتجهات تقع على خط مستقيم . أوجد أقصر متجه على الصورة $\alpha + t\beta$ وأثبت أنه عمودى على β .

٢٨ ـ أثبت أن $| \beta - \alpha | \leqslant | \, | \beta | - | \alpha | \, |$.

عبر عن المتجه γ كتركيبة خطية للمتجهين الثانى والثالث

٢٩ ـ $\gamma = (-6,2), \epsilon_1 = (1,0), \epsilon_2 = (0,1)$ ٣٠ ـ $\gamma = (2,5), \alpha = (1,3), \beta = (-1,-1)$

٣١ ـ $\gamma = (3,-4), \alpha = (-5,2), \beta = (1,1)$ ٣٢ ـ $\gamma = (0,1), \alpha = (1,0), \beta = (-1,1)$

٣٣ ـ أثبت أنه توجد تركيبة خطية للمتجهين غير الصفريين β و α ، معاملاتها غير صفرية ، تساوى صفراً اذا وإذا فقط كان β مضاعفاً عددياً للمتجه α . ماذا يعنى ذلك هندسياً ؟

٣٤ ـ أوجد تركيبة خطية للمتجهات $(1, 3)$ $(-4, 0)$ و $(-1, -1)$ معاملاتها ليست كلها أصفاراً ، وهى تساوى صفراً .

٣٥ ـ أثبت أنه لأى ثلاثة متجهات γ و β و α فى المستوى xy توجد تركيبة خطية لها ، معاملاتها ليست كلها أصفاراً ، وهى تساوى صفراً .

٣٦ ـ ليكن $\alpha = (a_1, a_2)$ و $\beta = (b_1, b_2)$ متجهين ليسا على استقامة واحدة . أثبت أن أى متجه يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية للمتجهين β و α . أثبت أن هذا لا يكون دائماً ممكناً اذا كان المتجهان β و α على استقامة واحدة . أعط تفسيراً هندسياً لهذه المسألة (ارشاد : أنظر المسألة ٤٩ ، بند ١٤ ـ ١) .

١٤ ـ ٣

الدوال المتجهة

اذا كانت مركبتا متجه ما غير ثابتتين بل هما دالتان ، مثلا $y(t)$ و $x(t)$ ، فكل قيمة لـ t تعين متجه أو نقطة ، $(x(t)$ و $y(t))$ واذن لدينا دالة

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

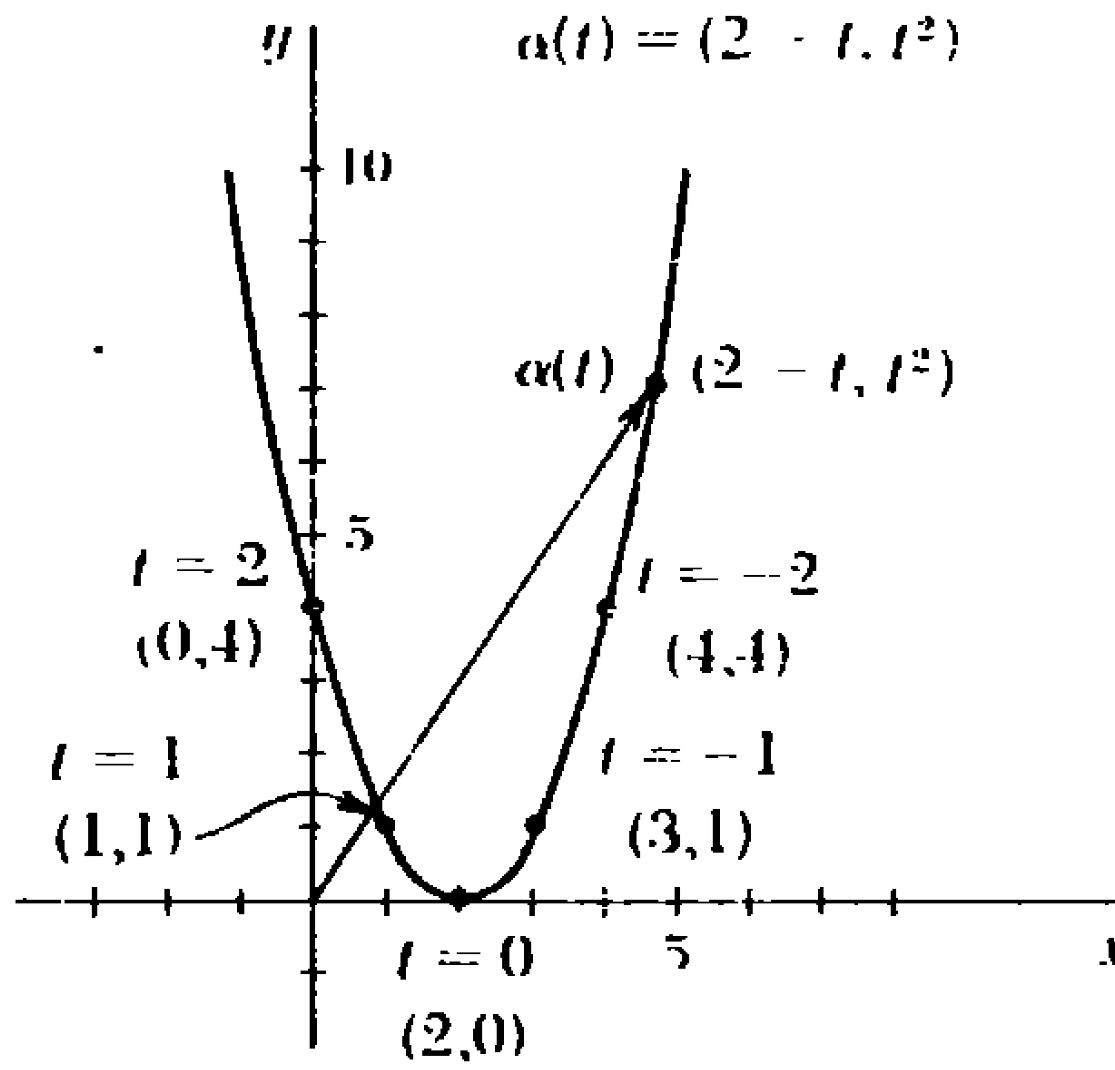
نطاقها فئة من الأعداد الحقيقية ومداها فئة من المتجهات . مثل هذه الدالة تسمى دالة بقيم متجهة ، أو بايجاز ، دالة متجهة . مغايراً لذلك ، الدالة العادية ، التى مداها أعداد حقيقية تسمى دالة حقيقية . عندما تتغير t ، تتغير أيضاً $\alpha(t)$ والفئة الناتجة من متجهات أو نقط هى عادة منحنى . فمثلا ، اذا كانت $y(t) = t^2$ و $x(t) = 2 - t$ ، فان $\alpha(t) = (2 - t, t^2)$. الشكل البيانى لهذه الدالة المتجهة هو القطع المكافىء الموضح فى الشكل ١٤ ـ ١٣ .

اذا كانت $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ دالة متجهة فان الاحداثيين y و x لنقطة على شكلها البيانى يعطيان بـ

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{١}$$

زوج من المعادلات البارامترية . واذن الشكل البيانى لدالة متجهة يمكن دراسته بواسطة المعادلتين

البارامتريتين (١) . للدالة السابقة $\alpha(t) = (2 - t, t^2)$ لدينا $x = 2 - t, y = t^2$ ، والمعادلة غير البارامترية للشكل البيانى هى $y = (2 - x)^2$. مفاهيم النهاية والاتصال والمشتقة يمكن تعميمها للدوال المتجهة . بماذا توحى الينا بداهتنا كتعريف معقول للنهاية ؟



شكل ١٤ - ١٣

نهاية دالة متجهة $\alpha(t)$ عندما تقترب t من c يجب أن تكون متجهاً β ، تكون الدالة $\alpha(t)$ قريبة منه عندما تكون t قريبة من c (شكل ١٤ - ١٤) . لكى تكون $\alpha(t)$ قريبة من β ، طول متجه الفرق $\alpha(t) - \beta$ يجب أن يكون قريباً من الصفر ، وبالعكس ، المطلب أن $|\alpha(t) - \beta|$ يكون قريباً من الصفر يكفى لاحضار $\alpha(t)$ بالقرب من β . بما أن $|\alpha(t) - \beta|$ دالة حقيقية لـ t ، فهذا يمكننا من تعريف نهاية دالة متجهة بدلالة نهاية دالة حقيقية .

١٤ - ٤ تعريف $\lim_{t \to c} \alpha(t) = \beta$ اذا كانت $\lim_{t \to c} |\alpha(t) - \beta| = 0$.

النظرية الآتية عادة تفيدنا ، أكثر من التعريف ، فى إيجاد نهاية دالة متجهة .

١٤ - ٥ . نظرية . الدالة المتجهة $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ يكون لها نهاية عند c إذا وإذا فقط كانت الدالتان الحقيقيتان $y(t)$ و $x(t)$ لهما نهايتان عند c . بالاضافة الى ذلك ، يكون

$$\lim_{t \to c} (x(t), y(t)) = (\lim_{t \to c} x(t), \lim_{t \to c} y(t)) \qquad (٢)$$

النظرية تقول أن $\alpha(t)$ تقترب من متجه $\beta = (a, b)$ اذا وإذا فقط كانت مركبتاها $y(t)$ و $x(t)$ تقتربان من b و a . هذا يكاد يكون واضحاً من الشكل ١٤ - ١٤ .

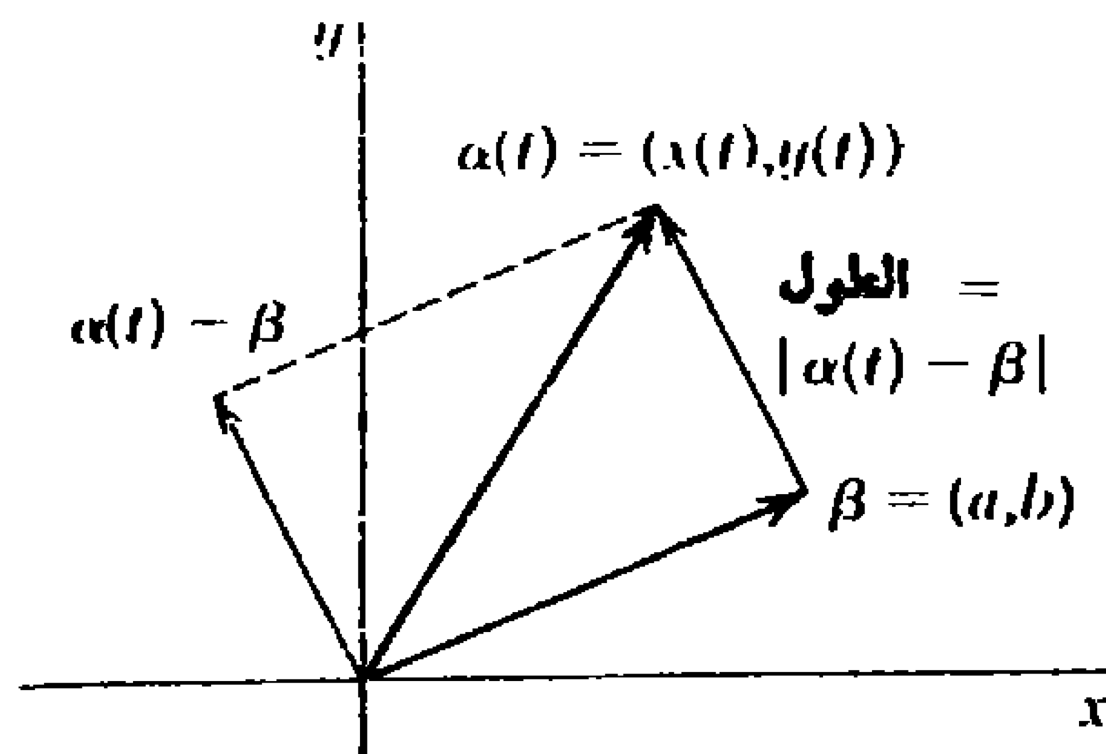
البرهان . نفرض أن $y(t)$ و $x(t)$ لهما نهايتان عند c ، وليكن $\lim y(t) = b$ و $\lim x(t) = a$. فيكون

$$\alpha(t) - (a,b) = (x(t) - a, y(t) - b),$$

و

$$|\alpha(t) - (a,b)| = \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2},$$

$$\lim_{t \to c} |\alpha(t) - (a,b)| = \sqrt{\lim_{t \to c} [x(t) - a]^2 + \lim_{t \to c} [y(t) - b]^2} = 0$$



شكل ١٤ ـ ١٤
$\alpha(t)$ تكون قريبة من β اذا واذا فقط كان $|\alpha(t) - \beta|$ قريباً من الصفر .

وهذا يثبت أن $\lim_{t\to c} \alpha(t) = (a,b)$. أى اذا كان الطرف الأيمن من (٢) موجوداً ، فكذلك يكون الطرف الأيسر ، وتكون (٢) صحيحة . بالعكس ، نفرض أن $\lim_{t\to c} \alpha(t)$ موجودة وأنها المتجه (a, b) . فيكون

$$\lim_{t\to c} |\alpha(t) - (a,b)| = 0 \qquad (٣)$$

الآن واضح من الشكل ١٤ ـ ١٥ (وكما سبق أن برهن فى المسألة ٥٧ ببند ١٤ ـ ١) أن القيمة المطلقة لكل مركبة لمتجه تساوى على الأكثر طول المتجه . بما أن

$$\alpha(t) - (a,b) = (x(t) - a, y(t) - b)$$

فهذا يتضمن أن

$$0 \leqslant |x(t) - a| \leqslant |\alpha(t) - (a,b)|$$
$$0 \leqslant |y(t) - b| \leqslant |\alpha(t) - (a,b)|$$

المعادلة (٣) تثبت الآن أن

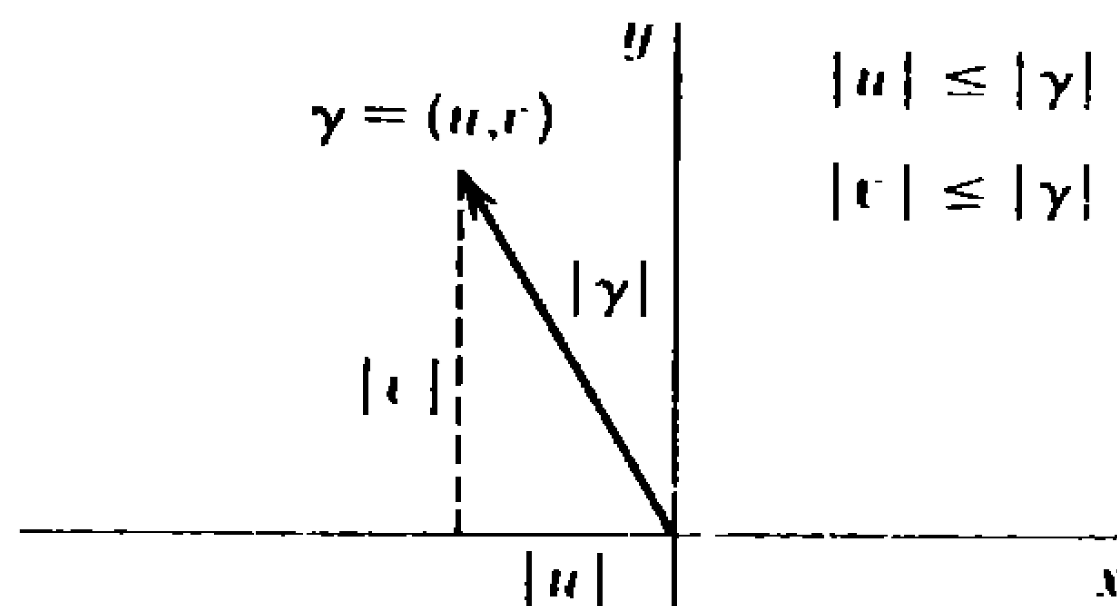
$$\lim_{t\to c} |x(t) - a| = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{t\to c} |y(t) - b| = 0$$

اذن $\lim_{t\to c} y(t) = b$ و $\lim_{t\to c} x(t) = a$. لقد أثبتنا أنه اذا كان الطرف الأيسر من (٢) موجوداً ، فكذلك يكون الطرف الأيمن ، وتكون (٢) صحيحة .

تعريفا الاتصال والمشتقة للدالة المتجهة هما ذاتهما كما للدول الحقيقية .

١٤ ـ ٦ تعريف . الدالة المتجهة $\alpha(t)$ تكون متصلة عند c اذا كانت

$$\lim_{t\to c} \alpha(t) = \alpha(c)$$



شكل ١٤ ـ ١٥

١٤ ـ ٧ تعريف مشتقة الدالة المتجهة $\alpha(t)$ عند t هى المتجه

$$\alpha'(t) = \lim_{u \to t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

بفرض وجود النهاية .

التعبير $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ هو متجه متسوم على العدد $u - t$. واذن هو متجه ، وبالتالى هكذا تكون نهايته $\alpha'(t)$.

١٤ ـ ٨ نظرية. اذا كانت $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ، فان

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$$

البرهان $\alpha(u) - \alpha(t) = (x(u) - x(t), y(u) - y(t))$, واذن

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t} = \left(\frac{x(u) - x(t)}{u - t}, \frac{y(u) - y(t)}{u - t}\right)$$

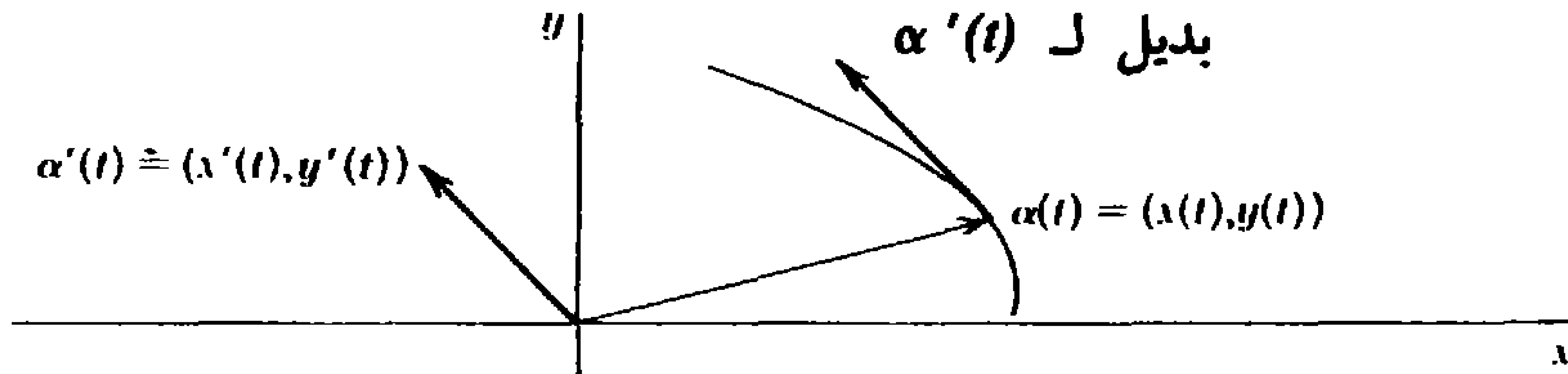
من تعريف $\alpha'(t)$ والنظرية ١٤ ـ ٥ ، يكون

$$\alpha'(t) = \lim_{u \to t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

$$= \left(\lim_{u \to t} \frac{x(u) - x(t)}{u - t}, \lim_{u \to t} \frac{y(u) - y(t)}{u - t}\right)$$

$$= (x'(t), y'(t)).$$

الاتجاه الموجب للمنحنى $x = x(t), y = y(t)$ عند نقطة P هو الاتجاه الذى فيه تمر نقطة ترسم المنحنى بتزايد t ، بالنقطة P .



شكل ١٤ ـ ١٦
بديل متجه المشتقة يكون مماساً للشكل البيانى .

١٤ ـ ٩ نظرية . لتكن $\alpha(t)$ دالة متجهة . بديل متجه المشتقة $\alpha'(t)$ عند النقطة $\alpha(t)$ ، إذا كانت $\alpha'(t) \neq 0$ ، يمس الشكل البيانى هناك ويكون فى الاتجاه الموجب للشكل البيانى .

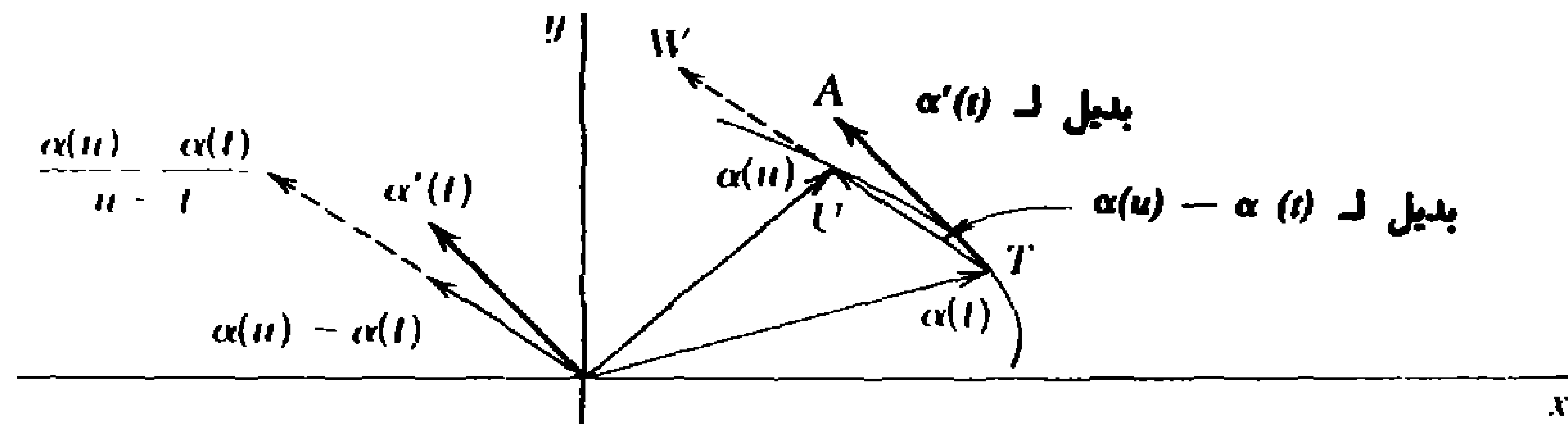
البرهان . لتكن $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. المعادلتان البارامتريتان للشكل البيانى هما $y = y(t)$ و $x = x(t)$ ، ومن (١) ، ببند ٩ ـ ٢ ، ميل المماس عند $\alpha(t)$ هو $y'(t) / x'(t)$. ومن ناحية أخرى $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. ونظراً لأن جميع المتجهات تبدأ من نقطة الأصل ، فان ميل $\alpha'(t)$ ،

وبالتالى ميل بديله عند $\alpha(t)$ هو $y'(t)/x'(t)$ (شكل ١٤ ـ ١٦) . وإذن المماس عند $\alpha(t)$ يجب أن ينطبق على بديل $\alpha'(t)$. هذا البرهان لا يشمل النقط حيث $x'(t) = 0$. إذا كانت $x'(t) = 0$ وكانت $y'(t) \neq 0$ فان المتجه $\alpha'(t)$ يكون رأسياً . لكن هذه هى شروط لأن يكون للشكل البيانى مماس رأسى عند t . الحالة $x'(t) = y'(t) = 0$ لا تحتاج الى دراسة ، لأنه عندئذ تكون $\alpha'(t) = 0$. هذا يثبت الجزء الأول من النظرية . إذا كانت $y'(t)$ و $x'(t)$ موجبتين ، فان $\alpha'(t)$ تتجه الى أعلى والى اليمين . أيضاً عندما ترسم نقطة الشكل البيانى ، إحداثياها y و x يتزايدان ، والاتجاه الموجب للشكل البيانى يكون الى أعلى والى اليمين . وإذن فى هذه الحالة يكون بديل متجه المشتقة فى الاتجاه الموجب للشكل البيانى . الحالات التى تكون فيها $y'(t)$ و $x'(t)$ سالبتين أو يكون لهما إشارتان مختلفتان ، نتركها للقارىء .

الحقيقة أن بديل متجه المشتقة يكون مماساً للشكل البيانى يمكن أيضاً رؤيتها هندسياً . من التعريف ، يكون

$$\alpha'(t) = \lim_{u \to t} \frac{\alpha(u) - \alpha(t)}{u - t}$$

لتكن T النقطة $\alpha(t)$ ولتكن U نقطة قريبة منها $\alpha(u)$ على المنحنى (شكل ١٤ ـ ١٧) . الوتر TU هو بديل عند T لمتجه الفرق $\alpha(u) - \alpha(t)$. عندما تقترب u من t ، تصبح $\alpha(u) - \alpha(t)$ أقصر . لكن $u - t$ تقترب أيضاً من الصفر ، وبالتالى النسبة $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ هى متجه على استقامة المتجه $\alpha(u) - \alpha(t)$ ، لكن أطول منه . بديله عند T هو القطعة المستقيمة TW . عندما تقترب u من t ، يقترب $[\alpha(u) - \alpha(t)] / (u - t)$ من $\alpha'(t)$ ويقترب TW من قطعة الخط المماس TA . وإذن TA يجب أن يكون البديل لـ $\alpha'(t)$ عند T .



شكل ١٤ ـ ١٧

عندما تقترب u من t ، يقترب TW من TA .

لتكن $(x(t), y(t))$ الاحداثيين عند الزمن t لنقطة P تتحرك فى مستوى الاحداثيات . هذان الاحداثيان يمكن اعتبارهما مركبتى متجه الموضع

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

للنقطة P . سرعة P عند الزمن t تعرف بأنها متجه المشتقة $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. الدافع لهذا هو كما يأتى ، السرعة عند أى لحظة يجب أن تعتمد ليس فقط على مقدار سرعة P بل أيضاً على اتجاه الحركة عند هذه اللحظة ، فهى فعلا متجه . هذا المتجه ، أو بالأحرى بديلة عند P ، يجب

أن يكون مماساً للمسير هناك ، ومتجهاً فى اتجاه الحركة . لأنه إذا أصبحت P فجأة غير مقيدة لتتبع المسير ، فسوف تتحرك على المماس . أيضاً طول المتجه سيساوى مقدار السرعة عند P . المتجه $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ يحقق هذين المطلبين . وقد رأينا أن بديل $\alpha'(t)$ هو مماس للمسير .

المعادلتان البارامتريتان للمسير هما $x = x(t), y = y(t)$. إذا كانت s طول المسير ، مقيساً من نقطة ثابتة على المنحنى الى P ، فان ds / dt تقيس سرعة تحرك النقطة P على المنحنى وهو ما نعتبره بداهة مقدار السرعة عند P . وقد رأينا فى (٨) ببند ٩-٣ ، أن

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

وهذا هو طول $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$. لهذه الأسباب ، تعرف سرعة النقطة P بأنها $\alpha'(t)$. وأيضاً من المناقشة السابقة ، يعرف مقدار السرعة للنقطة P عند الزمن t بأنه طول متجه السرعة :

$$|\alpha'(t)| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

لاحظ أن مقدار السرعة هو عدد .

العجلة لنقطة عند الزمن t تعرف بأنها المشتقة الثانية $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$ لمتجه الموضع $\alpha(t)$. هى أيضاً متجه .

قانون نيوتن الثانى للحركة يقول أن $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. هذه معادلة متجهة . العدد m هو كتلة الجسم ، العجلة $\mathbf{a}$ للجسم هى المتجه الذى سمى $\alpha''(t)$ ، $\mathbf{F}$ هى حاصل جمع متجهات القوى المؤثرة على الجسم .

مثال ١ . الوضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى الاحداثيات يعطى بالمتجه $\alpha(t) = (2 - t^2, t + 1)$. أوجد متجهى السرعة والعجلة عند $t = 1$ و $t = 0$.

المعادلتان البارامتريتان لمسير النقطة هما

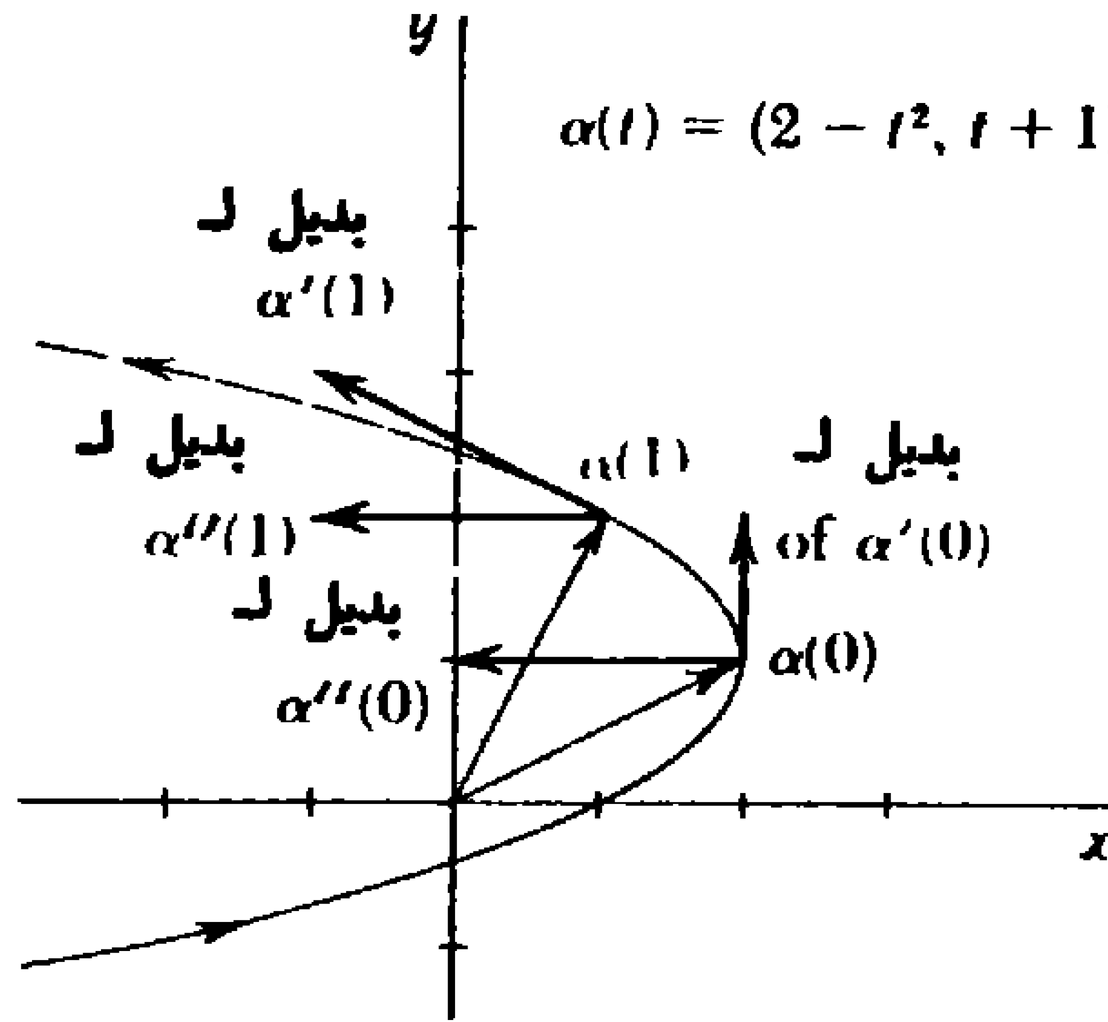
$$x = 2 - t^2, \qquad y = t + 1$$

المعادلة غير البارامترية التى نحصل عليها بحذف t هى القطع المكافىء $(y - 1)^2 = -(x - 2)$ ، الموضح فى الشكل ١٤ - ١٨ . النقطة تتحرك على المنحنى فى اتجاه تزايد y لأن $dy / dt > 0$. السرعة والعجلة هما المتجهان

$$\alpha'(t) = (-2t, 1), \qquad \alpha''(t) = (-2, 0)$$

متجه العجلة ثابت . هذان المتجهان عند $t = 0$ و 1 هما

$$\alpha'(0) = (0,1), \qquad \alpha''(0) = (-2,0),$$
$$\alpha'(1) = (-2,1), \qquad \alpha''(1) = (-2,0).$$



شكل ١٤ ـ ١٨

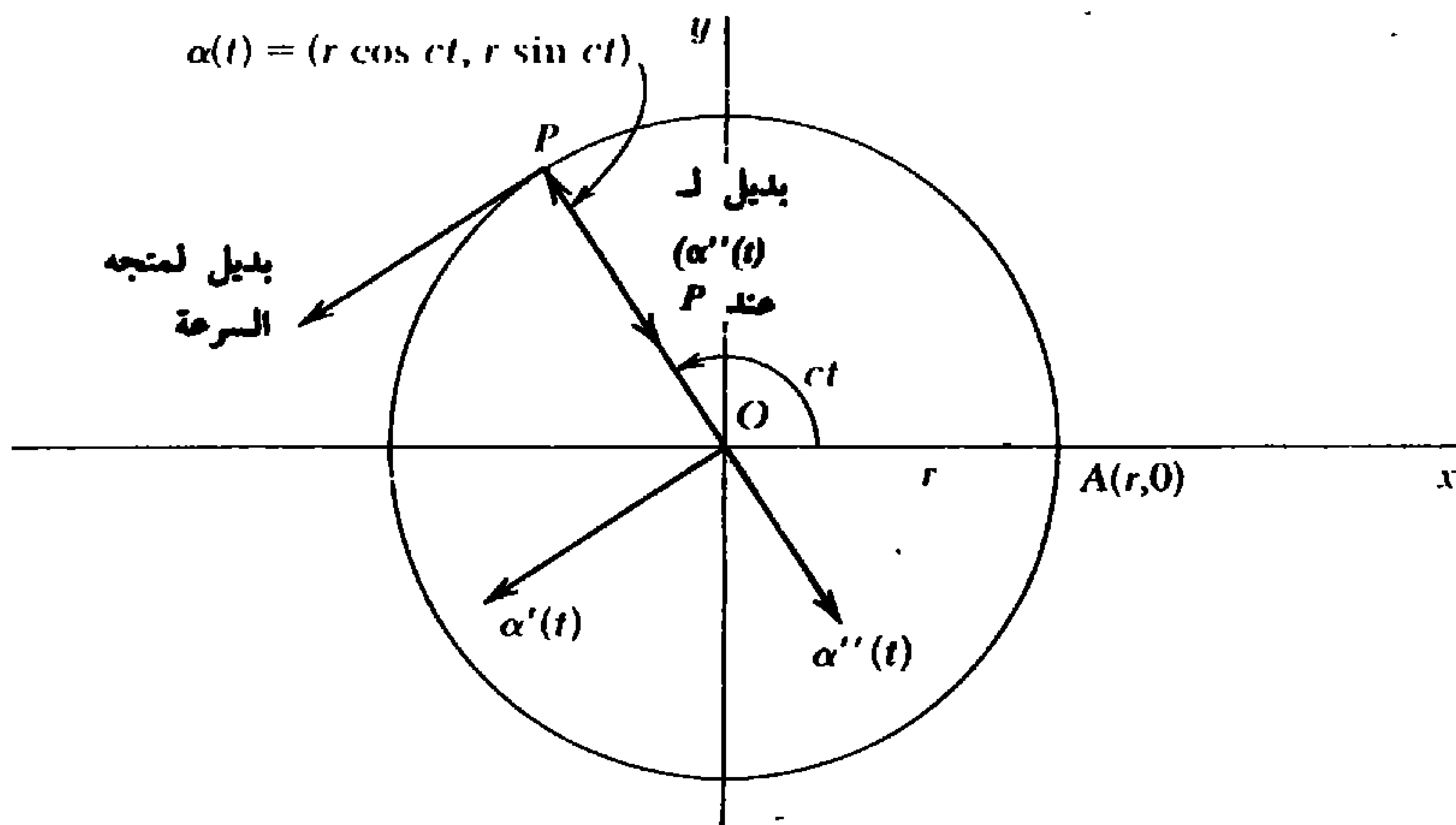
البدائل لهذه المتجهات عند النقط المناظرة على المنحنى موضحة فى الشكل . مقدار السرعة عند $t = 1$ هو

$$|\alpha'(1)| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

مثال ٢ . تتحرك نقطة مادية P ، فى اتجاه ضد عقرب الساعة ، فى مسير دائرى ، بمعدل ثابت هو b دورة فى الدقيقة . أوجد سرعتها وعجلتها .

ليكن نصف قطر الدائرة r وليكن مركزها عند نقطة الأصل (شكل ١٤ ـ ١٩) . نفرض أن عند $t = 0$ تكون النقطة المادية عند $A(r, 0)$. متجه نصف القطر OP يدور بمعدل $2\pi b$ زاوية نصف قطرية فى الدقيقة . بعد t دقيقة الزاوية التى يكونها OP و OA هى $2\pi bt$ زاوية نصف قطرية . ضع $c = 2\pi b$. إحداثيا P عند الزمن t هما مركبتا متجه موضعها

$$\alpha(t) = (r \cos ct, r \sin ct)$$



شكل ١٤ ـ ١٩

السرعة والعجلة هما المتجهان

$$\alpha'(t) = (-cr \sin ct, cr \cos ct)$$

$$\alpha''(t) = (-c^2 r \cos ct, -c^2 r \sin ct) = -c^2\alpha(t)$$

لاحظ أن العجلة ليست صفراً . حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\alpha'(t)$ و $\alpha(t)$ هو

$$\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = -cr^2 \cos ct \sin ct + cr^2 \sin ct \cos ct = 0$$

هذا يثبت أن $\alpha(t)$ يكون عمودياً على $\alpha'(t)$ ، وإذن بديله عند P يمس الدائرة هناك ، وهذه حقيقة نعرفها من قبل من النظرية العامة .

طول متجه السرعة هو مقدار السرعة ،

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(-cr \sin ct)^2 + (cr \cos ct)^2} = cr$$

مع أن مقدار السرعة ثابت فى الحركة الدائرية المنتظمة ، إلا أن السرعة ليست كذلك ، اذ أنها تغير اتجاهها . هذا هو سبب وجود عجلة . متجه العجلة $\alpha''(t)$ هو مضاعف سالب ل $\alpha(t)$ وإذن هو على استقامته ولكن فى اتجاه مخالف . طول متجه العجلة هو

$$|\alpha''(t)| = \sqrt{(-c^2 r \cos ct)^2 + (-c^2 r \sin ct)^2} = c^2 r$$

طالما توجد عجلة توجد قوة بقانون نيوتين الثانى للحركة . عندما يتأرجح جسم فى نهاية خيط بسرعة مقدارها ثابت ، هذه القوة هى الشد الذى يؤثر على الخيط ليظل الجسم فى مسيره الدائرى .

لا يوجد تناقض بين مفهومى السرعة والعجلة المعطيين هنا وبين تعريفيهما المعطيين فى بند ٤ ـ ١٠ للحركة فى خط مستقيم . إذا كانت نقطة تتحرك على خط إحداثيات ، وليكن المحور x ، فإن متجه الموضع هو

$$\alpha(t) = (x(t), 0) = (s(t), 0)$$

اذ أننا فى بند ٤ ـ ١٠ رمزنا الى $x(t)$ بالرمز $s(t)$. متجه السرعة هو

$$\alpha'(t) = (s'(t), 0) = (v(t), 0)$$

حيث $v(t) = s'(t)$. وعلاوة على ذلك ، $\alpha'(t)$ تتجه الى اليمين أو الى اليسار تبعاً لكون $v(t)$ موجبة أو سالبة . أى أن فى حالة الحركة الخطية $v(t)$ تعين $\alpha'(t)$ وبالعكس . مقدار السرعة للنقطة يعطى بـ

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{v^2(t) + 0^2} = |v(t)|$$

وهذا يتفق مع تعريف مقدار السرعة فى الحركة الخطية المعطى فى بند ٤ ـ ١٠ . متجه العجلة هو

$$\alpha''(t) = (v'(t), 0) = (a(t), 0) .$$

حيث $a(t) = v'(t)$. المتجه $\alpha''(t)$ يتجه الى اليمين أو الى اليسار تبعاً لكون $a(t)$ موجبة أو سالبة . أى أن $a(t)$ يعين $\alpha''(t)$ وبالعكس .

فى هذه المسائل ϵ_2 و ϵ_1 هما المتجهان $(0, 1)$ و $(1, 0)$ ، اللذان طول كل منهما الوحدة .

١ ـ إذا كانت الدالة المتجهة $\alpha(t)$ تمثل بتركيبة خطية $\alpha(t) = x(t)\,\epsilon_1 + y(t)\,\epsilon_2$. فاثبت أن $\alpha'(t) = x'(t)\,\epsilon_1 + y'(t)\,\epsilon_2$.

خطط الشكل البيانى للدوال المتجهة الآتية :

٢ ـ $\beta(t) = (2t, 2t+1)$ ٣ ـ $\alpha(w) = (5, w^2/2)$ ٤ ـ $\gamma(t) = (2, -4)$ ٥ ـ $\beta(t) = 2t^2\epsilon_1 + t\epsilon_2$

٦ ـ $\alpha(t) = (\sin t)\epsilon_1 + (\cos t)\epsilon_2$ ٧ ـ $\alpha(u) = (3\cos u)\epsilon_1 + (2\cos u)\epsilon_2$

٨ ـ الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى يعطى بالمتجه $(t^2 - 3, 2t - 4)$. (أ) خطط مسير النقطة . (ب) أوجد الموضع والسرعة ومقدار السرعة للنقطة عند 2 و 0 و $t = -1$ وارسم بدائل متجهات السرعة عند النقطة المناظرة على المنحنى . (ج) أوجد متجهات العجلة عند 2 و 0 و $t = -1$ وارسم بدائلها .

٩ ـ الموضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى يعطى بالمتجه (t^3, t^2) ، حيث $-2 \leqslant t \leqslant 2$ (أ) خطط مسير النقطة . (ب) أوجد الموضع والسرعة ومقدار السرعة للنقطة عند : 1 و 0 و $t = -2$ وارسم بدائل متجهات السرعة عند النقطة المناظرة على المنحنى . (ج) أوجد متجهات العجلة عند 1 و 0 و $t = -2$ وارسم بدائلها .

١٠ ـ $\alpha(t) = (t, \frac{1}{3}t^2)$ ١١ ـ $\gamma(t) = (t^2 - t + 1)\epsilon_1 + (t^2 + 2t + 4)\epsilon_2$

١٢ ـ $\alpha(t) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{2}{3}t^3)$ ١٣ ـ $\alpha(t) = (2\cos 2t, 3\sin 2t)$

١٤ ـ $\alpha(t) = (4\cos t^2, 4\sin t^2)$ ١٥ ـ $\beta(t) = (e^{-t}\cos t)\epsilon_1 + (e^{-t}\sin t)\epsilon_2$

كل من الدوال المتجهة الآتية تعطى موضع نقطة متحركة عند الزمن t ، أوجد السرعة والعجلة ومقدار السرعة للنقطة عند القيمة المعطاة لـ t .

١٦ ـ $\alpha(t) = (2 + 4t, t^2 - 1),\ t = 3$ ١٧ ـ $\gamma(t) = (t^3, 4t - 3),\ t = 0$

١٨ ـ $\alpha(t) = (-t^2, t^3 + 1),\ t = 2$ ١٩ ـ $\alpha(t) = (4\sin t)\epsilon_1 + (3\cos t)\epsilon_2,\ t = \pi/2$

٢٠ ـ $\beta(t) = (\ln t, 3/t),\ t = 2$

٢١ ـ اشرح الفرق بين $\frac{d}{dt}|\alpha(t)|$ و $\left|\frac{d}{dt}\alpha(t)\right|$

أوجد $\frac{d}{dt}|\alpha(t)|$ ، للدوال المتجهة الآتية :

٢٢ ـ $\alpha(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t)$ ٢٣ ـ $\alpha(t) = (2 + 3t^2, t^2 - 1)$

٢٤ ـ $\alpha(t) = (e^t, e^{2t})$ ٢٥ ـ $\alpha(t) = (\cos 3t)\epsilon_1 + (\sin 2t)\epsilon_2$

٢٦ ـ أوجد حاصل الضرب الداخلى لـ $\beta'(t)$ و $\beta(t)$ اذا كان $\beta(t) = ((t^2 + 1)/t, -3t)$

٢٧ ـ أثبت أن عجلة النقطة المادية فى مثال ٢ لا تكون صفراً أبداً .

٢٨ ـ أثبت أن النقطة التى موضعها عند الزمن t هو المتجه $(\cos t^2, \sin t^2)$ تتحرك فى مسير دائرى بسرعة متزايدة المقدار .

٢٩ ـ الوضع عند الزمن t لنقطة تتحرك فى مستوى يعطى بالمتجه $(t^2, 2-t)$. (أ) أوجد مسير النقطة وأكبر وأصغر مقدار لسرعتها فى الفترة الزمنية $[-2, 5]$. (ب) أوجد المسافة التى تقطعها لنقطة فى هذا الزمن .

٣٠ ـ أوجد المسافة المقطوعة بين $t = 0$ و $t = \pi / 4$ بالنقطة التى متجه موضعها عند الزمن t هو $(\ln \cos t, t)$.

٣١ ـ إحداثياً نقطة متحركة عند الزمن t هما $x = a \cos kt, y = b \sin kt$ أوجد متجه الموضع للنقطة . أثبت أن المسير هو قطع ناقص وأن بديل متجه العجلة عند النقطة يكون دائماً متجهاً نحو نقطة الأصل اذا كان $| k | \leqslant 1$.

٣٢ ـ إحداثيا نقطة متحركة عند الزمن t هما

$$x = \frac{a}{2} (e^{bt} + e^{-bt}), \qquad y = \frac{a}{2} (e^{bt} - e^{-bt})$$

عين المسير واثبت أن البديل لمتجه العجلة عند النقطة يكون دائماً متجهاً بعيداً عن نقطة الأصل .

٣٣ ـ أوجد مشتقة حاصل الضرب الداخلى لـ $\gamma''(t)$ و $\gamma'(t)$.

٣٤ ـ إذا كان $\beta(t) = (t + 1, 2t - 1)$ و $\alpha(t) = (4t, 0)$ ، أوجد مشتقة الزاوية $\theta(t)$ بين $\beta(t)$ و $\alpha(t)$.

٣٥ ـ قد رأينا أن $ds / dt = |\alpha'(t)|$. أثبت أن $d^2s/dt^2 \neq |\alpha''(t)|$.

٣٦ ـ أثبت أن للدالة المتجهة $\alpha(t)$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{\alpha'(t) \cdot \alpha''(t)}{|\alpha'(t)|}$$

٣٧ ـ أثبت أن $|\alpha''(t)| = (1/r) |\alpha'(t)|^2$ للنقطة المادية فى مثال ٢ التى تتحرك بمعدل ثابت حول دائرة نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الأصل . هذا يعنى أنه إذا أعطينا مقدار السرعة $|\alpha'(t)|$ ، فان طول متجه السرعة يكون أكبر للدائرة الأصغر . بما أن القوة تتناسب مع العجلة ، فان قوة أكبر تلزم لحفظ النقطة المادية تتحرك ، بسرعة معطى مقدارها ، فى مسير دائرى صغير عما إذا كانت تتحرك فى مسير دائرى كبير .

٣٨ ـ طاقة الحركة لجسيم متحرك كتلته m ودالة الموضع له $\alpha(t)$ هى $\frac{1}{2}m|\alpha'(t)|^2$. أوجد طاقة الحركة لجسيم كتلته 5 ومتجه الموضع له هو $\alpha(t) = (t^3, t)$.

٣٩ ـ عند أى نقطة فى طيران القذيفة التى نوقشت فى بند ٩ ـ ٤ تكون طاقة الحركة أقل ؟ (انظر المسألة ٣٦ لتعريف طاقة الحركة) .

٤٠ ـ أثبت أن أى نقطة تتحرك على منحنى بسرعة مقدارها ثابت اذا واذا فقط كان متجه السرعة ومتجه العجلة يتعامدان دائماً ومن ثم اذا واذا فقط كانت القوة المؤثرة على النقطة دائماً عمودية على المنحنى أو صفراً .

٤١ ـ أوجد دالة متجهة منفصلة وخطط شكلها البيانى .

٤٢ ـ (أ) أثبت أنه إذا كانت $\alpha'(t) = 0$ لجميع t فى فترة ما ، فان $\alpha(t)$ تكون ثابتة هناك . (ب) أثبت أن أى نقطة متحركة بسرعة ثابتة غير صفرية تسير على خط مستقيم . (ج) أثبت أنه إذا كانت القوة التى تؤثر على جسم كتلته m تساوى صفراً ، فان الجسم إما يكون ساكناً واما يكون متحركاً فى خط مستقيم بسرعة ثابتة .

٤٣ ـ أثبت أن $\lim_{t\to a} c\alpha(t) = c \lim_{t\to a} \alpha(t)$ لأى عدد c .

٤٤ ـ أثبت أن $\frac{d}{dt}[\alpha(t) \pm \beta(t)] = \alpha'(t) \pm \beta'(t)$

٤٥ ـ أثبت أن $\frac{d}{dt} c\alpha(t) = c\alpha'(t)$ لأى عدد c .

٤٦ ـ أثبت أن $\frac{d}{dt} f(t)\alpha(t) = f(t)\alpha'(t) + f'(t)\alpha(t)$ حيث $f(t)$ دالة حقيقية .

٤٧ ـ أثبت أن

$$\frac{d}{dt}\frac{\alpha(t)}{f(t)} = \frac{f(t)\alpha'(t) - \alpha(t)f'(t)}{f^2(t)}$$

حيث $f(t)$ دالة حقيقية . لماذا لا توجد صيغة مماثلة لـ $\frac{d}{dt}\frac{f(t)}{\alpha(t)}$ ؟

٤٨ ـ هل قاعدة القوة $\frac{d}{dt}\alpha^n(t) = n\alpha^{n-1}(t)\alpha'(t)$ صحيحة للدالة المتجهة $\alpha(t)$ ؟

٤٩ ـ أثبت أن

$$\frac{d}{dt}[\alpha(t) \cdot \beta(t)] = \alpha(t) \cdot \beta'(t) + \alpha'(t) \cdot \beta(t)$$

٥٠ ـ أثبت أن $\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\alpha(t)|^2$

٥١ ـ أثبت أن الدالة المتجهة $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ تكون متصلة عند c إذا وإذا فقط كانت $y(t)$ و $x(t)$ متصلتين عند c .

٥٢ ـ إذا كانت الدالة المتجهة $\alpha(t)$ لها مشتقة عند c ، فهل هى متصلة هناك ؟

٥٣ ـ أكمل برهان النظرية ١٤ ـ ٩ ان بديل متجه المشتقة يكون فى الاتجاه الموجب للشكل البيانى ، للحالات التى لم تدرس فى الكتاب .

الفصل الخامس عشر

المتسلسلات اللانهائية

١٥ - ١
المتتابعات

المتتابعة هى فئة من الأعداد مكتوبة فى ترتيب خاص . أمثلة على المتتابعات هى

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n, \ldots, \qquad (١)$$

$$\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5}, \ldots, 2 + \frac{1}{n+1}, \ldots, \qquad (٢)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots,$$

$$-\ln 3, \ln 4, -\ln 5, \ln 6, \ldots, \qquad (٣)$$

$$2, 2, 3, 6, 0, 6, 7, 9, 8, \ldots, \qquad (٤)$$

$$\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{3}, \ldots. \qquad (٥)$$

عند دراسة متتابعة عامة نستخدم كتابة مثل

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \qquad (٦)$$

كثيراً ما يكون من المناسب أن نبدأ بحد مختلف مثل s_0 أو s_2 ، وفى هذه الحالة تكتب المتتابعة

$$s_2, s_3, s_4, \ldots s_n, \ldots \quad \text{أو} \quad s_0, s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

المتتابعة أكثر من أن تكون فئة من الأعداد ، إذ تغير ترتيب الحدود فاننا نحصل على متتابعة مختلفة . المتتابعة

$$3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

تختلف عن المتتابعة فى (١) . رغم أن حدود المتتابعات عادة تتبع نمطاً معيناً ، فهذا ليس ضرورياً . لا يوجد انتظام ظاهر للحدود فى (٤) ، أنها الأرقام المتعاقبة فى التقريب العشرى للعدد $\sqrt{5}$. حدود المتتابعة ليس من الضرورى أن تكون مختلفة (انظر المتتابعتين (٤) ، (٥)) .

الحد $2 + 1/(n+1)$ فى (٢) والحد s_n فى (٦) يسميان الحدين العامين للمتتابعتين . بوضع $n = 1, 2, 3, \ldots$ etc على الترتيب ، $2 + 1/(n+1)$ تعطى حدود المتتابعة (٢) . فى المتتابعة التى

حدها العام هو $1/(n^2-1)$ ، من الواضح أن n لاتكون 1 . يكون المفهوم هنا أن $n = 2,3,4, \ldots$.
عادة ما يكون اهتمامنا فقط بحدود المتتابعة لقيم n الكبيرة ، فى هذه الحالة الحدود القليلة الأولى لا يكون لها أهمية . إذا كانت متتابعة لها نمط واضح من الحدود القليلة الأولى ، فعادة يحذف الحد العام بمفهوم أن النمط مستمر . فمثلا ، إذا أعطينا المتتابعة

$$\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \ldots$$

فمع غياب الحد العام ، لنا الحرية فى أن نفترض ، من نمط الحدود الأربعة الأولى ، أن الحد التالى هو $\frac{5}{6}$ وأن الحد العام هو $n/(n+1)$. الحد العام للمتتابعة (٣) هو $(-1)^n \ln(n+2)$. لاحظ كيف يتبدل المعامل $(-1)^n$ فى الاشارة .

طريقة أدق وأحياناً مفيدة هى أن ننظر الى المتتابعة كدالة ، معرفة للأعداد الصحيحة الموجبة ، قيمها هى حدود المتتابعة . المتتابعة

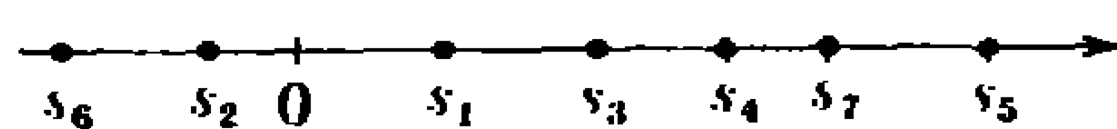
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$$

هى دالة f قيمها $f(1)=\frac{1}{2}, f(2)=\frac{3}{4}, f(3)=\frac{7}{8}$ ، وبوجه عام ، $f(n) = (2^n-1)/2^n$.
المتتابعة $s_1, s_2, \ldots s_n \ldots$ هى دالة قيمها $f(1) = s_1$ و $f(2) = s_2$ ، وبوجه عام $f(n) = s_n$.

أحياناً يكون من المفيد اعتبار حدود المتتابعة نقطاً على خط حقيقى . المتتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

موضحة فى الشكل ١٥ ـ ١ .



شكل ١٥ ـ ١

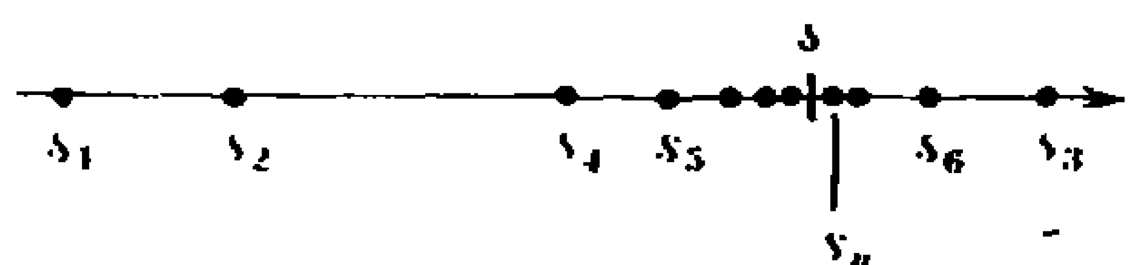
المتتابعة لا يشار اليها إطلاقاً فى الرياضيات كمتسلسلة . المصطلح متسلسلة يحتفظ به لمفهوم آخر سنقدمه فى البند التالى .

حدود المتتابعة

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots$$

تقترب أكثر فأكثر من العدد 2 عندما n تصبح كبيرة . من الطبيعى أن نقول إن العدد 2 هو نهاية المتتابعة ونكتب

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2$$



شكل ١٥ ـ ٢

عندما تكون n كبيرة ، تكون s_n قريبة من نهايتها s .

الحد العام للمتتابعة

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \ldots, 1+(-\tfrac{1}{2})^n, \ldots$$

يقترب من 1 عندما n تصبح كبيرة . إذن 1 هى نهاية المتتابعة ، ونكتب

$$\lim_{n\to\infty} [1+(-\tfrac{1}{2})^n] = 1$$

الشكل ١٥ ـ ٢ يوضح تصويرياً تجمع حدود المتتابعة $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ حول النهاية s لقيم n الكبيرة . التشابه مع $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ لا يدعو للدهشة ، إذ أن المتتابعة هى نوع خاص من الدالة ، فيه النطاق هو فئة الأعداد الصحيحة الموجبة .

المتتابعة

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots \qquad (٧)$$

ليس لها نهاية لأن الحدود لا تقترب من أى عدد عندما n تصبح كبيرة . إذا كانت المتتابعة لها نهاية ، فيقال إنها تتقارب ، إذا لم يكن لها نهاية ، فهى تتباعد . المتتابعة (٧) والمتتابعة $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ كلاهما تتباعدان .

مفهومنا الدارج لنهاية متتابعة سيوضح على أساس قاطع فى التعريف القادم . سيوضح بالضبط فكرة تجمع حدود المتتابعة حول النهاية لقيم n الكبيرة . لاحظ أنه يكاد يتطابق مع تعريف : $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ المعطى فى التعريف ٢ ـ ٩ ، بند ٢ ـ ٧ .

١٥ ـ ١ تعريف المتتابعة $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ يكون لها نهاية إذا كان يوجد عدد s بحيث أن ما يأتى يكون صحيحاً : لكل جوار V للعدد s ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن s_n يكون فى V لجميع $n \geqslant N$. إذا كانت النهاية موجودة ، فاننا نكتب $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ ، والمتتابعة يقال إنها تتقارب . المتتابعة التى لا تتقارب يقال إنها تتباعد .

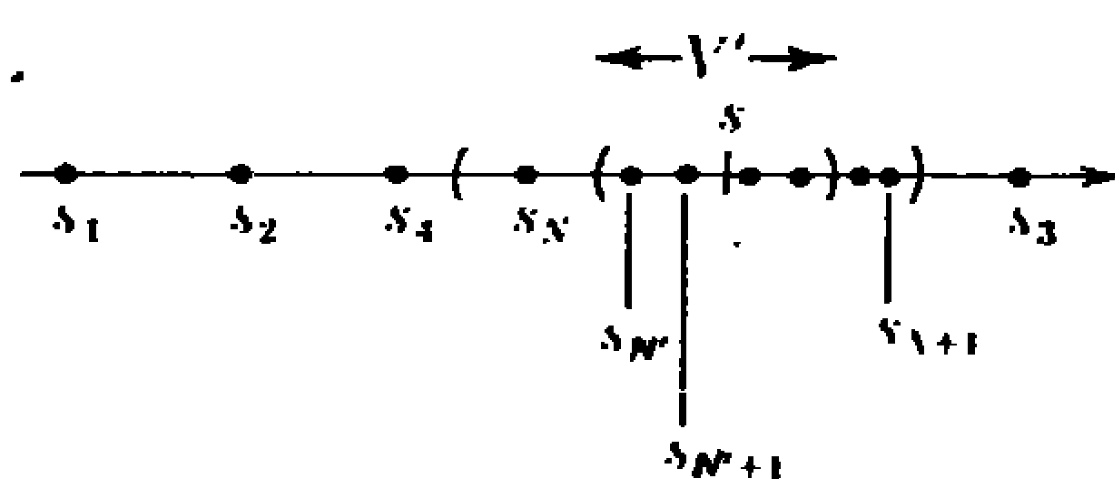
تعريف النهاية موضح فى الشكل ١٥ ـ ٣ . هو ينص على أن لكل جوار V للعدد s ، جميع حدود المتتابعة ابتداء من نقطة معينة (أى لجميع $n \geqslant N$) تقع فى V . إذا أعطينا جواراً آخر أصغر V' ، فاننا نتوقع أن نمتد الى حد أبعد فى المتتابعة حتى تقع جميع الحدود ، ابتداء منه ، فى V' . هذا يناظر اختيار عدد صحيح جديد N' .

مثال ١ . استخدم تعريف نهاية متتابعة لإثبات أن المتتابعة

$$1+\frac{1}{1^2}, 1+\frac{1}{2^2}, \ldots, 1+\frac{1}{n^2}, \ldots$$

لها نهاية .

جميع s_n فى V حيث $n \geq N$



← V →

جميع s_n فى V' حيث $n \geq N'$

شكل ١٥-٣

نخمن أن النهاية هى 1 ونحاول إثبات ذلك . ليكن $V = (1 - \epsilon_1, 1 + \epsilon_2)$ أى جوار لـ 1 ، حيث $\epsilon_2 > 0$ و $\epsilon_1 > 0$. عندئذ يكون $1 + 1/n^2$ فى V إذا وإذا فقط كان

$$1 - \epsilon_1 < 1 + \frac{1}{n^2} < 1 + \epsilon_2$$

أو ، ما يكافىء ذلك ، إذا وإذا فقط كان

$$-\epsilon_1 < \frac{1}{n^2} < \epsilon_2$$

المتباينة اليسرى صحيحة لجميع n . المتابعة اليمنى ستكون صحيحة لـ $n > 1/\sqrt{\epsilon_2}$. إذا اخترنا N العدد الصحيح الأول الأكبر من $1/\sqrt{\epsilon_2}$ ، فان $1 + 1/n^2$ سيكون فى V لجميع $n \geq N$ ، ونكون قد أثبتنا أن $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n^2) = 1$.

إذا كانت حدود المتابعة تصبح كبيرة ، وأخيراً تتجاوز أى عدد معطى ، فان المتابعة يقال إنها تتباعد الى مالا نهاية . التعريف الرسمى يتبع .

١٥-٢ . تعريف المتابعة $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ تتباعد الى مالا نهاية ، ونكتب $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ إذا كان لكل عدد M ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن $s_n > M$ لجميع $n \geq N$.

المتابعة $10, 9, 20, 19, 30, 29, 40, 39, \ldots$ تتباعد إلى مالا نهاية . المتابعة $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ تتباعد لكن ليس إلى مالا نهاية . هى متابعة تذبذبية .

من المتابعتين

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{٨}$$

و

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots \tag{٩}$$

يمكن تكوين متتابعات أخرى . تآلفات مفيدة هى :

c أى عدد $\quad cs_1, cs_2, cs_3, \ldots, cs_n, \ldots$ (١٠)

$$s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3, \ldots, s_n + t_n, \ldots, \quad (١١)$$

$$s_1t_1, s_2t_2, s_3t_3, \ldots, s_nt_n, \ldots, \quad (١٢)$$

$$\frac{s_1}{t_1}, \frac{s_2}{t_2}, \frac{s_3}{t_3}, \ldots, \frac{s_n}{t_n}, \ldots, \quad (١٣)$$

$$|s_1|, |s_2|, |s_3|, \ldots, |s_n|, \ldots \quad (١٤)$$

المتابعتان (١١) ، (١٢) تسميان حاصل جمع وحاصل ضرب المتابعتين (٨) ، (٩) .

النظريات على نهايات حواصل الجمع وحواصل الضرب وقوى الدوال لها نظائرها على المتابعات .

١٥ - ٣ نظرية. إذا كانت نهايتا المتابعتين $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ و $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ موجودتين ، فكذلك تكون نهايات المتابعات فى (١٠) الى (١٤) ، ويكون

(أولاً) $\lim_{n\to\infty} cs_n = c(\lim_{n\to\infty} s_n)$ أى عدد

(ثانياً) $\lim_{n\to\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} t_n$

(ثالثاً) $\lim_{n\to\infty} s_nt_n = (\lim_{n\to\infty} s_n)(\lim_{n\to\infty} t_n)$

(رابعاً) $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} s_n}{\lim_{n\to\infty} t_n}$ بفرض أن $\lim_{n\to\infty} t_n \neq 0$

(خامساً) $\lim_{n\to\infty} (s_n{}^r) = (\lim_{n\to\infty} s_n)^r$ $\quad r$ أى عدد حقيقى .

نترك البراهين للقارىء (المسائل ٧٣ الى ٧٧) . اذا حذفت الحدود الـ m الأولى من متتابعة

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots$$

فاننا نحصل على المتابعة

$$s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \ldots$$

من السهل إثبات أنه إذا كانت المتابعة الأولى تتقارب ، فكذلك الثانية ، وبالعكس ، وأن نهايتيهما واحدة (المسألة ٦٧) .

نفرض أن $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ متتابعة نريد إيجاد نهايتها . لتكن g دالة معرفة لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث أن $g(n) = s_n$. فمثلا ، إذا كانت $s_n = n/e^n$ ، فان g المناسبة هى $g(x) = x/e^x$. إذا كانت $\lim_{x\to\infty} g(x)$ موجودة ، فإن المتابعة لها نهاية ويكون $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} g(x)$ لأن $g(x)$ تكون قريبة من نهايتها b لجميع قيم x الكبيرة وبوجه خاص تكون قريبة من b عندما تكون x عدداً صحيحاً كبيراً . لكن عندما تكون x عدداً صحيحاً n، $g(n) = s_n$ اذن $\lim_{n\to\infty} s_n = b$.

مثال ٢ . أوجد $\lim_{n\to\infty} (n/e^n)$

باتباع المناقشة أعلاه ، نضع $g(x) = x/e^x$. بقاعدة لوبيتال ، يكون $\lim_{x\to\infty} (x/e^x) = 0$ ومن ثم $\lim_{n\to\infty} (n/e^n) = 0$.

١٥ ـ ٤ تعريف . المتابعة ... $s_1, s_2, \ldots, s_n,$ تكون محدودة من أعلى إذا كانت باعتبارها فئة من الأعداد محددة من أعلى ، أى إذا كان يوجد عدد b بحيث أن $s_n \leqslant b$ لجميع n . وهى تكون محدودة من أدنى إذا كان يوجد عدد a بحيث أن $a \leqslant s_n$ لجميع n . المتابعة تكون محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أدنى .

نترك برهان النظرية المفيدة الآتية للقارىء (المسألة ٨٠) .

١٥ ـ ٥ نظرية . إذا كانت $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ وكانت $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة ، أو حتى كانت المتابعة ... $s_1, s_2,$ ... $s_n,$ فقط محدودة ، فان $\lim_{n\to\infty} (s_n/t_n) = 0$ و t_n/ s_n تكون كبيرة سالبة أو موجبة لقيم n الكبيرة .

مثال ٣ . أوجد نهاية المتابعة التى حدها العام هو $(2/n)\ (1 + 6/n)$.

الطريقة الأولى لدينا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(1+\frac{6}{n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)\left[\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{6}{n}\right)\right] \quad \text{من ١٥ ـ ٣ (ثالثاً)}$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\right) \quad \text{من ١٥ ـ ٣ (ثانياً)}$$

$$= 0(1+0) \quad \text{من ١٥ ـ ٥}$$

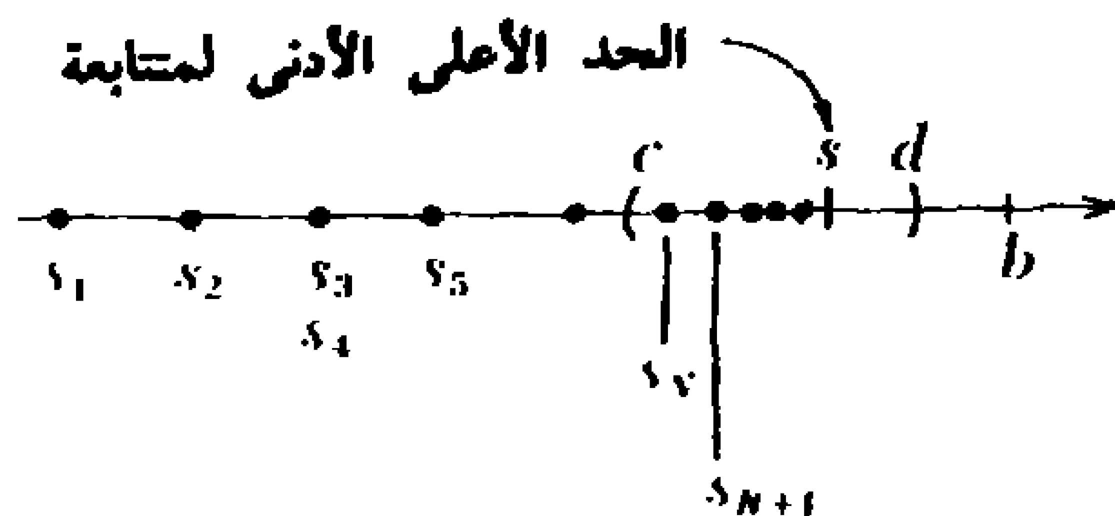
الطريقة الثانية . العبارة $(2/x)\ (1 + 6/x)$ معرفة لجميع $x > 0$ الحقيقية . بنظريات النهايات للدوال ، يكون

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x}\left(1+\frac{6}{x}\right) = 0$$

إذن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(1+\frac{6}{n}\right) = 0$$

رغم أن المتابعة المحدودة قد لا يكون لها نهاية ، مثل ... $1, -1, 1, -1, 1,$ ، الا أن النظرية الآتية توضح أن المتابعة سيكون لها نهاية إذا كانت تتزايد باطراد . هذه النتيجة أساسية فى نظرية المتابعات والمتسلسلات اللانهائية .



شكل ١٥ ـ ٤

١٥ ـ ٦ نظرية . لتكن $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ متتابعة حدودها تتزايد باطراد ومحدودة من أعلى بعدد ما b ، أى أن

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n \leqslant \cdots$$

وأن $s_n \leqslant b$ لجميع n . حينئذ تكون $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة ، ويكون $\lim_{n\to\infty} s_n \leqslant b$ لجميع m .

البرهان . حدود المتتابعة تظل تمتد الى اليمين لكن لا يمكن أن تتجاوز b . فى الواقع ، الحدود لا يمكن أن تتجاوز حدها الأعلى الأدنى s (شكل ١٥ ـ ٤) . بما أن الحدود تقترب من s كما نريد ، يبدو من المعقول أن تكون s النهاية ، وهذا ما سنثبته . لتكن الفترة (c, d) أى جوار لـ s . يجب أن يوجد حد ما s_N للمتتابعة أكبر من c ، وإلا كانت c حداً أعلى للمتتابعة أصغر من الحد الأعلى الأدنى . لأن المتتابعة تتزايد باطراد ، فان

$$c < s_N \leqslant s_{N+1} \leqslant s_{N+2} \leqslant \cdots \leqslant s < d$$

وجميع حدود المتتابعة بعد s_N تكون أيضاً فى (c, d) . شروط التعريف ١٥ ـ ١ لكى تكون s النهاية قد تحققت . بما أن s هى الحد الأعلى الأدنى للمتتابعة ، فان $s_m \leqslant s$ لجميع m . العدد b هو حد أعلى بالفرض . إذن $s \leqslant b$.

مسائل

بفرض أن نمط الحدود القليلة الأولى يستمر ، أوجد الحدود الثلاثة التالية والحد العام للمتتابعات الآتية :

١ - $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$

٢ - $3, \frac{4}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \ldots$

٣ - $\frac{1}{4(5)}, \frac{1}{5(6)}, \frac{1}{6(7)}, \frac{1}{7(8)}, \ldots$

٤ - $\frac{a^2}{3}, -\frac{a^3}{5}, \frac{a^4}{7}, -\frac{a^5}{9}, \ldots$

٥ - $1, 0, \sqrt{3}, 0, \sqrt{5}, 0, \sqrt{7}, 0, \ldots$

٦ - $0, 7, 26, 63, 124, \ldots$

٧ - $1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{2}{4}, 1 - \frac{3}{8}, 1 - \frac{4}{16}, 1 - \frac{5}{32}, \ldots$

٨ - $2 + \frac{1}{2}, -2 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{4}, -2 - \frac{1}{5}, \ldots$

٩ - $1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \ldots$

استخدم تعريف نهاية متتابعة لاثبات أن المتتابعات الآتية لها نهاية :

١٠ - $c, c, \epsilon, \ldots$

١١ - $c, \frac{c}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{4}, \ldots, \frac{c}{n}, \ldots$

١٢ - $1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \ldots$

١٣ - $1, \frac{1}{2^p}, \frac{1}{3^p}, \ldots, \frac{1}{n^p}, \ldots; p \geqslant 0$

١٤ - $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$

استخدم نظريات النهاية ١٥ ـ ٣ لايجاد نهاية المتتابعة التي حدها العام معطى . بين أين استخدمت نظريات النهاية .

١٥ ـ $2-\frac{5}{n}$ ١٦ ـ $\frac{n-1}{n}$ ١٧ ـ $(-1)^i\left(1+\frac{1}{i}\right)$ ١٨ ـ $\frac{n^2+4n-6}{2n^2}$

١٩ ـ $4+\frac{(-1)^r}{r}+r$ ٢٠ ـ $\left(1+\frac{2}{t}\right)\left(3-\frac{1}{t}\right)$ ٢١ ـ $\frac{1}{\sqrt{2+1/j^2}}$

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى ، وأوجد نهاية المتتابعة اذا كانت توجد :

٢٢ ـ $\frac{4}{m}$ ٢٣ ـ $\frac{2n+1}{1-3n}$ ٢٤ ـ $2+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ٢٥ ـ $\frac{3+2n}{1+n^2}$

٢٦ ـ $\frac{n^2+2n}{n-5}$ ٢٧ ـ $\frac{(-1)^i}{2i^2}$ ٢٨ ـ $\frac{-n^2+3}{n^2+2}$ ٢٩ ـ $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

٣٠ ـ $m\sqrt{\frac{\pi+4}{m^2}}+3$ ٣١ ـ $\frac{\ln m}{2m}$ ٣٢ ـ $\frac{m}{\ln m}$ ٣٣ ـ $\frac{3n}{n-1}-\frac{n-1}{3n}$

٣٤ ـ $\frac{e^n+e^{-n}}{n}$ ٣٥ ـ $e^{1/m}$ ٣٦ ـ $1+(-1)^i$ ٣٧ ـ $c^i, i=0, 1, 2, \ldots$

٣٨ ـ $\sqrt{m}-\sqrt{m+1}$ ٣٩ ـ $\sin n$ ٤٠ ـ $\frac{1}{n}\sin n$ ٤١ ـ $n\sin\frac{1}{n}$

٤٢ ـ $[(-1)^n+1]\sin\frac{n\pi}{2}$

٤٣ ـ $1+\frac{[m]}{m}$ ، حيث $[m]$ يرمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أويساوى m .

٤٤ ـ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ٤٥ ـ $\sqrt[n]{n}$

عين ما إذا كانت المتتابعة المعطى حدها العام s_n تتقارب أم تتباعد . إذا كانت المتتابعة تتقارب ، أوجد النهاية . اذا كانت تتباعد ، فهل تتباعد الى مالا نهاية ؟

٤٦ ـ $s_n=5$

٤٧ ـ $s_n=\begin{cases}2, & n \text{ زوجية}\\ 1, & n \text{ فردية}\end{cases}$

٤٨ ـ $s_n=\begin{cases}1-\frac{1}{n} & n \text{ فردية}\\ 1, & n \text{ زوجية}\end{cases}$

٤٩ ـ $s_n=3+\frac{n}{2^n}$

٥٠ ـ $s_n=\begin{cases}2+\frac{3}{n}, & 1\le n\le 8,\\ 5, & n>8.\end{cases}$

٥١ ـ $s_n=\cos\pi n$

٥٢ ـ $s_n=[n]$

٥٣ ـ $s_n=n-\ln n$

وقع النقط الست الأولى على الخط الحقيقي لكل من المتتابعات المعطى حدها العام s_n . أوجد ووقع $\lim_{n\to\infty} s_n$ إذا كانت توجد .

٥٤ - $s_n = \frac{1}{n}$ ٥٥ - $s_n = 3 + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ ٥٦ - $s_n = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}$

٥٧ - $s_n = \sin\frac{\pi n}{2}$ ٥٨ - $s_n = \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n}$ ٥٩ - $s_n = 2 + \ln n$

٦٠ - أعط مثالا لمتتابعة ... $s_1, s_2, \ldots, s_n,$ غير مطردة ، حتى ولو أخيراً ، ولكن $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$

٦١* - أثبت أن $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ إذا كانت $-1 < a < 1$ وأن $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ اذا كانت $a > 1$.

٦٢ - النهاية $\lim_{m\to\infty} [x^{2m}/(1+x^{2m})]$ تعتمد على x فهى تعرف دالة لـ $f(x) = \lim_{m\to\infty} [x^{2m}/(1+x^{2m})]$. أوجد $f(3)$ $f(1)$ ، $f(\frac{1}{2})$. لأى x تعرف f ؟ . خطط الشكل البيانى للدالة f .

٦٣ - لتكن g هى الدالة المعرفة بـ $g(x) = \lim_{m\to\infty} [x^m/(1+x^{2m})]$ أوجد $g(-3)$ و $g(\frac{1}{2})$ و $g(1)$ و $g(2)$. لأى x تعرف g ؟ خطط الشكل البيانى للدالة g .

٦٤ - أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة ، فكذلك تكون $\lim_{n\to\infty} (s_n + c)$ حيث c أى عدد .

٦٥ - من المتتابعة ... $s_1, s_2, \ldots, s_n,$ كون المتتابعة ... $s_2 - s_1, s_3 - s_2, \ldots, s_n - s_{n-1},$ أثبت أنه إذا كانت المتتابعة الأولى تتقارب ، فإن الثانية تتقارب الى الصفر . العكس ليس صحيحاً . فى البند القادم سنرى أن المتتابعة التى حدها العام هو $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ تتباعد رغم أن :

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$$

٦٦ - أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} b_n$ موجودة ولا تساوى صفراً ، فإنه يوجد عدد صحيح N بحيث أن $b_n \neq 0$ لجميع $n \geqslant N$. (ارشاد : أنظر التمهيدية ٢ - ٢٢) .

٦٧ - أثبت أنه إذا كانت المتتابعة ... $s_1, s_2, s_3,$ تتقارب ، فكذلك تكون المتتابعة : $s_{m+1}, s_{m+2}, s_{m+3}, \ldots$ التى نحصل عليها بحذف الـ m حدا الأولى ، وأن نهايتيهما واحدة .

٦٨ - إذا استبدلت الحدود الـ m الأولى للمتتابعة

$$s_1, s_2, \ldots, s_m, s_{m+1}, \ldots, s_n, \ldots$$

بـ $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ، فاثبت أن تقارب أو تباعد المتتابعة لا يتأثر .

٦٩ - اذا كانت $a_n \leqslant b_n$ لجميع n وكانت $\lim_{n\to\infty} b_n$ و $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجودتين ، فاثبت أن : $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$. (ارشاد : افرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$) .

٧٠ - أثبت أنه إذا كانت $s_n \leqslant u_n \leqslant t_n$ لجميع n أكبر من عدد صحيح ما N وكانت $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$ فإن $\lim_{n\to\infty} u_n$ تكون موجودة وأن $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} t_n$

٧١ ـ أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ فإن $\lim_{n\to\infty} |s_n|$ تكون موجودة وأن $\lim_{n\to\infty} |s_n| = |s|$. هل العكس صحيح ؟

٧٢ ـ أثبت أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ إذا وإذا فقط كان $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

٧٣ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٣ (أولا) ٧٤ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٣ (ثانياً)

٧٥ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٣ (ثالثاً) ٧٦ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٣ (رابعاً)

٧٧ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٣ (خامساً) .

٧٨ ـ أثبت أنه إذا كانت $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة ، فإن المتابعة ... $s_1, s_2, \ldots, s_n$, تكون محدودة (ارشاد : لتكن $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ توجد N بحيث أن s_n تقع فى الجوار $(s-1, s+1)$ لـ s لجميع $n \geqslant N$) .

٧٩ ـ أثبت المناظر للنظرية ١٥ ـ ٦ للمتابعات المتناقصة : دع ... $s_1, s_2, \ldots, s_n$, متابعة مطردة النقصان ومحدودة من أدنى بعدد ما a ؛ أى أن ، ... $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_n \geqslant$ و $s_n \geqslant a$ لجميع n . حينئذ تكون $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة ، وتكون $s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n \leqslant a$ ، لجميع m .

٨٠ ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٥ (ارشاد : بالمسألة ٧٨ ، نحتاج فقط إلى دراسة الحالة التى تكون فيها ... $s_1, s_2, \ldots, s_n$, محدودة . ليكن $V = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$ أى جوار لـ 0 . يوجد عددان a و b بحيث أن $a < s_n < b$ لجميع n . إذن $a/t_n < s_n/t_n < b/t_n$ لجميع n الكبيرة كبراً كافياً) .

٨١ ـ لتكن ... $s_1, s_2, \ldots, s_n$, متابعة . لقد أثبتنا أنه اذا كانت g دالة معرفة لجميع الأعداد الحقيقية الموجبة بحيث أن $g(n) = s_n$ ، وكانت $\lim_{x\to\infty} g(x)$ موجودة ، فإن المتابعة لها نهاية وأن $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{x\to\infty} g(x)$ برهن أن العكس ليس صحيحاً بإعطاء مثال لدالة g ليس لها نهاية ومع ذلك $\lim_{n\to\infty} s_n$ موجودة .

١٥ ـ ٢

المتسلسلات اللانهائية

لتكن ... $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, متابعة من الأعداد . العبارة

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (١)$$

المتكونة من هذه المتابعة تسمى متسلسلة لا نهائية ، أو بالاختصار متسلسلة . وهى ليست حاصل جمع بالمعنى العادى لأن حاصل جمع عدد لا نهائى من الأعداد لم يسبق تعريفه . عادة يكون من المناسب أن نرمز الى الحد الأول من المتسلسلة بـ a_m ، حيث m عدد صحيح ما غير الواحد الصحيح ، كثيراً ما يكون 0 . حينئذ تبدو المتسلسلة هكذا :

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n + \cdots \qquad (٢)$$

المتسلسلتان فى (١) و (٢) يمكن كتابتهما بإيجاز هكذا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$، أو مجرد Σ Σa_n عندما يكون دليل الحد الأول واضحاً أو غير هام . الحد a_n يسمى الحد العام للمتسلسلة وعادة يحذف فى (١) و (٢) إذا كانت الحدود لها نمط واضح . إذا كان أى حد a_i فى (١) سالباً ، فالاشارة الموجبة التى تسبقه تستبدل عادة باشارة سالبة . فمثلا ، المتسلسلة المتكونة من المتتابعة

$$1, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{4}, \ldots$$

تكتب

$$1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4} + \cdots$$

بدلا من

$$1 + (-\sqrt{2}) + \sqrt{3} + (-\sqrt{4}) + \cdots$$

أمثلة للمتسلسلات اللانهائية هى

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots,$$

$$\sum_{i=4}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i^2} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots + (-1)^i \frac{1}{i^2} + \cdots.$$

حاصل جمع الـ n حدا الأولى من المتسلسلة اللانهائية

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

يسمى حاصل الجمع الجزئى النونى ويرمز له بالرمز S_n .
أى أن

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_{n-1} + a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

وبما أن حواصل الجمع الجزئية هى حواصل جمع أعداد محدودة من الحدود فهى معرفة تماماً . فمثلا ، حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots \qquad (٣)$$

هى

$$S_1=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4},$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}. \qquad (٤)$$

أهمية المتسلسلات اللانهائية ترجع إلى الحقيقة أن بالرغم من أن حاصل جمع عدد لا نهائى من الأعداد غير معرف ، فإن حاصل جمع الـ n حدا الأولى لمتسلسلات كثيرة يكون بالتقريب ثابتاً عندما تكون n كبيرة . فمثلا ، حاصل جمع الـ n حدا الأولى للمتسلسلة (٣) ، كما هو معطى فى (٤) يكون قريباً من 1 عندما تكون n كبيرة . هذه الفكرة نجعلها دقيقة فى التعريف التالى .

١٥ ـ ٧ تعريف . المتسلسلة اللانهائية

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

تكون تقاربية إذا كانت المتابعة ... $S_1, S_2, \ldots, S_n$, لحواصل جمعها الجزئية لها نهاية . أى اذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

موجودة . إذا لم تكن "نهاية موجودة ، فالمتسلسلة تباعدية . إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة ، وبالتالى المتسلسلة تقاربية ، فإن $\lim_{n\to\infty} S_n$ تسمى **حاصل جمع أو نهاية** المتسلسلة اللانهائية التقاربية . ويقال أن المتسلسلة تتقارب الى حاصل جمعها . المتسلسلة التباعدية ليس لها حاصل جمع .

المتسلسلة فى (٣) لها حاصل جمع جزئى نونى يعطى بـ (٤) . بما أن

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

نهاية متابعة حواصل الجمع الجزئية موجودة والمتسلسلة تتقارب . حاصل جمعها 1 .

حاصل جمع المتسلسلة اللانهائية التقاربية يرمز له عادة بالرمز $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ أى أن

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

للمتسلسلة فى (٣) ، مثلا ، يمكننا كتابة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. فالرمز $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يستخدم لكل من المتسلسلة ، وحاصل جمع المتسلسلة إذا كانت تتقارب . هذا قد لا يكون موفقاً لكن أصبح معتادا . الحديث سيوضح أى معنى يكون المقصود .

المتسلسلة الهندسية

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \tag{٥}$$

متسلسلة هامة . حاصل جمعها الجزئى النونى هو المتوالى الهندسية

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \tag{٦}$$

يمكن إيجاد صيغة لـ S_n بضرب طرفى (٦) فى r ،

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

وطرح هذه من (٦) ،

$$(1 - r)S_n = a - ar^n$$

إذن ، إذا كانت $r \neq 1$ ، فإن

$$S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

إذا كانت $-1 < r < 1$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ (المسألة ٦١ ، بند ١٥ - ١) ويكون

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

إذن المتسلسلة الهندسية (٥) تتقارب إذا كان $|r| < 1$ ، وحاصل جمعها هو $a/(1 - r)$:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}, \qquad -1 < r < 1 \tag{٧}$$

إذا كانت $r > 1$ أو $r \leqslant -1$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} r^n$ لا توجد ، وبالتالى لا توجد $\lim_{n\to\infty} S_n$ إذا كانت $r = 1$ ، فإن من (٦) ، $S_n = na$ والنهاية $\lim_{n\to\infty} S_n$ لا توجد .

وإذن المتسلسلة الهندسية تتباعد وليس لها حاصل جمع إذا كان $|r| \geqslant 1$. استثناء تافهاً لهذا النص الأخير يحدث إذا كانت $a = 0$ ، لأن عندئذ ، من (٦) ، تكون $s_n = 0$ لجميع n وستتقارب (٥) لحاصل الجمع 0 لأى r .

المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

متسلسلة هندسية حيث $r = -\frac{1}{2}$ و $a = 1$. هى تتقارب ، ومن (٧) ، حاصل جمعها هو $1/(1 + \frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$.

، الكسر العشرى المتكرر غير المنتهى $0.333 \ldots$ هو صورة موجزة للمتسلسلة اللانهائية

$$\tfrac{3}{10} + \tfrac{3}{100} + \tfrac{3}{1000} + \cdots \qquad (٨)$$

هذا هو تعريفه . المتسلسلة هندسية حيث $r = \frac{1}{10}$ و $a = \frac{3}{10}$. بما أن $-1 < \frac{1}{10} < 1$ ، فالمتسلسلة تتقارب ، وحاصل جمعها هو

$$\frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

عندما نكتب $\frac{1}{3} = 0.333 \cdots$ فإننا نقصد أن (٨) تتقارب إلى $\frac{1}{3}$.

أى كسر عشرى غير منته على الصورة

$$0.a_1a_2a_3 \cdots a_n \cdots \qquad (٩)$$

حيث الـ a_i هى الأعداد الصحيحة $0, 1, \ldots, 9$ ليست مضروبة ولكن موضوعة بجوار بعضها ، كما فى $0.579523 \ldots$ ، هو أسلوب لكتابة المتسلسلة غير المنتهية

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \qquad (١٠)$$

هذه ليست متسلسلة هندسية مالم تكن الـ a_i متساوية ، لكن يمكن إثبات أنها تتقارب لأى اختيار للـ a_i (المسألة ١٨ ، ببند ١٥ ـ ٤) . اذا كان حاصل الجمع هو a ، فإننا نكتب $a = 0.a_1a_2a_3 \ldots$. الحقيقة أن (١٠) دائماً تتقارب لها أهمية جوهرية فى نظامنا بالاسلوب العشرى . هى تعنى أن كل كسر عشرى غير منته (٩) يمثل عدداً حقيقياً بين صفر وواحد . وصحيح أيضاً أن كل عدد حقيقى بين صفر وواحد له تمثيل عشرى .

مثال ١ . عين ما إذا كانت المتسلسلة $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots$ تتقارب .

حاصل الجمع الجزئى النونى هو

$$S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \qquad (١١)$$

هذا يمكن التعبير عنه هكذا :

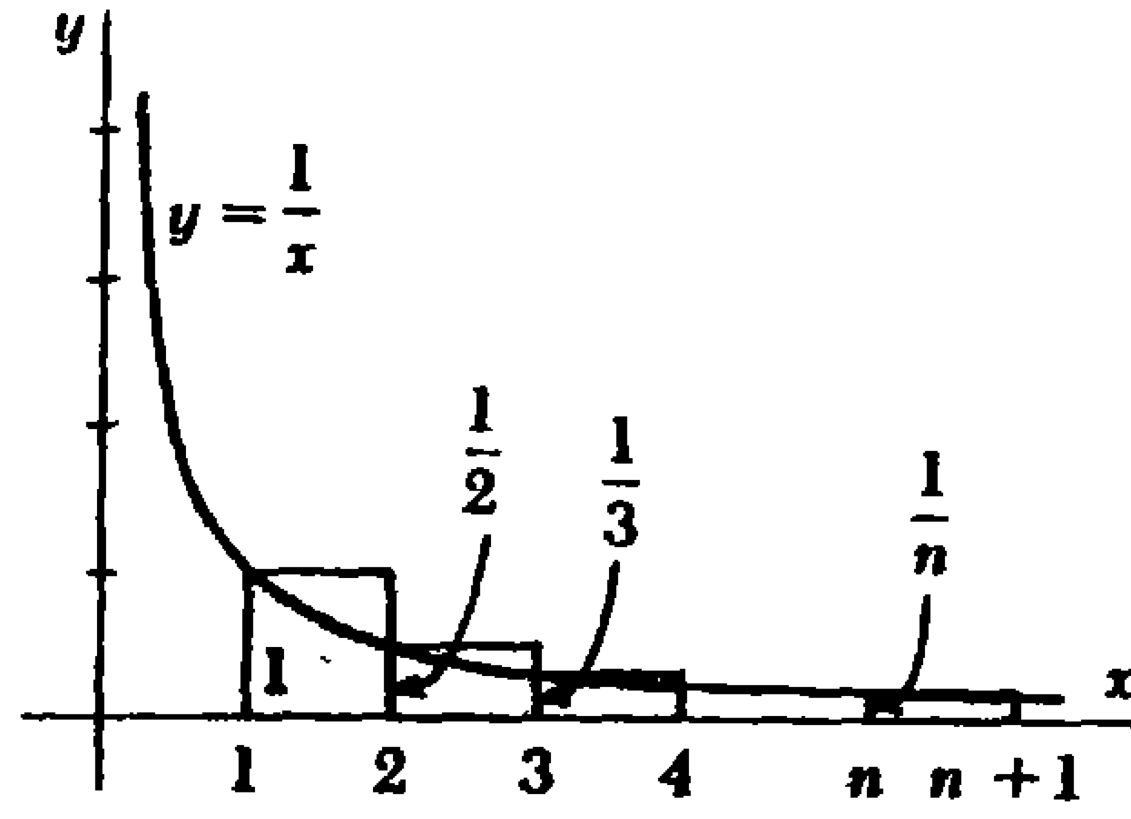
$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

بما أن $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ المتسلسلة تتقارب وحاصل الجمع هو 1 . متسلسلة هامة جداً هى المتسلسلة التوافقية

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

حدود المتسلسلة هى مساحات المستطيلات المبينة فى الشكل ١٥ ـ ٥ . حاصل جمع الحدود الـ n الأولى ،



شكل ١٥ـ٥

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

أكبر من مساحة المنطقة تحت المنحنى $y = 1/x$ بين $n + 1$ و 1 . إذن

$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln (n+1)$$

بما أن $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ فإن $\lim_{n\to\infty} \ln (n+1) = \infty$ والمتسلسلة التوافقية تتباعد . المتسلسلة التباعدية Σa_n التى حواصل جمعها الجزئية النونية تصبح لا نهائية ، مثل حواصل الجمع الجزئية النونية للمتسلسلة التوافقية ، أحياناً يقال أنها تتباعد إلى مالا نهاية .

من الواضح أنه إذا كانت المتسلسلة ... + $a_1 + a_2 + \ldots a_n$ لتتقارب ، فإن حدودها يجب أن تقترب أخيراً من الصفر . لأنه ، بما أن $S_n = S_{n-1} + a_n$ ، فإذا لم يكن كذلك ، فإن حواصل الجمع الجزئية المتعاقبة سوف لا تكون قريبة من بعضها البعض ولا تقدر أن تتجمع حول نهاية . سنثبت هذه الخاصية فى النظرية التالية .

١٥ ـ ٨ نظرية . إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، فإن

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

البرهان . لتكن a حاصل جمع المتسلسلة ، S_n حاصل جمعها الجزئى النونى . عندئذ يكون $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = a$ و $\lim_{n\to\infty} S_n = a$ بما أن $a_n = S_n - S_{n-1}$ ، فيكون

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

بينما الحد النونى لمتسلسلة تقاربية يجب أن يقترب من الصفر ، فان العكس ليس صحيحاً . توجد متسلسلات حدها النونى يقترب من الصفر وبالرغم من ذلك تتباعد . المتسلسلة التوافقية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واحدة .

فائدة النظرية تنحصر فى اثبات تباعد المتسلسلات ، لأنه اذا كان الحد النونى لا يقترب من الصفر ،

$$-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}+\frac{4}{7}-\cdots+(-1)^n\frac{n}{2n-1}+\cdots$$

لا يمكن أن تتقارب ، اذ أن عندما تكون n كبيرة ، يكون $(-1)^n n/(2n-1)$ قريباً من $\frac{1}{2}$ اذا كانت n زوجية و $-\frac{1}{2}$ اذا كانت n فردية . الحد النونى ليس له نهاية . هذه المتسلسلة تتباعد لكن ليس الى مالا نهاية . عندما تكون n كبيرة ، كل حاصلى جمع جزئيين متعاقبين يختلفان بمقدار $\frac{1}{2}$ تقريباً ، S_n تقفز الى الخلف والى الامام بمقدار $\frac{1}{2}$ تقريباً فى كل مرة . فى مثل هذه الأحوال S_n تجد صعوبة فى الاقتراب الى نهاية . هذه المتسلسلة هى مثال للمتسلسلة التذبذبية .

النظرية الآتية تعمم الى المتسلسلات خاصية لحواصل الجمع المنتهية . ونترك البرهان للقارىء (المسألة ٤٢) .

١٥ ـ ٩ نظرية . اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ متسلسلتين تقاربيتين وكان حاصلا جمعهما B و A ، وكانت $a_i \leqslant b_i$ لجميع i ، فان $A \leqslant B$.

فى المعالجة بالمتسلسلات وفى أجزاء أخرى من الرياضيات حاصل الضرب $1.2.3 \ldots n$ للأعداد الصحيحة الموجبة الـ n الأولى يظهر كثيراً فنستخدم عادة الرمز $n!$ (يقرأ « مضروب n ») له . فمثلا ، $7! = 1.2.3 \ldots 7 = 5040$ و $2! = 1.2 = 2$ و $1! = 1$ وبوجه عام $n! = 1.2.3 \ldots n$. من المفيد تعريف $0! = 1$ لاحظ أن $(n+1)! = (n+1)(n!)$. رغم أن $n!$ تعرف فى الرياضيات المتقدمة لجميع الأعداد الحقيقية $n > -1$ ، لكن فى الرياضيات الأولية يستخدم الرمز فقط عندما تكون n عدداً صحيحاً غير سالب . المتسلسلة

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots$$

بالرمزين سجما ومضروب هى $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

نلخص النقط الأساسية لهذا البند : المتابعة هى قائمة لا نهائية مرتبة من الأعداد

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

هذه ليست متسلسلة . المتسلسلة هى العبارة المتكونة من هذه المتابعة بوضع علامات زائد بين الحدود

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (١٢)$$

بالتعريف ، المتسلسلة (١٢) تتقارب اذا كانت

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

موجودة . الحد النونى a_n يجب أن يقترب من الصفر اذا كانت المتسلسلة ستتقارب ، لكن هذا فقط لا يؤكد التقارب . لا تخلط بين المتابعة $a_1, a_2, a_3, \ldots$ المتكونة من حدود المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

والمتابعة ... $s_1, s_2, s_3,$ لحواصل الجمع الجزئية لها ، حيث $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

مسائل

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتسلسلات اللانهائية الآتية . ما عدا حيث يشار ، أوجد $\lim_{n\to\infty} a_n$ ، حيث a_n هو الحد العام .

١ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+1}$ ٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2n}$ ٣ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{i}{4^{i-1}}$ ٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2}{n+1}$ ٦ - $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m}$ ٧ - $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\cos^2 j}{2^j}$

٨ - $\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m+1}{2}\right]$ حيث $[\,a\,]$ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى a .

٩ - $\sum_{m=3}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{\sqrt{m}}$ ١٠ - $\sum_{t=3}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{\sqrt{m}}$ ١١ -* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ ١٢ -* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}$

بفرض أن نمط الحدود القليلة الأولى يستمر ، أوجد الحدود الثلاثة التالية والحد العام للمتسلسلات اللانهائية الآتية :

١٣ - $2+4+8+16+\cdots$ ١٤ - $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\cdots$

١٥ - $\frac{x^3}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 2}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$ ١٦ - $0+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{3}{6}+\frac{4}{7}+\cdots$

١٧ - $\frac{5}{2}-\frac{7}{3}+\frac{9}{4}-\frac{11}{5}+\frac{13}{6}-\cdots$ ١٨ - $\frac{\sqrt{y}}{1}+\frac{y}{1\cdot 3}+\frac{y\sqrt{y}}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{y^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

١٩ - اذا اتيح لك استخدام حاسب آلى ، أوجد حاصل الجمع الجزئى النونى للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ عندما $n = 10, 20, 30, \ldots, 100$ يمكن أثبات أن حاصل جمع هذه المتسلسلة هو : $\pi^2/6 \approx 1.644934$.

حدد ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

٢٠ - $4+4(-\frac{2}{3})+4(-\frac{2}{3})^2+4(-\frac{2}{3})^3+\cdots$ ٢١ - $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^i$

٢٢ - $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n+1}+\cdots$ ٢٣ - $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{j+1}$

٢٤ - $-\frac{1}{4}+\frac{2}{7}-\frac{3}{10}+\cdots+(-1)^k \frac{k}{3k+1}+\cdots$ ٢٥ - $\sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{m\pi}{2}$

٢٦ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \left[\frac{i+1}{2}\right]$ ، حيث $[a]$ ترمز الى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى a .

---

* Omit $\lim_{n\to\infty} a_n$

٢٧ ـ $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + \ln \frac{4}{5} + \cdots$

أوجد حاصل جمع المتسلسلات التقاربية الآتية :

٢٨ ـ $7 + \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} + \cdots + \frac{7}{5^{n-1}} + \cdots$ ٢٩ ـ $7 - \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} - \cdots + (-1)^{j-1} \frac{7}{5^{j-1}} + \cdots$

٣٠ ـ $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)(2m+1)}$ (ارشاد : استخدم الكسور الجزئية) .

٣١ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (ارشاد : استخدم الكسور الجزئية) .

أوجد العدد الممثل بالكسور العشرية غير المنتهية الآتية :

٣٢ ـ $0.222 \cdots$ ٣٣ ـ $0.5999 \cdots$ ٣٤ ـ $0.434343 \cdots$ ٣٥ ـ $0.713713713 \cdots$

٣٦ ـ تسقط كرة من ارتفاع h وترتطم بالأرض بعد $\sqrt{h}/4$ ثانية ، ثم ترتد لارتفاع bh ، حيث $0 < b < 1$. تأخذ زمناً للوصول الى هذا الارتفاع مساوياً للزمن من هذه النقطة للأرض . تستمر الكرة فى الحركة بهذه الكيفية . أوجد المسافة الكلية التى تقطعها الكرة والزمن الكلى لحركتها .

٣٧ ـ متسلسلة على الصورة

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - b_{i+1}) \qquad (١٣)$$

تسمى متسلسلة تلسكوبية . المتسلسلة فى (١١) متسلسلة تلسكوبية . أثبت أن (١٣) تتقارب إذا وإذا فقط كانت $\lim_{n \to \infty} b_n$ موجودة ، واذا كانت المتسلسلة تتقارب فأوجد حاصل جمعها .

٣٨ ـ أوجد صيغة لحاصل الجمع $S_n = r + 2r^2 + 3r^3 + \cdots + nr^n$. أثبت أن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} ir^i$ تتقارب اذا كان $| r | < 1$ ، وأوجد حاصل جمعها .

٣٩ ـ أثبت أن المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 r^i$ تتقارب إذا كان $| r | < 1$ وأوجد حاصل جمعها .

٤٠ ـ أذا جمعت حدود المتسلسلة التوافقية بالكيفية

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) + \cdots$$

فإن حاصل جمع الحدود فى كل مجموعة بين قوسين أكبر من $\frac{1}{2}$. استخدام هذه الحقيقة لاثبات أن المتسلسلة التوافقية تتباعد .

٤١ ـ أثبت أنه إذا كانت متسلسلة حدودها موجبة تتباعد ، فيجب أن تتباعد الى مالا نهاية .

٤٢* ـ أثبت النظرية ١٥ ـ ٩ (ارشاد : افرض أن $A > B$. اختر جوارين لـ B و A صغيرين حتى لا يتقاطعان وادرس حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلتين عندما تكون n كبيرة .)

بسط ما يأتى

٤٣ ـ $\frac{n!}{(n+1)!}$ ٤٤ ـ $\frac{(2n+2)!}{(2n)!}$ ٤٥ ـ $\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n}$ ٤٦ ـ $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

٤٧ ـ أثبت أن $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}$

أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ لـ a_n المعطى .

٤٨ - $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$ ٤٩ - $\frac{1}{2^n}$ $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$

٥٠ - $a_n = \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$ ٥١ - $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

٥٢ - هل $n!$ أكبر أو أصغر من n^n ؟ أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ (ارشاد : استخدم نظرية الحصر للمتابعات ، المسألة ٧٠ ، بند ١٥ - ١) .

٥٣ - الرمز $\binom{n}{r}$، حيث r و n عددان صحيحان وحيث $0 \leqslant r \leqslant n$ يعرف بـ

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

من بين الاستخدامات المختلفة ، $\binom{n}{r}$ هو عدد الطرق الممكنة لاختيار r من الأشياء من بين مجموعة من n من الأشياء . (أ) أوجد $\binom{6}{3}, \binom{8}{2}, \binom{8}{6}, \binom{5}{0}, \binom{5}{5}$

(ب) أثبت أن $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (ج) ، أثبت أن $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$

١٥ - ٣
العمليات الجبرية على المتسلسلات

قد نود لو أننا نستطيع إيجاد حاصل جمع كل متسلسلة تقاربية ، لكن هذا يمكننا فقط لعدد قليل جداً . الموضوع الخطير التالى هو معرفة ما إذا كانت المتسلسلة تتقارب أم لا . هذه تكون معلومات مفيدة ، ومجموعة واسعة معروفة باختبارات التقارب قد صممت كوسائل لتعيين ما إذا كانت المتسلسلة تتقارب أم تتباعد . قبل دراسة أهمها ، سنبرهن بعض الخواص البسيطة للمتسلسلات عامة .

تغيير عدد محدود من الحدود فى متسلسلة لا نهائية لا يؤثر على تقاربها أو تباعدها . أى أن ، المتسلسلة المعدلة ستتقارب أو تتباعد وفقاً لكون المتسلسلة الأصلية تتقارب أو تتباعد . لكن حاصل جمعها قد يختلف . فمثلا ، المتسلسلة الهندسية

$$2 + 2(\tfrac{1}{3}) + 2(\tfrac{1}{3})^2 + 2(\tfrac{1}{3})^3 + 2(\tfrac{1}{3})^4 + \cdots + 2(\tfrac{1}{3})^n + \cdots$$

تتقارب . كذلك أيضاً تتقارب المتسلسلة

$$6 - 13 + 2(\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{10}{7} + 2(\tfrac{1}{3})^4 + 2(\tfrac{1}{3})^5 + \cdots + 2(\tfrac{1}{3})^n + \cdots$$

التى نحصل عليها منها بتغيير الحد الأول والثانى والرابع . لاثبات هذه النتيجة للمتسلسلات عامة ، لتكن $\sum_{i=1} a_i$ المتسلسلة ، ولنفرض أن a_m هو الحد الأخير الذى يتغير . من الملائم أن نعتبر أن جميع الحدود الـ m الأولى $a_1, a_2, \ldots, a_m$ قد استبدلت بـ $b_1, b_2, \ldots, b_m$ مع أن واحداً أو أكثر من الـ b_i قد يساوى a_i .

إذا كان

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$
$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_m + a_{m+1} + \cdots + a_n,$$

حيث $n > m$ هما حاصلا الجمع الجزئيان النونيان للمتسلسلة الأصلية والمتسلسلة المعدلة ، فان

$$T_n = S_n - \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i$$

بما أن $- \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=1}^{m} b_i$ هو ثابت ، فان T_n يكون له نهاية إذا وإذا فقط كان S_n له نهاية .

إذا حذفت الحدود الـ m الأولى من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ فان الحدود الباقية تكون متسلسلة

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots \qquad (١)$$

برهان مماثل لما سبق سيثبت أن (١) تتقارب إذا وإذا فقط كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، إلا أن حاصل جمعها سيختلف عن حاصل جمع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بمقدار يساوى حاصل جمع الحدود المحذوفة . عند تعيين ما إذا كانت متسلسلة ما تتقارب ، كثيراً ما يكون من الملائم أن نتغاضى عن الحدود القليلة الأولى . النظرية السابقة توضح أنه يمكننا عمل ذلك دون أن يتأثر تقارب أو تباعد المتسلسلة . فمثلا ، إذا أردنا تعيين ما اذا كانت المتسلسلة

$$5 + \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \cdots \qquad (٢)$$

تتقارب ، يمكننا إسقاط الحدود الثلاثة الأولى وملاحظة أن المتسلسلة الباقية هي المتسلسلة التوافقية منقوصة حدها الأول . هذه المتسلسلة تتباعد ، وبالتالى هكذا تعمل (٢) .

إذا ضرب كل حد من متسلسلة فى عدد ثابت لا يساوى صفراً ، فاننا نحصل على متسلسلة جديدة تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون المتسلسلة الأصلية تتقارب أو تتباعد . لأنه إذا كتبنا

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

فإن

$$cS_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n, \qquad c \neq 0$$

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة ، فهكذا تكون $\lim_{n\to\infty} cS_n = c(\lim_{n\to\infty} S_n)$ وبالعكس . وإذن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتقارب إذا وإذا فقط كانت $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ تتقارب ويكون $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = c \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. فمثلا ، المتسلسلة

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots$$

تتباعد إذ أن حدودها نصف حدود المتسلسلة التوافقية التباعدية .

من المتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يمكن تكوين المتسلسلتين

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots + (a_i \pm b_i) + \cdots$$

اللتين تسميان متسلسلتى الجمع والفرق للمتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

نترك برهان النظرية الآتية للقارىء (المسألة ١٢) .

١٥ ـ ١٠ نظرية . إذا كانت المتسلسلتان $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تقاربيتين وكان حاصلا جمعهما B و A ، فان متسلسلة جمعهما ومتسلسلة فرقهما تتقاربان ويكون

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i) = A \pm B$$

حتى العمليات الجبرية البسيطة ، التى تكون صحيحة لحواصل الجمع المنتهية ، يجب أن ننظر اليها بعين الشك عند إجرائها على المتسلسلات . فمثلا ، تجميع الحدود فى المتسلسلة $\sum a_n$ بإدخال أقواس ، كما فى

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + a_9 + a_{10}) + \cdots$$

يكون متسلسلة جديدة $\sum b_n$ ، حيث

$$b_1 = a_1 + a_2, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = a_4 + a_5 + a_6 + a_7, \quad \ldots$$

من غير الواضح أن تقارب المتسلسلة $\sum a_n$ يتضمن تقارب المتسلسلة $\sum b_n$. إذا كانت $\sum a_n$ تتقارب ، فحواصل جمعها الجزئية تقترب من نهاية . بما أن كل حاصل جمع جزئى لـ $\sum b_n$ هو حاصل جمع جزئى لـ $\sum a_n$ ، فهذه أيضاً يجب أن تقترب من نفس النهاية . أى أن $\sum b_n$ تتقارب ولها نفس حاصل الجمع مثل $\sum a_n$.

مع أن الأقواس يمكن إدخالها فى المتسلسلة التقاربية بدون تأثير على حاصل جمعها ، لكن لا يمكن حذف الأقواس دائماً . المتسلسلة

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \qquad (٣)$$

هى المتسلسلة $0 + 0 + 0 + \ldots$ ، التى تتقارب كأى متسلسلة تقاربية . عند حذف الأقواس ، نحصل على متسلسلة أخرى ،

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \qquad (٤)$$

حاصل الجمع الجزئى النونى S_n لهذه المتسلسلة هو 1 إذا كانت n فردية وصفر إذا كانت n زوجية . S_n ليس له نهاية ، والمتسلسلة (٤) تتباعد .

الرياضيون فى أول العهد لم يحققوا أهمية التقارب . افترضوا أن أى عملية صحيحة لحواصل الجمع المنتهية يجب أن تكون صحيحة للمتسلسلات . بتجميع حدود المتسلسلة : $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ كما فى (٣) نحصل على المتسلسلة $0 + 0 + \ldots$ التى حاصل جمعها صفر ، لكن بتجميع الحدود بكيفية مختلفة قليلا ، نحصل على

$$1 - (1-1) - (1-1) - \cdots$$

التى هى ... — 0 — 0 — 1 ، والتى حاصل جمعها 1 . الرياضيون الأكفاء قد ازعجوا بمثل هذه التناقضات ، أما الرياضيون الأقل كفاءة فقد غالوا فيها . فى القرن الثامن عشر الناسك Guido Grandi أعتقد أنه فى البرهان السابق لاثبات أن $1 = 0$ قد وجد برهاناً رياضياً لخلق الدنيا من لا شيء .

تقارب أو تباعد المتسلسلة ، وحاصل جمعها اذا كانت تقاربية ، لا يتأثر بادخال أو حذف أى عدد من الحدود الصفرية . نترك البرهان للقارىء (المسألة ١٤) . فمثلا ، المتسلسلة

$$a_1 + a_2 + 0 + a_3 + a_4 + 0 + a_5 + a_6 + 0 + \cdots$$

تتقارب إذا وإذا فقط كانت

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

تتقارب ، ويكون لهما نفس حاصل الجمع .

مسائل:

١ - أثبت أن متسلسلة الجمع لمتسلسلة تقاربية ومتسلسلة تباعدية هى متسلسلة تباعدية . (ارشاد : افرض أن متسلسلة الجمع تقاربية) .

٢ - هل متسلسلة الجمع لمتسلسلتين تباعديتين متسلسلة تباعدية ؟

عين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية أو تباعدية :

٣ - $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots$

٤ - $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}$

٥ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b}{4^n}$

٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+3}$

٧ - $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^i} - \frac{1}{2^i}\right)$

٨ - $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{-2(3^i + 7^i)}{12^i}$

٩ - $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^j} + \frac{2}{j}\right)$

١٠ - $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$

١١ - $1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3^3} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{3^4} + \cdots$

١٢ - أثبت النظرية ١٥ - ١٠ (ارشاد : دع $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,\ B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)$ حواصل الجمع الجزئية النونية للمتسلسلات الثلاث) .

١٣ - أثبت أن قسمة 1 على $1 - x$ قسمة غير منتهية تعطى المتسلسلة الهندسية $1 + x + x^2 + \ldots$. أوجد الباقى عند أى مرحلة وبواسطته أثبت تقارب المتسلسلة لـ $|x| < 1$.

١٤ - أثبت أن ادخال أو حذف أى عدد من الحدود الصفرية لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة ولا على حاصل جمعها ، اذا كانت تقاربية . (ارشاد : لتكن $\sum a_i$ هى المتسلسلة المعطاة ، $\sum b_i$ المتسلسلة الناتجة من هذه بادخال حدود صفرية . كل حاصل جمع جزئى لـ $\sum b_i$ هو حاصل جمع جزئى لـ $\sum a_i$) .

١٥ ـ من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ كون المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + a_{i+1})$. هل تقارب المتسلسلة الأولى يتضمن تقارب الثانية ؟ هل تقارب المتسلسلة الثانية يتضمن تقارب الأولى ؟

١٥ ـ ٤
المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة

نبدأ دراستنا لاختبارات التقارب بدراسة المتسلسلات التى حدودها ليست سالبة . النظريات لهذه المتسلسلات تقدمت كثيراً عنها للمتسلسلات العامة . المتسلسلة ذات الحدود غير السالبة يمكن كتابتها على الصورة

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

بجميع $a_n \geqslant 0$. المتسلسلة

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

ليست متسلسلة حدودها غير سالبة .

١٥ ـ ١١ اختبار المقارنة . لتكن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ متسلسلة حدودها غير سالبة .

(أولا) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ متسلسلة تقاربية وكان $a_i \leqslant c_i$ لجميع i ، فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتقارب . اذا كان A و C هما حاصلا الجمع للمتسلسلتين ، فان $A \leqslant C$.

(ثانياً) اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ هى متسلسلة حدودها غير سالبة وكان $d_i \leqslant a_i$ لجميع i ، فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتباعد وتتباعد الى مالا نهاية .

البرهان . (أولا) لتكن $C_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$ و $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ حاصلى الجمع الجزئيين النونيين للمتسلسلتين $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. من الفرض $\lim_{n\to\infty} C_n$ توجد وتكون C . لأن $c_n \geqslant 0$ و $C_n = C_{n-1} + c_n$ ، المتتابعة $C_1, C_2, \ldots$ تكون متزايدة باطراد . اذن بالنظرية ١٥ ـ ٦ ، يكون $C_n \leqslant C$ لجميع n . بما أن $a_i \leqslant c_i$ ،

$$A_n \leqslant C_n \leqslant C$$

لجميع n . أى أن المتتابعة $A_1, A_2, \ldots$ تكون محدودة من أعلى بـ C ، ولأنها أيضاً متتابعة متزايدة باطراد ، فان $\lim_{n\to\infty} A_n$ توجد اذن $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتقارب بالتعريف . اذا كانت A ترمز الى حاصل جمعها ، فان $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ والنظرية ١٥ ـ ٦ تثبت أن $A \leqslant C$.

(ثانياً) ضع $D_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$ فيكون $D_1 \leqslant D_2 \leqslant \ldots$ (لماذا ؟) . تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ يتضمن أن المتتابعة $D_1, D_2, \ldots$ لا تتقارب . ليكن M أى عدد . يجب أن يوجد عدد ما N بحيث أن $D_N > M$ ، لأنه اذا لم يكن كذلك ، فجميع D_N تكون أقل من أو تساوى M ،

والمتتابعة المتزايدة باطراد $D_1, D_2, \ldots$ ستكون محدودة من أعلى ، وتتقارب بالنظرية ١٥ ـ ٦ . لكن $M < D_N$ يتضمن أن جميع D_N التالية تكون أكبر من M (لماذا ؟) . أى مهما كانت M كبيرة ، توجد دائماً نقطة فى المتتابعة $D_1, D_2, \ldots$ بعدها تكون جميع الحدود أكبر من M . لكن هذا هو تماماً تعريف $\lim_{n\to\infty} D_n = \infty$. بما أن $D_n \leqslant A_n$ لجميع n ، اذن $\lim_{n\to\infty} A_n = \infty$ ، والمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تتباعد الى مالا نهاية .

طريقة دارجة للنظر الى البرهان هى أن نتخيل فى الحالة الأولى أن حواصل الجمع الجزئية للمتسلسلة التقاربية $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ تتقدم حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ وهذا يجبر على التقارب . فى الحالة الثانية حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} d_i$ تدفع أمامها حواصل الجمع الجزئية لـ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ أثناء تباعدها الى مالا نهاية.

إذا كانت $0 \leqslant a_i \leqslant c_i$ لجميع i ، فان المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ يقال أنها محكومة بالمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$. اختبار المقارنة يقول أن المتسلسلة اللانهائية التى حدودها غير سالبة المحكومة بمتسلسلة تقاربية تكون تقاربية .

مثال ١ . أثبت أن المتسلسلة

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (١)$$

تتقارب

سوف لا نلتفت الى الحد الأول للمتسلسلة . لدينا

$$1 \cdot 2 \geqslant 2 \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2 \cdot 2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots ,$$

اذن كل حد فى المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad (٢)$$

يكون أقل من أو يساوى الحد المناظر فى المتسلسلة

$$1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{2})^3 + \cdots + (\tfrac{1}{2})^{n-1} + \cdots$$

المتسلسلة الأخيرة متسلسلة هندسية تقاربية . اذن (٢) وبالتالى (١) تتقارب باختبار المقارنة . سنرى فى بند ١٦ ـ ٥ أن حاصل جمع المتسلسلة (١) هو e .

مثال ٢ . حدد ما اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ تتقارب أم تتباعد .

بما أن $\sqrt{n} \leqslant n$ ، فيكون $1/\sqrt{n} \geqslant 1/n$. تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ يتضمن باختبار المقارنة تباعد المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

مثال ٣ . اختبر المتسلسلة

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\cdots \qquad (٣)$$

للتقارب .

العبارة « اختبر المتسلسلة للتقارب » تعنى تعيين ما اذا كانت المتسلسلة تتقارب أم تتباعد . كما سنشرح فى البند القادم ، توجد أسباب لان نعتقد أن المتسلسلة تتباعد . لذلك نحاول أثبات التباعد باستخدام اختبار المقارنة . اذا حاولنا مقارنة (٣) بالمتسلسلة

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots \qquad (٤)$$

التى هى تباعدية لأن حدودها أنصاف حدود المتسلسلة التوافقية ، نرى أن حدود (٣) أقل من حدود (٤) لان $1/(2n+1) < 1/2n$ ، ولا يمكننا استخلاص أى نتيجة عن تقارب أو تباعد (٣) . لكن اذا قارنا كل حد فى (٣) مع الحد التالى فى (٤) يكون لدينا $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$ وبوجه عام ،

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$$

فى الواقع ، أننا نقارن (٣) بالمتسلسلة

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n+2}+\cdots$$

التى هى (٤) محذوفاً منها الحد الأول . اذن المتسلسلة (٣) تتباعد .

يجب أن نتذكر أن اختبار المقارنة يطبق فقط على المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة . أيضاً لا يكفى أن نقارن مجرد الحدود الثلاثة أو الأربعة الأولى للمتسلسلتين . يجب مقارنة الحدين العامين لكى نتأكد أن $a_i \leqslant c_i$ لجميع i ، أو على الأقل لجميع i ابتداء من نقطة ما فى المتسلسلة .

اختبار المقارنة أساسى وهام ، لكنه محدود بضرورة إيجاد متسلسلة معروفة تقاربية أو تباعدية لتقارن مع المتسلسلة المعطاة . هذا يتطلب أننا نخمن منذ البداية ما اذا كانت المتسلسلة المعطاة تقاربية أم تباعدية ، وبعد ذلك نحاول أثبات ذلك . اختبار التقرب فى البند القادم سيجعل هذا التخمين أسهل لمتسلسلات معينة . اختبار المقارنة يتطلب أيضاً أن يكون لدينا مجموعة من المتسلسلات المعروف أنها تقاربية أو تباعدية . معلوماتنا الحالية محدودة بالمتسلسلة الهندسية ، والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ التى أثبتنا فى بند ١٥ ـ ٢ أنها تقاربية ، والمتسلسلة التوافقية . فى البند القادم سننمى مجموعتنا .

مسائل

عين ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

١ - $\frac{1}{2^{1/3}}+\frac{1}{3^{1/3}}+\frac{1}{4^{1/3}}+\cdots$

٢ - $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}}$

٣ - $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$

٤ - $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\cdots$

٥ - $\sum_{t=2}^{\infty}\frac{t}{\ln t}$

٦ - $\sum_{t=2}^{\infty}\frac{\ln t}{t}$

٧ - $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\cdots+(-1)^{j+1}\frac{1}{4^{j-1}}+\cdots$

٨ - $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

٩ - $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{3n-2}+\cdots$

١٠ - $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}+\cdots$

١١ - $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\cdots$

١٢ - $\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2^3}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2^4}\left(\frac{3}{4}\right)+\cdots$

١٣ - $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2-1}{k^2+2}$

١٤ - $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots, p\leq 1$

١٥ - $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

١٦ - $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$

١٧ - $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}+\cdots$

١٨ - أثبت أن الكسر العشرى غير المنتهى $0.\,a_1\,a_2\,a_3\,\ldots$ ، حيث الـ a_i هى الأعداد الصحيحة $0, 1, \ldots, 9$ ليست مضروبة بل موضوعة بجانب بعضها ، يمثل عدداً حقيقياً ، باثبات أن المتسلسلة

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots$$

التى يعبر عنها الكسر العشرى ، تتقارب .

١٩ - أثبت أنه اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ تتقارب ، حيث $a_n\geq 0$ ، فان $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ تتقارب . (ارشاد : أدرس a_n عندما تكون n كبيرة .)

٢٠ - لتكن $\sum c_n$ متسلسلة تقاربية ذات حدود موجبة . اذا حذف عدد محدود أو لا نهائى من الحدود ، فان الحدود الباقية تكون متسلسلة $\sum c'_m$. أثبت أن $\sum c'_m$ تتقارب .

٢١ - (أ) لتكن f دالة بحيث أن $f(x)\geq 0$ لجميع $x\geq a$ أثبت أن اذا كانت $f(x)\leq g(x)$ لجميع $x\geq a$ وكان $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ يتقارب ، فان $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ يتقارب وأن $\int_a^{\infty}f(x)\,dx\leq\int_a^{\infty}g(x)\,dx$.

(ب) لتكن h و f دالتين بحيث أن $h(x)\geq 0$ و $f(x)\geq 0$ لجميع $x\geq a$ أثبت أنه اذا كانت $h(x)\leq f(x)$ لجميع $x\geq a$ وكان $\int_a^{\infty}h(x)\,dx$ يتباعد ، فان $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ يتباعد . وضح (أ) ، (ب) بالرسم .

٢٢ - أثبت أن $\int_1^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ موجود (ارشاد : قارن e^{-x^2} مع e^{-x} واستخدم المسألة ٢١) .

المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة (تابع)

١٥ ـ ١٢ تعريف . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقريباً تتناسب مع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ اذا كانت $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n)$ موجودة وموجبة .

فمثلا ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{3n^2+1}$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} n$ لأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{3n^2+1}{n^2}} = \sqrt{3}$$

اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، فان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (المسألة ٥١) ويمكننا أن نقول أن المتسلسلتين تتناسبان تقريباً .

١٥ ـ ١٣ اختبار التقرب . المتسلسلة التى تقريباً تتناسب مع متسلسلة حدودها موجبة تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون المتسلسلة الثانية تتقارب أو تتباعد .

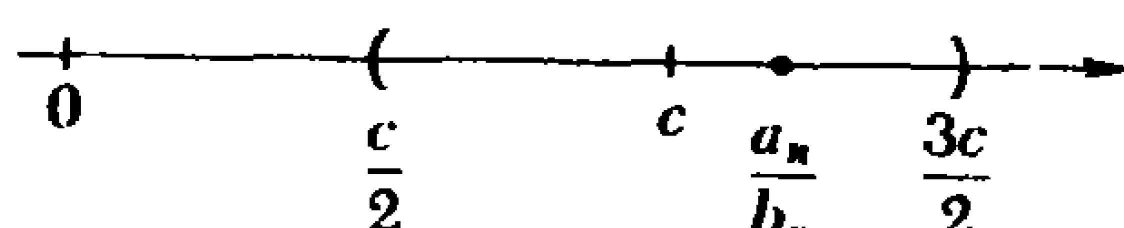
البرهان . لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة تقريباً تتناسب مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، حيث $b_n > 0$ ، ولتكن $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = c > 0$. عندما تكون n كبيرة تتجمع الحدود a_n/b_n حول c وستقع أخيراً بين $3c/2$ و $c/2$ (شكل ١٥ ـ ٦) . بعبارة أدق ، توجد N بحيث أن لجميع $n \geqslant N$ ، يكون

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2}$$

ومن ثم

$$\frac{c}{2}\, b_n < a_n < \frac{3c}{2}\, b_n \qquad (1)$$

هذا يتضمن أن $a_n > 0$ لـ $n \geqslant N$. اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتقارب ، فكذلك أيضاً $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{3c}{2} b_n$ واختبار المقارنة مطبقاً على النصف الأيمن من (١) يثبت أن $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ وبالتالى $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، تتقارب .



شكل ١٥ ـ ٦

لكبر المقدار n يكون ، $c/2 \leqslant a_n/b_n \leqslant 3c/2$

اذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتباعد ، فاختبار المقارنة مطبقاً على النصف الأيسر لـ (١) يثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتباعد . (الشرط $b_n > 0$ استخدم فى أثبات أن $a_n > 0$. أين استخدم من قبل ؟)

اختبار التقرب يفيد على وجه الخصوص فى تعيين تقارب أو تباعد المتسلسلات التى حدودها دوال جبرية موجبة لـ n .

مثال ١ . عين ما اذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2+2}{(n-1)(n^2+5n+1)}$$

تتقارب أم تتباعد .

عندما تكون n كبيرة ، تكون الكميات السائدة فى الحد العام هى أعلى قوى لـ n فى كل عامل ، أى $3n^2$ فى البسط و n و n^2 فى العاملين بالمقام . الكميات الأخرى لها تأثير ضئيل بالمقارنة مع هذه . واذن عندما تكون n كبيرة ، الحد العام يسلك مثل $3n^2/(n.n^2) = 3/n$. هذا يوحى بأن المتسلسلة قد تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ ، وفى هذه الحالة يمكننا استخدام اختبار التقرب حيث a_n هو الحد العام للمتسلسلة المعطاة وحيث $b_n = 3/n$. لتحقيق ذلك ، يجب ايجاد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n^2+2)}{(n-1)(n^2+5n+1)} \frac{n}{3}$$

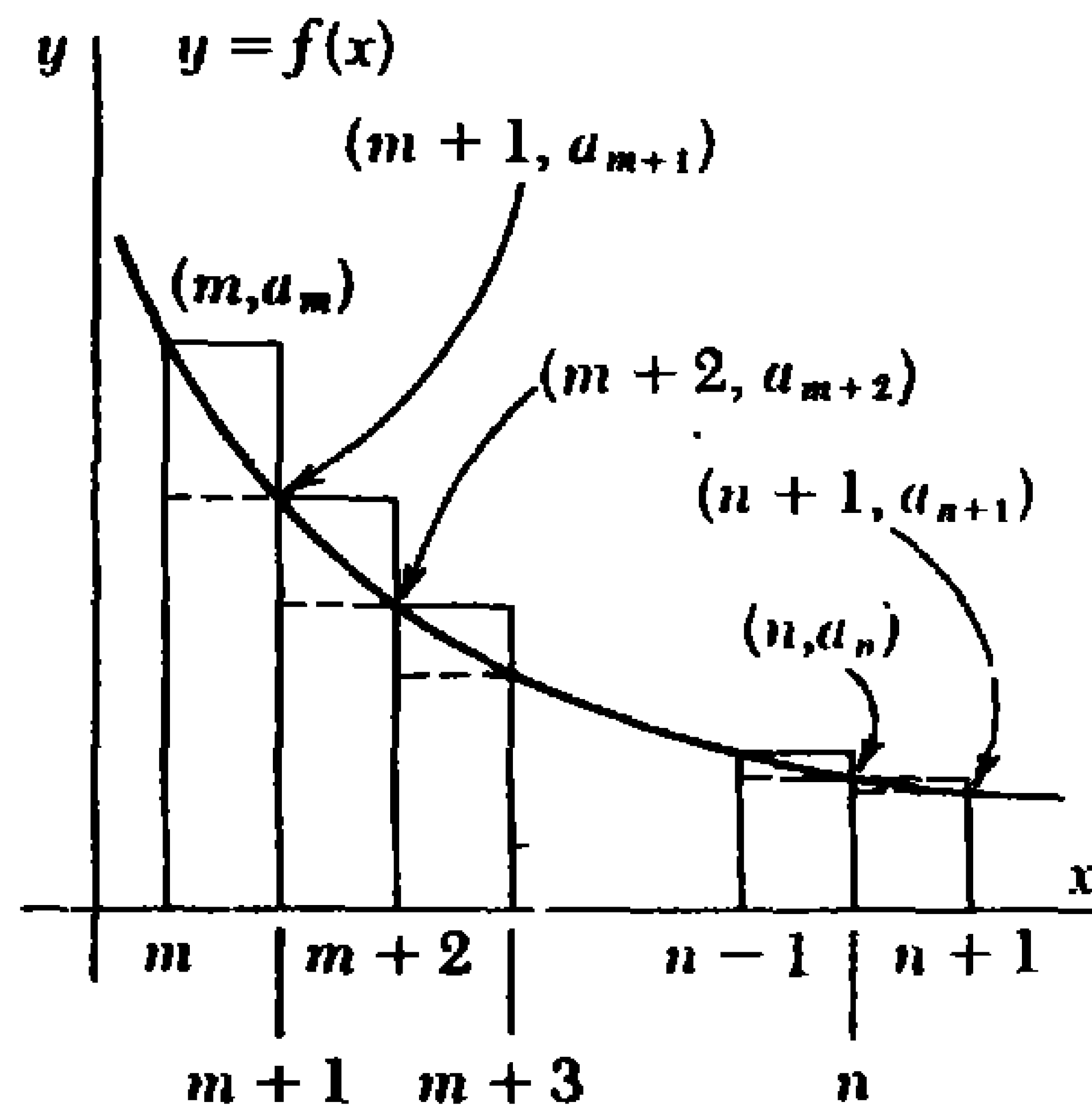
نهاية هذه الصورة غير المعينة يمكن ايجادها بقسمة البسط والمقام على n^3 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2/n^2}{(1-1/n)(1+5/n+1/n^2)3} = 1$$

واذن المتسلسلة المعطاة تكون تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ وبما أن المتسلسلة الأخيرة تتباعد ، لأنها ثلاثة أمثال المتسلسلة التوافقية ، فكذلك تتباعد المتسلسلة الأولى .

اختبار التقرب هو أساساً اختبار مقارنة . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقارن مع مضاعف للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ، وكما فى أى اختبار مقارنة ، توجد مشكلة ايجاد متسلسلة مناسبة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. الاختبار الآتى له ميزة احتواء نفسه . فبه يمكننا تحديد التقارب من مجرد المتسلسلة نفسها . لكن الاختبار له حدود ، كما سيكتشف القارىء .

١٥ - ١٤ اختبار التكامل لتكن $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ متسلسلة ذات حدود غير سالبة . اذا كانت f دالة متصلة متناقصة باطراد بحيث أن $f(i) = a_i$ ، فان $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ تتقارب أو تتباعد تبعاً لكون التكامل المعتل $\int_m^{\infty} f(x)\, dx$ يكون موجوداً أو لا نهائياً .



شكل ١٥ - ٧

البرهان . الشرط $f(i) = a_i$ يعنى أن المنحنى $y = f(x)$ يمر بالنقط $(m, a_m), (m+1, a_{m+1}), \ldots,$ $(n, a_n), \ldots$ (شكل ١٥ ـ ٧) . ضع

$$T_n = \sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\, dx, \qquad n \geq m \tag{٢}$$

سنثبت أن المتابعة $T_m, T_{m+1}, \ldots, T_n, \ldots$ تتقارب . لدينا

$$T_n - T_{n+1} = \sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\, dx - \sum_{i=m}^{n+1} a_i + \int_m^{n+1} f(x)\, dx$$

$$= \int_m^{n+1} f(x)\, dx - \int_m^n f(x)\, dx - a_{n+1}$$

$$= \int_n^{n+1} f(x)\, dx - a_{n+1}. \tag{٣}$$

مساحة المنطقة تحت المنحنى بين $n + 1$ و n أكبر من أو تساوى مساحة المستطيل الواقع تحت ذلك الجزء من المنحنى ، التى هى a_{n+1} . ومن ثم فالطرف الأيمن من (٣) ليس سالباً ، $T_n \geq T_{n+1}$ لجميع $n \geq m$. اذن المتابعة $T_m, T_{m+1}, \ldots$ متناقصة باطراد كل a_i هى مساحة المستطيل فى الشكل ١٥ ـ ٧ بين $i + 1$ و i حيث قمته فوق المنحنى . حاصل الجمع $\sum_{i=m}^{n} a_i$ أكبر من تساوى مساحة المنطقة تحت المنحنى بين n و m . اذن من (٢) $T_n \geq 0$. نظرية مرافقة للنظرية ١٥ ـ ٦ تقول أن المتابعة المتناقصة باطراد المحددة من أدنى لها نهاية . اذن $\lim_{n\to\infty} T_n$ توجد من (٢) ، يكون

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} \int_m^n f(x)\, dx$$

هذا يبرهن على أنه اذا كان $\int_m^\infty f(x)\, dx$ موجوداً ، فان $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} a_i$ أيضاً تكون موجودة ، والمتسلسلة $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ تتقارب بالتعريف . اذا كان $\int_m^\infty f(x)\, dx = \infty$ فان $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} a_i = \infty$ والمتسلسلة تتباعد الى مالا نهاية .

متسلسلة مفيدة فى المقارنة هى متسلسلة p

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

حيث p عدد ثابت . اذا كانت $p \leq 0$ ، الحد النونى لا يمكن أن يقترب من الصفر والمتسلسلة تتباعد . اذا كانت $p > 0$ ، حدود المتسلسلة تحقق شروط اختبار التكامل بوضع $f(x) = 1/x^p$. لدينا

$$\int_1^t f(x)\, dx = \int_1^t \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_1^t = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right), \qquad p \neq 1$$

اذن

$$\int_1^\infty f(x)\, dx = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{if } p > 1, \\ \infty & \text{if } p < 1. \end{cases}$$

اذا كانت $p = 1$ ، فان

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

متسلسلة p اذن تتقارب لجميع $p > 1$ وتتباعد لجميع $p \leqslant 1$. بالطبع ، نعلم من قبل أن المتسلسلة تتباعد عندما $p = 1$ لأنها عندئذ تكون المتسلسلة التوافقية .

مثال ٢ . حدد ما اذا كانت المتسلسلة

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{(n+1)(n-2)(3n+1)}$$

تتقارب أم تتباعد .

الكميات السائدة فى الحد العام عندما تكون n كبيرة هى أعلى قوى لـ n فى كل عامل . ومن ثم ، عندما تكون n كبيرة ، الحد العام يسلك مثل

$$\frac{2\sqrt{n}}{n \cdot n \cdot 3n} = \frac{2}{3n^{5/2}}$$

المتسلسلة تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3n^{5/2}}$ لأن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{(n+1)(n-2)(3n+1)} \frac{3n^{5/2}}{2} = 1$$

المتسلسلة $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{3n^{5/2}}$ تتقارب لأن حدودها هى $\frac{2}{3}$ الحدود المناظرة بمتسلسلة p التقاربية $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$

التكامل يعطينا تقديراً لحاصل جمع أى مجموعة متتالية من حدود متسلسلة ذات حدود غير سالبة ومتناقصة باطراد .

لتكن $\sum_{i=m}^{n} a_i$ مجموعة من حدود مثل هذه المتسلسلة ولتكن f دالة متصلة ومتناقصة باطراد بحيث أن $f(i) = a_i$. حاصل الجمع

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i - a_m$$

يمكن تفسيره بأنه حاصل جمع مساحات المستطيلات الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين n و m فى الشكل ١٥ ـ ٧ . اذن

$$\sum_{i=m}^{n} a_i - a_m \leqslant \int_m^n f(x)\,dx$$

فى برهان اختبار التكامل أثبتنا أن

$$T_n = \sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\,dx \geqslant 0$$

واذن

$$0 \leqslant \sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\,dx \leqslant a_m \qquad (4)$$

بما أن (٤) صحيحة لجميع $n \geq m$ ، وبما أن $\lim_{n\to\infty} T_n$ موجودة ، كما أثبتنا من قبل ، فان

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\,dx\right] \leq a_m \qquad (٥)$$

اذا كتبنا $\sum_{i=m}^{n} a_i$ على الصورة

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \int_m^n f(x)\,dx + \left[\sum_{i=m}^{n} a_i - \int_m^n f(x)\,dx\right] \qquad (٦)$$

نرى أن ، عندما تكون n كبيرة ، حتى اذا كانت المتسلسلة تباعدية ، $\sum_{i=m}^{n} a_i$ تساوى بالتقريب $\int_m^n f(x)\,dx$ زائد عدد ما ثابت بين 0 وa_m ، هو قيمة النهاية فى (٥) .

دعنا نطبق هذه النتيجة الأخيرة على المتسلسلة التوافقية $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. ضع $f(x) = 1/x$ واختر $m = 1$. حينئذ يكون $a_m = 1$ ، ويكون

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$$

واذن من (٥)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

تكون موجودة وتقع بين الصفر والواحد الصحيح . هذه النهاية ، وتسمى ثابت أويلر ، ويرمز لها بالرمز γ ، هى ثابت رياضى هام* غير معروف ما اذا كان الثابت γ عدداً كسرياً أم غير كسرى ، لكن قيمته بالتقريب هى 0.577216 . المعادلة (٦) حيث $m = 1$ ، مطبقة على المتسلسلة التوافقية تثبت أن ، عندما تكون n كبيرة ، قيمة $1 + \frac{1}{2} + \ldots + 1/n$ هى بالتقريب $\ln n + \gamma$ ، والتقريب يكون أفضل كلما كبرت n .

مسائل

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

١ - $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \cdots$

٢ - $1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4^3}} + \cdots$

٣ - $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \cdots$

٤ - $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$

٥ - $\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \cdots$

٦ - $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{3(4)} + \frac{1}{5(6)} + \frac{1}{7(8)} + \cdots$

٧ - $3 + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{3^3} + \frac{6}{4^3} + \frac{7}{5^3} + \cdots$

---

* الرياضى السويسرى Leonhard Euler (1707-1783) كان أحد قادة تطوير علم التفاضل والتكامل فى أيامه الأولى .

عين ما اذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

٨ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)^2}$

٩ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+n}$

١٠ - $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{3/2}}$

١١ - $\sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)(z+3)}$

١٢ - $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{1}{(j-2)(2j+3)}$

١٣ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+2n^2+3}$

١٤ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n-2}$

١٥ - $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m^2+2}}$

١٦ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

١٧ - $\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{t \ln t}$

١٨ - $\sum_{i=3}^{\infty} \frac{2^i}{i^3+1}$

١٩ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\ln(n+2)}$

٢٠ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i^2+6)^{1/3}}$

٢١ - $\sum_{i=4}^{\infty} \frac{i+\sqrt{i}}{i^2-i}$

٢٢ - $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{t+1}{(t+2)3^t}$

٢٣ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{i}}{i^2-3}$

٢٤ - $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\ln t}{t}$

٢٥ - $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{e^r}$

٢٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

٢٧ - $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{j(1+j^2)}}$

٢٨ - $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}$

٢٩ - $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\ln m}{m^2}$

٣٠ - $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

٣١ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}$

٣٢ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[n]{3}}$

٣٣ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$

٣٤ - $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{2^k}$

٣٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{-r}}{\sqrt{n}}$

٣٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^n}$

٣٧ - $\sum_{t=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln t)^p}, p > 0$

٣٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

٣٩ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}, a \geqslant 0$

٤٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{n^2}$

٤١ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} i}{i^2+1}$

٤٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

٤٣ - $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

٤٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

٤٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}$

٤٦ - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{e^k+e^{-k}}$

٤٧ - $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$

٤٨ - لأى قيم α تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)^\alpha}$ تقاربية ؟

٤٩ - لأى قيم α تكون المتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ تقاربية ؟

٥٠ ـ أثبت أن المتسلسلة

$$\sum \frac{1}{p^{\alpha}} = \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}} + \frac{1}{11^{\alpha}} + \cdots$$

حيث p تجرى خلال جميع الأعداد الأولية الموجبة ، تتقارب اذا كانت $\alpha > 1$. يمكن أثبات أن المتسلسلة تتباعد اذا كانت $\alpha \leqslant 1$.

٥١ ـ اذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ فاثبت أن $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ تتناسب تقريباً مع $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

٥٢ ـ أثبت تباعد متسلسلة p عندما تكون $p < 1$ بمقارنتها بمتسلسلة تباعدية مناسبة .

٥٣ ـ قرب الى حاصل جمع مقلوبات المائة الأولى من الأعداد الصحيحة الموجبة بطريقة اللوغاريتم . اذا كان متاحاً لك استخدام حاسب آلى ، فاختبر تقريبك بايجاد حاصل الجمع .

٥٤ ـ قرب الى حاصل الجمع $\sum_{n=10}^{100} \frac{1}{n^2}$. اذا كان متاحاً لك استخدام حاسب آلى فاختبر تقريبك بايجاد حاصل الجمع .

٥٥ ـ قرب الى حاصل جمع الحدود الـ $n - 1$ الأولى من المتسلسلة $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ أثبت أن هذه المتسلسلة تتباعد ببطء عن المتسلسلة التوافقية .

٥٦ ـ أثبت أن

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$$

[ارشاد : استخدم (٤)] اذا كان متاحاً لك استخدام الحاسب الآلى ، تحقق بحساب

$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \cdots + \frac{1}{2000}$

٥٧ ـ أين استخدم الشرط أن الدالة f متناقصة باطراد فى برهان اختبار التكامل ؟

٥٨ ـ المتابعة $a_1, a_2, \ldots$ تكون تقريبية للمتابعة $b_1, b_2, \ldots$ اذا كانت $\lim_{n \to \infty} (a_n/b_n) = 1$. أثبت أن المتابعة

$$(1), \left(1 + \frac{1}{2}\right), \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right), \ldots$$

تكون تقريبية للمتابعة $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n, \ldots$. نظرية مشهورة تقول أن عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى n هو عدد تقربى للعدد $n/(\ln n)$. هذا يثبت أن عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى n يكون بالتقريب $n/(\ln n)$ عندما تكون n كبيرة . قرب الى عدد الأعداد الأولية الموجبة الأقل من أو تساوى مليون .

المتسلسلات المتبدلة الاشارة

الاختبارات التى وصفت فى البندين الأخيرين يمكن تطبيقها فقط على المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة . عندما تكون المتسلسلة بها حدود موجبة وأخرى سالبة ، قد يكون من الصعب تحديد ما اذا كانت تتقارب أم تتباعد . نوع هام لمثل هذه المتسلسلة هو المتسلسلة المتبدلة الاشارة

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots, \qquad a_n > 0$$

التى تكون فيها الحدود موجبة وسالبة على التعاقب . مثال للمتسلسلة المتبدلة الاشارة هى المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة .

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

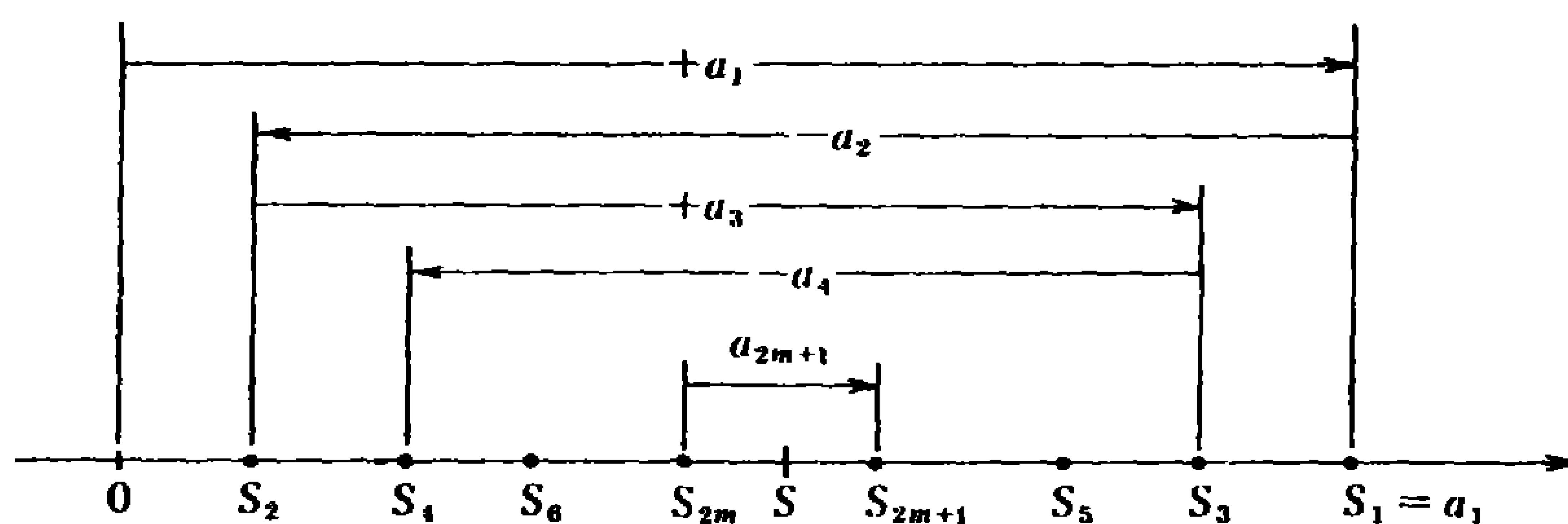
يوجد اختبار بسيط لتقارب المتسلسلة المتبدلة الاشارة .

١٥ - ١٥ اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة . المتسلسلة المتبدلة الاشارة

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots, \qquad a_n > 0$$

تكون تقاربية اذا كانت $a_n \geqslant a_{n+1}$ لجميع n وكانت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

البرهان . صورة هندسية للبرهان تساعدنا . نعلِّم حواصل الجمع الجزئية S_n على الخط الحقيقى الموضح فى الشكل ١٥ - ١٨ حاصل الجمع الأول ، $S_1 = a_1$ يقع على يمين نقطة الأصل . لايجاد S_2 ، نذهب لليسار مسافة a_2 .S_2 ستقع على يمين نقطة الأصل أو عليها لأن $a_2 \leqslant a_1$ بالفرض . بعد ذلك نذهب الى اليمين مسافة a_3 ، وهذا يوصلنا الى S_3 .



شكل ١٥ - ٨

بما أن $a_3 \leqslant a_2$ فإن $S_3 \leqslant S_1$ التحرك التالى يكون الى اليسار مسافة a_4 ، ويكون $S_4 \geqslant S_2$. نستمر فى الذهاب خلفاً وأماماً بهذه الكيفية ، حيث كل خطوة تكون أقل من أو تساوى سابقتها لأن $a_{n+1} \leqslant a_n$. ولأن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ بالفرض ، فالخطوات تصبح أقصر وأقصر . حواصل الجمع الجزئية تتذبذب خلفاً وأماماً بسعة تقترب من الصفر . يكاد يكون من الواضح تلقائياً انها تقفل عند نقطة ما S كنهاية لها . البرهان الجبرى يعكس هذه الصورة . حواصل الجمع الجزئية لعدد زوجى

من الحدود هى

$$S_2 = a_1 - a_2, \qquad S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$

وبوجه عام

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

كل حد بين قوسين غير سالب (لماذا ؟) ، واذن

$$S_2 \leqslant S_4 \leqslant \cdots \leqslant S_{2m} \leqslant \cdots$$

يمكن أيضاً كتابة S_{2m} على الصورة

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

بما أن كل حد بين قوسين غير سالب ، اذن $S_{2m} \leqslant a_1$ المتتابعة ... $S_2, S_4, \ldots, S_{2m}$, متزايدة باطراد ومحدودة من أعلى بالعدد a_1 (شكل ١٥ ـ ٨) . واذن يجب أن يكون لها نهاية . نسميها S . سنثبت أن متتابعة حواصل الجمع الجزئية الفردية الترقيم ... $S_1, S_3, \ldots, S_{2m+1}$, لها نفس النهاية . هنا يستخدم الفرض الثانى $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ لدينا

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

ومن ثم

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

بما أن $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$ و $\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$ ، جميع حواصل الجمع الجزئية S_n تكون قريبة من S عندما تكون n كبيرة . أى أن $\lim_{n\to\infty} S_n = S,$ ، والمتسلسلة تتقارب .

اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة يثبت أن المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots$$

تتقارب لأن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ و $a_n \geqslant a_{n+1}$.

فى برهان اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة رأينا أن حواصل الجمع الجزئية الزوجية الترقيم ... $S_2, S_4, S_6,$ تقترب من النهاية S من أدنى . حواصل الجمع الفردية الترقيم ... $S_1, S_3, S_5,$ تقترب منها من أعلى (المسألة ٣٨) . واذن يكون من الواضح من الشكل ١٥ ـ ٨ أن

$$|S - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |(-1)^n a_{n+1}| = a_{n+1}$$

هذه النتيجة المفيدة هى محتوى النظرية الآتية .

١٥ ـ ١٦ نظرية. لتكن

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots, \qquad a_n > 0$$

متسلسلة متبدلة الاشارة تقاربية حيث $a_n \geqslant a_{n+1}$ لجميع n . حاصل الجمع $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n$ للحدود الـ n الأولى يختلف ، فى القيمة المطلقة ، عن حاصل جمع المتسلسلة بما لا يزيد عن الحد التالى a_{n+1} .

حاصل الجمع S_n للحدود الـ n الأولى من متسلسلة تقاربية هو تقريب الى حاصل الجمع S للمتسلسلة . القيمة المطلقة للفرق بين S و S_n يسمى الخطأ فى تقريب S بحاصل الجمع S_n . لقد أثبتنا أنه للمتسلسلة المتبدلة الاشارة هذا الخطأ يكون أقل من أو يساوى الحد التالى a_{n+1} وأن

$$S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1} \qquad (1)$$

مثال ١ . عين ما اذا كانت المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \cdots$$

تتقارب أم تتباعد .

المتسلسلة متبدلة الاشارة ، ولدينا

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)!} \geqslant \frac{1}{(2n+1)!} = a_{n+1}$$

وأيضاً $\lim_{n\to\infty} [1/(2n-1)!] = 0$. شروط اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة متحققة ، والمتسلسلة تتقارب . حاصل جمع الحدود الثلاثة الأولى هو

$$S_3 = 1 - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{120} = \tfrac{101}{120}$$

هذا العدد يختلف عن حاصل جمع المتسلسلة بما لا يزيد عن الحد التالى بالمتسلسلة وهو $1/7! = 1/5040$. بناء على ذلك ، حاصل جمع المتسلسلة يقع بين

$$\tfrac{101}{120} + \tfrac{1}{5040} \approx \quad \text{و} \quad \tfrac{101}{120} - \tfrac{1}{5040} \approx 0.84147$$

وحاصل جمع المتسلسلة صحيحاً الى رقمين عشريين هو 0.84 .

نحذر القارىء من نقطتين . أولا ، لا يكفى أن نتحقق أن الحدود القليلة الأولى من المتسلسلة المتبدلة الاشارة تتناقص . يجب أن نتأكد أن جميع الحدود تفعل ذلك ، أو على الأقل جميع الحدود ابتداء من نقطة ما . من الضرورى استخدام الحد العام لاثبات ذلك . حدود المتسلسلة

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n-4} = \frac{25}{1} - \frac{36}{2} + \frac{49}{3} - \frac{64}{4} + \frac{81}{5} - \frac{100}{6} + \cdots$$

تتناقص أولا ، لكن ابتداء من $n = 8$ تتزايد . ثانياً ، لا نغفل الشرط $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، اللازم لتقارب أى متسلسلة .

مثال ٢ . اختبر تقارب المتسلسلة

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n-3}{n^2+1} \qquad (2)$$

المتسلسلة متبدلة الاشارة . هنا

$$a_n \geqslant a_{n+1} \qquad (٣)$$

اذا واذا فقط كان

$$\frac{n-3}{n^2+1} \geqslant \frac{n-2}{(n+1)^2+1}$$

أو ، لأن المقامين موجبان ، اذا واذا فقط كان

$$\frac{(n-3)[(n+1)^2+1]}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]} \geqslant \frac{(n^2+1)(n-2)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

واذن البسط على اليسار يجب أن يكون أكبر من أو يساوى البسط على اليمين . بعد الاختصار هذا الشرط يصبح

$$n^2-5n-4 \geqslant 0$$

وهذا يكون صحيحاً لجميع $n \geqslant 6$. اذن (٣) تكون صحيحة لجميع $n \geqslant 6$. أيضاً $\lim_{n\to\infty} [(n-3)/(n^2+1)] = 0$ اذا حذف حدا (٢) المناظران لـ 5 و $n = 4$ ، فالمتسلسلة الباقية تتقارب باختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة . اذن (٢) تتقارب .

غالباً ما تكون أسهل طريقة لمعرفة ما اذا كانت حدود المتابعة $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ متناقصة باطراد ، هى معرفة ما اذا كانت مشتقاتها سالبة أو صفراً . بدقة أكثر ، لتكن f دالة قابلة للتفاضل وبحيث أن $f(n) = a_n$ اذا كانت $f'(x) \leqslant 0$ لجميع x أكبر من عدد ما N ، فان f تكون متناقصة باطراد ويكون $a_n \geqslant a_{n+1}$ لجميع $n > N$.

يمكننا استخدام هذه الطريقة فى مثال (٢) بوضع

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+1}$$

حينئذ يكون

$$f'(x) = \frac{-x^2+6x+1}{(x^2+1)^2}$$

بما أن x^4 و x^2- هما الحدان الرئيسيان فى البسط والمقام ، فان $f'(x)$ ستكون أخيراً سالبة ويكون $a_n \geqslant a_{n+1}$ لجميع n أكبر من عدد ما N .

مسائل

حدد ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية أم تباعدية :

١ - $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

٢ - $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

٣ - $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{4}{7} + \frac{5}{9} - \cdots$

٤ - $\frac{3}{\ln 2} - \frac{3}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} - \frac{3}{\ln 5} + \cdots$

٥ - $-\frac{9}{3} + \frac{16}{5} - \frac{25}{7} + \frac{36}{9} - \frac{49}{11} + \cdots$

٦ - $\frac{2}{3} - \frac{2\cdot 4}{3\cdot 6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 6\cdot 9} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \cdots$

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{2n}$

٨ - $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{j10^j}$

٩ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{(2n)!}$

١٠ - $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^t e^{-t}$

١١ - $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \ln k}$

١٢ - $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\ln \ln m}$

١٣ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{3i+1}{5i-1}$

١٤ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n}$

١٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{6n-1}$

١٦ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{i}{i^2+1}$

١٧ - $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

١٨ - $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

١٩ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n\pi}{n}$

٢٠ - $\sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{r^2}{2(r^2-5)}$

٢١ - $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{\sqrt{j}}{2j+1}$

٢٢ - $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{5m}{(m+1)(m+2)}$

٢٣ - $\sum_{x=1}^{\infty} (-1)^x \frac{x^2+1}{2x^2-1}$

٢٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/2}}$

٢٥ - $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

٢٦ - $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

٢٧ - $\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} \left(\frac{1}{r^2} + \sin \frac{\pi r}{2}\right)$

٢٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

٢٩ - أوجد حداً للفرق بين حاصل جمع المتسلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}$ وحاصل جمع الحدود الأربعة الأولى . كم حداً ينبغي أخذها لكى يكون الفرق أقل من 10^{-5} ؟

٣٠ - كم حداً من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}$ يجب أخذها للتأكد أن حاصل جمعها يختلف عن حاصل جمع المتسلسلة بأقل من 0.0001 ؟

٣١ - (أ) كم حداً من المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ يجب أخذها للتأكد أن حاصل جمعها يختلف عن حاصل جمع المتسلسلة بأقل من 0.1 ؟

(ب) كرر الجزء (أ) للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$. هذه المتسلسلة تتقارب ببطء شديد عن $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

٣٢ - أثبت أن حاصل جمع المتسلسلة $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$ يقع بين 1 و $\frac{1}{2}$.

أوجد حاصل جمع كل من المتسلسلات المتبدلة الاشارة الآتية صحيحاً الى m رقم عشرى للعدد المعطى m . (ارشاد : اجر حساباتك الى $m + 2$ من الأرقام العشرية . من (١) ، حاصل الجمع يقع بين $S_n - a_{n+1}$ و $S_n + a_{n+1}$. استخدم حدوداً كافية بحيث أنه عندما

$S_n - a_{n+1}$ و $S_n + a_{n+1}$ يقربان الى m رقم عشرى نحصل على نفس العدد .)

٣٣ ـ $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots, \quad m=2$

٣٤ ـ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^7}+\cdots, \quad m=3$

٣٥ ـ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^3}, \quad m=2$

٣٦ ـ $-1+\frac{2}{3}-\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}-\cdots, \quad m=2$

٣٧ ـ لأى قيم p تتقارب متسلسلة p المتبدلة الاشارة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^p}$ ؟

٣٨ ـ أثبت أن المتابعة $S_1, S_3, \ldots, S_{2n+1}, \ldots$ لحواصل الجمع الجزئية الفردية الترقيم للمتسلسلة المتبدلة الاشارة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n. \; a_n>0$ تتناقص باطراد :

٣٩ ـ أثبت أن المتسلسلة

$$a_1+a_2-a_3-a_4+a_5+a_6-\cdots, \qquad a_n>0$$

التى فيها أزواج الحدود موجبة وسالبة على التعاقب ، تكون تقاربية اذا كانت $a_n \geqslant a_{n+1}$ لجميع n وكانت $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

١٥ ـ ٧

التقارب المطلق

يرتبط بأى متسلسلة $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ متسلسلة القيم المطلقة لحدودها ،

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$$

قد يبدو غريباً ، لكنه صحيح ، أنه إذا كانت المتسلسلة الأخيرة تقاربية فان المتسلسلة الأولى أيضاً تكون تقاربية .

١٥ ـ ٧ نظرية . إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ تقاربية ، فهكذا أيضاً تكون $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$.

البرهان . بما أن $-|a_i| \leqslant a_i \leqslant |a_i|$

ليكون
$$0 \leqslant a_i+|a_i| \leqslant 2|a_i| \qquad (1)$$

المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+|a_i|)$ ذات الحدود غير السالبة ، تسودها المتسلسلة التقاربية $\sum_{i=1}^{\infty}2|a_i|$ واذن هى تتقارب . المتسلسلتان التقاربيتان يمكن طرحهما حداً حداً ومتسلسلة الفرق ستتقارب (النظرية ١٥ ـ ١٠) . بما أن $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ و $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+|a_i|)$ تتقاربان فان المتسلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i+|a_i|-|a_i|)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

تتقارب .

المتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ التى متسلسلتها المرافقة ، للقيم المطلقة ، $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ تتقارب ، يقال أنها مطلقة التقارب . النظرية الأخيرة تقول أن كل متسلسلة مطلقة التقارب تكون تقاربية . اذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تقاربية لكن $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ ليست كذلك ، فان $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ تسمى مقيدة التقارب . المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة .

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

مقيدة التقارب . المتسلسلة تقاربية ، لكن متسلسلة القيم المطلقة ليست كذلك . من ناحية أخرى ، المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \qquad (٢)$$

مطلقة التقارب لأن متسلسلة القيم المطلقة هى متسلسلة p تقاربية . إذن (٢) نفسها تقاربية . أيضاً اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة يثبت أن (٢) تقاربية ، لكن بالطبع لا يساعد فى إثبات التقارب المطلق .

مفهوم التقارب المطلق هام جداً فى كلتا الناحيتين العملية والنظرية فهو يفيد فى تحديد تقارب المتسلسلات . فمثلا المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} - \cdots$$

التى فيها أزواج الحدود تكون موجبة وسالبة على التعاقب ، تتقارب لأن متسلسلة القيم المطلقة هى متسلسلة p تقاربية . فى الواقع ، متسلسلة p لـ $p = 3$ بأى ترتيب لعلامتى زائد وناقص سوف تتقارب .

لقد سبق أن ذكرنا أن ليس جميع العمليات على حواصل الجمع المنتهية يمكن إجراؤها على المتسلسلات . إحدى العمليات الطبيعية هى ضرب متسلسلتين . لاجراء ذلك بكيفية تعمم حاصل ضرب حاصلى جمع ، حاصل ضرب المتسلسلتين

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad \text{و} \quad b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$$

يعرف بأنه المتسلسلة

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots$$

حيث حواصل جمع أدلة العوامل بين قوسين هى ، على الترتيب ، $0, 1, 2, \ldots$. فمثلا ، حاصل ضرب المتسلسلتين

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \cdots \quad \text{و} \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

هو المتسلسلة

$$1(1) + \left[1\left(-\frac{1}{2^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)1\right] + \left(1\,\frac{1}{3^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\,1\right) + \cdots$$

التى تبسط الى

$$1-\tfrac{3}{4}+\tfrac{35}{72}-\cdots \qquad (٣)$$

يمكن إثبات أنه اذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ و$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ تقاربيتين تقارباً مقيداً فقط ، فان حاصل الضرب قد لا يتقارب ، أما إذا كانتا تقاربيتين تقارباً مطلقاً ، فمتسلسلة حاصل الضرب تتقارب الى حاصل ضرب حاصلى جمع المتسلسلتين $\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$ وإذن المتسلسلة فى (٣) تتقارب .

المتسلسلات لا يمكن إعادة ترتيبها بدون ضرر . ليس من الصعب إثبات أن المتسلسلة التقاربية تقارباً مقيداً يمكن إعادة ترتيبها بحيث أن المتسلسلة الناتجة تتقارب الى أى عدد معطى أوحتى تتباعد الى مالا نهاية . لكن إذا كانت المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً ، فأى ترتيب للمتسلسلة يتقارب ولنفس حاصل الجمع .

الحدود الموجبة والسالبة لمتسلسلة تكونان متسلسلتين جزئيتين منفصلتين . إذا كا المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً ، فان كلا من هاتين المتسلسلتين تتقارب ، لكن إذا ك تتقارب تقارباً مقيداً ، فان المتسلسلتين الجزئيتين تتباعدان الى ∞ — و ∞ (المسألة ١٩) . فى حالة التقارب المقيد حدود المتسلسلتين الجزئيتين تتوازن كل مع الأخرى ، بمعنى ما ، بحيث تمكن المتسلسلة الأصلية من أن تتقارب . هذا يمكن رؤيته فى المتسلسلة التوافقية المتبدله الاشارة .

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots \qquad (٤)$$

المتسلسلتان الجزئيتان

$$-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}-\cdots \quad \text{و} \quad 1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots$$

تتباعدان . إذا جمعت الحدود فى (٤) أزواجاً ، فاننا نحصل على المتسلسلة

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots \qquad (٥)$$

$$=\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{5(6)}+\cdots$$

وإذن أن هذه المتسلسلة الأخيرة تسودها المتسلسلة التقاربية

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

فهى تتقارب . الأزواج فى (٥) ، لكل حد موجب مع الحد السالب الذى يليه ، تنتج متسلسلة ، حدودها صغيرة ، لدرجة أنها تتقارب . هذا لا يبرهن أن (٤) تقاربية إذ أن (٤) نحصل عليها من (٥) بحذف الأقواس وهذه ليست دائماً عملية مسموح بها . لكن بمعالجة حواصل الجمع الجزئية يمكن إثبات تقارب (٤) من تقارب (٥) . بالطبع ، نعلم من قبل

أن (٤) تقاربية . هذا مجرد توضيح للفكرة كيف أن متسلسلتين ، إحداهما تتباعد الى ∞ والأخرى إلى $-\infty$ ، يمكن جبكهما لانتاج متسلسلة تقاربية .

١٥ ـ ٨ نظرية . إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تقاربية تقارباً مطلقاً ، فان $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

هذا يعمم الى المتسلسلات اللانهائية المتباينة

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$

البرهان . المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يجب أن تتقارب ، وحيث أن

$$-|a_n| \leqslant a_n \leqslant |a_n|$$

لجميع n ، فالنظرية ١٥ ـ ٩ تثبت أن

$$-\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

ومن ثم ،

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

مسائل

حدد ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تقاربية تقارباً مطلقاً أو تقارباً مقيداً أم تباعدية :

١ ـ $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\sqrt{m}}$

٢ ـ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+4}$

٣ ـ $\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{1}{(i-1)^{3/5}}$

٤ ـ $\sum_{u=1}^{\infty} (-1)^u \frac{u^2}{2(u^2-3)}$

٥ ـ $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{6^i}{5^{i+1}}$

٦ ـ $\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{r+1}{1000r}$

٧ ـ $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r^3+1)^4}$

٨ ـ $\sum_{n=b>-a}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+a}$

٩ ـ $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m!}{50m}$

١٠ ـ $\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2(n-4)}$

١١ ـ $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{-t}}{t^2+1}$

١٢ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$

١٣ ـ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

١٤ ـ $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^p}, p > 1$

١٥ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{2}\right)$

١٦ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{1}{n^{3/2}}$ *

١٧ ـ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[(n+1)/2]} \frac{1}{n}$ *

١٨ ـ لأى قيم x تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{(2n-1)^2}$ تقاربية ؟ تقاربية تقارباً مطلقاً ؟

---

* $[a]$ ترمز إلى أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوى a .

١٩ ـ لتكن $\sum_i p_i$ هي المتسلسلة الجزئية للحدود الموجبة بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_j q_j$ هي المتسلسلة الجزئية لحدودها السالبة . أثبت أن $\sum_j q_j$ و $\sum_i p_i$ تتقاربان إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مطلقاً ، لكن تتباعدان إلى $-\infty$ و ∞ ، على الترتيب ، إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب تقارباً مقيداً فقط (إرشاد :

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n & \text{if } a_n > 0. \\ 0 & \text{if } a_n \leq 0. \end{cases}$$

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ هي المتسلسلة $2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لكن بكل حد سالب في الأخيرة مستبدلا بصفر)

٢٠ ـ أثبت أنه إذا كانت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ تقاربيتين تقارباً مطلقاً ، فهكذا تكون المتسلسلات $\sum_{i=1}^{\infty} ca_i$ و $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i)$ لأي ثابت c . (ارشاد : أثبت أن $\sum_{i=1}^{n} |a_i \pm b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i|$) .

٢١ ـ أثبت أن المتسلسلة التي تتناسب تقريباً مع متسلسلة تقاربية تقارباً مطلقاً ، تتقارب تقارباً مطلقاً .

٢٢ ـ أثبت أن $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ يتقارب إذا كان $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$ يتقارب (إرشاد : استخدم المسألة ٢١ ، بند ١٥ ـ ٤) .

١٥ ـ ٨

اختبار النسبة

الاختبار المعطى أدناه فعال لمجموعة واسعة من المتسلسلات .

١٥ ـ ٩ اختبار النسبة . لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ توجد أو تكون لا نهائية .

(أولا) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ فالمتسلسلة تكون تقاربية تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1$ أو لا نهائية ، فالمتسلسلة تكون تباعدية .

(ثالثاً) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ فالاختبار لا يعطي أي معلومات عن تقارب أو تباعد المتسلسلة ويقال أنه يفشل .

البرهان . (أولا) فكرة البرهان هي أن نجد متسلسلة هندسية تقاربية تسود المتسلسلة المعطاة ؛ لتكن $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = b < 1$. اختر أي عدد r بحيث أن $b < r < 1$. بما أن

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = b.$$

فالنسبة $|a_{n+1} / a_n|$ ستكون أخيراً أقل من r . أى أن ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن :

$|a_{n+1} / a_n| < r$ لجميع $n \geq N$ وإذن

$$|a_{N+1}| < |a_N|r.$$
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2.$$
$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|r < |a_N|r^3,$$

وبوجه عام

$$|a_{N+t}| < |a_N|r^t \qquad \text{لجميع } t \geq 1$$

هذا يوضح أن المتسلسلة

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_{N+t}| + \cdots \qquad (١)$$

تسودها المتسلسلة الهندسية التقاربية

$$|a_N|r + |a_N|r^2 + \cdots + |a_N|r^t + \cdots$$

التى تقاربها ينتج من أن $0 \leqslant b < r < 1$. إذن (١) تتقارب ومن ثم أيضاً $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. وبناء على ذلك ، المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تتقارب ، وتتقارب تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) نفرض الآن أن $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = b > 1$ حيث b يمكن أن تكون لا نهائية . النسبة $|a_{n+1} / a_n|$ يجب أن تكون أخيراً أكبر من 1 . أى أن ، يوجد عدد صحيح N بحيث أن $|a_{n+1} / a_n| > 1$ ، أى $|a_{n+1}| > |a_n|$ ، لجميع $n \geqslant N$. بما أن حدود المتسلسلة تتزايد فى القيمة المطلقة ، فهى لا يمكن أن تقترب من الصفر ، والمتسلسلة لا يمكن أن تتقارب .

(ثالثاً) لمتسلسلة p التى هى $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ ، يكون

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)^p}{1/n^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

بصرف النظر عن p ، لكن المتسلسلة تتباعد إذا كانت $p = 1$ وتتقارب إذا كانت $p = 2$. هذا يوضح أن اختبار النسبة لا يعطى نتيجة عندما $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ ، وتقارب وتباعد المتسلسلة يجب تحديده بطرق أخرى .

عملياً اختبار النسبة يعطينا مقارنة أوتوماتيكية للمتسلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ مع متسلسلة هندسية . بسبب ذلك ، أى متسلسلة تتقارب أو تتباعد ببطء عن متسلسلة هندسية لا يمكن اختبارها باختبار النسبة . المتسلسلات الهندسية تتقارب أو تتباعد بسرعة كبيرة نسبياً ، ولذلك تستبعد متسلسلات كثيرة . الاختبار يفشل بالنسبة لها .

مثال ١ . حدد ما إذا كانت المتسلسلة

$$2+\frac{5}{3}+\frac{10}{9}+\cdots+\frac{n^2+1}{3^{n-1}}+\cdots$$

تتقارب أم تتباعد .

باستخدام اختبار النسبة ، لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2+1}{3^n}}{\dfrac{n^2+1}{3^{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)}=\frac{1}{3}.$$

بما أن النهاية أقل من 1 ، فالمتسلسلة تتقارب .

مثال ٢ . اختبر المتسلسلة

$$1+\frac{1\cdot 3^2}{2\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 3^4}{2\cdot 4\cdot 2^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 3^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^6}+\cdots$$

من حيث التقارب .

الحد العام ، الذى يناسب جميع الحدود ما عدا الحد الأول ، هو

$$a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)3^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot 2^{2n}}$$

لدينا

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)3^{2n+2}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)2^{2n+2}}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n\cdot 2^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)3^{2n}}$$

$$=\frac{(2n+1)3^2}{(2n+2)2^2}.$$

بما أن $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\frac{9}{4}>1$ فالمتسلسلة تتباعد .

مثال ٣. عين ما إذا كانت المتسلسلة

$$1-\frac{2}{2!}+\frac{2^2}{3!}-\cdots+(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}+\cdots$$

تتقارب أم تتباعد .

لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\,\frac{(n+1)!}{2^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+2}=0$$

المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً .

نختتم ببعض الملاحظات العامة عن اختبار المتسلسلات . لا يوجد اختبار وحيد يكون فعالا لجميع المتسلسلات . لقد أعطينا هنا الاختبارات الأبسط والتى بصفة عامة أكثر فائدة ، لكن توجد اختبارات أخرى كثيرة ، غالبيتها لها طبيعة خاصة . عندما نواجه متسلسلة نريد تحديد تقاربها ، أولا نلاحظ ، إذا كان ممكناً ، ما إذا كان الحد العام يقترب من الصفر .

إذا لم يكن كذلك ، فالمتسلسلة تتباعد . إذا كان يقترب من الصفر ، فالاستفسار عن التقارب مازال مفتوحاً . بعد ذلك نحاول اختبار النسبة ، فهو سهل وغالباً ينجح . إذا كانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$ أولا يمكن إيجادها ، متسلسلة القيم المطلقة ، وهى متسلسلة ذات حدود غير سالبة ، قد تتقارب . اذا كانت المتسلسلة متبدلة الاشارة نحاول اختبار المتسلسلة المتبدلة الاشارة . المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة يمكن اختبارها باختبار التقرب أو اختبار التكامل . الطريقة الأولى تنجح تماماً مع المتسلسلات التى حدودها دوال جبرية لـ n . اختبار التكامل محدود بالدوال التى تكاملاتها غير المعينة يمكن إيجادها لكن غالباً ينجح معها . أخيراً ، مع المتسلسلات ذات الحدود غير السالبة لا تنسى اختبار المقارنة . أحياناً متسلسلة تقاربية تسود المتسلسلة المعطاة واضحة مباشرة ، والاستفسار يمكن الاجابة عنه فى الحال . اذا كانت الاختبارات الأخرى غير ناجحة ، فاختبار المقارنة يكون الملجأ الأخير ، لكن نحتاج الى البحث عن متسلسلة مناسبة للمقارنة . قد يكون من الصعب تعيين ما إذا كانت متسلسلة تقاربية أم تباعدية . اختبار المتسلسلات فن ولا توجد طريقة معينة .

مسائل

عين ما إذا كانت المتسلسلات الآتية تتقارب أم تتباعد :

١ - $\frac{2}{3} + 2(\frac{2}{3})^2 + 3(\frac{2}{3})^3 + 4(\frac{2}{3})^4 + \cdots$

٢ - $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \cdots$

٣ - $4 - \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{4^n}{n!} + \cdots$

٤ - $\frac{3}{9} + \frac{4}{9^2} + \frac{5}{9^3} + \frac{6}{9^4} + \cdots$

٥ - $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 5} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$

٦ - $\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{3\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \cdots$

٧ - $\frac{2}{6} - \frac{2\cdot 4}{6\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \cdots$

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}$

٩ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+1}$

١٠ - $\sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{-j}$

١١ - $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r-3}{r^3}$

١٢ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$

١٣ - $\sum_{j=4}^{\infty} \frac{j+3}{2^j}$

١٤ - $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{5^r}{3^{r+1}}$

١٥ - $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-3)^{m-1}}{m^2+1}$

١٦ - $\sum_{r=2}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{1+\ln r}$

١٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^3+1}$

١٨ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)2i}$

١٩ - $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-5)^{r+1} r^2}{8^r}$

٢٠ - $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k!}{100(k-1)}$ ٢١ - $\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1}\frac{i!}{7^i}$ ٢٢ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

٢٣ - $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\ln i}{i^3}$ ٢٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ ٢٥ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^n}{(2n-1)!}$

٢٦ - $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\alpha 2^\alpha}{5^{\alpha+1}}$ ٢٧ - $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^2}$ ٢٨ - $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(1.01)^j}{j}$

٢٩ - $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m-1)(m+3)}{m!}$ ٣٠ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{6^i}{i^2 2^{i+2}}$ ٣١ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

٣٢ - $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2j-1)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3j-2)}$ ٣٣ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!2^{n+1}}$ ٣٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^{10}}{n!}$

٣٥ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$ ٣٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ٣٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n!)}{n^n}$

٣٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{87^n(n!)}{32^n n^n}$ ٣٩ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ٤٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, a > 0$

٤١ - $\sum_{m=2}^{\infty} \left(1+\frac{\ln m}{m}\right)^m$

٤٢ - لأى قيم r تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ تقاربية ؟

٤٣ - أثبت أن $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ لجميع x (ارشاد : اعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)

٤٤ - أثبت أن $\lim_{n\to\infty} (n!/n^n) = 0$ (ارشاد : اعتبر المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$)

٤٥ - أكتب الحدود السبعة الأولى بالمتسلسلة $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ ، حيث $a_{2n+1} = 1/3^{n+1}5^n$ و $a_{2n} = 1/3^n 5^n$
أثبت أن المتسلسلة تتقارب .

٤٦ - أثبت أن فى اختبار النسبة الشرط $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ للتقارب لا يمكن استبداله بالشرط الأضعف $|a_{n+1}/a_n| < 1$ لجميع $n \geqslant N$.

٤٧ - أثبت اختبار الجذر لكوشى : لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة حيث $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ تكون موجودة أو لا نهائية .

(أولا) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ فان المتسلسلة تكون تقاربية تقارباً مطلقاً .

(ثانياً) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ أوكانت لا نهائية ، فان المتسلسلة تكون تباعدية .

(ثالثاً) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ فالاختبار يفشل .

(إرشاد : تتبع برهان اختبار النسبة) .

اختبر تقارب المتسلسلات الآتية باختبار الجذر (المسألة ٤٧)

٤٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n},\ a \geq 0$

٤٩ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

٥٠ - $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{3^j}$

٥١ - $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

مسائل متنوعة

اختبر المتسلسلات الآتية من حيث التقارب :

١ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r^n$

٢ - $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{4i-5}$

٣ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{\sqrt[3]{2i}}$

٤ - $\sum_{m=5}^{\infty} \frac{1}{(2m+7)(m-4)}$

٥ - $\sum_{u=-2}^{\infty} \frac{1}{(3u+1)^2}$

٦ - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{5k+2}$

٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

٩ - $\sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{1}{\ln (2m-1)}$

١٠ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$

١١ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.01^{n+1}}{(n+2)^3}$

١٢ - $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

١٣ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n - 3}$

١٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n-2)^2}{2^n}$

١٥ - $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{u+2}{u^2}$

١٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}$

١٧ - $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2 - 2}$

١٨ - $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+2}{m(2m+1)}$

١٩ - $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j3^j}{2^{j-1}}$

٢٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$

٢١ - $\sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{6i}{(i-1)(3i+4)}$

٢٢ - $\sum_{t=1}^{\infty} (-1)^{t+1} \frac{t^2-3}{t^2}$

٢٣ - $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x+2}$

٢٤ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i2^i}{(i+1)!}$

٢٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+2)(3n-1)}{(n+1)!}$

٢٦ - $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} i^{-2} e^i$

٢٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{(n+1)^2 5^n}$

٢٨ - $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(2k)!}$

٢٩ - $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{5}$

٣٠ - $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+3}{3^j}$

٣١ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{e^i}$

٣٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{8^n}$

٣٣ - $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{2j+1}{3j-1}$

٣٤ - $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{2^t t^3}{t!}$

٣٥ - $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i(i-1)}{2i^3-5}$

٣٦ - $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2-2}{e^i}$

٣٧ - $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\sqrt{i+1}}{\sqrt[3]{4i+3}}$

٣٨ - $\sum_{t=2}^{\infty} \frac{t-\sqrt[3]{t}}{t^2+2t}$

٣٩ - $\sum_{m=2}^{\infty} \frac{m \ln m}{(m+2)^3}$

٤٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{(2n)!}$

٤١ - $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

٤٢ - $\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{\ln (j-1)}$

٤٣- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\ln (n+2)}$

٤٤- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)n}$

٤٥- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}$

٤٦- $\sum_{i=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{i}\right)^i$

٤٧- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m^2}}$

٤٨- $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^m}{2^m (m!)}$

٤٩- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$

٥٠- $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1), a>0$

٥١- $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$

٥٢- $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}, a>0$

٥٣- $\sum_{m=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln m}{m}\right)^m$

الفصل السادس عشر

متسلسلات القوى

١٦ - ١
متسلسلات القوى

الامتداد الهام للمتسلسلات اللانهائية نحصل عليه بدراسة المتسلسلات التي حدودها ليست ثابتة بل على الصورة

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

مثل هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة قوى فى x أو باختصار ، متسلسلة قوى . وهى تعميم لكثيرة الحدود . أمثلة لمتسلسلات القوى هى

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots \quad (١)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} + \frac{x^4}{4(2^4)} + \cdots \quad (٢)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (٣)$$

إذا استبدل المتغير فى متسلسلة القوى بثابت ، فاننا نحصل على متسلسلة ثوابت . أى أن متسلسلة القوى يمكن اعتبارها تمثل مجموعة من المتسلسلات لثوابت ، واحدة لكل قيمة للمتغير x . متسلسلة القوى قد تتقارب لبعض قيم x وتتباعد لقيم أخرى . لقد رأينا أن المتسلسلة (١) ، التى هى متسلسلة هندسية ، تتقارب لـ $-1 < x < 1$ وتتباعد لجميع القيم الأخرى لـ x .

مثال ١ . أوجد قيم x التى تجعل المتسلسلة

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} + \frac{x^4}{4(2^4)} + \cdots$$

فى (٢) تتقارب .

الحد العام للمتسلسلة هو $u_n = x^n / n2^n$. نستخدم اختبار النسبة فيكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x| = \frac{|x|}{2}$$

المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً عندما $|x| < 2$ وتتباعد عندما $|x| > 2$. اختبار النسبة لا يعطى معلومات عن التقارب $x=\pm 2$ عندما $x = 2$ ، المتسلسلة هى

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

التى هى المتسلسلة التوافقية التباعدية . عندما $x = -2$ ، المتسلسلة هى

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots$$

التى هى سالب المتسلسلة التوافقية المتبدلة الاشارة التقاربية . لقد درسنا جميع الاختبارات الممكنة لـ x ونرى أن المتسلسلة تتقارب عندما $-2 \leqslant x < 2$ وتتباعد لجميع القيم الأخرى لـ x .

مثال ٢ . أوجد قيم x التى تجعل المتسلسلة

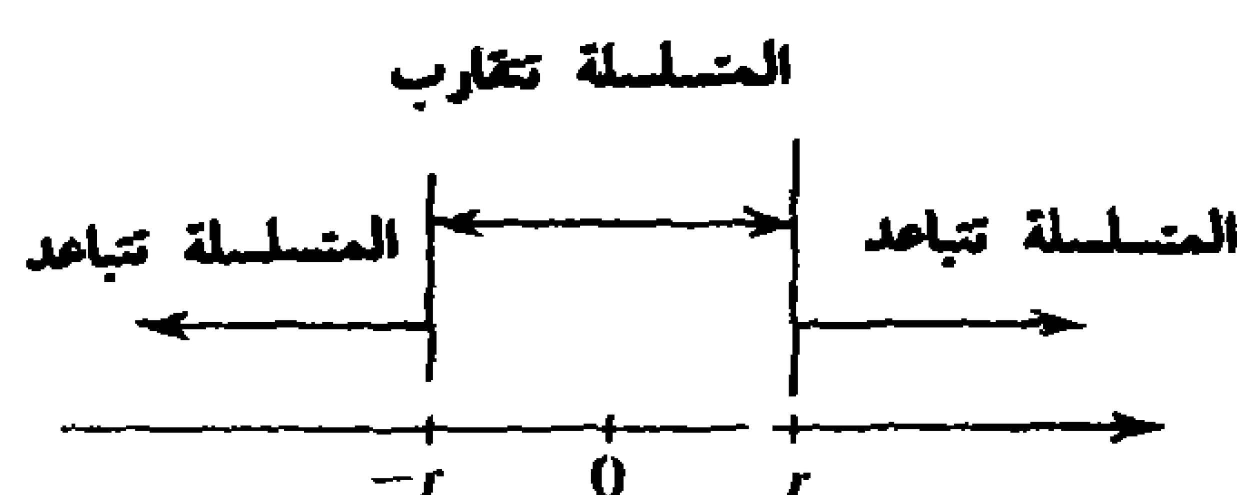
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

فى (٣) تقارب .

باستخدام اختبار النسبة ، يكون لدينا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)2n} = 0$$

المتسلسلة تتقارب لجميع قيم x .



شكل ١٦ - ١

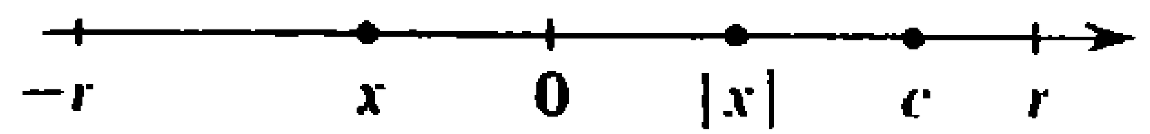
r هى نصف قطر التقارب . التقارب ليس مؤكداً عند $\pm r$

المتسلسلتان فى (١) ومثال ١ تتقاربان ، وتتقاربان تقارباً مطلقاً ، لجميع قيم x داخل فترة مركزها عند الصفر وتتباعد لجميع قيم x خارج هذه الفترة . من خصائص متسلسلة القوى أنه توجد فترة $[-r, r]$ تتقارب المتسلسلة داخلها تقارباً مطلقاً وتتباعد خارجها (شكل ١٦ - ١) . المتسلسلة قد تتقارب وقد لا تتقارب عند النقطتين الطرفيتين . العدد r نصف طول الفترة ، يسمى نصف قطر تقارب المتسلسلة . فئة جميع قيم x التى تجعل المتسلسلة تتقارب تسمى فترة التقارب . وهى فترة مفتوحة $(-r, r)$ مع احتمال أن يضاف اليها أحدى النقطتين الطرفيتين أو كليهما . فى مثال ١ نصف

قطر التقارب هو 2 وفترة التقارب هى $(0, -2)$. كثيراً ما تكون فترة التقارب الخط بأكمله ، كما فى حالة المتسلسلة فى مثال ٢ ، وفى مثل هذه الحالة يقال أن نصف قطر التقارب لا نهائى وأحياناً المتسلسلة تتقارب عند $x = 0$ فقط ، وفى هذه الحالة $r = 0$. نبرهن خاصية الفترة فى النظرية الآتية .

١٦ - ١ نظرية . متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x فى فترة ما $-r < x < r$ وتتباعد لجميع $|x| > r$. الفترة قد تكون لا نهائية ، وفى هذه الحالة المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x ؛ أو r قد تكون صفراً ، وفى هذه الحالة تتقارب المتسلسلة عند $x = 0$ فقط .

البرهان . سيكون البرهان سهلا إذا كانت $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|$ موجودة لكل متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، لأنه حينئذ نتابع كما فى الأمثلة . لكن النهاية قد لا توجد . لتكن S هى فئة جميع x التى تجعل $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب . إذا كانت S محدودة من أعلى ، فهى لها حد أعلى أصغر r . بما أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب عنده $x = 0$ ، فيكون $r \geqslant 0$. نفرض أن $r > 0$. لتكن x أى عدد بحيث أن $|x| < r$ (شكل ١٦ - ٢) . لأن r هى الحد الأعلى الأصغر ، يوجد عدد ما فى S بين r و $|x|$. أى أن ، توجد c حيث $0 \leqslant |x| < c \leqslant r$ بحيث أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n c^n|$ تتقارب . من ثم ، $|a_n x^n| < |a_n c^n|$ ، واختبار المقارنة يثبتان أن $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ تتقارب . بما أن x هى أى عدد بحيث أن $|x| < r$ ، فالمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع هذه القيم لـ x . إذا كانت S غير محدودة من أعلى ، فان تعديلا بسيطاً لهذا البرهان سيثبت أن المتسلسلة تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x .



شكل ١٦ - ٢

جزء التباعد بالنظرية يكون له معنى إذا كانت S محدودة من أعلى وبالتالى حدها الأعلى الأصغر r يكون موجوداً . لتكن x أى عدد بحيث أن $0 \leqslant r < |x|$. إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب ، فان $\lim_{n\to\infty} |a_n x^n| = 0$ وبالتالى $|a_n x^n| < 1$ لجميع قيم n الكبيرة كبراً كافياً . لتكن b أى عدد بحيث أن $|x| > b > r$ ، فيكون

$$|a_n b^n| = |a_n x^n| \left|\frac{b}{x}\right|^n < \left|\frac{b}{x}\right|^n$$

لقيم n الكبيرة كبراً كافياً ، والمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b^n|$ سيسودها آخر الأمر المتسلسلة الهندسية التقاربية $\sum_{n=0}^{\infty} |b/x|^n$ (لماذا تقاربية ؟) واذن هى تتقارب . لكن هذا محال لأن $b > r$. اذن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتباعد لجميع $|x| > r$. هذا يكمل البرهان .

إذا كانت حدود متسلسلة القوى تتبع غطاً معيناً ، فإنه يمكننا عادة إيجاد نصف قطر التقارب r باستخدام اختبار النسبة ، كما فى مثالى ١ ، ٢ . هذا يحدد الفترة $[-r, r]$ ، التى داخلها تتقارب المتسلسلة وخارجها تتباعد . تقارب المتسلسلة عند r و $-r$ يجب دراسته كل على حده . لاجراء

ذلك ، نعوض بـ $-r$ و r عن x فى المتسلسلة ، ونختبر متسلسلة الثوابت ، الناتجة ، من حيث التقارب ، بأحد الاختبارات التى سبقت دراستها فى الفصل ١٥ .

مثال ٣ . أوجد فترة تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n^2}$

لدينا ، باستخدام اختبار النسبة ،

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{3^{n+1}z^{n+1}}{(n+1)^2}\frac{n^2}{3^n z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2}|z| = 3|z|$$

المتسلسلة تتقارب لـ $|z| < \frac{1}{3}$ وتتباعد لـ $|z| > \frac{1}{3}$. نصف قطر التقارب هو $\frac{1}{3}$. عندما $z = \frac{1}{3}$ ، المتسلسلة تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ وهى متسلسلة p ، تقاربية . عندما $z = -\frac{1}{3}$ ، المتسلسلة تكون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ، التى تتقارب لأن متسلسلتها للقيم المطلقة تتقارب . فترة التقارب هى الفترة المقفلة $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

تعميم لمتسلسلة القوى فى x هو المتسلسلة

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

وتسمى متسلسلة القوى فى $x - a$. تعويض y لـ $x - a$ يحول هذه المتسلسلة الى متسلسلة قوى فى y . وعلى ذلك ، فهى لها نصف قطر تقارب r ، وتتقارب لجميع x حيث

$$-r < x - a < r,$$

أى حيث ،

$$a - r < x < a + r.$$

فترة التقارب مركزها عند a ونقطتاها الطرفيتان هما $a + r$ و $a - r$.

مثال ٤ . أوجد فترة تقارب المتسلسلة

$$2(x-3) + 2^2\cdot 2^2(x-3)^2 + 2^3\cdot 3^2(x-3)^3 + 2^4\cdot 4^2(x-3)^4 + \cdots$$

الحد العام للمتسلسلة هو $2^n n^2(x-3)^n$. لدينا باختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{2^{n+1}(n+1)^2(x-3)^{n+1}}{2^n n^2(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |x-3| = 2|x-3|$$

المتسلسلة تتقارب لـ $|x-3| < \frac{1}{2}$ ، أى لـ $3-\frac{1}{2} < x < 3+\frac{1}{2}$ ، وتتباعد لـ $x > \frac{7}{2}$ و $x < \frac{5}{2}$. نصف قطر التقارب هو $\frac{1}{2}$.

عندما $x < \frac{5}{2}$ ، المتسلسلة تكون

$$-1 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2 + \cdots$$

وهذه تتباعد ، وعندما $x = \frac{7}{2}$ ، المتسلسلة تكون

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + \cdots$$

وهذه أيضاً تتباعد . فترة التقارب هى الفترة المفتوحة $(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$.

مسائل

أوجد فترة التقارب لمتسلسلات القوى وبيِّنها على الخط الحقيقي :

١ - $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

٢ - $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$

٣ - $1 - u + \frac{u^2}{2^2} - \frac{u^3}{3^2} + \cdots$

٤ - $1 + \frac{z}{2} + \frac{2z^2}{2^2} + \frac{3z^3}{2^3} + \frac{4z^4}{2^4} + \cdots$

٥ - $(x-1) + \frac{(x-1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x-1)^3}{\sqrt{3}} + \frac{(x-1)^4}{\sqrt{4}} + \cdots$

٦ - $1 + \frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \cdots , a > 0$

٧ - $1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{4^2} - \frac{t^6}{6^2} + \cdots$

٨ - $1 - 2(3r-5) + 3(3r-5)^2 - 4(3r-5)^3 + \cdots$

٩ - $\frac{x}{1(2)} - \frac{x^2}{2(2^2)} + \frac{x^3}{3(2^3)} - \frac{x^4}{4(2^4)} + \cdots$

١٠ - $2(2z+1) + \frac{3(2z+1)^2}{2!} + \frac{4(2z+1)^3}{3!} + \cdots$

١١ - $1 + \frac{2^2x}{2!} + \frac{3^2x^2}{3!} + \frac{4^2x^3}{4!} + \cdots$

١٢ - $\frac{x-5}{1(3)} - \frac{(x-5)^2}{2(3^2)} + \frac{(x-5)^3}{3(3^3)} - \frac{(x-5)^4}{4(3^4)} + \cdots$

١٣ - $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{2x^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3x^3}{2^2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4x^4}{2^3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$

١٤ - $\frac{1}{3} + \frac{2u}{2(3^2)} + \frac{3u^2}{2^2(3^3)} + \frac{4u^3}{2^3(3^4)} + \cdots$

١٥ - $1 + \frac{u^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot u^4}{2 \cdot 4 \cdot 2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot u^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2^6} + \cdots$ (احذف النقطتين الطرفيتين) .

١٦ - $x + \frac{x^2}{2^h} + \frac{x^3}{3^h} + \frac{x^4}{4^h} + \cdots$

١٧ - $\lambda - \frac{\lambda^2}{2(2!)}(2^2-1) + \frac{\lambda^3}{3(3!)}(2^3-1) - \cdots$

أوجد فترة التقارب لمتسلسلات القوى الآتية :

١٨ - $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

١٩ - $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m^2 r^m$

٢٠ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1}$

٢١ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n}$

٢٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{\sqrt{n}}$

٢٣ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

٢٤ - $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!}$

٢٥ - $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{it^i}{(-3)^i}$

٢٦ - $\sum_{j=4}^{\infty} \frac{4^j x^j}{5(j-3)^2}$

٢٧ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z-1)^n}{n!}$

٢٨ - $\sum_{j=1}^{\infty} j! x^j$

٢٩ - $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{nx^n}{(n-1)!}$

٣٠ - $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3s+1)^m}{2^m}$ ‏ ٣١ - $\sum_{j=5}^{\infty} \frac{(2x+1)^j}{j3^{j-1}}$ ‏ ٣٢ - $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(x-1)^{m-1}}{4^m}$

٣٣ - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ‏ ٣٤ - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} (z+2)^k$ ‏ ٣٥ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(n-1)n} (t-4)^{2n-1}$

٣٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} (x+4)^n$ ‏ ٣٧ - $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n(y+2)^n}{n-1}$ ‏ ٣٨ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^r}{7^n}$

٣٩ - $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(x-3)^t}{2^t\sqrt{t+1}}$ ‏ ٤٠ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)u^n}{n(n+2)2^n}$

٤١ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ (احذف النقطتين الطرفيتين) .

٤٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+1)}$ ‏ ٤٣ - $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}(y+2)^{2r}}{(r+1)^2 4^r}$ ‏ ٤٤ - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

٤٥ - $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k \ln k}$ ‏ ٤٦ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n^2+1}, a > 0$

أوجد قيم x التى تجعل المتسلسلات الآتية تتقارب :

٤٧ - $\frac{\sin x}{2(2)} - \frac{\sin^2 x}{4(2^2)} + \frac{\sin^3 x}{6(2^3)} - \frac{\sin^4 x}{8(2^4)} + \cdots$.

٤٨ - $1 - \tan x + \frac{1}{2^2}\tan^2 x - \frac{1}{3^2}\tan^3 x + \cdots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

٤٩ - $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \cdots$ ‏ ٥٠ - $\frac{1}{x} - \frac{1}{3^2x^3} + \frac{1}{5^2x^5} - \frac{1}{7^2x^7} + \cdots$ ‏ ٥١ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)x^{2n-1}}$

٥٢ - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$ ‏ ٥٣ - $1 + \frac{2^2}{2!x} + \frac{3^2}{3!x^2} + \frac{4^2}{4!x^3} + \cdots$ ‏ ٥٤ - $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 n^x$

٥٥ - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^x}$

٥٦ - أعط مثالا لمتسلسلة قوى فى x بحيث (أ) تتقارب لجميع قيم x ، (ب) تتقارب عند $x = 3$ وتتباعد عند $x = 4$ ، (ج) تتقارب عند $x = 0$ فقط .

٥٧ - أثبت أن فئة قيم x التى تجعل المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x^2)^n}{\sqrt{n}}$ تتقارب لا تكون فترة . لماذا لا يتعارض هذا مع النظرية ١٦ - ١ ؟

٥٨ - إذا كانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = c$ ، فاثبت أن نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو $1/c$.

٥٩ - أثبت أنه إذا كان نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو r ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n$ يكون نصف قطر التقارب لها واحد صحيح . أثبت أيضاً أن المتسلسلة الأخيرة تتقارب عند -1 و 1 إذا وإذا فقط كانت المتسلسلة الأولى تتقارب عند $r-$ و r ، على الترتيب . إذا كانت r نصف قطر التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، فأوجد b بحيث أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n x^n$ يكون لها نصف قطر التقارب s .

٦٠ - أثبت أنه إذا كانت الفئة S فى برهان النظرية ١٦ - ١ غير محدودة من أعلى ، فإن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب تقارباً مطلقاً لجميع x .

٦١ - بدون استخدام النظرية ١٦ - ١ ، أثبت أنه إذا كانت متسلسلة قوى تتباعد عند $x = d$ ، فهى تتباعد لجميع $| x | > | d |$.

٦٢ - المتسلسلة - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ تعرف بمتسلسلة ديريشلت (Dirichlet) . خذ فى الاعتبار الحالة : $a_n > 0$. فقط أثبت أنه إذا كانت المتسلسلة تتقارب عند $x = c$ ، فهى تتقارب لجميع $x > c$ ، وإذا كانت تتباعد عند $x = d$ ، فهى تتباعد لجميع $x < d$. بعض متسلسلات ديريشلت تتقارب لجميع x والبعض الآخر لا يتقارب لأى x . أثبت أنه فى غير هاتين الحالتين المتطرفتين ، يوجد عدد r ، بحيث أن المتسلسلة تتقارب لجميع $x > r$ وتتباعد لجميع $x < r$. هذا يناظر نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى . النظرية صحيحة أيضاً عندما لا تكون a_n مفيدة .

١٦ - ٢
الدوال المعرّفة بمتسلسلات قوى

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب لكل x فى فترة تقاربها . حاصل جمع المتسلسلة يعتمد على x فهو دالة لـ x . يمكننا أن نكتب

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

متسلسلة القوى يقال أنها تعين (أوتعرّف) الدالة f . فمثلا ، حاصل جمع المتسلسلة الهندسية $1 + x + x^2 + \ldots$ هو الدالة $1/(1-x)$ لـ $-1 < x < 1$ ، ونكتب

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (١)$$

المتسلسلة

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

تتقارب لجميع x . سنرى فى البند التالى أن حاصل جمعها هو الدالة $\cos x$. بالمثل ، المتسلسلة

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

تتقارب إلى $\sin^{-1} x$ كمجموعها لجميع $-1 \leqslant x \leqslant 1$. لنشير إلى أن المتسلسلتين تتقاربان الى هاتين الدالتين ، نكتب

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad \text{لجميع } x$$

و

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$$

لـ $-1 \leqslant x \leqslant 1$

هاتان المعادلتان صحيحتان فقط لقيم x فى فترتى تقاربهما . ليس مقبولا أن ندعى أن

$$\tfrac{1}{3} = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \cdots$$

الذى نحصل عليه بوضع $x = -2$ فى (١) ، لأن المتسلسلة تتباعد لهذه القيمة لـ x .

رغم أن المتسلسلات التى أعطيناها كتوضيحات تتقارب الى دوال ليس لها اسم شائع . فى الواقع ، هذه الدوال عادة تعرّف بالمتسلسلات ، والدوال الهامة تعطى أسماء ورموزاً خاصة دالة بسل (Bessel) من رتبة صفر ، ويرمز لها بالرمز $J_0(x)$ هى إحدى هذه الدوال . المتسلسلة المعرّفة لها معطاة فى المسألة ١٢ .

المتسلسلة اللانهائية ليست حاصل جمع عادى . لمجرد أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تتقارب إلى $f(x)$ لا يوجد ما يضمن أن متسلسلة مشتقات حدودها ستتقارب إلى $f'(x)$. المتسلسلة

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2} + \cdots$$

توضح الحاجة إلى الحذر . هذه ليست متسلسلة قوى لكنها متسلسلة دوال مثلثية لـ x . وهى تتقارب لجميع x (المسألة ٨) وتعرّف دالة f . متسلسلة مشتقاتها هى

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \cdots + \frac{\cos nx}{n} + \cdots$$

وهذه لا تتقارب حتى عند $x = 0$ ، وبالاحرى لا تتقارب إلى $f'(0)$.

رغم أنه يجب علينا أن نكون حذرين بخصوص تفاضل متسلسلة حدودها دوال عامة ، فمن الصحيح أن متسلسلات القوى يمكن تفاضلها ، وأيضاً تكاملها ، حداً حداً عند أى نقطة داخل فترة التقارب ، والمتسلسلة الناتجة ستتقارب الى مشتقة وتكامل الدالة . متسلسلة التفاضل أو التكامل لها نفس نصف قطر التقارب r مثل المتسلسلة الأصلية لكن قد لا تتقارب عند النقطتين الطرفيتين $-r$ و r ، حتى لو كانت المتسلسلة الأصلية تتقارب هناك .

١٦ ـ ٢ نظرية . لتكن $r > 0$ نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. الدالة f المعرفة بـ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

لها مشتقة ، وهذه المشتقة هى $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ لجميع x فى الفترة المفتوحة $(-r, r)$.

بالمثل

$$\int_0^c f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^c a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} c^{n+1}$$

لجميع c فى الفترة $(-r, r)$.

نحذف برهان هذه النظرية . كتطبيق للنظرية ، سنوجد متسلسلة قوى تتقارب إلى الدالة اللوغاريتمية . المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ تتقارب إلى $1/(1-t)$. باستبدال t بـ $-t$ ، يكون لدينا

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots, \qquad -1 < t < 1.$$

الآن نكامل كلا الطرفين ،

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \cdots$$

ونحصل على

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{٢}$$

عندما $x = \frac{1}{2}$ ، هذا يصبح

$$\ln\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^2)} + \frac{1}{3(2^3)} - \frac{1}{4(2^4)} + \frac{1}{5(2^5)} - \cdots \tag{٣}$$

حاصل جمع الحدود الخمسة الأولى من المتسلسلة متبدلة الاشارة فى (٣) هو بالتقريب 0.40729 بخطأ لا يزيد عن الحد التالى ، الذى هو $1/6\,(2^6) \approx 0.0026$. رغم أن (٢) يمكن استخدامها لحساب اللوغاريتمات الطبيعية للأعداد بين 2 و 0 ، إلا أنها تتقارب ببطء شديد لدرجة أنها لا تكون عملية . سنحتاج الى سبعة عشر حداً من (٣) للحصول على خمسة أرقام عشرية صحيحة . توجد متسلسلات أخرى للوغاريتم ، ليست فقط تتقارب بسرعة أكبر ، بل أيضاً مداها غير محدود بالأعداد بين 2 و 0 . نؤكد أنه مع أن المتسلسلة فى (٢) تتقارب عند $x = 1$ ، فإن الشروط التى اشتققنا المعادلة (٢) تحتها لا تؤكد أن المتسلسلة تساوى $\ln(1+x)$ عند $x = 1$. المعادلة بالتأكيد لا تكون صحيحة لـ $x > 1$ ، حيث المتسلسلة تتباعد ، لكننا سنرى فى الفقرة التالية أن فترة الصلاحية يمكن امتدادها لتشمل 1 .

بما أن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ قابلة للتفاضل داخل فترة تقاربها ، فهى متصلة هناك ، واذن

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$$

لـ $-r < c < r$. بمعنى آخر ، نهاية دالة معرفة بمتسلسلة قوى عندما x تقترب من c هى قيمة المتسلسلة عند $x = c$. يمكننا إثبات أن c بالاضافة الى ذلك تكون f متصلة يساراً عند النقطة الطرفية r إذا كانت المتسلسلة تتقارب هناك ، واذن

$$\lim_{x\to r^-} f(x) = f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

عبارة مماثلة تكون صحيحة عند النقطة الطرفية الأخرى $-r$. المتسلسلة فى (e) تتقارب عند

$x = 1$. تطبيق لموضوع الاتصال هذا يعطى

$$\lim_{x\to1^-} \ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots$$

لقد أوجدنا حاصل جمع المتسلسلة التوافقية متبدلة الاشارة .

رغم أن تكامل أو تفاضل المتسلسلات هو أبسط طريقة لايجاد متسلسلات بعض الدوال ، لكن طريقة متسلسلة تايلور المشروحة فى البند التالى لها مدى أوسع فى التطبيق ولمعظم الدوال تكون أبسط .

مسائل

١ - قرب $\ln 0.8$ الى ثلاثة أرقام عشرية صحيحة .

٢ - المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{x} x^n$ تتقارب إلى $1/(1-x)$. أوجد بالتفاضل متسلسلة لـ $1/(1-x)^2$. ما هى فترة تقاربها ؟

٣ - أوجد الدالة التى هى حاصل جمع المتسلسلة الهندسية $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ ومن ثم أثبت أن $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ (أ) لأى قيم x تكون هذه المتسلسلة للدالة $\tan^{-1} x$ صحيحة ؟ (ب) قرب $\tan^{-1} \tfrac{1}{2}$ إلى ثلاثة أرقام عشرية صحيحة باستخدام المتسلسلة . (ج) أثبت أن $\pi/4 = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$.
(د) بتفاضل $\tan^{-1}(1/x)$ و $\tan^{-1} x$ ، أوجد علاقة بينهما واستخدمها لتقريب $\tan^{-1} 2$ إلى ثلاثة أرقام عشرية .

٤ - أوجد متسلسلة لـ $\ln x$. لأى قيم x تكون المسلسلة صحيحة ؟ [ارشاد: استخدم (٢)] .

٥ - التكامل $\int \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$ لا يمكن التعبير عنه بدلالة دوال معروفة لنا . أثبت أن

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \cdots$$

لأى قيم x يكون هذا صحيحاً ؟ أوجد قيمة التكامل صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية عند $x = 0.1$.

٦ - لقد أثبتنا فى (٢) أن $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ وان هذا صحيح لـ $-1 < x < 1$. اشتق الصيغة $\ln(1-x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - x^4/4 - \cdots$ التى هى أيضاً صحيحة لـ $-1 < x < 1$.
بالجمع بين هاتين المتسلسلتين أثبت أن

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \qquad -1 < x < 1$$

أثبت أن اللوغاريتم الطبيعى لأى عدد موجب يمكن إيجاده من هذه المتسلسلة الأخيرة باختيار مناسب لـ x ، وأوجد $\ln 3$ ، مجرياً الحساب إلى أن حدود المتسلسلة لا تؤثر على الرقم العشرى الثالث .

٧ - المتسلسلة $x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \cdots$ تتقارب عند $x = 1$ ، لكن متسلسلة المشتقة $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ تتباعد هناك . لماذا لا يتعارض هذا مع النظرية ١٦ - ٢ ؟ .

٨ - أثبت أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ تتقارب لجميع x لكن متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ تتباعد عند $x = 0$.

٩ - أثبت أن المتسلسلة

$$x + \frac{x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} + \cdots$$

تتقارب لجميع x وأوجد الدالة $f(x)$ التى تتقارب إليها . هذا يوضح أن المتسلسلة لدوال متصلة قد تتقارب إلى دالة غير متصلة .

١٠ - لتكن u الدالة المعرفة بمتسلسلة القوى

$$u(x) = 2 + 2x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \cdots + \frac{2x^n}{n!} + \cdots$$

(أ) أوجد نطاق الدالة u ، أى فترة التقارب للمتسلسلة . (ب) أثبت أن $u'(x) = u(x)$.
(ج) من ناحية أخرى نحن نعرف جميع حلول المعادلة التفاضلية $dy/dx = y$. ماهى هذه الحلول ؟ ماهى الدالة $u(x)$.

١١ - لتكن الدالتان g و f معرفتين بمتسلسلتى القوى

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(أ) أوجد نطاقى هاتين الدالتين ، أى فترتى التقارب للمتسلسلتين . (ب) أثبت أن $f'(x) = g(x)$ و $g'(x) = -f(x)$ (ج) أثبت أن g و f هما حلان للمعادلة التفاضلية $d^2y/dx^2 + y = 0$. (د) هل يمكنك تخمين ما هما الدالتان g و f ؟

١٢ - تعرف دالة بسل من رتبة صفر بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots$$

هذه الدالة هامة فى الفيزياء الرياضية . (أ) لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟ (ب) أثبت أن $J_0(x)$ هى حل للمعادلة التفاضلية $xy'' + y' + xy = 0$.

١٣ - أثبت أنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لها نصف قطر تقارب غير الصفر وكانت $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$ موجودة ، فان المتسلسلة والمتسلسلة المشتقة يكون لهما نفس نصف قطر التقارب .

١٤ - إذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وكانت $r > 0$ هى نصف قطر تقارب المتسلسلة ، فاثبت أن

$$\int_b^c f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (c^n - b^n), \qquad -r < b < c < r$$

١٥ ـ إذا كانت $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ وكانت $r>1$ نصف قطر تقارب المتسلسلة ، فقد رأينا أن

$$\int_0^t f(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}t^{n+1} \qquad (٤)$$

لـ $-r<t<r$. أثبت أن هذا غير صحيح لأى $t>r$ باثبات أن المتسلسلة فى (٤) تتباعد إذا كانت $t>r$.

١٦ ـ ٣

متسلسلة تايلور

متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تعين دالة $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ، معرفة لكل x فى فترة تقاربها . بالعكس إذا اعطينا دالة f ، فيمكننا أن نسأل عما إذا كانت توجد متسلسلة قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. بحيث تكون

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (١)$$

الجواب ليس دائماً نعم ، لكن دوال كثيرة له مثل هذه المتسلسلة ، مع نتائج بعيدة المدى . دراسة هذه النقطة وتشعباتها ستكون موضوع اهمامنا فى هذا البند والبنود الثلاثة التالية .

إذا وجدت فعلا متسلسلة تحقق (١) لكل x فى فترة التقارب ، فان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ يقال أنها متسلسلة قوى تمثل الدالة f . ويقال أن (١) هو مفكوك الدالة f كمتسلسلة قوى . دعنا نرى ماذا يجب أن تكون المعاملات a_i حتى يكون للدالة f متسلسلة قوى

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \qquad (٢)$$

نفترض أن نصف قطر التقارب r موجباً ، وبالتالى المتسلسلة تتقارب الى $f(x)$ لجميع x فى فترة مفتوحة معينة $(-r, r)$. بالنظرية ١٦ ـ ٢ الدالة f لها مشتقة ، ومتسلسلة مشتقات حدود (٢) تتقارب إلى $f'(x)$ فى نفس الفترة :

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots \qquad (٣)$$

بوضع $x=0$ فى (٣) ، (٢) ، نرى أن $a_0=f(0)$ و $a_1=f'(0)$. بالمثل ، $f''(x)$ توجد وتساوى متسلسلة مشتقات (٣) :

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\cdots+(n-1)na_nx^{n-2}+\cdots$$

بوضع $x=0$ فى هذه المعادلة نحصل على $a_2=f''(0)/2$. باجراء التفاضل مرة أخرى ووضع $x=0$ ، نحصل على $a_3=f'''(0)/3!$ بالاستمرار بهذه الكيفية ، نرى أن لكل n ، يكون

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

أى أن المعاملات a_n لمتسلسلة القوى تبين بالدالة ومشتقاتها . بتعويض هذه القيم لـ : $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ فى (٢) ، يكون لدينا

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad (٤)$$

حيث $f^{(0)}(0)$ تعرف بأنها $f(0)$.

لم نثبت أن f لها تمثيل بمتسلسلة قوى . كل ما أثبتناه هو أنه إذا كانت f لها تمثيل بمتسلسلة قوى ، فهذا التمثيل يجب أن يكون ذلك الذى فى (٤) . هذا يعنى أنه بأية طريقة نجد متسلسلة القوى لدالة ، سواء بالتكامل ، كما فعلنا للدالة $\ln (1 + x)$ فى البند السابق ، أو بطريقة ما أخرى فاننا نحصل دائماً على نفس المتسلسلة ، والمعاملات ، رغم أنها قد تبدو مختلفة ، هى تلك التى فى (٤) .

١٦ - ٣ نظرية . يمكن تمثيل الدالة بمتسلسلة قوى واحدة فى x ، إذا كان لها تمثيل ، وهى تلك التى فى (٤) .

بما أننا غير متأكدين أن الدالة f لها تمثيل بمتسلسلة قوى ، فعلامة التساوى فى (٤) مضللة ، ولا تكون صائبة هناك . فى البند القادم سنجد أن معظم الدوال الشائعة لها مثل هذا التمثيل . تبعاً لذلك ، سنسبق عملنا هناك ونكتب علامة التساوى فى (٤) الآن . الطرف الأيمن من (٤) يسمى متسلسلة مكلورين (Maclaurin) للدالة f .

مثال ١ . أوجد متسلسلة مكلورين للدالة e^x وأوجد فترة تقاربها .

نضع $f(x) = e^x$. نحسب قيم المشتقات للدالة e^x عند 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1, \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1, \\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x, & f^{(n)}(0) &= 1. \end{aligned}$$

بالتعويض فى (٤) ، يكون لدينا متسلسلة مكلورين للدالة e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (٥)$$

لايجاد فترة التقارب ، نستخدم اختبار النسبة :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

المتسلسلة تتقارب لكل x .

مثال ٢ . أوجد متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ وأوجد فترة تقاربها .

نضع $f(x) = \sin x$. فيكون

$$f(x) = \sin x, \qquad f(0) = 0,$$
$$f'(x) = \cos x, \qquad f'(0) = 1,$$
$$f''(x) = -\sin x, \qquad f''(0) = 0,$$
$$f'''(x) = -\cos x, \qquad f'''(0) = -1,$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x, \qquad f^{(4)}(0) = 0,$$
$$f^{(5)}(x) = \cos x, \qquad f^{(5)}(0) = 1,$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

المشتقات تتكرر فى نمط دورى دورته 4 . متسلسلة مكلورين (٤) لـ $\sin x$ هى

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (٦)$$

الحدود الصفرية فى المتسلسلة قد حذفت . هذه المتسلسلة أيضاً تتقارب لجميع x .

نحن نؤكد أننا لم نثبت صحة علامتى التساوى فى (٥) و (٦) . كل ما أوجدناه هو متسلسلتا القوى المرتبطتان بـ $\sin x$ و e^x . فى البند القادم سنثبت أن المتسلسلتين تتقاربان فعلا الى هاتين الدالتين لجميع قيم x .

كمرجع ، نعمل قائمة بمتسلسلات مكلورين للدوال المسترسلة الأكثر أهمية . المتسلسلات لـ $\cos x$ و $\sin x$ و e^x تظهر كثيراً فيجب تذكرها .

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \text{لجميع قيم } x \qquad (٧)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad \text{لجميع قيم } x \qquad (٨)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad \text{لجميع قيم } x \qquad (٩)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1. \qquad (١٠)$$

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \qquad -1 \le x \le 1. \qquad (١١)$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{١٢}$$

تعميم هام لمتسلسلة مكلورين نحصل عليه باختيار أى عدد a ، والاستفسار عما إذا كانت $f(x)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى فى $x - a$ ، أى ما إذا كانت توجد متسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ بحيث أن

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \tag{١٣}$$

بفرض أن مثل هذا التمثيل يوجد فعلا ، يمكننا إيجاد المعاملات a_n بنفس الطريقة التى استخدمناها لمتسلسلات مكلورين . إذا عوضنا a لـ x فى (١٣) ، فاننا نحصل على $a_0 = f(a)$. باجراء تفاضل (١٣) ثم تعويض a لـ x يعطينا $a_1 = f'(a)$. بالاستمرار بهذه الكيفية ، نجد أن لكل n ، يكون

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

بتعويض هذه القيم لـ $a_0, a_1, \ldots$ فى (١٣) ، نحصل على متسلسلة تايلور للدالة f عند a :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned} \tag{١٤}$$

كما سبق ، لقد أثبتنا فقط أنه إذا كانت f لها تمثيل بمتسلسلة قوى فى $x - a$ ، فهذا التمثيل هو ذلك المعطى فى (١٤) . المتسلسلة تكون وحيدة للعدد المعطى a . نقول إننا أوجدنا مفكوك الدالة حول a أو أننا أوجدنا مفكوك الدالة بدلالة قوى $x - a$. متسلسلة مكلورين هى متسلسلة تايلور حيث $a = 0$ وهى مفكوك الدالة f حول 0*.

* Brook Taylor (1685 — 1731) رياضى انجليزى ، نشر متسلسلة عام :
1715. Colin Maclaurin (1698 — 1746) اسكتلندى ، أعطى متسلسلته فى كتاب عن حساب التفاضل والتكامل نشر عام 1942 .
نظراً الى أن Maclaurin كان عمره 17 عاماً فقط عندما نشر تايلور صيغته ، فيبدو أنه لا يوجد مايبرر إعطاء مكلورين شرف حمل اسم متسلسلته .

مثال ٣ . أوجد متسلسلة تايلور لـ $\ln x$ فى قوى $x - 1$ وأوجد فترة تقاربها .

ضع $f(x) = \ln x$. سنستخدم (١٤) عند $a = 1$ ويجب أن نوجد قيم مشتقات $\ln x$ عند 1 :

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(1) = 2,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

بتعويض هذه القيم فى (١٤) ، يكون لدينا

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots .$$

بما أن

$$\lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}\frac{n}{(x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x-1| = |x-1|$$

فالمتسلسلة تتقارب لـ $0 < x < 2$. المتسلسلة تتقارب أيضاً عند $x = 2$ ، لكن تتباعد عند $x = 0$. فترة التقارب هى $(0, 2]$.

أحياناً يمكن استخدام طريق مختصر لايجاد متسلسلة مكلورين لدالة . فمثلا ، إذا أردنا المتسلسلة للدالة xe^{-x} ، يمكننا استبدال x بـ $-x$ فى المتسلسلة (٧) وضرب المتسلسلة الناتجة فى x لنحصل على

$$xe^{-x} = x - x^2 + \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{3!} + \cdots \qquad (١٥)$$

بما أن xe^{-x} يمكن أن يكون لها متسلسلة قوى واحدة فى x ، فهذه هى المتسلسلة التى نحصل عليها بايجاد مشتقات الدالة xe^{-x} واستخدام (٤) . ■

مسائل

١ - بما أن المتسلسلة الهندسية $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ تتقارب الى $1/(1 - x)$ ، فالمتسلسلة يمكن اعتبارها مفكوك الدالة $f(x) = 1/(1 - x)$ كمتسلسلة قوى . تحقق أن معامل x^n فى المتسلسلة هو $f^{(n)}(0) / n!$. أوجد متسلسلة مكلورين للدوال الآتية وأوجد فترة تقاربها :

٢ - $\ln(1+x)$ ٣ - $\ln(1-y)$ ٤ - $\ln(a+x),\ a>0$ ٥ - $\cos x$

٦ - $\sin(x+\pi/4)$ ٧ - 2^x ٨ - $\frac{1}{t-2}$ ٩ - $\frac{1}{1+x^2}$

١٠ - $\tan^{-1} x$ ١١ - $\sqrt{1+x}$ * ١٢ - $\frac{1}{(1-x)^{2/3}}$ * ١٣ - $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ *

أوجد الحدود الى x^n ، للعدد المعطى n ، فى متسلسلة مكلورين للدوال الآتية :

١٤ - $\sec x,\ n=4$ ١٥ - $\ln\cos x,\ n=6$ ١٦ - $\tan x,\ n=5$ ١٧ - $\sin^{-1} x,\ n=5$

١٨ - $e^x \sin x,\ n=7$ ١٩ - $e^{\sin x},\ n=5$ ٢٠ - $\tan^{-1}\frac{1}{x},\ n=5$

أوجد متسلسلة تايلور عند العدد المعطى a للدوال الآتية . لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٢١ - $e^x,\ a=c$ ٢٢ - $\ln x,\ a=2$ ٢٣ - $\ln|x|,\ a=-1$ ٢٤ - $1/x,\ a=-1$

٢٥ - $\sin x,\ a=c$ ٢٦ - $\sin x,\ a=\pi/4$ ٢٧ - $\cos x,\ a=-\pi/4$ ٢٨ - $\cos x,\ a=\pi/3$

٢٩ - $\sqrt{x},\ a=4$ *

٣٠ - من المتسلسلة الهندسية $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ أوجد متسلسلة لـ $1/x$ بدلالة قوى $x-1$.
أوجد متسلسلة تايلور لـ $1/x$ عند 1 .

٣١ - حقق المتسلسلة لـ xe^{-x} فى (١٥) بايجاد قيم المشتقات لـ xe^{-x} عند 0 واستخدام (٤) .

أوجد المفكوك كمتسلسلة فى قوى x للدوال الآتية :

٣٢ - e^{3x} ٣٣ - e^{x^2} ٣٤ - $\sin\sqrt{x}$ ٣٥ - $\cos\frac{x}{2}$ ٣٦ - a^x

٣٧ - $(\sin x)/x$ ٣٨ - $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ٣٩ - $\frac{\ln(1-x)}{x}$ ٤٠ - $\frac{1-\cos x}{x^2}$

٤١ - اشتق مفكوك $\cos^2 x$ كمتسلسلة قوى (ارشاد : [*Hint:* $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.]).

٤٢ - اشتق مفكوك $\sin^2 x$ كمتسلسلة قوى .

٤٣ - من متسلسلتى $\cos x$ و $\sin x$ أثبت أن $\sin(-x)=-\sin x$ و $\cos(-x)=\cos x$.

٤٤ - هل مشتقة متسلسلة مكلورين للدالة e^x تعطى e^x ؟

٤٥ - حقق أن $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ و $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$ باجراء تفاضل المتسلسلتين (٨) و (٩) .

٤٦ - أوجد متسلسلة مكلورين لكثيرة الحدود

* احذف النقطتين الطرفيتين .

٤٧ ـ لماذا $\ln x$ ليس لها متسلسلة مكلورين ؟

٤٨ ـ أثبت أن $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2, x > 0$ (ارشاد : اجر تفاضل $\tan^{-1}(1/x)$ و $\tan^{-1}x$) استنتج المتسلسلة

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \cdots$$

لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٤٩ ـ اشتق الصورة الآتية لمتسلسلة تايلور من الصورة الأكثر شيوعاً (١٤) :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + \cdots$$

استخدمها لايجاد مفكوك $\cos(x+h)$ بدلالة قوى h .

٥٠ ـ الدالة $J_0(x)$ المعرفة بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots$$

تسمى دالة بسل من رتبة صفر . أثبت أنها دالة زوجية .

٥١ ـ إثبت أن التى ، التى لها تمثيل بمتسلسلة قوى فى x ، تكون زوجية إذا وإذا فقط كانت معاملات القوى الفردية لـ x اصفاراً . بالمثل ، الدالة تكون فردية إذا وإذا فقط كانت معاملات القوى الزوجية لـ x أصفاراً . متسلسلتا $\cos x$ و $\sin x$ توضحان ذلك .

٥٢ ـ أحياناً نريد التعبير عن كثيرة حدود فى x ككثيرة حدود فى $x - a$ ، كعدد معطى a . فمثلا

$$x^3 - 5x^2 + 2 = (x-1)^3 - 2(x-1)^2 - 7(x-1) - 2 \qquad (١٦)$$

اشتق هذه المعادلة بطريقة المعاملات غير المعينة . أى ضع

$$x^3 - 5x^2 + 2 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$$

وبتعويض أربعة أعداد لـ x أوجد الثوابت D و C و B و A . نفس الطريقة استخدمت فى التعبير عن دالة كسرية كحاصل جمع كسور جزئية فى البند ١٠ ـ ٥ . الآن اشتق (١٦) بايجاد مفكوك $x^3 - 5x^2 + 2$ بدلالة قوى $x - 1$ باستخدام متسلسلة تايلور .

٥٣ ـ عبر عن $x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ ككثيرة حدود فى $x - 1$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٤ ـ عبر عن $x^4 - 2x + 8$ ككثيرة حدود فى $x - 2$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٥ ـ عبر عن x^{10} ككثيرة حدود فى $x + 1$ (انظر المسألة ٥٢) .

٥٦ ـ عبر عن $(x+2)^{10}$ ككثيرة حدود فى x دون ضربها أو استخدام نظرية ذات الحدين (انظر المسألة ٥٢) .

٥٧ ـ بدون إيجاد المشتقة فعلا ، أثبت أن قيمة $\frac{d^n}{dx^n}\sin^{-1} x$ عند 0 هى $(n-1)!\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-2)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}$ إذا كانت n فردية وأنها تكون صفراً إذا كانت n زوجية .

٥٨ ـ أوجد متسلسلة $f(x)$ فى قوى $x - a$.

١٦ ـ ٤
نظرية تايلور

لقد رأينا فى البند السابق أنه إذا كانت الدالة f لها تمثيل بمتسلسلة فى قوى $x - a$ ، فان المتسلسلة يجب أن تكون متسلسلة تايلور

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

أما عن هل الدالة لها مثل هذا التمثيل فهذا شىء آخر ، وهو ما ندرسه هنا .

لأى دالة f لها مشتقات من جميع الرتب عند a يمكن تكوين متسلسلة تايلور لها

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \qquad (1)$$

حاصل الجمع الجزئى للحدود التى عددها $n + 1$ من هذه المتسلسلة سنرمز له بالرمز $T_n(x)$. أى أن ،

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

كثيرة الحدود هذه فى $x - a$ تسمى كثيرة حدود تايلور من درجة n للدالة f عند a . متسلسلة تايلور (١) ستتقارب الى $f(x)$ والدالة $f(x)$ سيكون لها تمثيل بمتسلسلة فى قوى $x - a$ إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x) \qquad (2)$$

هذا هو مجرد التعريف أن $f(x)$ تكون حاصل جمع المتسلسلة . إذا كانت $R_n(x)$ ترمز الى الفرق بين $T_n(x)$ و $f(x)$ أى إذا كانت

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad (3)$$

فان الشرط السابق لتقارب المتسلسلة الى $f(x)$ يمكن التعبير عنه هكذا

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

الكمية $R_n(x)$ تسمى الحد الباقى النونى للدالة f عند a . للدوال العامة ، يوجد ما يمكن قوله أكثر قليلا من ذلك . كل دالة يجب أخذها بمفردها لتعيين ما إذا كانت (٢) صحيحة . يساعدنا فى تلك النظرية الآتية ، التى تعبر عن $R_n(x)$ بدلالة المشتقة رقم $(n + 1)$ للدالة f .

١٦ ـ ٤ نظرية تايلور . لتكن f دالة ، a عدداً ، I فترة تحتوى a وبحيث أن $f^{(n+1)}(x)$ تكون موجودة لجميع x فى I . حينئذ لكل x فى I توجد z ، التى تقع حتماً بين x و a إذا كانت $x \neq a$ ويمكن أن تكون أى عدد إذا كانت $x = a$ ، بحيث أن $R_n(x)$ ، الحد الباقى النونى للدالة f عند a ، يمكن التعبير عنه هكذا

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

بناء على ذلك ، من (٣) ، يكون

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (٤)$$

لاحظ أن التعبير لـ $R_n(x)$ يشبه الحد العام لمتسلسلة تايلور لكن بالعدد z بدلا من a فى المشتقة . العدد z يعتمد على n و x ، ولا يمكن تحديد موقعه بأكثر من أنه يقع فى مكان ما بين x و a . فهو بذلك يشبه العدد z فى نظرية القيمة المتوسطة ، وهذا لا يدعو للدهشة إذ أنه يظهر من استخدام تلك النظرية ـ أو بتحديد أدق نظرية رول ـ فى البرهان .

البرهان . إذا كانت $x = a$ ، فان (٤) تكون حقيقة تافهة لأى z . نفرض الآن أن $x \neq a$ وأن x فى I . لكل x مثل هذه ، نكوّن من f الدالة الآتية ϕ ، المعرفة لجميع t فى الفترة الجزئية المقفلة $[a, x]$ (أو $[x, a]$ إذا كانت $x < a$) :

$$\phi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(x-t)^{n+1} \quad ١$$

نعتبر x كثابت ، كدالة لـ t . كل x تعين دالة مختلفة ϕ من الواضح أن $\phi(t) = 0$ عندما $t = x$. أيضاً $\phi(a) = 0$ لأن

$$\phi(a) = f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] - R_n(x)$$

$$= f(x) - T_n(x) - R_n(x) = f(x) - f(x) = 0$$

سنوجد مشتقة ϕ . (تذكر أن x ثابت وأننا نفاضل بالنسبة الى t . معظم الحدود فى التعبير لـ $\phi(t)$ هى حواصل ضرب) .

$$\begin{aligned}\phi'(t) = &-f'(t) - [-f'(t) + f''(t)(x-t)] \\ &- \left[-f''(t)(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2\right] \\ &- \left[-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3\right] \\ &- \cdots - \left[-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] \\ &+ \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)(x-t)^n\end{aligned}$$

لحسن الحظ ، معظم الحدود تختزل ، وهذا يختصر الى

$$\phi'(t) = \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}(n+1)\right](x-t)^n$$

المشتقة توجد لجميع t فى $[a, x]$ وإذن الدالة ϕ تحقق شروط نظرية رول وبالتالى توجد z حتماً بين x و a بحيث أن

$$\phi'(z) = \left[-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1)\right](x-z)^n = 0$$

بما أن $x - z \neq 0$ (لماذا ؟) فان

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,(n+1) - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} = 0,$$

ومنها

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

وهذا يكمل البرهان .

الصورة الصريحة للحد الباقى المعطى فى نظرية تايلور عادة يمكننا من تعيين ما إذا كانت الدالة يمكن تمثيها بمتسلسلة تايلور . التمهيدية الآتية تساعد فى تطبيق ذلك . هى تثبت أن $n!$ سيكون أخيراً أكبر من x^n ، مهما كانت x كبيرة . البرهان تطبيق جيد للمتسلسلات .

١٦ ـ ٥ تمهيدية . $\lim\limits_{n\to\infty} (x^n/n!) = 0$ لجميع x .

البرهان بما أن n مقيدة بالقيم الصحيحة ، فقاعدة لوبيتال لا يمكن استخدامها لايجاد قيمة هذه الصورة غير المعينة . إلا أن اختبار النسبة يثبت أن المتسلسلة

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

تتقارب لكل x . وإذن حدها النونى يجب أن يقترب من الصفر .

مثال ١ . فى مثال ١ ، بند ١٦ ـ ٣ ، أوجدنا متسلسلة ماكلورين للدالة e^x :

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

أثبت أن حاصل جمع المتسلسلة هو e^x لجميع قيم x .

السؤال ليس خاصاً بالتقارب (فاختبار النسبة يثبت ذلك) لكن عما إذا كانت المتسلسلة تتقارب الى e^x . لتكن $f(x) = e^x$ الحد الباقى النونى للدالة f عند 0 هو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$

حيث z تكون بين x و 0 . حاصل جمع المتسلسلة سيكون e^x إذا كانت $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. إذا كانت $x \geqslant 0$ ، فحينئذ يكون $0 \leqslant z \leqslant x$، $e^z \leqslant e^x$ ، ويكون

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant e^x\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

إذا كانت $x < 0$ ، فحينئذ يكون $x < z < 0,\ e^z < e^0 = 1$ ويكون

$$0 < R_n(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

التمهيدية ١٦ ـ ٥ تثبت أن فى كلتا الحالتين $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. المتسلسلة تتقارب الى e^x لجميع قيم x .

مثال ٢ . فى مثال ٣ ، ببند ١٦ ـ ٣ ، أوجدنا متسلسلة تايلور للدالة $\ln x$ حول 1 ،

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

وأثبتنا أنها تتقارب لجميع $0 < x \leqslant 2$. أثبت أن المتسلسلة تمثل $\ln x$ ، أى أن حاصل جمعها هو $\ln x$ ، لجميع $1 \leqslant x \leqslant 2$.

إذا كانت $f(x) = \ln x$ ، فان

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

والحد الباقى النونى للدالة f عند 1 يكون

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{z}\right)^{n+1}$$

حيث $2 \geqslant x \geqslant z \geqslant 1$. من ثم $0 \leqslant x - 1/z \leqslant 1$ و $0 \leqslant x - 1 \leqslant 1 \leqslant z$. واذن

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

وبالتالى $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ هذا يثبت أن المتسلسلة لها حاصل الجمع $\ln x$ إذا كانت $1 \leqslant x \leqslant 2$. المتسلسلة أيضاً تمثل $\ln x$ للقيم $0 < x < 1$ ، لكن هذا يصعب اثباته باستخدام الحد الباقى . فى بند ١٦ ـ ٢ أثبتنا باستخدام معالجة مختلفة أن المتسلسلة تتقارب الى $\ln x$ فوق فترة التقارب بأكملها . هناك عالجنا متسلسلة $\ln (1 + x)$ ، لكن تعويض y لـ $1 + x$ يحولها الى متسلسلة $\ln y$.

توجد دوال ، متسلسلات تايلور لها ، بالرغم من أنها تتقارب لجميع قيم x فى فترة ما ، لا تتقارب الى الدالة المعطاة لكن الى دالة ما أخرى . مثال ذلك هو

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \qquad (٥)$$

يمكن إثبات أن $f^{(n)}(0) = 0$ لجميع n . واذن متسلسلة مكلورين للدالة f هى

$$0 + 0(x) + 0(x^2) + \cdots + 0(x^n) + \cdots$$

هذه المتسلسلة تتقارب لكل x ، ومن الواضح أن نهايتها هى الدالة الصفرية $g(x) = 0$. بناء على ذلك ، المتسلسلة لها حاصل الجمع $f(x)$ فقط عند $x = 0$ وليس عند أى قيمة أخرى لـ x .

هذا يوضح أن تقارب متسلسلة تايلور الخاصة بدالة لا يكفى للتأكيد أن المتسلسلة تتقارب الى

الدالة . للتقارب الى الدالة ، الحد الباقى يجب أن يقترب من الصفر . بالرجوع الى الدالة فى (٥) ، لدينا بنظرية تايلور

$$f(x) = 0 + 0(x) + 0(x^2) + \cdots + 0(x^n) + R_n(x)$$

ومن ثم $R_n(x) = e^{-1/x^2}$ عندما $x = 0$. كما نتوقع تحت الظروف القائمة $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = e^{-1/x^2} \neq 0$ إذا كانت $x \neq 0$.

مسائل

أوجد متسلسلة تايلور لكل من الدوال الآتية عند العدد المعطى a . أوجد فترة التقارب وأثبت أن الدالة هى حاصل جمع المتسلسلة لكل x فى فترة التقارب .

١ - $\sin x, a = 0$ ٢ - $\cos x, a = 0$

٣ - $\ln(1 + x), a = 0$ (أثبت حاصل الجمع للنصف الأيمن من الفترة فقط .)

٤ - $\ln(1 - x), a = 0$ (أثبت حاصل جمع للنصف الأيسر من الفترة فقط .)

٥ - $e^x, a = -1$ ٦ - $\sin x, a = \pi/6$ ٧ - $\sin x, a = c$ ٨ - $\cos x, a = -\pi/4$

٩ - إذا كانت $T_n(x)$ هى كثيرة حدود تايلور من درجة n للدالة $f(x)$ عند a ، فأثبت أن $T_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ لـ $j = 0, 1, \ldots, n$.

١٠ - أين استخدم وجود $f^{(n+1)}(x)$ لجميع x فى I فى برهان نظرية تايلور ؟

١١ - أثبت أن نظرية القيمة المتوسطة هى حالة خاصة من نظرية تايلور .

١٢ - أثبت اختبار المشتقة الثانية للنهاية القصوى المحلية بنظرية تايلور : إذا كانت $f'(c) = 0$ وكانت f'' متصلة عند c ، فان f يكون لها نهاية عظمى أو صغرى محلية عند c تبعاً لكون $f''(c) < 0$ أو $f''(c) > 0$. لاحظ أن الفرض أقوى قليلا من دلك فى النظرية ٤ - ١٩ .
(ارشاد :

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(z)}{2!}(x - c)^2$$

لعدد ما z بين x و c) .

١٣ - إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإن اختبار المشتقة الثانية للنهاية القصوى المحلية يفشل . أثبت أن المشتقة الأعلى الأولى التى تختلف عن الصفر عند c يمكن استخدامها للتمييز بين النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية كما يلى . ليكن $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ، لكن $f^{(n)}(c) \neq 0$ ولتكن $f^{(n)}$ متصلة عند c تبعاً لكون $f^{(n)}c < 0$ أو $f^{(n)}(c) > 0$. إذا كانت n فردية ، فإن f ليس لها نهاية عظمى ولا نهاية صغرى محلية عند c لكن لها نقطة إنقلاب هناك . (ارشاد : استخدام نظرية تايلور) . وضح بالدالتين $f(x) = x^5$ و $f(x) = x^4$ عند 0 .

١٤ ـ لتكن f دالة ، a عدداً ، I فترة تحتوى a . أثبت أنه إذا كان يوجد عدد ثابت M بحيث أن $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ لجميع x فى I ولجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n ، فإن متسلسلة تايلور للدالة f عند a تتقارب الى $f(x)$ لجميع x فى I . وضح بالدالة $\sin x$.

١٥ ـ أجب عن الأسئلة المبعثرة فى البرهان الآتى للحقيقة أن e عدد غير كسرى . فى البند ٧ ـ ٢ أثبتنا أن $1 < e < 4$. نقح ذلك إلى $2 < e < 3$. وإذن e ليست عدداً صحيحاً . نفرض أن e عدد كسرى . حينئذ يوجد عددان صحيحان b و a حيث $b \geqslant 2$ (لماذا ؟) بحيث أن $e = a/b$. لدينا

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{b!} + \frac{e^z}{(b+1)!}$$

لعدد ما z حيث $0 < z < 1$ (لماذا ؟) . اذن

$$e(b!) = m + \frac{e^z}{b+1}$$

لعدد صحيح ما m (لماذا ؟) . أيضاً $e(b!)$ عدد صحيح (لماذا ؟) . بما أن $e^z < 3$ (لماذا ؟) ، $b + 1 \geqslant 3$ فلدينا تناقض (لماذا ؟) . اذن e عدد غير كسرى (لماذا ؟)

١٦ ـ ٥
تطبيقات متسلسلة تايلور

يمكننا إعطاء عدد قليل فقط من التطبيقات الكثيرة للمتسلسلات اللانهائية .

كثيرة الحدود ، من نواح عديدة ، هى أبسط الدوال وأكثرها إنطلاقاً . كثيراً ما يكون من المفيد إستبدال دالة بكثيرة حدود تقرب اليها الى درجة كبيرة . حينئذ يمكننا إستنتاج بعض المعلومات عن الدالة بدراسة كثيرة الحدود الأبسط منها . كثيرة حدود تايلور هى واحدة من كثيرات الحدود المقربة :

$$f(x) \approx T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

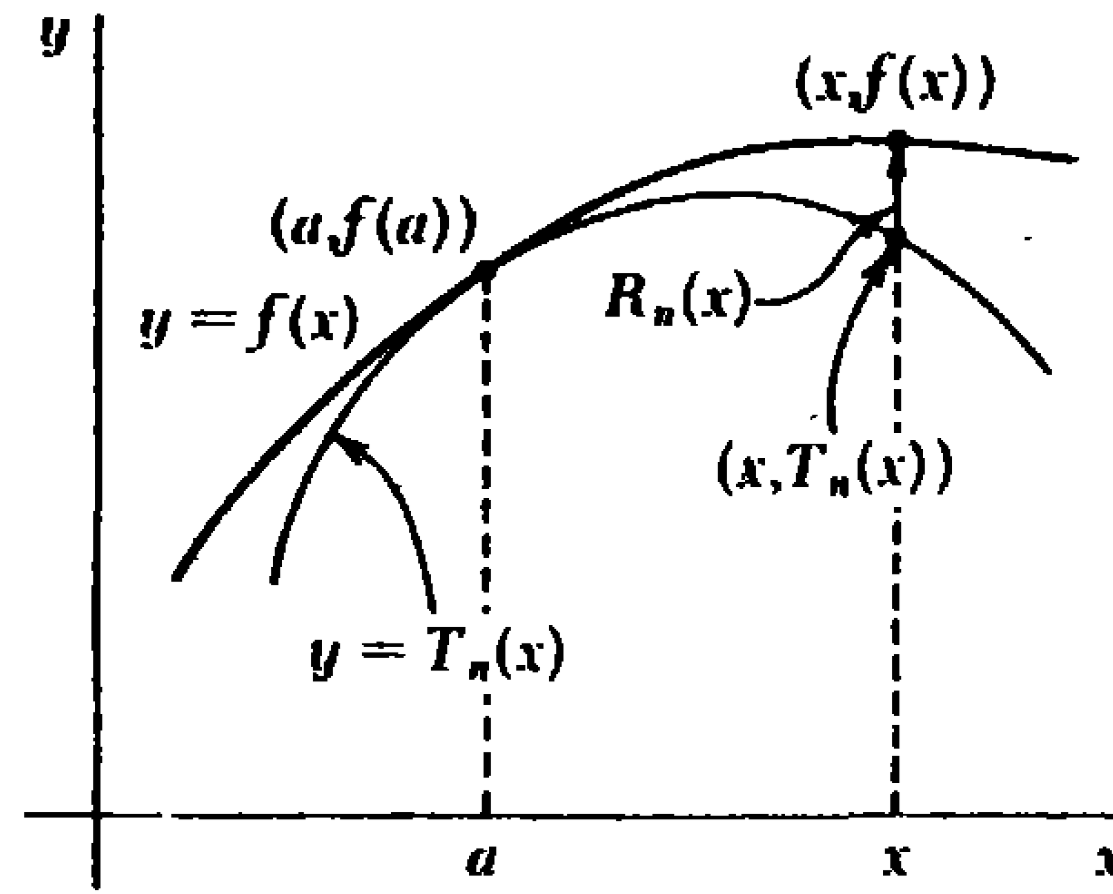
الفرق بين الدالة . وكثيرة الحدود عند العدد x يعطى بالحد الباقى $R_n(x)$ ، الذى بنظرية تايلور يمكن التعبير عنه فى الصورة

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (1)$$

لعدد ما z بين x و a (شكل ١٦ ـ ٣) . لدوال كثيرة ، الحد الباقى يصبح صغيراً عندما تتزايد n ، وكثيرة حدود تايلور $T_n(x)$ تصبح تقريباً جيداً للدالة .

عند اختيار كثيرة حدود تايلور للتقريب ، يجب اختيار a بحيث يمكن ايجاد قيم المشتقات $f^{(i)}(a)$ باستثناء هذا القيد ، العدد a والدرجة n يمكن اختيارهما كما نريد . التقريب يكون مضبوطاً عند a . عندما تكون x قريبة من a ، التقريب يكون جيداً لأن $(x-a)^{n+1}$ فى (١) يكون حينئذ

قوة لعدد صغير قريب من الصفر . لعدد ثابت n ، التقريب يصبح ضعيفا كلما بعدت x عن a . (شكل ١٦ ـ ٣) لكن يمكن تحسينه بإضافة حدود أكثر الى كثيرة الحدود ، وذلك يزيد درجتها n . إذا كنا نهتم فقط بمدى محدود للعدد x ، يمكننا اختيار a فى هذا المدى أو بالقرب منه بقدر الامكان ، لكن بحيث يحقق القيد أننا نستطيع إيجاد قيم $f^{(i)}(a)$ ، وبذلك تكون $x - a$ صغيرة .



شكل ١٦ ـ ٣
$R_n(x)$ يكون صغيراً عندما تكون x قريبة من a

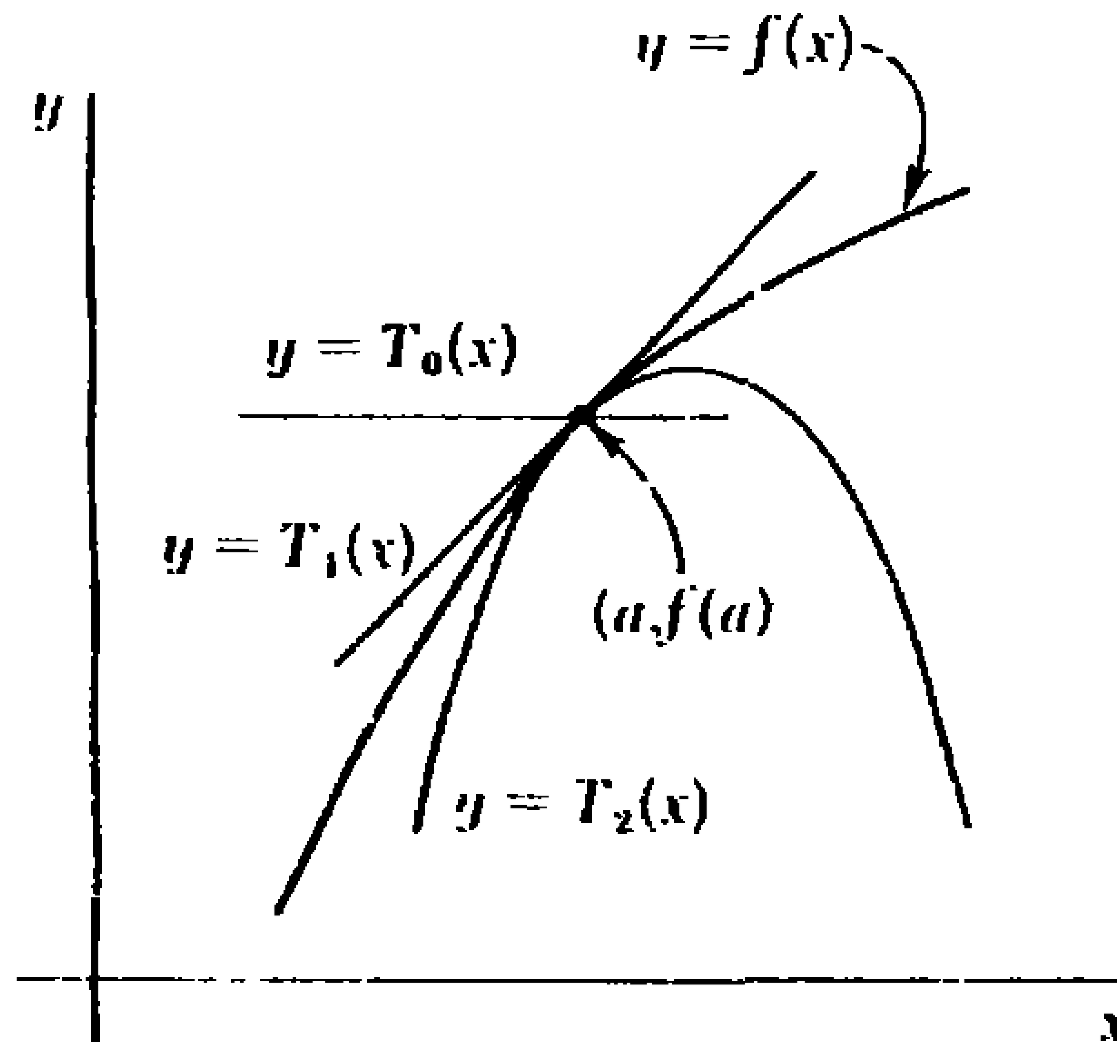
$f(x)$ و $T_n(x)$ ليس فقط لهما نفس القيمة عند a بل مشتقاتهما الـ n الأولى لها نفس القيم هناك ، كما نرى بسهولة باجراء تفاضل $T_n(x)$. هذا يتضمن أن الشكل البيانى لـ $T_0(x)$ هو الخط الأفقى $y = f(a)$ المار بالنقطة $(a, f(x))$ (شكل ١٦ ـ ٤) . الشكل البيانى لـ $T_1(x)$ هو الخط

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

الذى يمس المنحنى $y = f(x)$ عند a . الشكل البيانى لـ $T_2(x)$ هو القطع المكافىء

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

الذى ليس فقط يمس $y = f(x)$ عند a بل له نفس التقعر هناك . عندما تتزايد n ، $T_n(x)$ توفق $y = f(x)$ أكثر فأكثر فى جوار النقطة $(a, f(a))$ ، رغم أنها تكون فى تماس مع المنحنى عند تلك النقطة فقط .

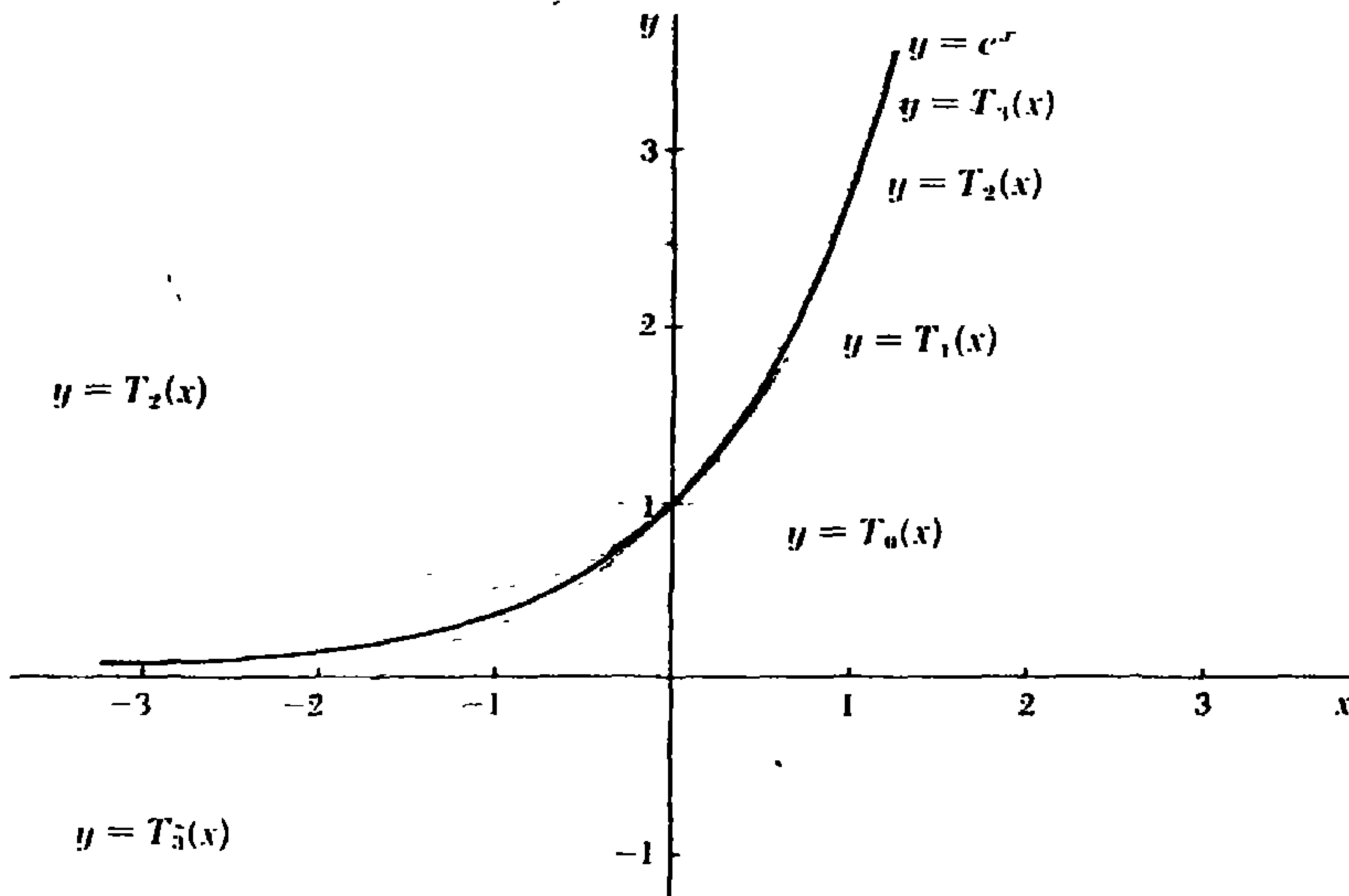


شكل ١٦ ـ ٤

كتوضيح لهذا ، ندرس الأربعة الأولى من كثيرات حدود تايلور للدالة e^x عند 0 :

$$T_0(x) = 1,$$
$$T_1(x) = 1 + x,$$
$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

الشكل البيانى للدالة $y = e^x$ موضح فى الشكل ١٦ ـ ٥ مع كثيرات الحدود المقربة هذه . كل $T_n(x)$ تتفق مع e^x عند النقطة $(0, 1)$. الشكل البيانى لـ $T_0(x)$ هو الخط الأفقى $y = 1$



شكل ١٦ ـ ٥

رغم أنه تقريب ضعيف ، إلا أنه أفضل تقريب لـ e^x عند $(0, 1)$ بدالةثابتة . الشكل البيانى لـ $T_1(x)$ هو الخط المماس عند $(0, 1)$ ، وهو تقريب أفضل من $T_0(x)$ فى جوار تلك النقطة ، وأفضل تقريب بمنحنى من الدرجة الأولى . القطع المكافىء $T_2(x)$ يوفق e^x أكثر من $T_1(x)$ فى جوار النقطة $(0, 1)$ وهو أفضل لتقريبات من الدرجة الثانية . كثيرة حدود الدرجة الثالثة $T_3(x)$ لا تزال أفضل ، وهكذا .

اللوغاريتمات ، والعدد e وقيم الدوال المثلثية يمكن التقريب اليها لدرجة كبيرة من الدقة بمتسلسلات تايلور . القيمة المطلقة للفرق بين $T_n(x)$ و $f(x)$ هى الخطأ فى التقريب للدالة $f(x)$ بحاصل الجمع الجزئى $T_n(x)$. هذا الخطأ هو :

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

يندر أن يمكن إيجاد الخطأ بالضبط ، لكن عادة يمكننا إيجاد حد للخطأ وهذا يمكننا من معرفة دقة التقريب . إذا كان لقيمة x تحت الاعتبار $|R_n(x)| < b$ فإن $|f(x) - T_n(x)| < b$ وبالتالى

$$T_n(x) - b < f(x) < T_n(x) + b \quad (٢)$$

بالكلمات ، الفرق بين $f(x)$ وتقريبها $T_n(x)$ أقل من b .

مثال ١ . قرب الى قيمة e .

متسلسلة مكلورين للدالة e^x تتقارب لجميع x . كثيرة الحدود مكلورين من الدرجة السابعة $T_7(x)$ المقربة لـ e^x هى

$$e^x \approx T_7(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$$

بتعويض 1 لـ x ، نحصل على

$$e \approx T_7(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 1 + 1 + 0.500000 + 0.166667 + 0.041667 + 0.008333 + 0.001389 + 0.000198$$

$$= 2.718254.$$

الفرق بين $f(x) = e^x$ و $T_7(x)$ يعطى الحد الباقى

$$R_7(x) = \frac{f^{(8)}(z)}{8!}x^8 = \frac{e^z}{8!}x^8$$

حيث $0 < z < x$. فى حالتنا $x = 1$ ، يكون

$$|R_7(1)| = \frac{e^z}{8!} < \frac{e}{8!} < \frac{3}{40,320} < 0.0001$$

هذا يثبت أن الخطأ فى تقريب e بـ $T_7(1)$ التى تساوى 2.718254 أقل من 0.0001 .

اذن من (٢) ، إذ أن $f(1) = e$ ، يكون

$$T_7(1) - 0.0001 < e < T_7(1) + 0.0001$$

$$2.718154 < e < 2.718354$$

وبالتقريب إلى ثلاثة أرقام عشرية ، نحصل على نفس العدد . واذن قيمة e صحيحة إلى ثلاثة أرقام عشرية هى 2.718 . متسلسلة e تتقارب بسرعة ، وباستخدام حدود إضافية قليلة يمكن تحسين الدقة لدرجة كبيرة .

مثال ٢ . أوجد $\sin 10°$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية . متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ هى

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)|$$

التى تتقارب لجميع قيم x . يجب استخدام التقدير الدائرى . الزاوية 10° تقديرها الدائرى هو $10\ \pi/180 = \pi/18$. بتعويض هذه القيمة لـ x فى متسلسلة $\sin x$ ، يكون لدينا

$$\sin\frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 - \cdots$$

$$\approx 0.174533 - 0.000886 + 0.000001 - \cdots \qquad (٣)$$

لكى تكون القيمة العددية لـ $\sin 10^\circ$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية ، يجب استخدام حدود كافية حتى لا يؤثر الخطأ على الرقم العشرى الرابع . ولأن الحد الثالث فى (٣) لا يؤثر على الرقم العشرى الرابع لحاصل الجمع ، فنحن نخمن أن حاصل جمع الحدين الأولين من (٣) سيكون كافياً للدقة إلى أربعة أرقام عشرية . دعنا نرى ما إذا كنا على حق . حاصل جمع الحدين الأولين $(n = 3)$ هو

$$T_3\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0.173647$$

ولأن المتسلسلة متبدلة الاشارة ، يمكننا تجنب إيجاد قيمة الخطأ عن طريق حساب $|R_3(\pi/18)|$ إذ نلاحظ أن الخطأ يجب أن يكون أقل من أو يساوى الحد التالى من المتسلسلة 0.000001 . إذن

$$T_3\left(\frac{\pi}{18}\right) - 0.000001 \leq \sin\frac{\pi}{18} \leq T_3\left(\frac{\pi}{18}\right) + 0.000001$$

$$0.173646 \leq \sin\frac{\pi}{18} \leq 0.173648$$

وبالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية ، نحصل على نفس العدد 0.1736 . فهذه هى قيمة $\sin(\pi/18)$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية . لو كان حدان من (٣) لا يكفيان للدقة إلى أربعة أرقام عشرية ، فإنه كان يمكننا جمع الحدود الثلاثة الأولى وإستخدام الحد الرابع كمقياس للخطأ . فى الواقع حاصل جمع الحدين الأولين يعطى $\sin 10^\circ$ صحيحاً إلى خمسة أرقام عشرية .

مثال ٣ : أوجد $\cos 54^\circ$ صحيحا لأربعة أرقام متتالية تيلور عشرية .

بالرغم من أنه يمكننا التعويض عن المكافىء نصف القطرى للزاوية 54° فى متتالية مكلوريان الخاصة بالدالة $\cos x$ ، فإن عدد الحدود المطلوب لأربعة أرقام عشرية يزيد عنه فى حالة استخدام متتالية تيلور الخاصة بالدالة $\cos x$ لعدد a قريب من 54° . ويجب اختيار العدد a بحيث يمكن حساب قيمة مشتقات $\cos x$ عنده . يمكن اختيار قيمة a إما $\pi/4$ أو $\pi/3$ ، ولكن العدد الأخير أقرب إلى 54° وتتقارب المتتالية أسرع عند استعماله عما إذا استعملنا العدد الأول . وعلى هذا سنستعمل متتالية تيلور للدالة $\cos x$ عند $\pi/3$.

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3!2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4!2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \cdots$$

وبالتعويض عن x بقيمة $54\pi/180$ ، وهو المكافىء نصف القطرى للزاوية 54° ، نحصل على :

$$\cos\frac{54\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\pi}{30}\right)-\frac{1}{4}\left(-\frac{\pi}{30}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\frac{\pi}{30}\right)^3+\frac{1}{48}\left(-\frac{\pi}{30}\right)^4-\cdots$$

$$=0.500000+0.090690-0.002742-0.000166+0.000003+\cdots \qquad (٤)$$

الحد الباقى النونى هو :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}=\frac{\pm(\sin z \text{ or } \cos z)}{(n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}$$

وبالتالى :

$$\left|R_n\left(\frac{54\pi}{180}\right)\right|\leq\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^{n+1} \qquad (٥)$$

ولأن الحد الخامس لا يؤثر على الرقم العشرى الرابع ، فنحن نخمن أن حاصل جمع الحدود الأربعة الأولى من (٤) سيعطى أربعة أرقام عشرية صحيحة . حاصل جمع الحدود الأربعة $(n = 3)$ هو

$$T_3\left(\frac{54\pi}{180}\right)=0.587782$$

نعين ما إذا كان هذا صحيحاً إلى أربعة أرقام عشرية بإيجاد حد للخطأ . من (٥) ،

$$\left|R_3\left(\frac{54\pi}{180}\right)\right|\leq\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^4\approx0.000005$$

واذن

$$T_3\left(\frac{54\pi}{180}\right)-0.000005\leq\cos\frac{54\pi}{180}\leq T_3\left(\frac{54\pi}{180}\right)+0.000005$$

ومنها

$$0.587777\leq\cos\frac{54\pi}{180}\leq0.587787$$

وبالتقريب الى أربعة أرقام عشرية نحصل على نفس العدد 0.5878 . هذه اذن هى قيمة $\cos 54^\circ$ صحيحة إلى أربعة أرقام عشرية .

مثال ٤ . أوجد $\cos 54^\circ$ بخطأ يقل عن 0.0001 .

نشير إلى المثال السابق . الخطأ فى تقريب $\cos(54\pi/180)$ بـ $T_n(54\pi/180)$ هو $|R_n(54\pi/180)|$. يجب اختيار n بحيث أن $|R_n(54\pi/180)| < 0.0001$. هذا يمكن اجراؤه فقط بالتجربة والخطأ . من (٥) ، إذا كانت $n = 2$ ، يكون

$$\left|R_2\left(\frac{54\pi}{180}\right)\right|\leq\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^3\approx0.00019$$

وهذا ليس صغيراً الصغر الكافى ، لكن إذا كانت $n = 3$ ، يكون

$$\left|R_3\left(\frac{54\pi}{180}\right)\right| \leqslant \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{30}\right)^4 \approx 0.000005$$

وهذا صغير صغراً كافياً . بناء على ذلك ، حاصل جمع الحدود الأربعة الأولى من (٤) ،

$$T_3\left(\frac{54\pi}{180}\right) = 0.587782$$

يقرب الى $\cos 54°$ بخطأ يقل عن 0.0001 .

بسبب الأخطاء الناتجة عن تقريب الأرقام ، من الحكمة فى الحسابات العددية أن نأخذ على الأقل رقمين عشريين إضافيين زيادة عن الأرقام العشرية المطلوب أن تكون صحيحة فى النتيجة النهائية .

سبق أن ذكرنا أن تكاملات دوال كثيرة لا يمكن إيجادها بدلالة دوال مألوفة لنا . قاعدة شبه المنحرف هى إحدى طرق تقريب التكاملات المعينة لمثل هذه الدوال ، لكن لكثير من الدوال الهامة يكون من الأسهل الحصول على نفس الدرجة من الدقة باستخدام متسلسلات القوى .

مثال ٥ . أوجد قيمة $\int_{1/2}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx$ باستخدام المتسلسلات ، ومجريا العمل حتى تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

متسلسلة مكلورين لـ e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

تتقارب الى e^x لجميع x فى فترة التكامل . نقسم على x ونكامل حداً حداً :

$$\int_{1/2}^{1} \frac{e^x}{x}\,dx = \left[\ln x + x + \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^4}{4!4} + \cdots\right]_{1/2}^{1}$$

$$= -\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3!3}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right)$$

$$+ \frac{1}{4!4}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) + \frac{1}{5!5}\left(1 - \frac{1}{2^5}\right) + \cdots$$

$$\approx 0.6932 + 0.5000 + 0.1875 + 0.0486 + 0.0098 + 0.0016 + \cdots$$

حاصل جمع الحدود الخمسة الأولى هو 1.4391 الحدود بعد الخامس ، تقل عن 0.005 ، فيصرف النظر عنها . عملنا لا يؤكد أن 1.44 هى القيمة الصحيحة الى رقمين عشريين ، مع أنها هى كذلك ، لكننا سوف لا نجرى هنا تحليلا للحد الباقى .

المتسلسلات تعطينا بديلا لقاعدة لوبيتال لايجاد قيم الصور غير المعينة .

مثال ٦ . أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ هى

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

بتعويض هذه لـ $\sin x$ فى التعبير المعطى والاختصار ، نحصل على

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) - x}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}{x^3\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right)} = \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots}$$

متسلسلة القوى تعرف دالة متصلة . اذن

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

ستكون قيمة هذا الكسر الأخير عند $x = 0$ ، وهى $-\frac{1}{6}$

مسائل

فى المسائل الآتية ، يمكن افتراض أن متسلسلة تايلور للدوال المتضمنة تمثل الدوال .

أوجد كثيرة حدود تايلور من درجة n ، $T_n(x)$ ، عند a ، للدالة ، للعددين المعطيين n و a . خطط الشكل البيانى للدالة $f(x)$ ولكثيرة الحدود المقربة $T_n(x)$. لاحظ دقة التقريب جوار النقطة $(a, f(a))$.

١ - $f(x) = \cos x;\ a = 0,\ n = 0, 1, 2, 3, 4$

٢ - $f(x) = \sin x;\ a = 0,\ n = 0, 1, 2, 3$

٣ - $f(x) = \ln x;\ a = 1,\ n = 0, 1, 2, 3$

٤ - $f(x) = 1/x;\ a = 1,\ n = 0, 1, 2, 3$

أوجد كثيرة حدود تايلور من درجة n ، $T_n(x)$ ، عند a ، المقربة للدالة ، للعددين المعطيين n و a :

٥ - $f(x) = x^2 + 2x + 3;\ a = 2,\ n = 1, 2, 3, 10$

٦ - $f(x) = 4x^3 + x^2 - 3x - 8;\ a = 0,\ n = 1, 2, 3, 4$

٧ - $f(x) = x^3 + 1;\ a = -2,\ n = 1, 2, 3, 4.$

٨ - $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 1;\ a = 1,\ n = 1, 2, 3, 4$

٩ - $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 2;\ a = -1,\ n = 1, 2, 4, 6$

١٠ - $f(x) = 1/(x+3);\ a = 0,\ n = 0, 1, 2$

١١ - $f(x) = 1/(x^2 - 1);\ a = 0,\ n = 0, 1, 2$

١٢ - $f(x) = 1/(x^2 - 1);\ a = \sqrt{2},\ n = 0, 1, 2$

١٣ - $f(x) = \sqrt{x+1};\ a = 0,\ n = 0, 1, 2$

١٤ - $f(x) = \sqrt{x+2};\ a = 2,\ n = 0, 1, 2$

١٥ ـ متسلسلة مكلورين للدالة $\cos x$ هى

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

خطط الشكل البيانى لـ $\cos x$ ولكثيرة الحدود المقربة $T_2(x) = 1 - x^2/2$. استخدم الأجزاء المقطوعة من $T_2(x)$ بالمحور السينى لايجاد تقريب لـ π . كثيرة الحدود $T_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4!$ تكون تقريباً أفضل للدالة $\cos x$. استخدم أجزاءها المقطوعة بالمحور x لايجاد تقريب أفضل لـ π .

١٦ ـ أثبت أنه فى الفترة $[0, 0.5]$ تختلف $\sin x$ فى القيمة المطلقة عن تقريبها x الذى من الدرجة الأولى بما لا يزيد عن 0.13 . أثبت أنه فى نفس الفترة تختلف $\sin x$ فى القيمة المطلقة عن تقريبها $x - x^3/3!$ الذى من الدرجة الثالثة بما لا يزيد عن 0.003 .

١٧ ـ أوجد حداً أعلى للقيمة المطلقة للفرق بين $\sin x$ وتقريبها التكعيبى $x - x^3/3!$ فى الفترة $[0, \pi/2]$.

١٨ ـ أوجد حداً للخطأ إذا كانت $\cos x$ لـ $-0.1 \leq x \leq 0.1$ تستبدل بـ (أ) التقريب من الدرجة الثانية $1 - x^2/2!$ ، (ب) التقريب من الدرجة الرابعة .

١٩ ـ إذا كانت $|x| < 0.2$ ، أوجد حداً للخطأ إذا كانت $\sqrt{1+x}$ تستبدل بتقريبها الخطى $1 + x/2$.

٢٠ ـ لأى مدى لقيم x بين 2 و 1 يمكن أن تستبدل $\ln x$ بتقريبها الخطى $x - 1$ بخطأ يقل عن 0.2 ؟

٢١ ـ لأى مدى لقيم x بين $90°$ و 0 يمكن أن تستبدل لـ $\sin x$ بتقريبها الخطى x بخطأ يقل عن 0.1 ؟ ما هو مدى قيم x إذا استخدم التقريب من الدرجة الثالثة $x - x^3/3!$ ؟

٢٢ ـ لأى مدى لقيم x بين $90°$ و 0 ستكون كثيرة حدود مكلورين من الدرجة الرابعة للدالة $\cos x$ تقرب $\cos x$ إلى أربعة أرقام عشرية صحيحة ؟

٢٣ ـ أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة تعطى تقريباً جيداً للدالة $\cos x$ جوار $\pi/4$.

٢٤ ـ أوجد كثيرة حدود تايلور من الدرجة الثالثة فى $x - 1$ التى تقرب الدالة $1/(x + 3)$. أثبت أن فى الفترة $[0, 2]$ يختلف التقريب فى القيمة المطلقة عن $1/(x + 3)$ بما لا يزيد عن 0.005 .

٢٥ ـ كم حداً من متسلسلة مكلورين للدالة e^x تكفى لحساب $\sqrt{e}$ بخطأ يقل عن 0.01 ؟ بخطأ يقل عن 0.0001 ؟

٢٦ ـ كم حداً من متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ تكفى لحساب $\sin 0.2$ بخطأ يقل عن 10^{-6} ؟

٢٧ ـ كم حداً من متسلسلة تايلور عند 1 للدالة $\ln x$ تكفى لحساب $\ln 0.9$ بخطأ يقل عن 0.00001 ؟

٢٨ ـ إذا أردنا حساب $\sin 70°$ بخطأ يقل عن 0.00001 فكم حداً من متسلسلة مكلورين للدالة $\sin x$ تكفى لاجراء ذلك ؟ إذا استخدمنا متسلسلة تايلور عند $\pi/3$ للدالة $\sin x$ فكم حداً تكفى ؟

قرب الى ما يأتى باستخدام كثيرة حدود تايلور من درجة n عند العدد a ، للقيمتين المعطيتين n و a . اجر الحسابات الى أربعة أرقام عشرية .

٢٩ ـ $\sqrt{e};\ a = 0,\ n = 4$ ٣٠ ـ $\ln 0.7;\ a = 1,\ n = 4$ ٣١ ـ $\tan^{-1} 0.2;\ a = 0,\ n = 5$

٣٢ ـ $\cos 5°;\ a = 0,\ n = 4$ ٣٣ ـ $\sin 48°;\ a = \pi/4,\ n = 3$

قرب الى ما يأتى باستخدام كثيرة حدود تايلور من درجة n عند العدد a ، للقيمتين المعطيتين n و a . اجر الحسابات الى أربعة أرقام عشرية . أوجد حداً للخطأ .

٣٤ ـ $e^{1.2};\ a = 0,\ n = 4$ ٣٥ ـ $e^{1.2};\ a = 0,\ n = 6$ ٣٦ ـ $\sin 20°;\ a = 0,\ n = 3$

٣٧ ـ $\cos 0.2;\ a = 0,\ n = 4$ ٣٨ ـ $\ln 1.2;\ a = 0,\ n = 5$ ٣٩ ـ $\ln 1.05;\ a = 0,\ n = 3$

٤٠ ـ $\ln 1.3;\ a = 1,\ n = 4$ ٤١ ـ $\cos 35°;\ a = \pi/6,\ n = 3$

أحسب ما يأتى صحيحاً الى m رقماً عشرياً للقيمة المعطاة m .

٤٢ ـ $e,\ m = 6$ ٤٣ ـ $\frac{1}{e},\ m = 4$ ٤٤ ـ $\sqrt[3]{e},\ m = 3$

٤٥ ـ $\cos(-3°),\ m = 4$ ٤٦ ـ $\sin 32°,\ m = 4$ ٤٧ ـ $\tan^{-1} 0.3,\ m = 4$

٤٨ ـ الدالة $J_0(x)$ المعرفة بالمتسلسلة

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \cdots$$

تسمى دالة بسل من رتبة صفر . احسب $J_0(1)$ صحيحة الى أربعة أرقام عشرية أوجد متسلسلة القوى لكل من المتكاملين الآتيين :

٤٩ ـ $\int_1^x \frac{e^{at}}{t}\,dt$ ٥٠ ـ $\int_0^t \sin\sqrt{x}\,dx$

أوجد التكاملات الآتية باستخدام المتسلسلات مجريا الحسابات الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

٥١ ـ $\int_0^{0.2} e^{x^2}\,dx$ ٥٢ ـ $\int_{0.1}^{0.5} \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$ ٥٣ ـ $\int_{0.1}^{0.4} \frac{e^{-z}}{z}\,dz$ ٥٤ ـ $\int_{0.1}^{0.5} \frac{\cos x}{x}\,dx$

أوجد التكاملات الآتية بخطأ E يقل عن العدد المعطى :

٥٥ ـ $\int_0^{0.1} e^{-x^2}\,dx;\ E < 0.000005$ ٥٦ ـ $\int_{1/2}^{1} e^{-x^2}\,dx;\ E < 0.001$

٥٧ـ $\int_0^1 \sin t^2\, dt;\ E < 0.0001$. ٥٨ـ $\int_0^1 \frac{e^{-x}-1}{x}\, dx;\ E < 0.0005$.

٥٩ـ $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+u)}{u}\, du;\ E < 0.005$. ٦٠ـ $\int_0^{0.5} \cos\sqrt{y}\, dy;\ E < 0.0001$.

أوجد النهايات الآتية باستخدام المتسلسلات

٦١ـ $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$. ٦٢ـ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$. ٦٣ـ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

٦٤ـ $\lim_{z\to 0} \frac{2\cos z - 2 + z^2}{z^4}$. ٦٥ـ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{3x^2}$. ٦٦ـ $\lim_{r\to 1} \frac{\ln r}{r-1}$.

٦٧ـ $\lim_{t\to 0} \frac{\tan t - \sin t}{t^3}$. ٦٨ـ $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^k}$. ٦٩ـ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$.

٧٠ـ $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$. ٧١ـ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$. ٧٢ـ $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{\sin y + \sin 4y}$.

٧٣ـ $\lim_{u\to 0} \frac{1}{\ln u} \int_u^1 \frac{\cos z}{z}\, dz$. ٧٤ـ $\lim_{z\to 1} \frac{1}{\ln z} \int_z^1 \frac{e^x - 1}{x}\, dx$.

١٦-٦
نظرية ومتسلسلة ذات الحدين

مفكوك الدالة $(1 + x)^n$ كمتسلسلة قوى له أهمية خاصة . لدينا

$$f(x) = (1+x)^n, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}, \qquad f'(0) = n,$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}, \qquad f''(0) = n(n-1),$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}, \qquad f'''(0) = n(n-1)(n-2),$$

. . . .

$$f^{(r)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1])(1+x)^{n-r}, \qquad f^{(r)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1]).$$

متسلسلة مكلورين لـ $(1 + x)^n$ هى

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1])}{r!}x^r + \cdots \qquad (1)$$

المتسلسلة على اليمين تسمى متسلسلة ذات الحدين لـ $(1+x)^n$. حيث أننا أوجدنا المتسلسلة كمجرد متسلسلة مكلورين لـ $(1+x)^n$ ، فيجب علينا أن نثبت أنها تتقارب الى $(1+x)^n$ وأن نبرر علامة التساوى فى (١) . الحالتان ، n عدد صحيح موجب ، n ليست عدداً صحيحاً موجباً ، تؤديان الى موقفين مختلفين تماماً .

إذا كان n عددا صحيحا موجبا ، فإن مفكوك $(1+x)^n$ سيكون بالبديهة متعددة حدود من الدرجة n . ويكون معامل x^{n+1} فى (١) وجميع المعاملات التالية له صفرا ، وتنتهى المتتالية بالحد x^n فتصبح .

$$(٢) \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1])}{r!}x^r + \cdots + x^n$$

وبالرغم من أن المعاملات تبدو وكأنها قد ازدادت تعقيدا ، فإنها فى الواقع تصبح أبسط بعد الحد الأوسط أو الحدود الوسطى (أنظر آخر سطر فى مثال ١) . ولما كان الطرف الأيمن من (٢) هو متعددة حدود مكلورين من الدرجة n للدالة $f(x) = (1+x)^n$ ، فإن (٢) تصبح معادلة صحيحة إذا أضيف حد الباقى .

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

إلى متعددة الحدود . ولما كانت $f^{(n+1)}(x) = 0$ لجميع قيم x ، فإن $R_n(x) = 0$ وتصبح متعددة الحدود فى (٢) مساوية $(1+x)^n$ لجميع قيم x .

تسمى الصيغة (٢) التى تعبر عن $(1+x)^n$ ، حيث n عددا صحيحا موجبا ، فى شكل متعددة حدود فى x نظرية ذات الحدين . وقد اكتشفها نيوتن . وتكون معاملات الحدود أعداداً صحيحة وتسمى معاملات ذات الحدين . ويعبر عن معاملات x^r عادة بطريقة مريحة بالصورة $\binom{n}{r}$ ، بحيث يكون :

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}, \ \ldots,$$

$$(٣) \quad \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1])}{r!}, \ \ldots,$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!} = n, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

وبهذه الطريقة فى التدوين ، يكتب مفكوك $(1+x)^n$ المذكور فى (٢) كالآتى :

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r \tag{٤}$$
$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{r} x^r + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-1} x^{n-1} + \binom{n}{n} x^n.$$

الصيغة المعتادة لنظرية ذات الحدين تعميم بسيط للتعبير المذكور فى (٢) :

١٦ - ٦ نظرية ذات الحدين :
لأى عددين a , b وعدد صحيح موجب n .

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2$$
$$+ \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-[r-1])}{r!} a^{n-r}b^r$$
$$+ \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

البرهان . ضع $x = b/a$ فى المعادلة (٤) واضرب كلا طرفى المعادلة فى a^n .

$$a^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{b^r}{a^r}$$

وهذا يعطى فورا

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

مثال ١ . فك $(a-b)^8$
من نظرية ذات الحدين ١٦ - ٦ نحصل على

$$(a-b)^8=(a+(-b))^8=\sum_{r=0}^{8}\binom{8}{r}a^{8-r}(-b)^r$$

$$=a^8+8a^7(-b)+\frac{8\cdot 7}{2!}a^6(-b)^2+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}a^5(-b)^3$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}a^4(-b)^4+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{5!}a^3(-b)^5$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{6!}a^2(-b)^6$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{7!}a(-b)^7$$

$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8!}(-b)^8$$

$$=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8.$$

بضرب كلا من بسط ومقام الكسر الموجود فى الطرف الأيمن من (٣) فى $(n-r)!$ نحصل على صورة أخرى للتعبير $\binom{n}{r}$

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

لقيم n و $r=0,1,2,..$. ويتضح من هذا أن $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ لقيم n و $r=0,1,2,..$. ويبين هذا أن المعاملات الموجودة على مسافات متساوية من طرفى مفكوك ذات الحدين للتعبير $(a+b)^n$ متساوية (أنظر مثال ١) .

لمعاملات ذات الحدين خواص هامة كثيرة كما تظهر فى فروع أخرى من فروع الرياضة ، وبصفة خاصة نظرية الاحتمالات . فمثلا ، $\binom{n}{r}$ هو عدد الطرق التى يمكن بها اختيار r أشياء من مجموعة n من الأشياء .

نعود الآن إلى الحالة التى فيها الأس n فى التعبير $(1+x)^n$ ليس عددا صحيحا موجبا . المتتالية المذكورة فى (١) لا تنتهى فى هذه الحالة (إلا فى الحالة التافهة عندما تكون $n=0$) ولكن تكون لا نهائية . عندما لا تكون n عددا صحيحا موجبا يسمى معامل x^r ، b_r بدلا من $\binom{n}{r}$ ، بحيث يكون $b_0=1$ و $b_1=n$

و

$$b_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-[r-1])}{r!},\qquad r=1,2,3,\ldots.$$

وبهذه الطريقة فى التدوين تصبح (١) $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$. ولما كان

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{b_{r+1}x^{r+1}}{b_r x^r}\right|=\lim_{r\to\infty}\left|\frac{n(n-1)\cdots(n-[r-1])(n-r)}{(r+1)!}\times\frac{r!}{n(n-1)\cdots(n-[r-1])}x\right|$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left|\frac{n-r}{r+1}x\right|=|x|,$$

فإن اختبار النسبة يظهر أن (١) تتقارب لقيم $-1<x<1$ وتتباعد إذا كانت $|x|>1$ وسنبين أن المتتالية تتقارب إلى $(1+x)^n$ إذا كانت $-1<x<1$. وليس من السهل بيان ذلك ببيان أن $\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$ كما فعلنا فى متتالية تيلور للدالة e^x ودوال أخرى . وسنستعمل طريقة أبسط وإن كانت أقل مباشرة .

لتكن $g(x)$ الدالة التى تتقارب اليها $\sum_{r=0}^{\infty} b_r x^r$ أى أن ،

$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_rx^r+\cdots \qquad (٥)$$

لـ $-1<x<1$. سنثبت أن $g(x)=(1+x)^n$. داخل فترة التقارب ، متسلسلة مشتقات حدود (٥) ستتقارب الى $g'(x)$. أى أن ،

$$g'(x)=b_1+2b_2x+\cdots+rb_rx^{r-1}+(r+1)b_{r+1}x^r+\cdots$$

واذن

$$xg'(x)=b_1x+2b_2x^2+\cdots+rb_rx^r+\cdots$$

بجمع هاتين المتسلسلتين ، يكون

$$(1+x)g'(x)=b_1+(2b_2+b_1)x+\cdots+[(r+1)b_{r+1}+rb_r]x^r+\cdots$$

الآن

$$(r+1)b_{r+1}+rb_r=(r+1)\frac{n(n-1)\cdots(n-[r-1])(n-r)}{(r+1)!}+r\frac{n(n-1)\cdots(n-[r-1])}{r!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-[r-1])}{r!}(n-r+r)=nb_r$$

وإذن
$$(1+x)g'(x) = b_1 + nb_1x + nb_2x^2 + \cdots + nb_rx^r + \cdots$$
$$= b_1 + n(g(x) - b_0) = ng(x),$$

إذ أن $b_0 = 1$ و $b_1 = n$. بضرب طرفى هذه المعادلة فى $(1+x)^{-n-1}$ ، الذى لا يكون صفراً أبداً لأن $x > -1$ ، يكون لدينا

$$(1+x)^{-n}g'(x) - n(1+x)^{-n-1}g(x) = 0$$

أى
$$\frac{d}{dx}[(1+x)^{-n}g(x)] = 0$$

هذا يتضمن أن $(1+x)^{-n}g(x) = k$ لثابت ما k . هذه المعادلة صحيحة لجميع $-1 < x < 1$. الثابت k يمكن تعيينه بتعويض $x = 0$ فى المعادلة ، وهذا يعطى $k = g(0)$ لكن من (٥) : $g(0) = b_0 = 1$. اذن $k = 1$ وبالتالى $g(x) = (1+x)^n$ وهذا ما كنا نريد اثباته .

عندما لا تكون n عدداً صحياً موجباً ، رأينا أن (١) تكون صحيحة لـ $-1 < x < 1$ وأن المتسلسلة تتباعد لـ $|x| > 1$. التقارب عند النقطتين الطرفيتين ليس من السهل تحديده ويعتمد على قيمة n . يمكن اثبات أن إذا كانت $n \leqslant -1$ ، فان المتسلسلة تتباعد لـ $x = \pm 1$ ولا يمكنها تمثيل $(1+x)^n$ ؛ وإذا كانت $-1 < n < 0$ ، فإن (١) تكون صحيحة عند $x = 1$ ، لكن المتسلسلة تتباعد لـ $x = -1$ ؛ وإذا كانت $n > 0$ ، فإن (١) تكون صحيحة عند $x = \pm 1$.

مثال ٢ . أوجد مفكوك $1/(\sqrt[3]{1+2x})$ كمتسلسلة :

لدينا ، باستخدام (١)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}} = (1+2x)^{-1/3}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{3}(2x) + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})}{2!}(2x)^2$$
$$+ \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!}(2x)^3 + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})(-\frac{10}{3})}{4!}(2x)^4 + \cdots$$
$$= 1 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{8}{9}x^2 - \tfrac{112}{81}x^3 + \tfrac{560}{243}x^4 - \cdots .$$

المتسلسلة تتقارب وتمثل $1/(\sqrt[3]{1+2x})$ لـ $-1 < 2x < 1$ ، أى لـ $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. من ملاحظاتنا فى الفترة السابقة ، يمكن إمتداد الفترة لتشمل $\frac{1}{2}$ ولكن ليس $-\frac{1}{2}$.

مثال ٣ . أوجد مفكوك $\sqrt{3+u}$ كمتسلسلة .

بأخذ العامل 3 خارج الجذر يمكن استخدام متسلسلة ذات الحدين ، ويكون

$$\sqrt{3+u} = \sqrt{3}\left(1+\frac{u}{3}\right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{3}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \cdots\right]$$

المتسلسلة تتقارب لـ $-3 \leqslant u \leqslant 3$.

مثال ٤ . قرب الى قيمة $\sqrt{11}$ باستخدام المتسلسلات . متسلسلة ذات الحدين للدالة $\sqrt{1+x}$ هي

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \cdots \qquad (٦)$$

لا يمكننا حساب $\sqrt{11}$ بوضع $x = 10$ في هذه المتسلسلة إذ أنها تتباعد هناك . لكن يمكننا كتابة

$$\sqrt{11} = \sqrt{\tfrac{100}{9}(\tfrac{99}{100})} = \tfrac{10}{3}\sqrt{1 - \tfrac{1}{100}}$$

واستخدام (٦) حيث $x = -\frac{1}{100}$. إذا أجرينا ذلك ، يكون

$$\sqrt{11} = \tfrac{10}{3}[1 + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{100}) - \tfrac{1}{8}(-\tfrac{1}{100})^2 + \tfrac{1}{16}(-\tfrac{1}{100})^3 - \cdots]$$

$$= \tfrac{10}{3}[1 - 0.005 - 0.0000125 - 0.0625(10^{-6}) - \cdots]$$

$$= 3.316625.$$

الحدود بعد الثالث لا تؤثر على الرقم العشرى السادس ، لكن ليس لدينا ما يؤكد الدقة الى هذا العدد الكبير من الأرقام العشرية ، إذ أن المتسلسلة ليست متبدلة الاشارة ولم نفحص الحد الباقى .

مثال ٥ . أوجد متسلسلة قوى لـ $\sin^{-1}x$.

المشتقات العالية لـ $\sin^{-1}x$ ليس من السهل ايجادها . بما أن

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوف لا يوجد متسلسلة $\sin^{-1}x$ باستخدام نظرية تايلور بل باجراء تكامل مفكوك ذات الحدين لـ $(1-x^2)^{-1/2}$. لدينا

$$(1-t^2)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}(-t^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})}{2!}(-t^2)^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-t^2)^3$$
$$+ \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{4!}(-t^2)^4 + \cdots, \qquad -1 < t < 1.$$

واذن

$$\sin^{-1}x = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2}\,dt$$
$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \cdots,$$
$$-1 < x < 1.$$

المتسلسلة أيضاً تمثل $\sin^{-1}x$ عند النقطتين الطرفيتين ± 1 ، لكن سوف لا نثبت ذلك .

مسائل

أوجد مفكوك المقادير الآتية بنظرية ذات الحدين :

١ - $(a+b)^2$.　　٢ - $(a+b)^3$.　　٣ - $(a-b)^5$.

٤ - $(1+2z)^6$.　　٥ - $(2-c)^9$.　　٦ - $(2x+3y)^7$.

٧ - أوجد معامل x^{23} فى مفكوك $(1 + x)^{77}$.

٨ - أثبت أن $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

٩ - (أ) أثبت أن $\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$. (ب) أثبت نظرية ذات الحدين ،

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n \quad (٧)$$

حيث n عدد صحيح موجب بدون استخدام نظرية تايلور . (ارشاد : استخدام الاستنتاج الرياضى . أفرض أن (٧) صحيحة عند $n = k$. أضرب طرفى المعادلة فى $a + b$ وأثبت أن (٧) تكون صحيحة عند $n = k + 1$) .

١٠ - أثبت قاعدة القوة $Dx^n = nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب ، من التعريف

$$Dx^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

استخدم متسلسلة ذات الحدين لايجاد مفكوك كل من الدوال الآتية . كمتسلسلة قوى وأوجد فترة تقاربها :

١١ - $\frac{1}{1-x}$ ١٢ - $\frac{1}{x+2}$ ١٣ - $\frac{1}{1+x^2}$ ١٤ - $(1+x)^{-2}$ ١٥ - $\left(1+\frac{y}{3}\right)^{3/2}$

١٦ - $(1+t)^{1/5}$ ١٧ - $\sqrt{1+x^3}$ ١٨ - $\sqrt{1-2y}$ ١٩ - $\frac{1}{(1+u)^{3/5}}$ ٢٠ - $\frac{2x}{\sqrt{1-x}}$

٢١ - $\frac{1}{(1+3t)^3}$ ٢٢ - $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ ٢٣ - $\frac{(1-w^2)^{4/3}}{w}$ ٢٤ - $\sqrt{2+z}$ ٢٥ - $\sqrt[3]{y+2}$

٢٦ - $z(8-z)^{2/3}$ ٢٧ - $u^2\sqrt{2+5u}$ ٢٨ - $\frac{1}{(2+w)^{7/4}}$ ٢٩ - $\frac{u+2}{u-1}$ ٣٠ - $\frac{1+x}{1-2x^2}$

٣١ - أوجد مفكوك $\sqrt{3 + \sin^2 x}$ بدلالة قوى $\sin x$. لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٣٢ - أوجد مفكوك $1/(1-x)$ كمتسلسلة قوى فى $1/x$. لأى قيم x تتقارب المتسلسلة ؟

٣٣ - أوجد مفكوك $\sqrt{x-3}$ كمتسلسلة قوى فى $1/x$. لأى قيم x تمثل المتسلسلة $\sqrt{x-3}$ ؟

٣٤ - أوجد متسلسلة لـ $\sec^{-1}x, x > 1$ فى قوى $1/x$ الى الحد الذى يشتمل على $1/x^9$ باجراء تكامل المتسلسلة لمشتقة $\sec^{-1} x$ من x الى ∞ (ارشاد : $\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-1/x^2}$) .

٣٥ - فى نهاية البند ٧ - ٥ أثبتنا أن $e = \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t}$. احسب قيمة e بإيجاد مفكوك $(1+t)^{1/t}$ كمتسلسلة ذات الحدين الى الحد الخامس وأخذ $t = 0.001$.

٣٦ ـ أثبت أن

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{2!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots$$

لأى عدد $n > 0$.

٣٧ ـ أثبت أن

$$2^n = 1 + n + \frac{n(r-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots$$

لأى عدد $n > -1$.

أوجد التكاملات الآتية باستخدام متسلسلة ذات الحدين . أجر الحساب الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.005 .

٣٨ ـ $\int_0^{1/2} \frac{u}{1+u^3}\, du$. ٣٩ ـ $\int_{-0.1}^{0.5} \sqrt{1+y^3}\, dy$ ٤٠ ـ $\int_0^{0.2} \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

٤١ ـ $\int_0^{1/2} \sqrt{4-z^3}\, dz$. ٤٢ ـ $\int_0^{1/4} (1+2\sqrt{x})^{3/2}\, dx$ ٤٣ ـ $\int_0^{0.3} \frac{dx}{\sqrt{4-e^x}}$.

٤٤ ـ أوجد متسلسلة للتكامل $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{a+t^3}}, a > 0$. لأى قيم x تكون المتسلسلة صحيحة (أحذف النقطتين الطرفيتين) ؟

٤٥ ـ التكامل $\int_2^{10} \sqrt{1+x^4}\, dx$ لا يمكن إيجاد قيمته بإيجاد مفكوك $\sqrt{1+x^4}$ كمتسلسلة ذات الحدين لأى مدى التكامل خارج فترة تقارب المتسلسلة . هذه الصعوبة يمكن تجنبها بكتابة $\sqrt{1+x^4} = x^2\sqrt{1+1/x^4}$. أوجد قيمة التكامل صحيحة الى رقمين عشريين .

٤٦ ـ احسب قيمة $\int_0^{10} \sqrt{1+x^4}\, dx$ صحيحة الى رقم عشرى واحد . (ارشاد : أنظر المسألة ٤٥) .

أوجد النهايات الآتية مستخدماً المتسلسلات :

٤٧ ـ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ ٤٨ ـ $\lim_{z\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-z^2}-1}{z}$ ٤٩ ـ $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-(1+t/2)}{t^2}$

باستخدام متسلسلة ذات الحدين ، أوجد قيمة تقريبية للأعداد الآتية . أجر الحساب الى أن تصبح حدود المتسلسلة أقل من 0.0005 .

٥٠ ـ $\frac{1}{412}$ (ارشاد : $\frac{1}{412} = \frac{1}{400+12} = \frac{1}{400}\frac{1}{1+\frac{3}{100}}$) .

٥١ ـ $\sqrt{98}$ (ارشاد : $\sqrt{98} = \sqrt{100-2} = 10\sqrt{1-\frac{1}{50}}$) .

٥٢ ـ $\sqrt{2}$ (ارشاد : رغم أن $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$) ، لتقارب أسرع اكتب [$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{49}{25}\left(\frac{50}{49}\right)} = \frac{7}{5}\left(\frac{49}{50}\right)^{-1/2} = \frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-1/2}$] .

٥٣ ـ $\sqrt[3]{130}$ (ارشاد : $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}}$) .

٥٤ - $\sqrt[3]{100}$ (ارشاد : $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125\left(\frac{100}{125}\right)} = 5\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = 5\sqrt[3]{1 - \frac{1}{5}}$).

٥٥ - $\frac{1}{\sqrt[4]{15}}$ (ارشاد : $\frac{1}{\sqrt[4]{15}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16-1}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}}$).

٥٦ - $\sqrt{\frac{11}{10}}$ ٥٧ - $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ ٥٨ - $124^{1/3}$ ٥٩ - $\frac{1}{\sqrt{412}}$

٦٠ - $\sqrt{40}$ ٦١ - $\frac{1}{34^{1/5}}$ ٦٢ - $\frac{1}{\sqrt[3]{990}}$ ٦٣ - $\sqrt[4]{620}$

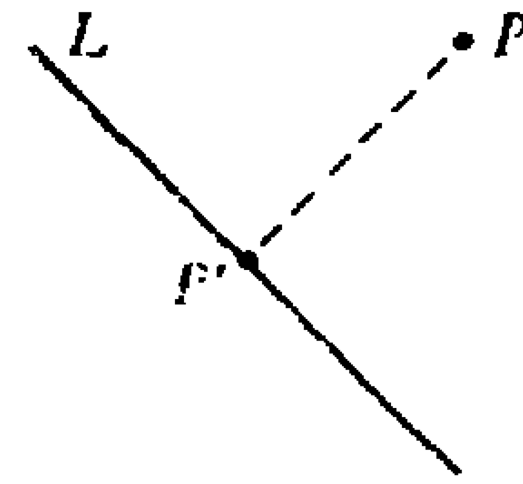
تذييل
الهندسة التحليلية

ت ـ ١
مستوى الاحداثيات

الهندسية التحليلية هى دراسة الهندسة بواسطة الجبر . ونظراً لأنها طريقة فعالة فقد ساهمت منذ ادخالها فى أوائل القرن السابع عشر بجزء كبير من التقدم فى الهندسة . ومن ناحية أخرى ، الهندسة التحليلية يمكن استخدامها فى تمثيل المعادلات الجبرية هندسياً بواسطة المنحنيات وفى توضيح بعض المفاهيم فى حساب التفاضل والتكامل وصفياً .

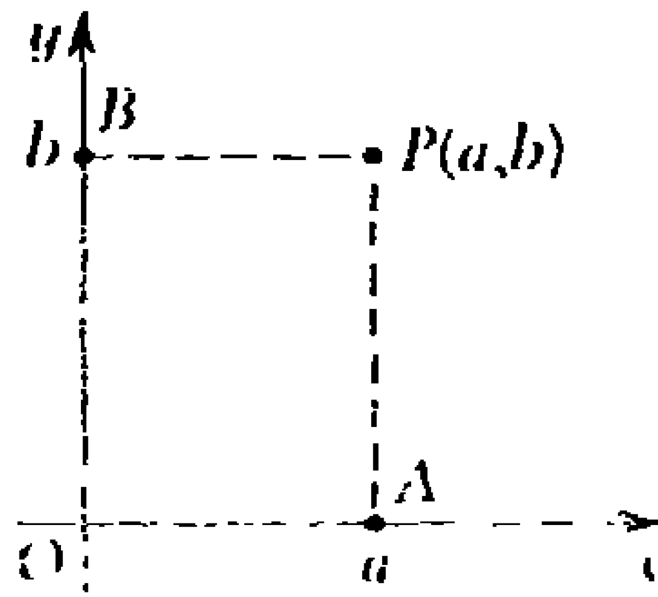
والهندسة التحليلية ، كغالبية الأفكار الرياضية العظيمة ، لم تكن من اختراع شخص واحد بل تطورت تدريجياً خلال فترة طويلة . والشخصان اللذان قاما فعلا بتطويرها ، وأوصلاها الى صورتها الحالية هما الرياضى الفرنسى Pierre de Fermat (1601-1665) والفيلسوف والرياضى الفرنسى René Descartes (1596-1650) .

الفكرة الأساسية للهندسة التحليلية ، وابتكار ديكارت ، هى تمييز كل نقطة فى المستوى بزوج من الأعداد يسمى احداثياها . قبل وصف ذلك يجب علينا تعريف مصطلح . مسقط النقطة P على المستقيم L هو موقع العمود من P على L . هذا هو النقطة P' فى الشكل ت ـ ١ . إذا كانت P تقع على L ، فإن مسقطها على L هو P ذاتها . نعود الى الاحداثيات ، نختار خطى احداثيات فى المستوى يتقاطعان على التعامد عند نقطة الأصل المشتركة لهما* . من المناسب أن نفترض أنهما متجهان كما فى الشكل ت ـ ٢ . الخط الأفقى يسمى عادة المحور x والخط الرأسى يسمى المحور y .



شكل ت ـ ١

P' هى مسقط P على L .



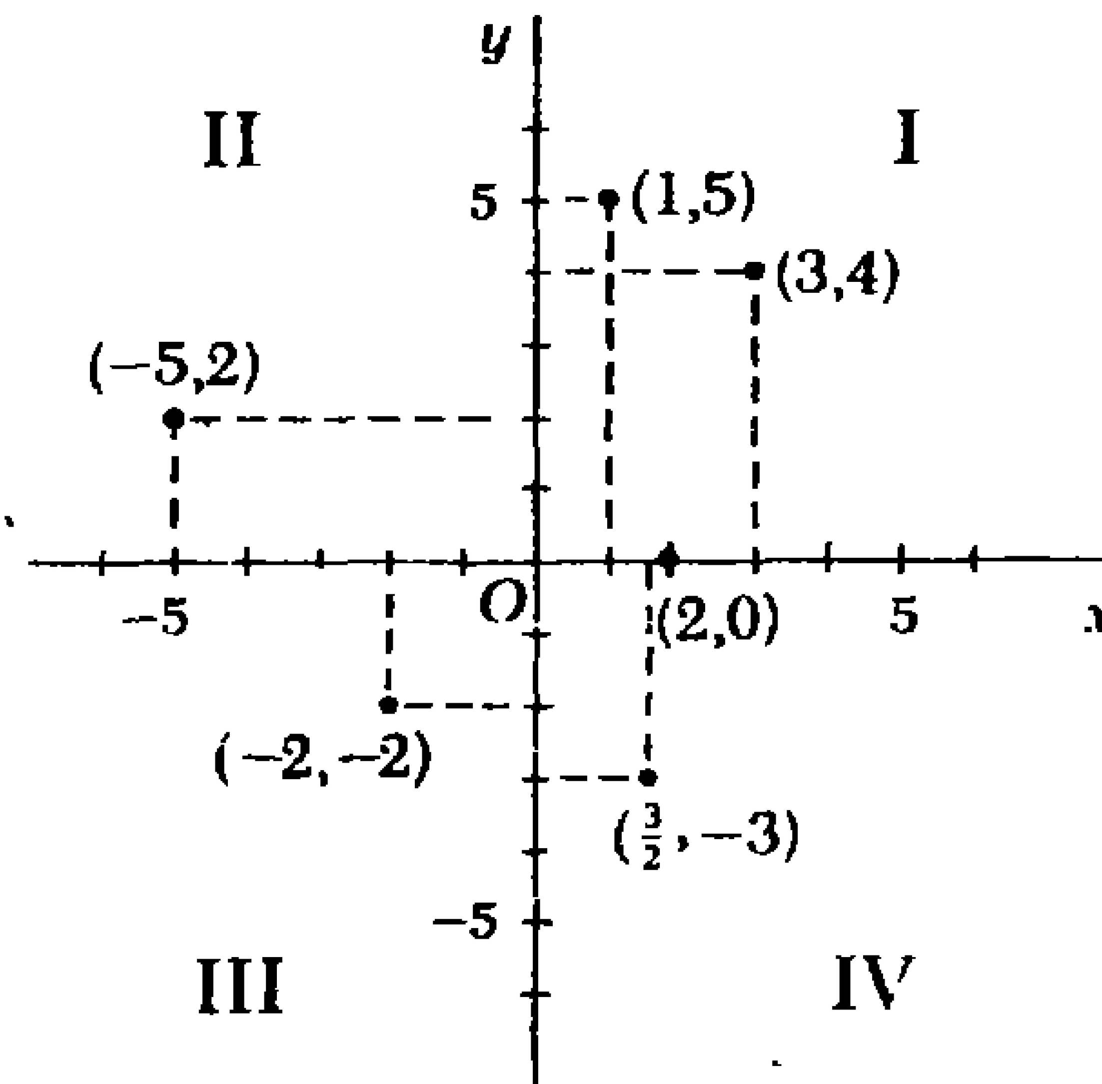
شكل ت ـ ٢

احداثيا P هما احداثيا مسقطى P على المحورين

* خطوط الاحداثيات شرحت فى البند ؛ ـ ٢

لأى نقطة P فى المستوى ، لتكن B و A مسقطى P على المحورين y و x . النقطتان A و B الواقعتان على خطى الاحداثيات ، لهما عددان b و a ، على الترتيب ، كأحداثيات . العددان b و a ، بهذا الترتيب ، يسميان احداثيى P ، ونكتب $P(a,b)$ للاشارة الى ذلك العدد a هو الاحداثى x للنقطة P ، والعدد b هو الاحداثى y لها .

بهذه الطريقة ، يخص كل نقطة فى المستوى زوج مرتب من الأعداد (a, b) . أيضاً ، لكل زوج مرتب من الأعداد (a, b) توجد نقطة واحدة ، وواحدة فقط ، فى المستوى احداثياها هذان العددان . نقصد بالزوج المرتب من الأعداد أن الترتيب الذى يكتب به العددان له أهميته . فالزوج المرتب $(4, 7)$ يختلف عن الزوج المرتب $(7, 4)$. بعض النقط واحداثياتها موضحة فى الشكل ت ـ ٣ . هذا الربط بين الأزواج المرتبة من الأعداد وبين النقط يسمى نظاماً من الاحداثيات المتعامدة أو الاحداثيات الكارتيزيه ، كما يسمى المستوى الاحداثيات . النقطة $O(0, 0)$ تسمى نقطة الأصل لنظام الاحداثيات . للاختصار نقول عادة « النقطة (a, b) بدلا من « النقطة التى احداثياها (a, b) » .

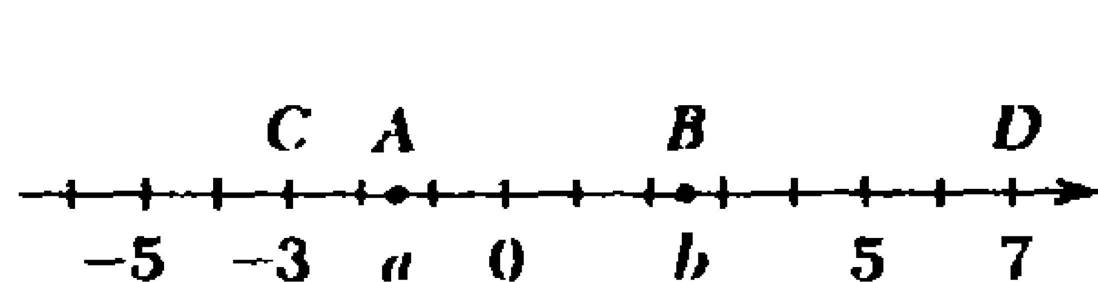


شكل ت ـ ٣
الاحداثيان y و x لنقطة هما المسافتان الموجهتان من المحورين الى النقطة x و y .

المحوران يقسمان المستوى الى أربع مناطق تسمى أرباعاً ، مرقمة بأعداد رومانية كما هو موضح فى الشكل ت ـ ٣ . المحوران نفسهما لا يقعان فى أى ربع .

المسافة $|AB|$ بين نقطتين B و A على خط الاحداثيات احداثياهما b و a عرفت فى بند ١ ـ ٥ بأنها $|AB| = |b - a|$. بالاضافة الى هذه المسافة العادية من المناسب أن نتحدث عن المسافة الموجهة من نقطة الى أخرى .

ت ـ ١ تعريف . لتكن B و A نقطتين على خط الاحداثيات احداثياهما b و a (شكل ت ـ ٤) . المسافة الموجهة من A الى B يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$ وتعرف بأنها $\overline{AB} = b - a$ ففى الشكل ت ـ ٤ .



شكل ت ـ ٤

$$\overline{CD} = 7 - (-3) = 10$$

لكن

$$\overline{DC} = -3 - 7 = -10$$

المسافة بين C و D هى

$$|CD| = |DC| = |7 - (-3)| = 10$$

المسافة الموجهة $\overline{AB}$ تكون موجبة إذا كانت B تقع على يمين A وتكون سالبة اذا كانت B تقع على يسار A . الواضح أن $\overline{BA} = -\overline{AB}$ لكل نقطتين B و A . وأيضاً صحيح أن لكل ثلاث نقط C و B و A على خط الاحداثيات

ت ـ ٢
$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

هذا واضح اذا كانت النقطة فى الترتيب A, C, B لكن ليس واضحاً تماماً اذا اختلط الترتيب . لكن يمكن اثباته بسهولة باستخدام تعريف المسافة الموجهة . ليكن احداثى C هو c . فيكون

$$\overline{AB} = b - a, \ \overline{AC} = c - a \quad \text{و} \quad \overline{CB} = b - c$$

وبما أن

$$b - a = (c - a) + (b - c)$$

فاننا نحصل على المتساوية ت ـ ٢ .

مفهوما المسافة والمسافة الموجهة يطبقان أيضاً على النقط فى مستوى الاحداثيات التى تقع على خط مستقيم يوازى محور الاحداثيات . القارىء يمكنه بسهولة اعطاء التفاصيل . فمثلا ، المسافة الموجهة من P الى M فى الشكل ت ـ ٦ هى $\overline{PM} = x_2 - x_1$ ، والمسافة الموجهة من Q الى M هى $\overline{QM} = y_1 - y_2$. الاحداثى x لنقطة P فى المستوى يمكن اعتباره المسافة الموجهة من المحور y الى P ، أى المسافة الموجهة $\overline{BP}$ فى الشكل ت ـ ٢ ، وبالمثل بالنسبة الى الاحداثى y *.

---

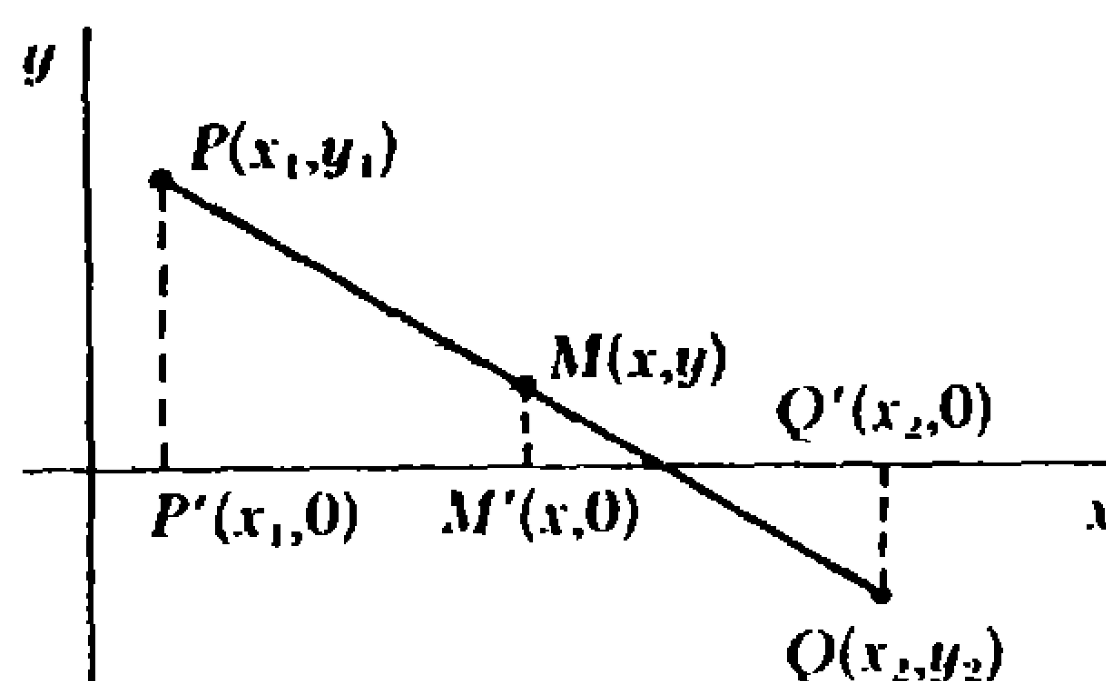
* المسافة بين خط مستقيم الى نقطة تقاس دائماً على العمودى من الخط المستقيم الى النقطة .

لتكن $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ نقطتين فى مستوى الاحداثيات . نعطى فى النظرية التالية صيغة لاحداثيى نقطة تنصيف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

ت ـ ٣ صيغة نقطة المنتصف . اذا كانت $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ نقطتين فى مستوى الاحداثيات ، فإن احداثيى نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة PQ هما

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

البرهان . بالرجوع الى شكل ت ـ ٥ ، لتكن $M(x, y)$ هى نقطة منتصف PQ . المساقط على المحور x للنقط Q و M و P هى النقط $\acute{P}(x_1, 0)$ و $\acute{M}(x, 0)$ و $\acute{Q}(x_2, 0)$. من الهندسة الأولية ، $\acute{M}$ هى نقطة منتصف القطعة $\acute{P}\acute{Q}$. واذن $\overline{P'M'}=\overline{M'Q'}$ ، ويكون من التعريف ت ـ ١ ، : $x - x_1 = x_2 - x$. الحل بالنسبة الى x يعطينا $x = (x_1 + x_2)/2$. بالمثل ، نوجد الاحداثى y للنقطة M بإسقاط Q و M و P على المحور y .



شكل ت ـ ٥

مثال ١ . أوجد احداثيى منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(4, 6)$ و $(1, -2)$

لتكن $(x_2,y_2) = (4,6)$ و $(x_1,y_1) = (1,-2)$. الصيغة ت ـ ٣ تعطى لاحداثيى نقطة المنتصف

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$$

نشتق الآن صيغة للمسافة بين نقطتين .

ت ـ ٤ صيغة المسافة . المسافة $|PQ|$ بين النقطتين $Q(x_2,y_2)$ و $P(x_1,y_1)$ تعطى بالصيغة

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (١)$$

لاثبات ذلك ، ارسم المثلث القائم PMQ بحيث أن ساقيه MQ و PM يوازيان المحورين y و x ، كما فى الشكل ت ـ ٦ .

حينئذ يكون $|PQ| = \sqrt{|PM|^2 + |MQ|^2}$. بما أن $|MQ| = |y_2 - y_1|$ و $|PM| = |x_2 - x_1|$

فيكون

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ *}$$

مثال ٢ . أوجد المسافة بين النقطتين $Q(4, 6)$ و $P(1, -2)$.

اذا فرضنا أن $(x_2,y_2) = (4,6)$ و $(x_1,y_1) = (1,-2)$ فيكون من (١)

$$|PQ| = \sqrt{(4-1)^2 + [6-(-2)]^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$$

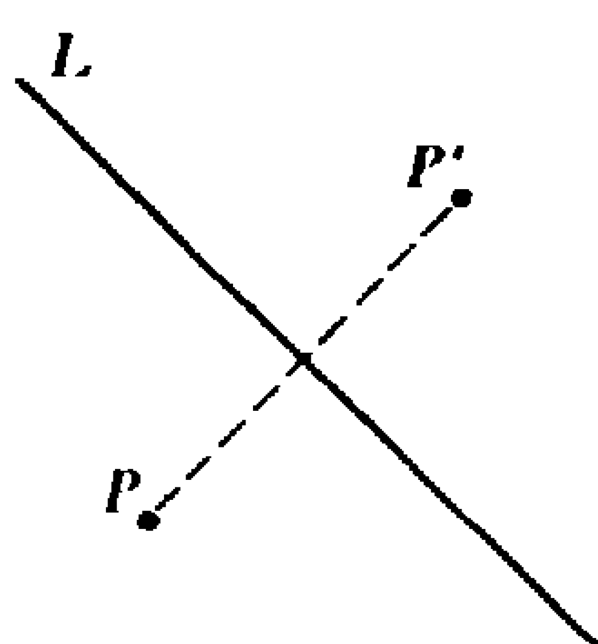
اذا كانت Q و P على نفس الخط الافقى ، فان $y_1 = y_2$ وتصبح (١)

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

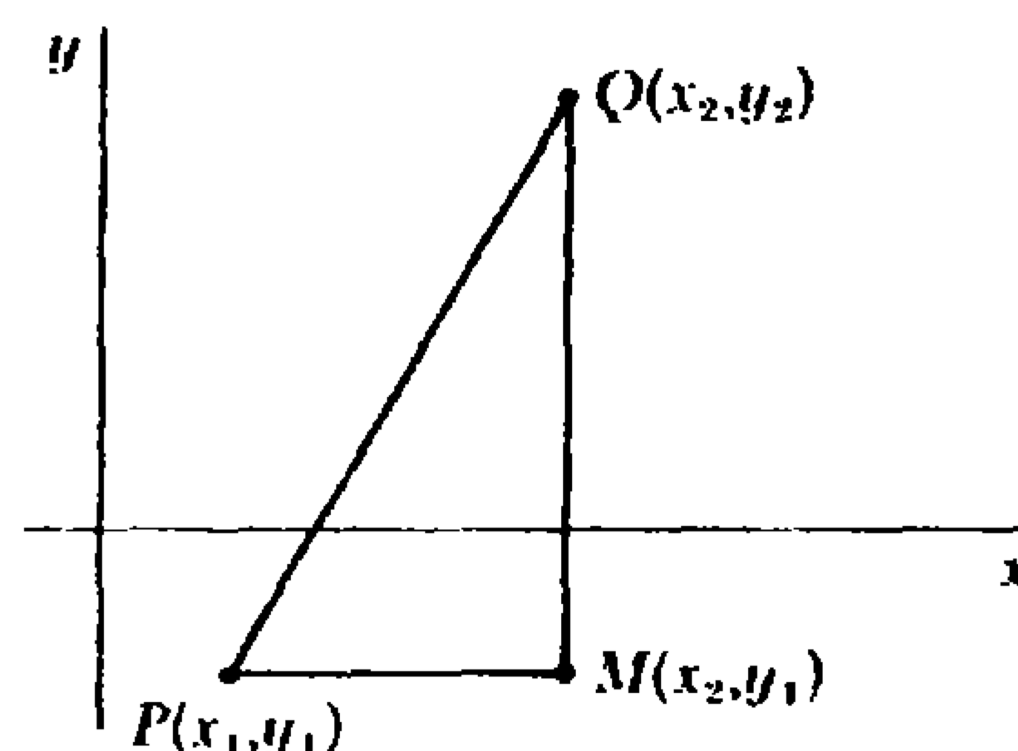
لان $\sqrt{a^2} = |a|$. هذا يتفق مع تعريف المسافة بين نقطتين على خط مستقيم يوازى المحور x .

ليكن L خطا مستقيما ، ولتكن P' و P نقطتين بحيث أن L يكون المنصف العمودى للقطعة المستقيمة PP' (شكل ت ـ ٧) . P' تسمى انعكاس (أو صورة) P فى L ، والنقطتان P' و P يقال أنهما متماثلتان فى L . بالطبع ، P هى ايضا انعكاس P' . فمثلا ، النقطة $(-2, 4)$ هى انعكاس النقطة $(2,4)$ فى المحور y (شكل ت ـ ٨) .

إذا كانت P' و P نقطتين وكانت A هى نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما (شكل ت ـ ٩) ، فاننا نقول أن P' هى انعكاس (أو صورة) P فى A وأن النقطتين P' و P متماثلتان فى A . فمثلا ، النقطتان $(2, -4)$ و $(-2, 4)$ فى الشكل ت ـ ٨ متماثلتان فى نقطة الأصل .

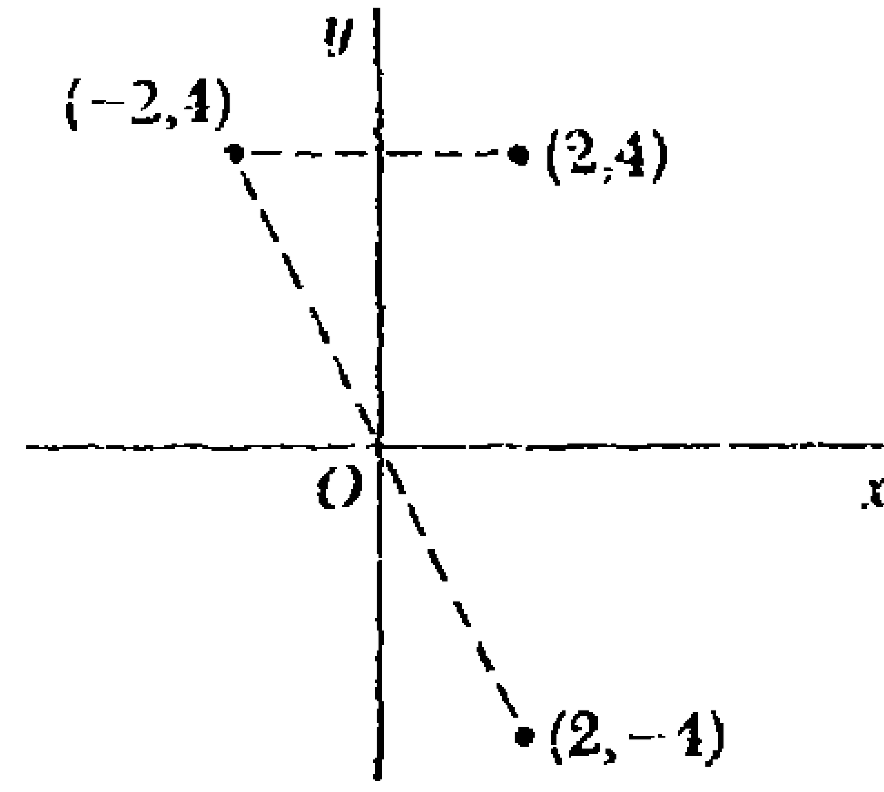


شكل ت ـ ٧
P' هى انعكاس P فى L .



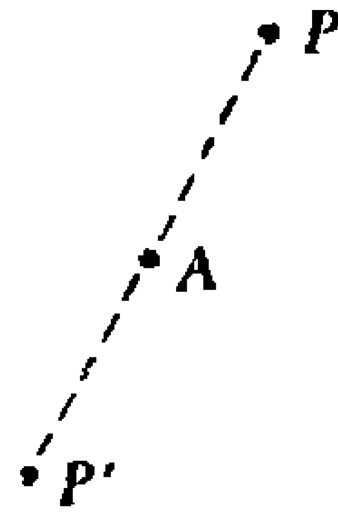
شكل ت ـ ٦

* بما أن $(x_2 - x_1)^2$ يكون موجباً أو صفراً ، فان علامتى القيمة المطلقة تكونان زائدتين عن الحاجة . أى أن ، $|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2$.



شكل ت ـ ٨

النقطتان $(2,4)$ و $(-2,4)$ متماثلتان فى المحور y ؛
النقطتان $(2,-4)$ و $(-2,4)$ متماثلتان فى نقطة الأصل .



شكل ت ـ ٩

P' هى انعكاس P فى A

مسائل

وقع النقط الآتية :

١ ـ $(3,1),\ (-2,0),\ (5,-6),\ (\frac{1}{2},-4),\ (0,0)$ **٢** ـ $(-1,-\pi),\ (5,\ \sqrt{3}-4),\ (0,\sqrt{5}),\ (-7,2)$

أوجد احداثى انعكاس النقط الآتية فى (أ) المحور x ، (ب) المحور y ، (ج) نقطة الأصل .

٣ ـ $(2,3),\ (1,-5),\ (0,-3)$ **٤** ـ $(-2,-2),\ (0,0),\ (a,b)$

٥ ـ للنقط $A(3,1), B(5,1), C(-1,1), D(-4,1), E(3,7), F(3,-2)$ ، أوجد المسافات الموجهه

(أ) $\overline{AB}, \overline{CB}, \overline{BC}, \overline{EA}, \overline{FA}$ (ب) $\overline{DC}, \overline{CD}, \overline{AE}, \overline{FE}, \overline{AF}$

٦ ـ أوجد المسافات الآتية بين النقط فى المسألة ٥ : $|AB|, |BA|, |AC|, |DA|, |EF|, |AE|$

٧ ـ حقق المتساوية ت ـ ٢ للنقط (أ) $A(2), B(5), C(7)$ ، (ب) $A(3), B(-2), C(1)$ هل المتساوية ت ـ ٢ تكون صحيحة لجميع النقط اذا كانت المسافات عادية وليست موجهه ؟

أوجد مساحات المثلثات التى رؤوسها :

٨ ـ $(8,5),\ (8,-3),\ (11,-3)$ **٩** ـ $(-2,1),\ (-2,7),\ (3,7)$ **١٠** ـ $(a,b),\ (a,c),\ (d,c)$

وقع ازواج النقط الاتية وأوجد احداثى نقطة المنتصف لها :

١١ ـ $(1,2),\ (5,10)$ **١٢** ـ $(-5,-4),\ (0,6)$ **١٣** ـ $(-2,7),\ (-7,-2)$ **١٤** ـ $(a,0),\ (0,b)$

أوجد المسافة بين أزواج النقط الاتية

١٥ ـ $(0,3),\ (4,6)$ **١٦** ـ $(-1,5),\ (2,-1)$ **١٧** ـ $(4,-5),\ (-4,-\frac{7}{2})$

١٨ ـ $(a,0),\ (0,b)$ **١٩** ـ $(-6,4),\ (-6,-1)$

٢٠ ـ أوجد محيط كل من المثلثات فى المسائل من ٨ إلى ١٠ .

أى من ثلاثيات النقط الآتية هى رؤوس مثلث قائم

٢١ ـ $(2,1)\ (3,3)\ (6,1)$ **٢٢** ـ $(-1,1),\ (1,-3),\ (7,5)$ **٢٣** ـ $(0,0),\ (-3,-2),\ (-5,3)$

٢٤ - أوجد محيط المثلث الذى رؤوسه $(-2,4)$, $(-5,0)$, $(10,-1)$

٢٥ - حقق أن المثلث الذى رؤوسه $(0,-7)$, $(6,2)$, $(3,4)$ هو مثلث قائم الزاوية وأوجد مساحته .

اثبت أن كلا من ثلاثيات النقط الآتية هى رؤوس مثلث متساوى الساقين :

٢٦ - $(2,3)$, $(5,0)$, $(6,4)$

٢٧ - $(-1,-9)$, $(10,2)$, $(-4,5)$

٢٨ - أوجد طول المستقيم المتوسط المار بالنقطة A للمثلث $A(-2,-6)$, $B(6,-1)$, $C(0,5)$

٢٩ - حقق أن النقط $A(1,2)$, $B(-1,6)$, $C(-4,2)$, $D(-2,-2)$ هى رؤوس متوازى اضلاع باثبات أن القطرين BD و AC لهما نقطة منتصف مشتركة .

٣٠ - أثبت أن النقطة $(3\ ,\ -3)$ تقع على المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(5\ ,\ 6)$ و $(1\ ,\ -4)$.

٣١ - أثبت أن النقط $(-4,-2)$, $(-2,3)$, $(3,1)$, $(1,-4)$ هى رؤوس مربع .

٣٢ - هل الشكل الرباعى المتكون بالنقط $(3,1)$, $(0,-1)$, $(-3,3)$, $(0,5)$ مستطيل ؟

٣٣ - عين b بحيث تكون النقط $A(-1,1)$, $B(12,0)$ رؤوس مثلث قائم الزاوية عند c .

٣٤ - مربع طول ضلعه a رؤوسه على محورى الاحداثيات . أوجد احداثيات رؤوسه .

٣٥ - مثلث متساوى الأضلاع له رأسان عند النقطتين $(a,0)$ و $(-a\ ,\ 0)$ ما هما احداثيا الرأس الثالث .

٣٦ - أوجد علاقة بين y و x اذا كانت $P\ (x\ ,\ y)$ على الدائرة التى نصف قطرها 5 ومركزها عند $(1\ ,\ 2)$.

٣٧ - أوجد علاقة بين y و x اذا كانت $P\ (x\ ,\ y)$ متساوية البعد عن النقطتين $(-2\ ,\ -2)$ و $(3\ ,\ 1)$.

٣٨ - أوجد احداثيات الانعكاسات ، فى الخط المستقيم المار بنقطة الأصل ومنصفا الربع الاول والربع الثالث ، للنقط $(-3,-3)$, $(-1,4)$, $(1,2)$

٣٩ - أوجد احداثى مسقط النقطة $(3,0)$ على الخط المستقيم المار بنقطة الأصل . منصفا الربع الأول والربع الثالث .

٤٠ - الخط المستقيم المار بالنقطتين $(6\ ,\ 4)$ و $(-3\ ,\ -1)$ يقطع المحور x عند $(a,0)$. أوجد a (ارشاد : استخدم مثلثات متشابهة) .

٤١ - إذا كانت النقطتان $(2\ ,\ 4)$ و $(-1\ ,\ 1)$ رأسين مقابلين لمربع ، أوجد إحداثيات الرأسين الآخرين .

٤٢ - أوجد احداثيى النقطة التى على بعد ثلاثة أرباع المسافة من $(6\ ,\ 4)$ إلى $(-8\ ,\ 12)$

٤٣ - أوجد النقطة التى احداثيها السينى 4 وعلى بعد 10 وحدات من النقطة $(5\ ,\ -2)$.

٤٤ - أكمل برهان صيغة نقطة المنتصف ت - ٣ باثبات أن الاحداثى y للنقطة M هو : $(y_1 + y_2)\ /\ 2$.

٤٥ ـ اثبت أن انقطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى المثلث توازى الضلع الثالث وتساوى نصف طوله (ارشاد : بسِّط العمل بوضع المثلث بحيث يقع ضلعه الثالث على المحور x ويكون أحد الرأسين عند نقطة الاصل . إحداثيا الرأس الآخر على الضلع الثالث سيكونان $(b , 0)$ لعدد ما b . احداثيا الرأس الثالث سيكونان (c , d) لعددين ما (c , d).

٤٦ ـ شكل رباعى رؤوسه هى $O(0,0), A(a,0), B(b,c)$. اثبت أن طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين AB و OA يساوى طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين CO و BC .

ت ـ ٢

الاشكال البيانية للمعادلات والمتباينات

x	y
-3	9
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$
3	9

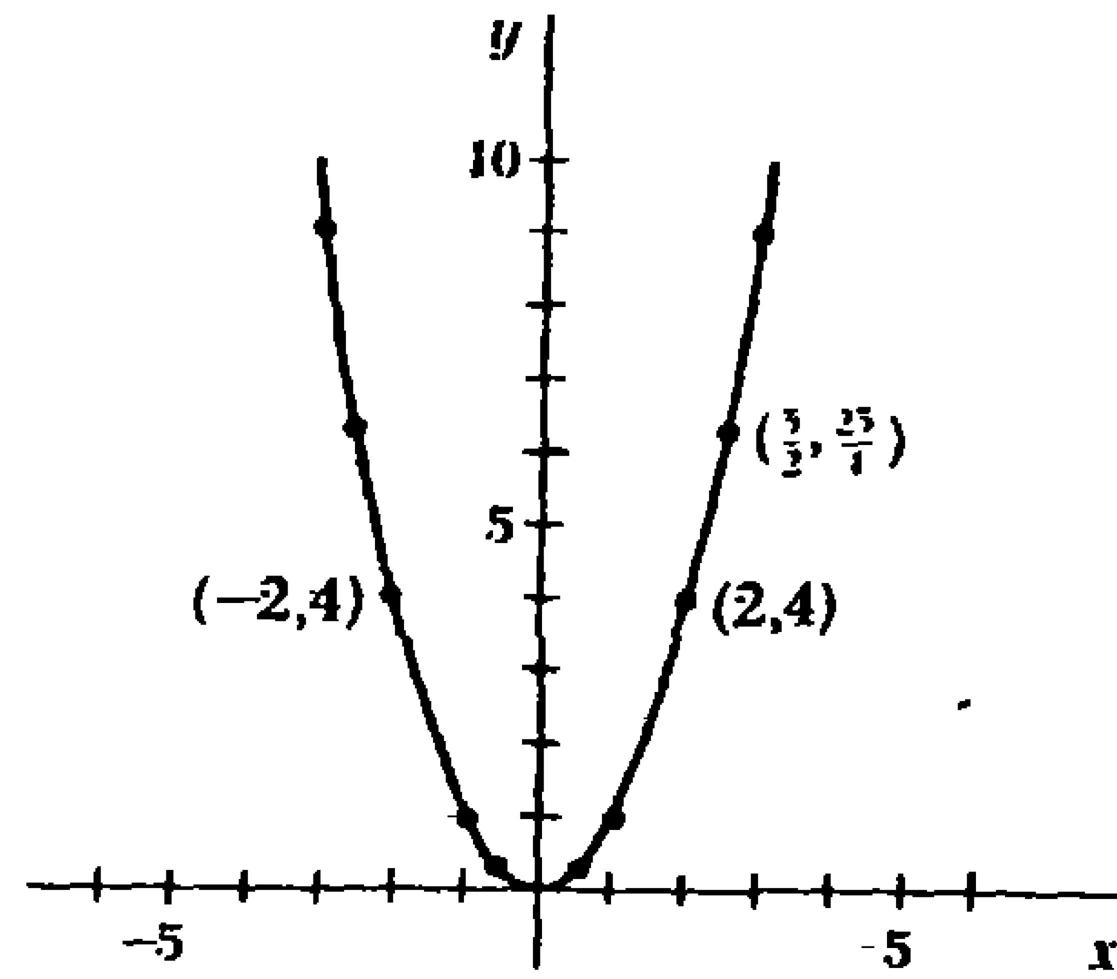
حل معادلة أو متباينة فى متغيرين ، مثلا y و x هو زوج مرتب من الاعداد (a ,b) بحيث أن عندما تعوض a لـ x ، b لـ y ، المعادلة أو المتباينة الناتجة تكون صحيحة . الزوج $(2 , 10)$ وحل للمعادلة $y = 3x^2 - 2$ لأن $10 = 3 (2^2) - 2$ هى معادلة صحيحة . لكن الزوج $(1,5)$ ليس حلا لأن $5 = 3 (1) - 2$ ليست صحيحة . الزوج $(2,1)$ حل للمتباينة $x + 2y < 6$ لأن $2 + 2 (1) < 6$ متباينة صحيحة ، لكن الزوج $(1 , 3)$ ليس حلا . فئة الحل لمعادلة أو متباينة فى متغيرين هى فئة جميع حلولها .

فى الجدول فى الهامش قد دُّونا بعض حلول المعادلة $y = x^2$. كل حل (a,b) يمكن اعتباره احداثيى نقطة $P (a,b)$ فى مستوى الاحداثيات .

لقد وقعنا هذه النقط فى الشكل ت ـ ١٠ . هذه النقط فى مجموعها تكون منحنى يسمى الشكل البيانى للمعادلة ، وهو المخطط فى الشكل . عندما تكون x كبيرة موجبة أو سالبة ، تكون y كبيرة وموجبة . واذن المنحنى يستمر مفتوحا لأعلى . الشكل البيانى متماثل فى المحور y . المعادلة $y = x^2$ تظهر كثيرا فى الأمثلة التوضيحية ، والقارىء عليه أن يتذكر شكلها البيانى .

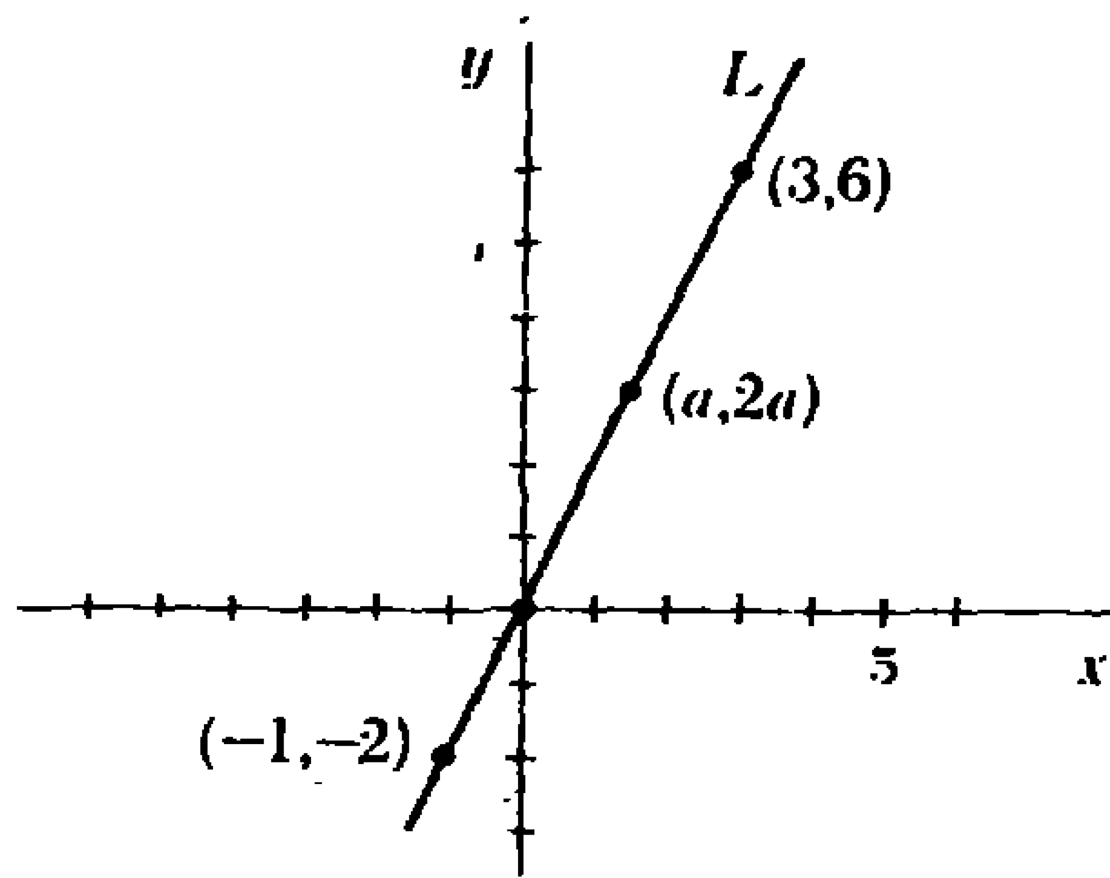
نفس الطريقة يمكن إجراؤ ها لأى معادلة أو متباينة ، رغم أن النقط فى مجموعها قد لاتكون دائما ما يعتبر عادة أنه منحنى .

ت ـ ٥ تعريف . الشكل البيانى لمعادلة أو متباينة فى متغيرين هو فئة جميع النقط $P (a , b)$ حيث (a , b) هو حل للمعادلة أو المتباينة .



شكل ت ـ ١٠

الشكل البيانى لـ $y = x^2$. لاحظ التماثل فى المحور y .



شكل ت ـ ١١

الشكل البيانى لـ $y = 2x$.

وبأسلوب آخر ، النقطة تكون على الشكل البيانى اذا كان احداثياها يحققان المعادلة أو المتباينة ولاتكون عليه اذا كان احداثياها لايحققان المعادلة أو المتباينة .

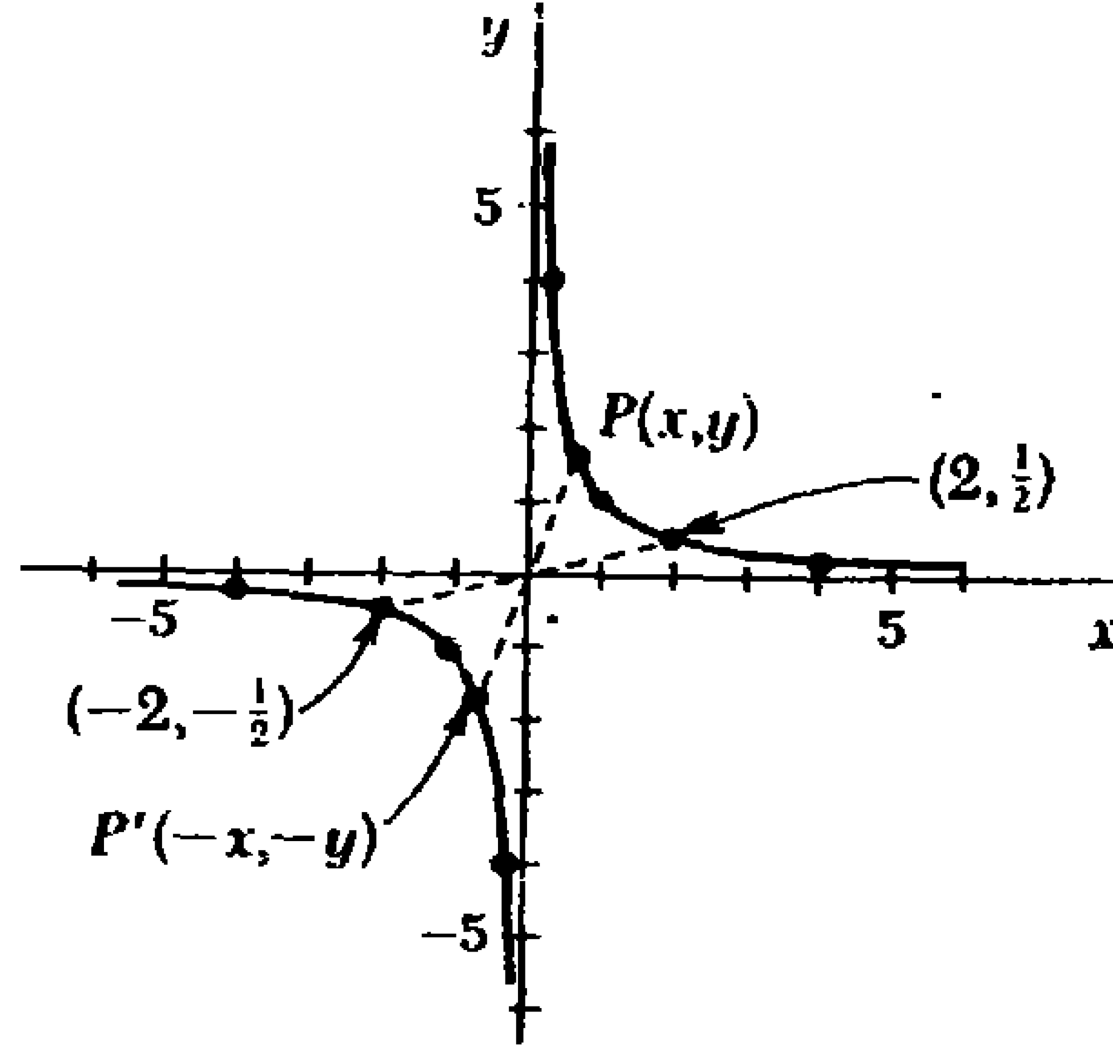
اذا كانت المعادلة أو المتباينة تشتمل على حدود فى x فقط فاننا سنعرف الشكل البيانى بأنه فئة جميع النقط التى احداثياتها x تحقق المعادلة أو المتباينة . فمثلا النقط $(-3,1)$, $(3,-2)$, $(3,1)$ جميعها تقع على الشكل البيانى للمعادلة $x^2 - 9 = 0$. ملاحظة مماثلة تطبق اذا كانت المعادلة أو المتباينة تشتمل على حدود فى y فقط .

الشكل البيانى لمعادلة يسمى أيضا المنحنى المناظر للمعادلة ، ونقول عادة ، مثلا ، المنحنى $y = x^2$ بدلا من العبارة المطوله « المنحنى المناظر للمعادلة $y = x^2$ » . فى الرياضيات الخط المستقيم يعتبر منحنى . التعبير خط يعنى دائما خطا مستقيما .

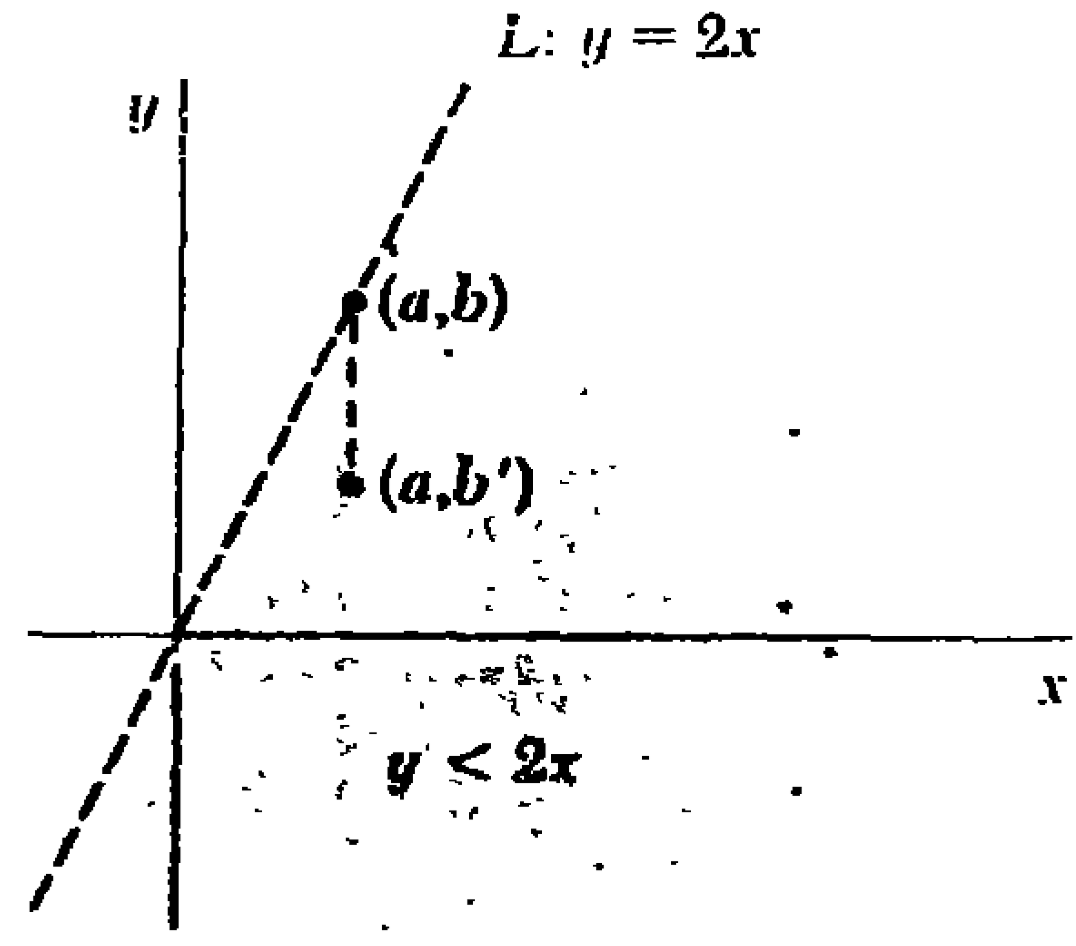
مثال ١ . أوجد الشكل البيانى للمعادلة $y = 2x$. النقط التى احداثياتها هى $(-1 , -2)$ و $(0,0)$, $(3,6)$ تقع على الشكل البيانى اذ أن كلا من هذه الازواج يحقق المعادلة . بصفة أعم ، الزوج (a,b) هو حل للمعادلة اذا واذا فقط كانت $b = 2a$. واذن الشكل البيانى يتكون من جميع النقط التى احداثياتها $(a,2a)$ ويجب أن يكون الخط المستقيم ، الموضح فى الشكل ت ـ ١١ .

مثال ٢ . أوجد الشكل البيانى للمتباينة $y < 2x$.

من الأسهل لايجاد الشكل البيانى للمتباينة أن نوجد أولا الشكل البيانى للمعادلة المساعدة التى نحصل عليها باستبدال رمز التباين برمز التساوى . لقد أوضحنا فى مثال ١ أن الشكل البيانى للمعادلة $y = 2x$ هو الخط المستقيم L فى الشكل ت ـ ١٢ . اذا كانت (a,b) نقطة على الشكل البيانى لـ $y = 2x$ فان النقطة (a,b') ستكون على الشكل البيانى للمتباينة اذا واذا فقط كانت $b' < b$. اذن الشكل البيانى للمتباينة $y < 2x$ هو المنطقة الواقعة تحت L ، نصف المستوى ، المظلل ، فى الشكل ت ـ ١٢ . الخط L موضح بشرط اشارة الى أنه ليس جزءا من الشكل البيانى .



شكل ت ـ ١٣
الشكل البيانى لـ $y = 1/x$ لاحظ تماثل المنحنى فى نقطة الأصل .



شكل ت ـ ١٢

مثال ٣ . خطط المنحنى $y = 1 / x$.

نعمل جدولا للقيم ، نوقع النقط المناظرة ، ونرسم شكلا سلسا مارا بها (شكل ت ـ ١٣) . عندما تكون x كبيرة وموجبة ، تكون y موجبة وقريبة من الصفر ، ويمكن جعلها قريبة من الصفر كما نريد باختيار x كبيرة كبرا كافيا . هذا يعنى أن لقيم x الكبيرة ، المنحنى يقع فوق المحور x ، ويقترب منه أكثر فأكثر كلما ابتعدنا . بالمثل ، عندما تكون x كبيرة وسالبة ، y تكون سالبة وقريبة من الصفر ، ولهذه القيم لـ x المنحنى يقع تحت المحور x . عندما تكون x قريبة من الصفر وموجبة ، تكون y كبيرة وموجبة ويمكن جعلها كبيرة كما نريد باختيار x قريبة من الصفر قربا كافيا . بالمثل ، عندما تكون x قريبة من الصفر وسالبة ، تكون y كبيرة وسالبة . لاحظ أنه لكل نقطة على المنحنى النقطة المتماثلة معها فى نقطة الاصل تكون أيضا على المنحنى . فالمنحنى بأكمله يكون متماثلا فى نقطة الاصل . مع أن الشكل البيانى على قطعتين ، الا أنه يعتبر منحنى واحدا لانه الشكل البيانى لمعادلة واحدة .

اذا كان عندما تتحرك نقطة على المنحنى الى مالا نهاية ، المسافة بينها وبين خط مستقيم ثابت تقترب من الصفر ، فان الخط المستقيم يسمى خطا تقاربيا للمنحنى . فى مثال ٣ المحوران y و x خطان تقاربيان للمنحنى $y = 1 /x$. من المسموح به أن المنحنى يعبر خطه التقاربى مرة أو أكثر عندما يمتد الى مالانهاية .

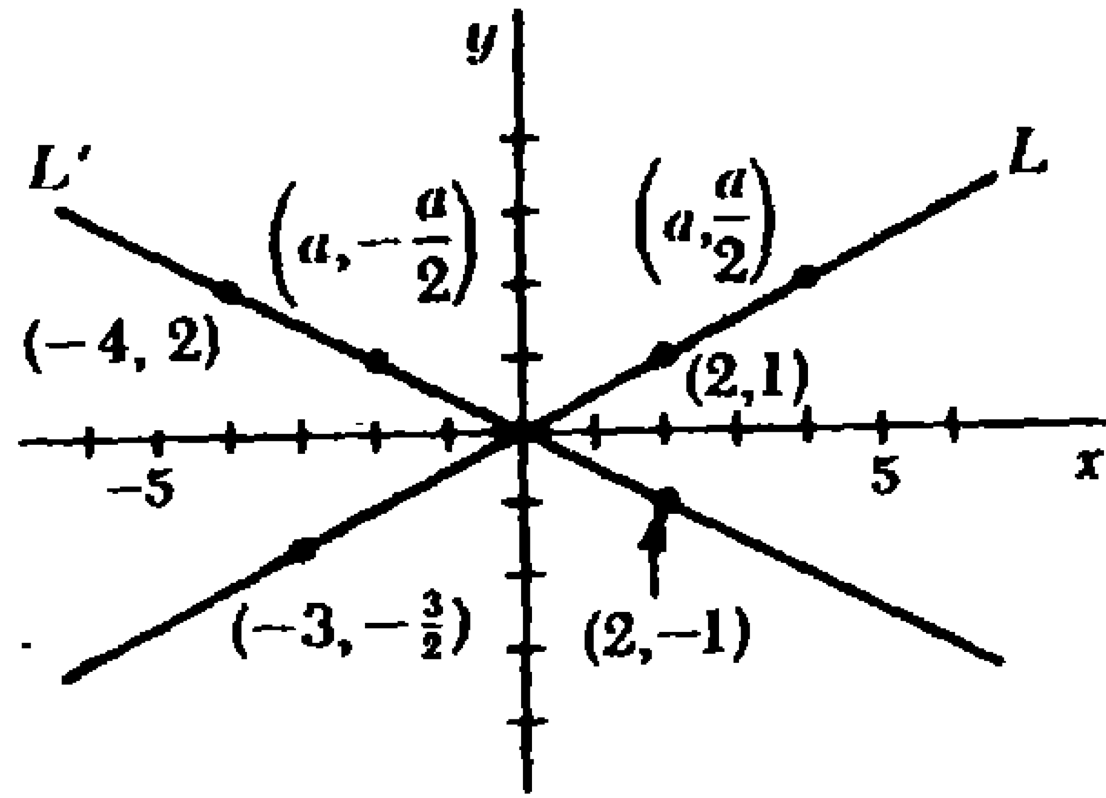
مثال ٤ . خطط الشكل البيانى للمعادلة

$$x^2 - 4y^2 = 0 \qquad (1)$$

يمكننا عمل جدول للقيم ، لكن من الاسهل ملاحظة أن

$$x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$$

x	y
$-\frac{1}{10}$	-10
-4	$-\frac{1}{4}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$-\frac{1}{4}$	-4
$-\frac{1}{10}$	-10
$-\frac{1}{100}$	-100
$\frac{1}{10}$	10
$\frac{1}{4}$	4
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{10}$
100	$\frac{1}{100}$



شكل ت ـ ١٤

الشكل البيانى لـ $x^2-4y^2 = 0$ يتكون من خطين مستقيمين .

وبالتالى الزوج (a,b) يكون حلا للمعادلة (١) اذا واذا فقط كان

$$(a-2b)(a+2b)=0$$

اى اذا واذا فقط كان $a - 2b = 0$ ، وفى هذه الحالة $b = a/2$ ، أو كان $a + 2b = 0$ ، وفى هذه الحالة $b = -a/2$. واذن الشكل البيانى يتكون من جميع النقط التى احداثياتها هى $(a,a/2)$ أو هى $(a,-a/2)$ ، حيث a أى عدد . النقط $(a, a/2)$ تقع على الخط المستقيم L فى الشكل ت ـ ١٤ . الحقيقة أن هذه النقط تقع على خط مستقيم نستوصبها بتوقيع بعض منها ، وستثبتها فى البند ت ـ ٥ . النقط $(a, -a/2)$ تقع على الخط المستقيم L' فى الشكل . الشكل البيانى لـ (١) يتكون من هذين المستقيمين .

كما فى حالة المعادلات فى واحد ، نقول أن معادلتين فى y و x متكافئتان اذا واذا فقط كان لهما نفس فئة الحل . فمثلا المعادلتان

$$2x+3y-6=0 \quad \text{و} \quad y=-\tfrac{2}{3}x+2 \qquad (٢)$$

متكافئتان . كذلك أيضا

$$x=\frac{6}{y^2+x^2} \quad \text{و} \quad xy^2+x^3=6$$

زوج من المعادلات غير المتكافئة هو

$$y=x \quad \text{و} \quad y^2=x^2 \qquad (٣)$$

لان النقطة $(1, -1)$ تحقق المعادلة الثانية لكن لاتحقق الأولى. زوج آخر من المعادلات غير المتكافئة هو

$$\frac{y-2}{x+y-3}=6 \quad \text{و} \quad y-2=6(x+y-3) \qquad (٤)$$

هنا الزوج $(1,2)$ حل للمعادلة الاولى لكن ليس حلا للثانية .

لان المعادلات المتكافئة لها نفس فئة الحل فهى لها نفس الشكل البيانى . واذن من المسموح به لتخطيط الشكل البيانى لمعادلة أن نخطط الشكل البيانى لمعادلة مكافئة أكثر ملاءمة . فمثلا ، عند تخطيط الشكل البيانى للمعادلة (٢) يكون من الأسهل ايجاد أزواج الحل باستخدام المعادلة الثانية بدلا من الاولى . لهذا السبب (ولأسباب أخرى) من المهم معرفة ما اذا كانت معادلتان متكافئتين .

القواعد المعطاة فى النظرية ١ ـ ١٢ ، لتكافؤ المعادلات والمتباينات فى متغير واحد صحيحة للمعادلات والمتباينات فى متغيرين مع تغييرات طفيفة فى الصياغة لتتكيف مع حالة المتغيرين . التعبيرات فى x تصبح الآن تعبيرات فى y و x ، والحل الآن لايعنى عددا بل زوجا من الاعداد (x,y) يحقق المعادلة . فمثلا ، هذه القواعد تثبت أن المعادلتين

$$2x+y=6-3x \quad \text{و} \quad 5x+y=6$$

متكافئتان ، وكذلك أيضا

$$x(x-y)=6 \quad \text{و} \quad x=\frac{6}{x-y} \qquad (٥)$$

من الجائز ضرب المعادلة الاولى فى (٥) فى $x-y$ اذ أنه لايوجد حل (x,y) ، لاى من المعادلتين ، فيه $x=y$.

المعادلة الثانية فى (٢) تكافىء الاولى لانه يمكن الحصول عليها منها بالمتابعة التالية من العمليات . نضيف 6 الى كل من طرفى المعادلة الاولى ، فنحصل على

$$2x+3y=6$$

بطرح $2x$ من كل من طرفى هذه المعادلة ، فنحصل على

$$3y=-2x+6$$

نقسم كلا من طرفى هذه المعادلة على 3 ، فنحصل على

$$y=-\tfrac{2}{3}x+2$$

نحذر القارىء من تربيع طرفى معادلة أو الضرب فى أو القسمة على مقادير قد تكون صفرا لبعض حلول المعادلة ، لانها قد تؤدى الى معادلات غير مكافئة . مثالان هما (٣) و (٤) أعلاه . صحيح أنه اذا كانت v و u مقدارين فى y و x بحيث أن $v \geqq 0$ و $u \geqq 0$ لكل حل (x,y) لـ $u^2=v^2$ ، فان المعادلتين $u^2=v^2$ و $u=v$ تكونان متكافئتين . برهان ذلك نتركه كتمرين (المسألة ٥٨) .

مسائل :

خطط الشكل البيانى للمعادلات الاتية :

١ ـ $y = \frac{1}{2}x$ ٢ ـ $2y + x = 0$ ٣ ـ $y = x + 2$ ٤ ـ $x + 3y - 5 = 0$ ٥ ـ $x^2 = 16$

٦ ـ $y = -3$ ٧ ـ $y = x^2 + 2$ ٨ ـ $y = \frac{1}{2}x^2$ ٩ ـ $y = -x^2$ ١٠ ـ $y^2 = x$

١١ ـ $y = \sqrt{x}$ (تذكر أن $\sqrt{x}$ تكون دائما غير سالبة) .

١٢ ـ $y = -\sqrt{x}$ ١٣ ـ $y = x^3$ ١٤ ـ $x^2 + y^2 = 25$ ١٥ ـ $x^2 + y^2 = 0$

١٦ ـ $x^2 + y^2 = -5$ ١٧ ـ $y = -6/x$ ١٨ ـ $y = 1/x^2$ ١٩ ـ $y^3 - y = 0$

٢٠ ـ $x^2 - 5x - 6 = 0$ ٢١ ـ $x(x - y) = 0$ ٢٢ ـ $y = \sqrt{x^2}$

خطط الشكل البيانى للمتباينات الآتية (ارشاد : خطط أولا الشكل البيانى للمعادلة التى تحصل عليها باستبدال رمز التباين برمز التساوى) .

٢٣ ـ $x \leqslant 3$ ٢٤ ـ $y > -1$ ٢٥ ـ $-3 < x < 3$ ٢٦ ـ $\frac{1}{2} < y \leqslant 4$

٢٧ ـ $x^2 < 16$ ٢٨ ـ $y < -\frac{1}{3}x$ ٢٩ ـ $y < 2x + 2$ ٣٠ ـ $y \leqslant x^2$

٣١ ـ $0 < y < \sqrt{x}$. ٣٢ ـ $x(x + 2) > 0$

خطط الشكل البيانى للمتباينات الآتية :

٣٣ ـ $0 \leqslant x \leqslant 4, 1 \leqslant y \leqslant 3$ ٣٤ ـ $y < x, x \geqslant 0$ ٣٥ ـ $y \leqslant x + 3, y \geqslant x - 3$

٣٦ ـ $2x - y < 0, y < 5$ ٣٧ ـ $y \geqslant x^2 - 1, y < x$

٣٨ ـ خطط الشكل البيانى لـ $y = -x/3$. وضح كيف يمكننا استخدام هذا الشكل البيانى لايجاد الشكل البيانى لـ $y = -x/3 + 1$ بدون عمل جدول للقيم . خطط الاشكال البيانية لـ $y = -x/3 + c$ حيث $C = 3 , 5, -1$. ما الذى يمكنك قوله عن هذه الخطوط ؟ أوجد قيمة c التى تجعل الشكل البيانى لـ $y = -x/3 + c$ يمر بالنقطة $(2 , 5)$.

٣٩ ـ لاى قيم a تكون المعادلة $x^2 + y^2 = a$ ليس لها شكل بيانى ؟ أوجد معادلة اخرى ليس لها شكل بيانى .

اثبت أن المعادلتين فى كل من الأزواج الآتية متكافئتان ، بتحويل معادلة الى اخرى ، بمتابعة من العمليات على النمطين (أولا) و (ثانيا) المماثلين لهذين المعطيين فى النظرية ١ ـ ١٢ . اجر عملية واحدة فقط فى كل خطوة . ليس من الضرورى أن تعطى التفصيلات للعمليات الجبرية الأخرى .

٤٠ ـ $2x - y = 0, y = 2x$ ٤١ ـ $xy = 10, x = 10/y$

٤٢ ـ $x + \frac{y - 3}{2} = 5y, 2x - 9y - 3 = 0$

٤٣ ـ $2x + \frac{3}{y - 2x} - y = \frac{3}{y - 2x} - 3, y = 2x + 3$

٤٤ - $(x+2)^2+y^2=(x-2)^2,\ y^2=-8x$ ٤٥ - $\frac{x-y-5}{\sqrt{x^2-y}}=0,\ y=x-5$

٤٦ - $x^4+(4-y^2)x^2-4y^2=0,\ x^2=y^2$ ٤٧ - $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=3,\ x^2+y^2-8x+7=0$

اثبت أن المعادلات فى الازواج الآتية غير متكافئة

٤٨ - $x^2/x=5y,\ x=5y$ ٤٩ - $x^3-y=x^2-xy,\ x^2+y=0$

٥٠ - $y=\sqrt{x},\ y^2=x$ ٥١ - $\frac{x-y-5}{\sqrt{x^2-y^2}}=0,\ y=x-5$

عين ما اذا كان المعادلات فى الأزواج الآتية متكافئة :

٥٢ - $2y+\frac{7x-1}{3}=4,\ x=-\frac{6}{7}y+\frac{13}{7}$ ٥٣ - $x+y+10=0,\ \frac{x+y+10}{\sqrt{x+y}}=0$

٥٤ - $\frac{2x-y-5}{x^2-y^2}=0,\ 2x-y-5=0$ ٥٥ - $\sqrt{x-y}=\sqrt{3x-2y},\ y=2x$.

٥٦ - $x^2-y^2=20,\ y=\sqrt{x^2-20}$ ٥٧ - $y^3=x,\ y=x^{1/3}$

٥٨ - أثبت أنه اذا كان v و u تعبيرين فى v و x بحيث أن $v \geqslant 0$ و $u \geqslant 0$ لكل حل (x,y) لـ $u^2=v^2$ ، فان المعادلتين $u^2=v^2$ و $u=v$ تكونان متكافئتين (ارشاد : يجب اثبات أن كل حل لـ $u=v$ هو ايضا حل لـ $u^2\ v^2$ ، وبالعكس . الاول سهل لاثبات العكس ، نكتب $u^2=v^2$ على الصورة $(u-v)(u+v)$. اذا كان (x,y) حلا للتعبير $u^2=v^2$ ، أثبت أنه يجب أيضا أن يكون حلا لـ $u-v=0$) .

ت - ٣

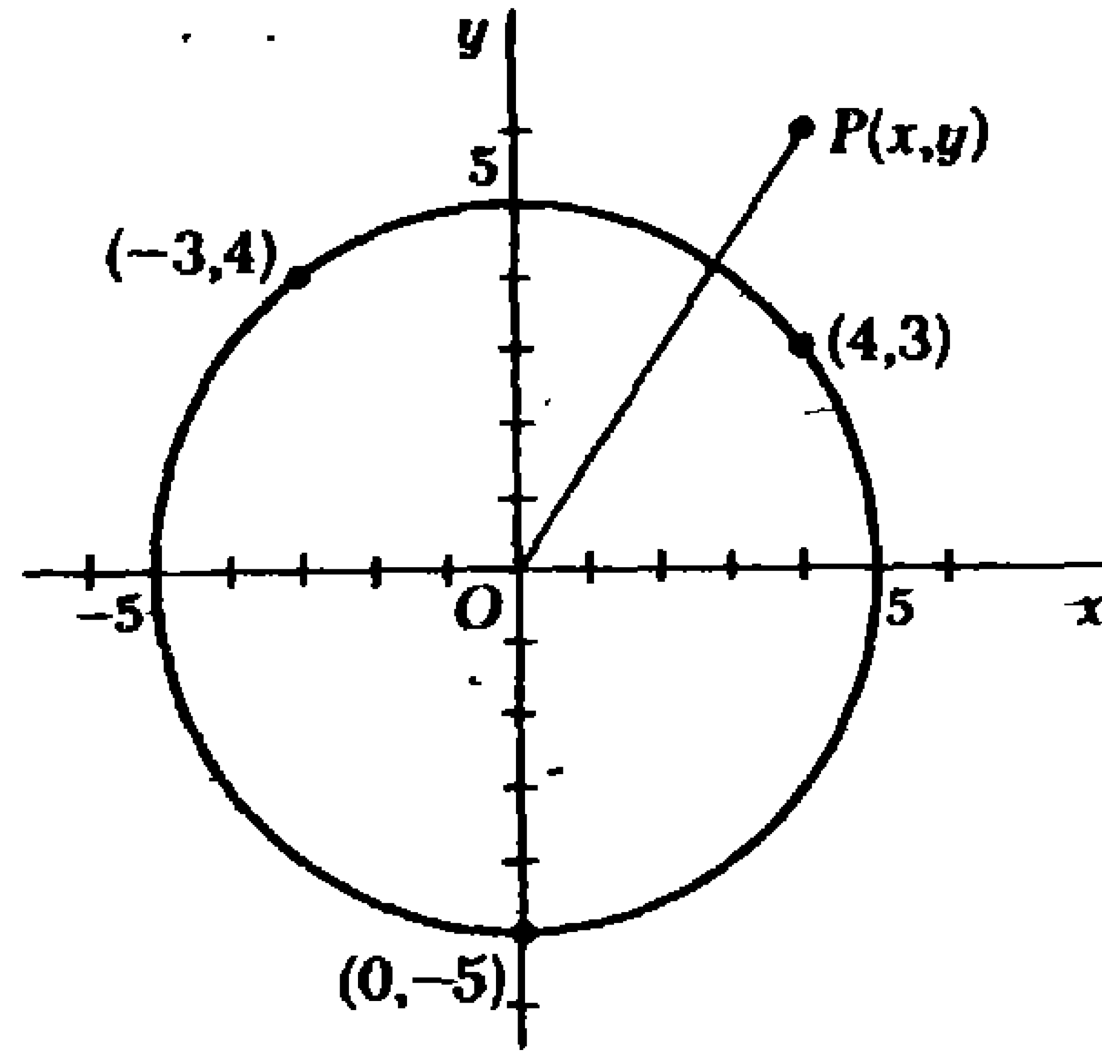
الدوائر

فى بند ت - ٢ قد وضحنا كيف نخطط الشكل البيانى لمعادلة . المسألة العكسية هى ايجاد معادلة منحنى معطى .

ت - ٦ تعريف . معادلة منحنى هى معادلة فى y و x بحيث أن النقطة $P(x,y)$ تكون على المنحنى اذا واذا فقط كان (x,y) حلا للمعادلة .

فى هذا البند سنوجد معادلة دائرة . للحصول على معادلة منحنى ، يجب وصف المنحنى هندسيا . الدائرة هى فئة جميع النقط فى المستوى التى على بعد معطى من نقطة ما ثابتة تسمى مركزها . نستخدم هذا التعريف لايجاد معادلة الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الأصل .

لتكن $P(x,y)$ أى نقطة فى المستوى (انظر شكل ت - ١٥) . المسافة $|OP|$ بين النقطة P ونقطة الاصل O هى ، بصيغة المسافة ، $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$. النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط



شكل ت ـ ١٥
النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|OP| = 5$
ومن ثم اذا واذا فقط كان $x^2 + y^2 = 25$

كان $|OP| = 5$ ، أى اذا واذا فقط كان y و x عددين يجعلان المعادلة

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5 \qquad (١)$$

صحيحة ، أى اذا واذا فقط كان (x,y) حلا لهذه المعادلة . اذن (١) هى معادلة للدائرة . معادلة مكافئة ، أى معادلة لها نفس فئة الحل ، هى

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (٢)$$

ربما منحنى له معادلات كثيرة علاوة على (٢) معادلة أخرى مكافئة لـ (١) هى

$$2x^2 + 2y^2 - 50 = 0$$

ت ـ ٧ . معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة (h,k) ونصف قطرها r هى

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (٣)$$

وبالعكس ، أى معادلة على هذه الصورة شكلها البيانى هو دائرة مركزها عند $(h\ ,\ k)$ ونصف قطر r .

لاثبات ذلك نفرض أن $P(x,y)$ أى نقطة فى المستوى (شكل ت ـ ١٦) . المسافة $|CP|$ بين المركز $C(h,k)$ والنقطة P هى $|CP| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ النقطة P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|CP| = r$ ، أى ، اذا واذا فقط كان (x,y) حلا للمعادلة

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \qquad (٤)$$

اذن هذه هى معادلة للدائرة . الجذر يكون حقيقيا وغير سالبا لجميع x,y وبناء على ذلك ، اذا كتبنا مربع كل من طرفى (٤) نحصل على معادلة مكافئة ،

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

التى هى أيضا يجب أن تكون معادلة الدائرة .

حالة هامة من (٣) هى الدائرة التى مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطر r . معادلتها هى

$$x^2 + y^2 = r^2$$

مثال ١ . أوجد معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة $(\frac{5}{3}, -4)$ ونصف قطرها 3 .

هنا $r = 3$ و $h = \frac{5}{3}, k = -4$ بتعويض هذه فى (٣) يكون لدينا

$$(x - \tfrac{5}{3})^2 + [y - (-4)]^2 = 3^2$$

أى

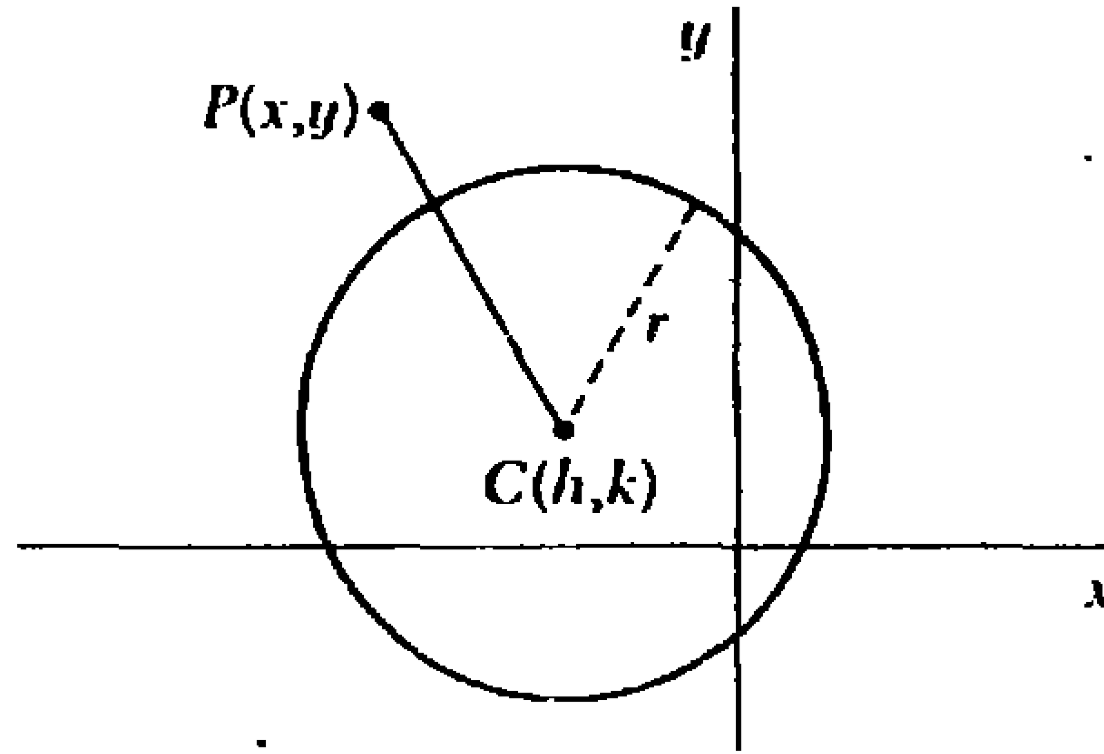
$$(x - \tfrac{5}{3})^2 + (y + 4)^2 = 9 \qquad (٥)$$

كمعادلة للدائرة . صورة مكافئة وأحيانا أكثر ملاءمة ، يمكن الحصول عليها بفك الحدود المربعة فى (٥) والاختصار ،

$$x^2 + y^2 - \tfrac{10}{3}x + 8y + \tfrac{88}{9} = 0$$

أو بالضرب فى 9 ،

$$9x^2 + 9y^2 - 30x + 72y + 88 = 0$$



شكل ت ـ ١٦
P تكون على الدائرة اذا واذا فقط كان $|CP| = r$ واذن اذا واذا فقط كان $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

إذا فككنا الحدود المربعة فى معادلة الدائرة (٣) ، فاننا نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

كما فعلنا فى الجزء الأخير من مثال ١ ، يمكننا ضرب طرفى هذه المعادلة فى ثابت غير صفرى A ، فنحصل على المعادلة

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0, \qquad (٦)$$

حيث

$$D = -2hA, \qquad E = -2kA, \qquad F = (h^2 + k^2 - r^2)A.$$

هذا يثبت أن كل دائرة لها معادلة فى y و x من الدرجة الثانية بمعاملى y^2 و x^2 متساويين ولايوجد حد xy .

العكس أيضا صحيح . كل معادلة فى y و x من الدرجة الثانية بمعاملى y^2 و x^2 متساويين ولايوجد حد xy شكلها البيانى دائرة ، اذا كان لها شكل بيانى . الشكل البيانى قد يكون نقطة واحدة ، التى يمكن اعتبارها دائرة نصف قطرها صفر . سنترك برهان العكس للقارىء (المسأله ٤٢) . الطريقة موضحة بالمثال الآتى .

مثال ٢ . عين وخطط المنحنى الذى معادلته هى

$$4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y + 21 = 0 \qquad (٧)$$

بما أن المعادلة من الدرجة الثانية بمعاملى y^2 و x^2 متساويين ولايوجد حد xy ، فشكلها البيانى هو دائرة . نوجد المركز ونصف القطر بكتابة المعادلة على الصورة (٣) . لإجراء ذلك نعكس الخطوات فى مثال ١ . أولا نقسم (٧) على 4 بحيث أن y^2 و x^2 يصبح معامل كل منهما الواحد الصحيح ، ونكتب معا الحدود التى تحتوى على x وبالمثل الحدود التى تحتوى على y . النتيجة هى

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 3y) = -\tfrac{21}{4}$$

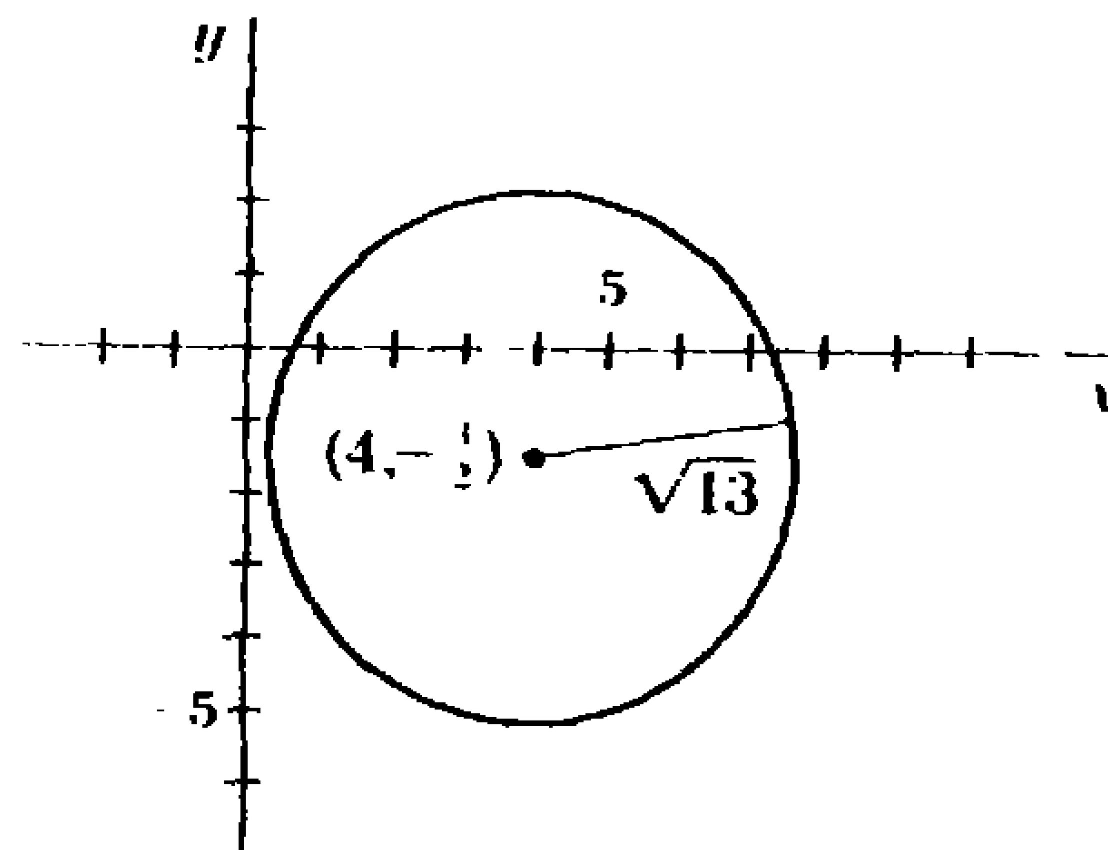
الآن نكمل مربعى المقدارين بين القوسين باضافة $\tfrac{9}{4}$ و 16 لكل طرف من هذه المعادلة

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 3y + \tfrac{9}{4}) = -\tfrac{21}{4} + 16 + \tfrac{9}{4}$$

وهذه تكافىء

$$(x - 4)^2 + (y + \tfrac{3}{2})^2 = 13$$

التى هى على الصورة (٣) حيث $r = \sqrt{13}$ و $h = 4 , k = \tfrac{3}{2}$. اذن مركز الدائرة هو $(4 , -\tfrac{3}{2})$ ونصف القطر هو $\sqrt{13}$. بهذه المعلومات يمكن تخطيط الشكل البيانى بسرعة (شكل ت ـ ١٧) .



شكل ت ـ ١٧

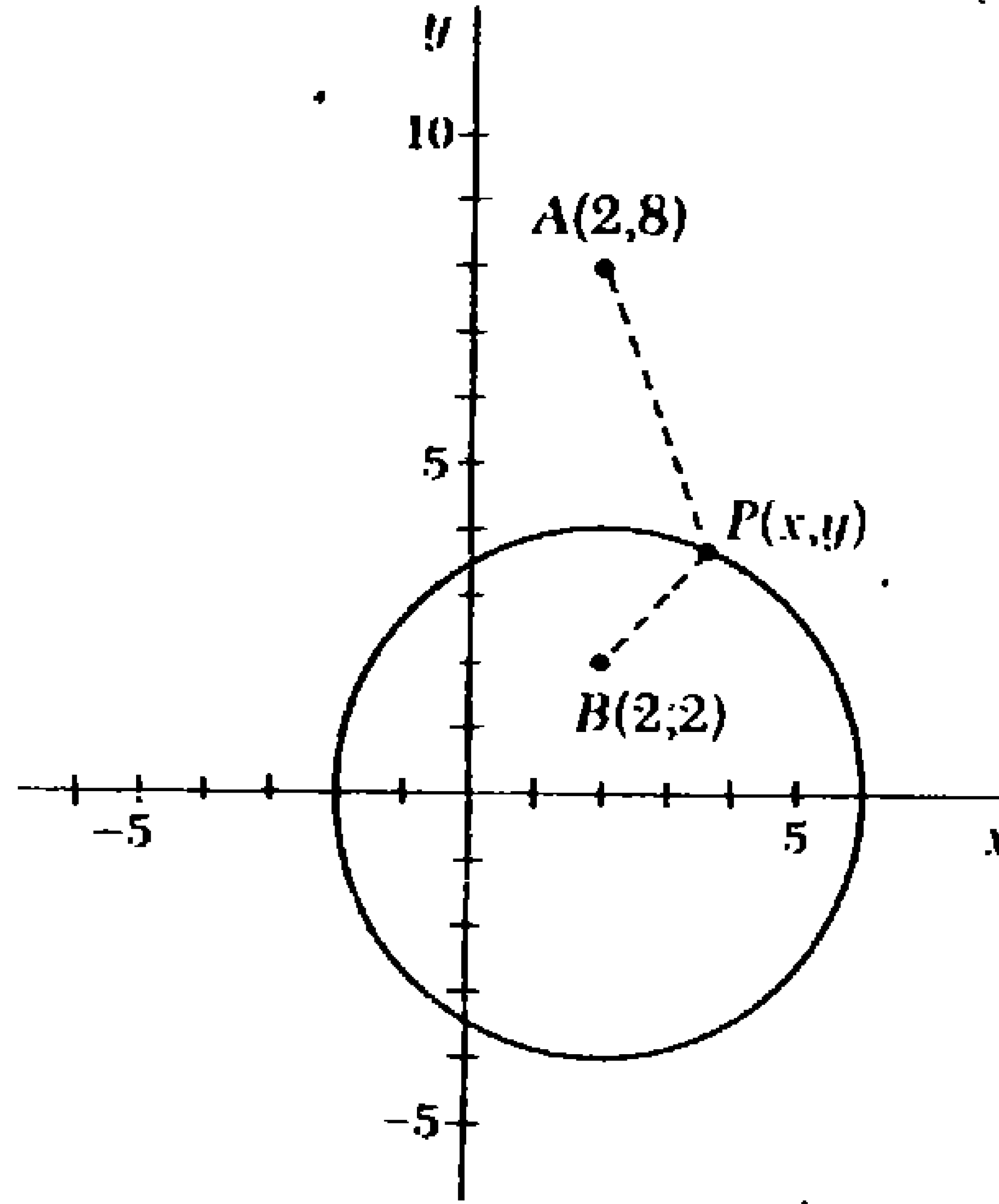
الشكل البيانى للمنحنى $4x^2 + 4y^2 - 32x + 12y + 21 = 0$.

بسبب معرفتنا أن الشكل البيانى لـ (٧) هو دائرة وأوجدنا المركز ونصف القطر ، كنا قادرين على تخطيط الشكل البيانى بسهولة ودقة أكثر كثيرا عما كنا نستطيعه بمجرد توقيع بعض النقط .

مثال ٣ . صف الفئة S لجميع النقط P فى مستوى الاحداثيات حيث المسافة بين P والنقطة $A(2,8)$ ضعف المسافة بين P والنقطة $B(2,2)$.

الفئة S تسمى أحياناً المحل الهندسى للنقطة P . لتكن P إحداثياها $P(x,y)$ تكون على S اذا واذا فقط كان $|PA| = 2\,|PB|$ (شكل ت ـ ١٨) . أى إذا وإذا فقط كان (x,y) حلا للمعادلة

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} \qquad (٨)$$



شكل ت ـ ١٨ . P تتحرك بحيث أن $|PA| = 2|PB|$ محلها الهندسى هو دائرة .

واذن هذه هى معادلة لـ S . لايجاد معادلة ابسط ، نكتب مربع كل من طرفى (٨) ، فنحصل على المعادلة المكافئة

$$(x-2)^2+(y-8)^2 = 4[(x-2)^2+(y-2)^2]$$

وهذه تختصر الى

$$3x^2+3y^2-12x-36=0$$

وبالتالى الى

$$x^2+y^2-4x-12=0 \qquad (٩)$$

نعرف أن (٩) المكافئة لـ(٨) ، هى معادلة دائرة ونستمر لايجاد المركز . ونصف القطر . باكمال المربع يكون لدينا

$$x^2-4x+4+y^2 = 12+4$$
$$(x-2)^2+y^2 = 16$$

المركز عند $(2,0)$ ، ونصف القطر 4 .

الفكرة الاساسية لايجاد معادلة المنحنى هى تحويل الوصف الهندسى للمنحنى الى لغة جبرية .

رغم أننا أكثر اهتماما بالهندسة التحليلية كوسيلة لفهم حساب التفاضل عن أنها وسيلة لدراسة الهندسة ، فان الأخيرة لها أهميتها ونعطى مثالا لاستخدامها .

مثال ٤ . اثبت تحليليا أن المستقيمين المتوسطين الواصلين الى الضلعين المتساويين فى مثلث متساوى الساقين يتساويان فى الطول .

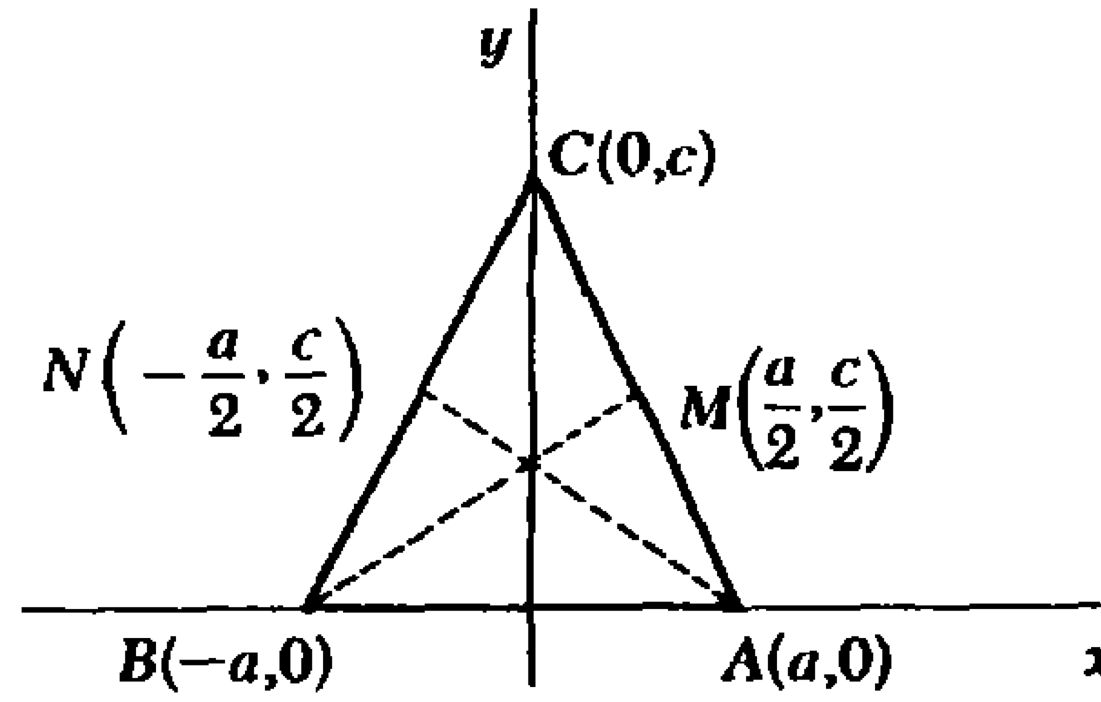
أى شكل هندسى يمكن تحريكه بدون تغيير خواصه الهندسية طالما لايتشوه الشكل . لذلك من المسموح به وضع الشكل على مستوى الاحداثيات بأى كيفية نريدها . أملا فى تبسيط العمل ، نضع المثلث بقاعدته AB على المحور x والرأس المقابل c على المحور الموجب y ، كما فى الشكل ت ـ ١٩ .

الآن نخصص إحداثيات للرؤوس . حيث أن الرأس A يمكن أن يكون فى أى مكان على المحور الموجب x ، كل ما يمكن قوله عن إحداثييه هو أنهما $(a,0)$ لعدد ما $a>0$. بما أن المثلث متساوى الساقين وموضوع كما بالشكل ، فاحداثيا B يجب أن يكونا $(-a\ ,\ 0)$. النقطة C يمكن أن تكون فى أى مكان على المحور الموجب y ، وإذن إحداثياها يكونان $(0\ ,c)$ لعدد ما $c>0$. يجب أن نكون حريصين ألا نختار حالة خاصة للشكل كاختيار $(0\ ,\ 7)$ و $(-5\ ,\ 0)$ ، $(5\ ,\ 0)$ كاحداثيات $A\ ,\ B\ ,\ C$ لانه عندئذ يكون برهان النظرية للمثلث المتساوى الساقين الخاص هذا ، وليس للمثلثات متساوية الساقين بوجه عام . منتصفا BC و AC هما $N\ (-a\ /2\ ,\ c\ /2)$ و $M(a\ /2\ ,\ c\ /2)$. طولا المستقيمين المتوسطين AN و BM هما

$$|BM| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}+a\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$$

$$|AN| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{c^2}{4}}$$

هذا يثبت أن $|AN| = |BM|$



شكل ت ـ ١٩

● المستقيم المتوسط فى مثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الى منتصف الضلع المقابل .

مسائل :

فى كل مما يأتى أوجد معادلتين على الصورتين (٣) و(٦) للدائرة التى مركزها عند C ونصف قطرها r :

١ - $C(0,0),\ r=7$ ٢ - $C(1,3),\ r=2$ ٣ - $C(-6,-1)\ \ r=1$

٤ - $C(-5,0),\ r=\frac{3}{2}$ ٥ - $C(a,0),\ r=a$

أوجد معادلة للدائرة التى تحقق الشروط المعطاة وخطط الشكل البيانى :

٦ - المركز عند $(-6\ ,\ 0)$ وتمر بنقطة الأصل .

٧ - المركز عند نقطة الأصل وتمر بالنقطة $(8\ ,\ 4)$.

٨ - المركز عند $(0\ ,\ 4)$ وتمر بالنقطة $(3\ ,\ 1)$.

٩ - نهايتا قطر عند النقطتين $(8\ ,\ 3)$ و $(0\ ,\ 1)$.

١٠ - نهايتا قطر عند النقطتين $(-b\ ,\ 0)$ و $(0\ ,\ b)$.

١١ - المركز فى الربع الثانى ونصف القطر 3 وتمس كلا من المحورين .

١٢ - المركز عند $(3, 0)$ وتمس الخط المنصف للربعين الثانى والرابع .

١٣ - أوجد معادلة للدائرة التى تمر بالنقط $(4,0)$ $(0,2)$ $(0,0)$.

أوجد مركز ونصف قطر كل من الدائرة الآتية وخطط شكلها البيانى :

١٤ - $x^2+y^2-2x-6y-26=0$ ١٥ - $x^2+y^2-10y=0$ ١٦ - $x^2+y^2-4x-4y+8=0$

١٧ - $x^2+y^2+2x-2y+11=0$ ١٨ - $4x^2+4y^2+4x+24y+9=0$

١٩ - $9x^2+9y^2+24y-38=0$ ٢٠ - $x^2+y^2+ax+ay=0$

خطط الشكل البيانى للمتباينات الآتية :

٢١ - $x^2+y^2\leqslant 36$ ٢٢ - $x^2+y^2>20$ ٢٣ - $(x-1)^2+(y-2)^2<16$

٢٤ - $x^2+y^2+4x-6y-12\leqslant 0$ ٢٥ - $4x^2+4y^2+20y\geqslant 11$

أوجد نقط تقاطع الدوائر الآتية مع المحور x

٢٦ - $x^2+y^2-6y-16=0$ ٢٧ - $x^2+y^2-8x+12y+16=0$

٢٨ - $x^2+y^2+4x-14y+30=0$

٢٩ - أثبت أن الدائرتين $x^2+y^2=5$ و $x^2+y^2+4x-2y=15$ متماستان عند النقطة $(2,-1)$

أوجد أقصر مسافة من النقطة المعطاة الى الدائرة المناظرة :

٣٠ - $x^2+y^2=16,\ (-5.12)$ ٣١ - $x^2+y^2-10x+6y-16=0,\ (-3,-9)$

٣٢ - $x^2+y^2-6x-10y-47=0,\ (10,0)$

٣٣ ـ أوجد معادلتي الدائرتين اللتين مركز كل منهما عند النقطة $(2 , -2)$ وتمسان الدائرة $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 5 = 0$

أوجد طول المماس من النقطة المعطاة للدائرة المناظرة :

٣٤ ـ $x^2 + y^2 = 20, \ (-3,6)$ ٣٥ ـ $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 14 = 0, \ (2,4)$

٣٦ ـ صف فئة جميع النقط P بحيث أن المسافة بين $A(-2 , 0)$ و P تكون ثلاثة أمثال المسافة بين $B(6 , 0)$ و P .

٣٧ ـ أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث أن حاصل جمع مربعي بعديها عن $B(5 , -4)$ و $A(0 , 2)$ هو 91 .

٣٨ ـ لتكن $P_1(x_1 , y_1) , P_2(x_2 , y_2) , \ldots , P_n(x_n , y_n)$ ، n من النقط في المستوى . صف فئة جميع النقط P حيث حاصل جمع مربعات المسافات بين P والنقط الـ n يساوي ثابتا معطى .

٣٩ ـ من أحد طرفي قطر في دائرة نصف قطرها r ، رسمت أوتار ومدت مسافة تساوي طول الوتر . صف الفئة المكونة من نهايات هذه الخطوط . (ارشاد : ضع الدائرة بحيث يكون مركزها عند نقطة الأصل ونهاية القطر عند $(-r , 0)$. لتكن (x,y) هي إحداثيات الطرف الآخر للوتر الممتد . أوجد علاقة بين y و x) .

٤٠ ـ قطعة مستقيمة طولها a تتحرك بحيث أن نهايتيها تكونان على خطين متعامدين . صف المحل الهندسي لمنتصفها (ارشاد : افرض أن الخطين المتعامدين هما المحوران وأن (x,y) إحداثيا المنتصف) .

٤١ ـ لأي قيم k تكون المعادلة $x^2 + y^2 + ky + 8 = 0$ لها شكل بياني ؟

٤٢ ـ اثبت أنه عندما $A \neq 0$ المعادلة (٦) يكون شكلها البياني دائرة ، اذا كان لها شكل بياني ، وذلك بكتابتها في الصورة (٣) . أوجد نصف قطر هذه الدائرة وعين الشرط على A, D, E, F بحيث لايوجد شكل بياني . متى يكون الشكل البياني مجرد نقطة ؟

٤٣ ـ أوجد معادلة للدائرة التي تمر بالنقطتين $(7,0)$ و $(0, 1)$ وتمس المحور y .

٤٤ ـ أوجد معادلة للدائرة التي تمس الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3,4)$ ونصف قطرها 12 . (اجابتان) .

٤٥ ـ أوجد معادلة الدائرة التي تمس كلا من محوري الاحداثيات وتمر بالنقطة $(8 , 9)$. (ارشاد : على أي خط مستقيم يجب أن يقع المركز ؟)

٤٦ ـ اثبت أن طول المماس للدائرة $(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$ من النقطة (x_1 , y_1) هو $\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$. أوجد أطوال المماسات للدائرة : $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 27 = 0$ من النقط $(2,-1)$ و $(-1 , -4)$, $(10 , 3)$.

٤٧ ـ صف فئة جميع النقط $P(x , y)$ حيث طول المماس من P للدائرة $x^2 + y^2 = 9$ يساوي ضعف طول المماس من P للدائرة $x^2 + y^2 + 3x - 6y = 0$ (ارشاد : انظر المسألة ٤٦) .

٤٨ ـ أثبت أن معادلة المماس للدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ عند النقطة (x_1 , y_1) على الدائرة هي $x_1x + y_1y = a^2$.

فى كل ممايأتى أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط الثلاث (ارشاد : المعادلة ستكون على الصورة

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

التى نحصل عليها من (٦) بالقسمة على A . عوض احداثيات كل نقطة ، كل فى دورها فى هذه المعادلة ، فنحصل على ثلاث معادلات فى D' , E' و F' . بما أن النقط تقع على الدائرة ، F' و D' , E' يجب أن تكون أعدادا بحيث هذه المعادلات تكون صحيحة . حل المعادلات آنيا لـ ($D, E, F,$

٤٩ ـ $(-3,0), (0,-3), (0,0)$ ٥٠ ـ $(0,0), (1,-1), (4,0)$

٥١ ـ $(0,1), (2,0), (0,-3)$ ٥٢ ـ $(1,0), (6,0), (0,4)$

٥٣ ـ اثبت أن حاصل جمع مربعات أطوال المستقيمات المتوسطة لمثلث تساوى ثلاثة أرباع حاصل جمع أطوال الاضلاع الثلاثة .

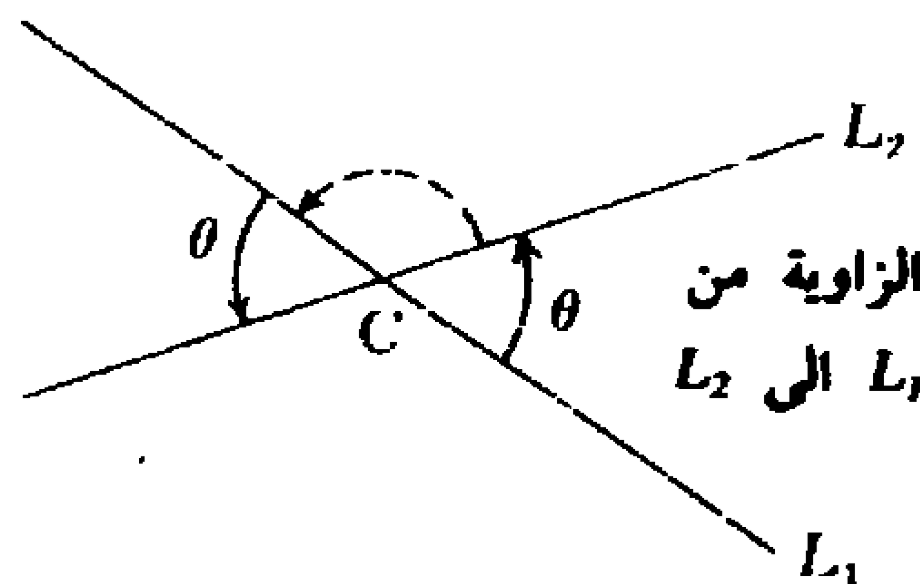
٥٤ ـ اثبت تحليليا ان قطرى شبه المنحرف المتساوى الساقين متساويان فى الطول .

٥٥ ـ اثبت أن المثلث المرسوم داخل نصف دائرة هو مثلث قائم . (ارشاد : لتكن $P(a , b)$ هو الرأس الذى ليس على القطر . حينئذ (a , b) تحقق معادلة الدائرة .)

٢٦ ـ اثبت تحليليا ان الخطين الواصلين بين منتصفى كل ضلعين مقابلين فى الشكل الرباعى ينصف كل منهما الآخر .

ت ـ ٤
ميل الخط المستقيم

ليكن L_2 و L_1 خطين مستقيمين متقاطعين عند C (شكل ت ـ ٢٠) . اذا دار L_1 فى اتجاه مضاد لعقرب الساعة الى أن انطبق لأول مرة على L_2 ، فان الزاوية الموجبة التى دارها تسمى الزاوية من L_1 الى L_2 . فى الشكل ت ـ ٢٠ أى من الزاويتين المشار اليهما بقوس متصل هى الزاوية من L_1 الى L_2 . الزاوية المشار اليها بقوس مشرط هى الزاوية من L_2 الى L_1 . واضح أنه اذا كانت θ هى مقدار الزاوية



شكل ت ـ ٢٠

من L_1 الى L_2 فان θ تكون بين $180°$ و 0 . اذا كان المستقيمان متوازيين أو منطبقين فمن المعتاد أن نقول أن الزاوية من خط الى الآخر مقدارها $0°$. واذن في كل حالة $0° \leqslant \theta < 180°$.

ت ـ ٩ تعريف . زاوية ميل خط مستقيم في مستوى الاحداثيات هي الزاوية من المحور x الى الخط المستقيم .

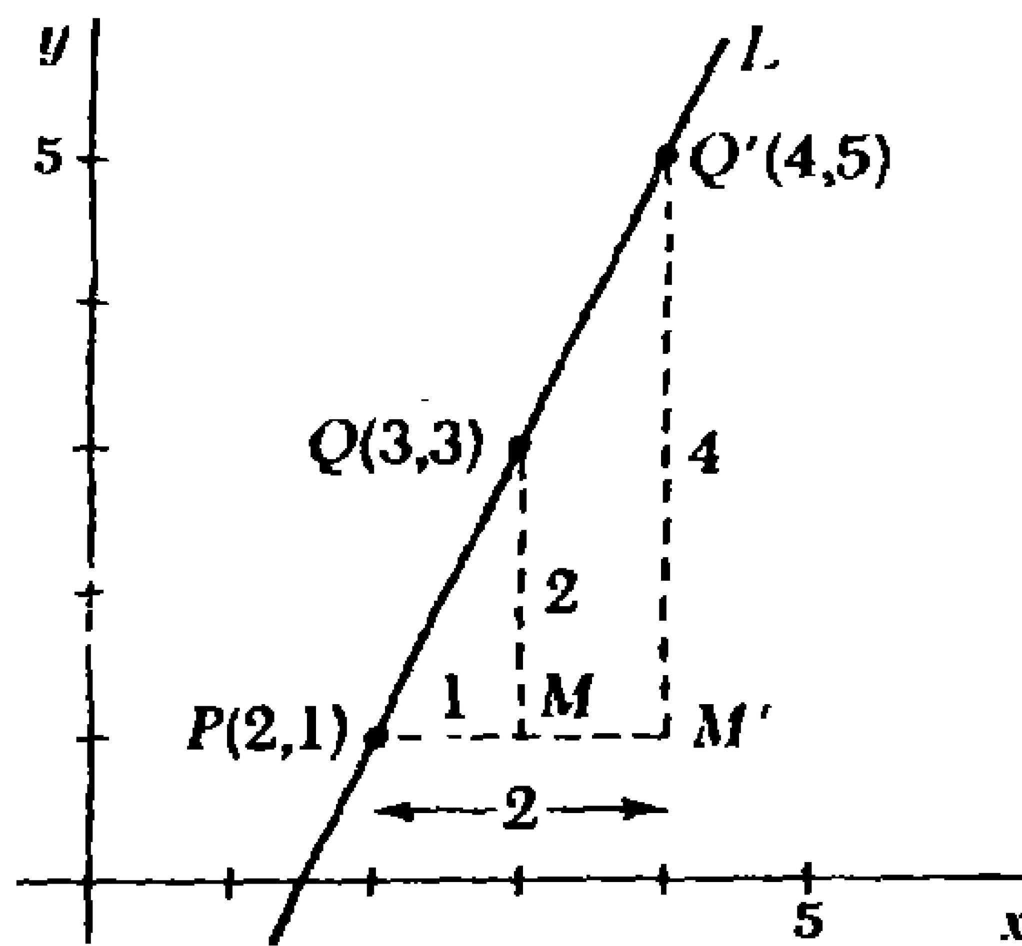
في الشكل ت ـ ٢١ زاويتا الميل للمستقيمين L' و L مقدارهما $150°$ و $45°$. زاوية الميل المستقيم هي مقياس لانحدار المستقيم ، لكن مقياس افضل هو ميل الخط المستقيم .

خذ في الاعتبار الخط المستقيم L في الشكل ت ـ ٢٢ المار بالنقطتين $Q(3, 3)$ و $P(2, 1)$. لدينا $\overline{PM} = 1$ و $\overline{MQ} = 2$. عندما تتحرك نقطة على L من P الى Q ، النقطة ترتفع رأسيا وحدتين لكل وحدة تغير في المسافة الأفقية . النسبة بين هاتين المسافتين الموجهتين

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{2}{1} = 2$$

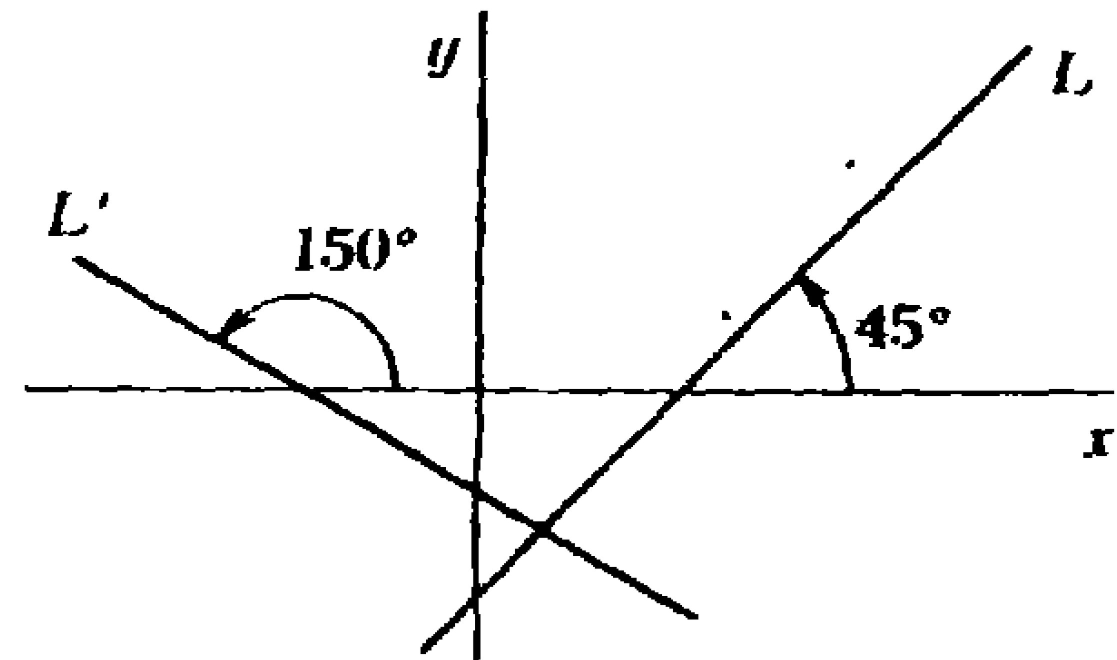
هي مقياس لانحدار الخط المستقيم L ، يسمى ميله . طبعا ، نحصل على نفس النتيجة اذا قيست النسبة بين التغيرين الافقي والرأسي عندما تتحرك نقطة من P الى نقطة اخرى على الخط المستقيم ، وليكن الى $Q'(4, 5)$ في هذه الحالة النسبة تكون

$$\frac{\overline{M'Q'}}{\overline{PM'}} = \frac{4}{2} = 2$$



شكل ت ـ ٢٢

الميل = $\frac{\text{التغير في الاحداثي } y}{\text{التغير في الاحداثي } x} = 2$.



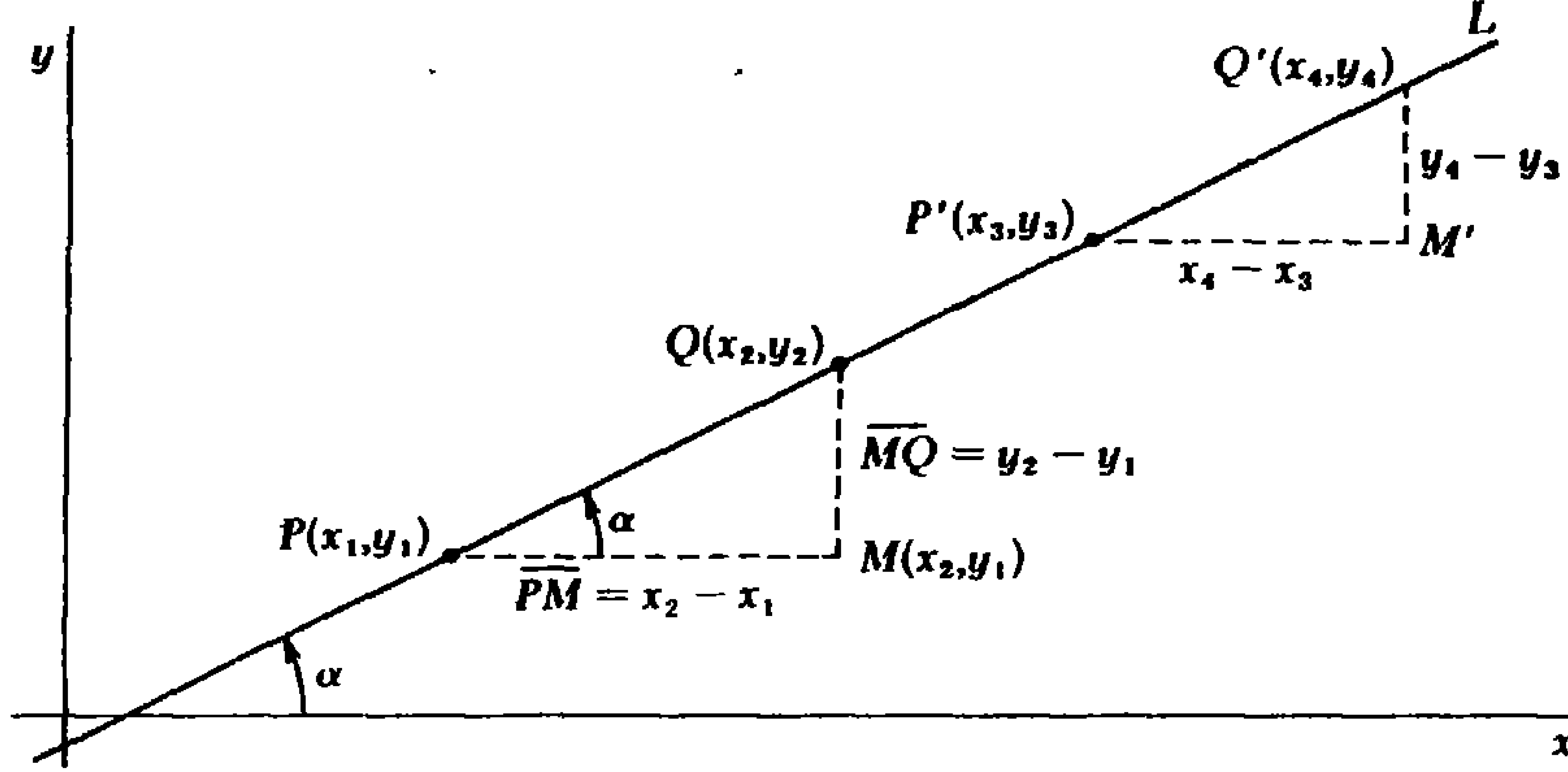
شكل ت ـ ٢١

زاويتا الميل للمستقيمين L' و L مقدارهما $150°$ و $45°$.

أي خط غير رأسي له مقياس مماثل للانحدار . لتكن $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$ أي نقطتين على الخط المستقيم L (شكل ت ـ ٢٣) . التغيران في الاحداثيين x و y عندما تتحرك نقطة من P الى Q هما المسافتان الموجهتان $\overline{PM} = x_2 - x_1$ و $\overline{MQ} = y_2 - y_1$. النسبة بينهما

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (١)$$

هى ميل الخط المستقيم .



شكل ت ـ ٢٣

$$\text{الميل} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PM}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha$$

ت ـ ١٠ تعريف . ليكن L خطا مستقيما لايوازى المحور y ولتكن $Q(x_2 , y_2)$ و $P(x_1 , y_1)$ أى نقطتين مختلفتين على الميلm للخط المستقيم L هو النسبة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (٢)$$

الخطوط الموازية للمحور y ليس لها ميل .

سيعلم القارىء من (١) ان ميل L هو ظل زاوية الميل α لـ L ،

$$m = \tan\alpha$$

لايجاد ميل الخط المستقيم L المار بالنقطتين $(4 , 6)$ و $(-1 , 3)$ فى الشكل ت ـ ٢٤ ، ندع $Q(x_2 , y_2) = (4 , 6)$ و $P(x_1 , y_1) = (-1 , 3)$. فيكون من (٢) ميل L هو

$$m = \frac{6 - 3}{4 + 1} = \frac{3}{5}$$

الميل m' للخط المستقيم L' المار بالنقطتين $(1 , -1)$ و $(-1 , 3)$ فى نفس الشكل هو

$$m' = \frac{-1 - 3}{1 + 1} = -2$$

اذا كان الخط L فى الشكل ت ـ ٢٣ هابطا وكانت النقطة Q على يمين P ، فان $\overline{MQ}$ يكون سالبا وكذلك يكون الميل* يمكننا أن نرى من (١) أن الخط المستقيم يكون صاعدا أو هابطا تبعا لكون ميله موجبا أو سالبا . الخطوط الموازية للمحور x لها الميل صفر . الخطوط التى تكاد تكون أفقية ميلها قريب من الصفر ، بينما الخطوط المنحدرة بشدة ميلها يكون كبيرا موجبا أو سالبا . اذا أعطينا أى عدد حقيقى r ، يوجد على الاقل خط واحد ميله r ، هو الخط الذى يمر بنقطة الاصل والنقطة $(1 , r)$. أى توجد خطوط ميلها أى عدد معطى . الخطوط الرأسية هى فقط التى ليس لها ميل .

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

لايهم أى من النقطتين فى التعريف ت ـ ١٠ تسمى P وأى تسمى Q . فمثلا فى الشكل ت ـ ٢٤ اذا افترضنا أن $P(x_1,y_1) = (4,6)$ and $Q(x_2,y_2) = (-1,3)$ فاننا نحصل لميل L على

$$m = \frac{3-6}{-1-4} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

وهى نفس النتيجة السابقة . أيضا الميل يكون مستقلا عن النقط المختارة على الخط المستقيم . لنرى ذلك ، نفرض أن $P'(x_3 , y_3)$ و $Q'(x_4 , y_4)$ أى زوج آخر من النقط على L فى الشكل ت ـ ٢٣ المثلثان $P'M'Q'$ و PMQ متشابهان ، فأضلاعهما متناسبة ، واذن

$$\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وبالتالى ، فالميل محسوبا من Q' و P' هو نفسه المحسوب من Q و P . فمثلا ، الخط L فى الشكل ت ـ ٢٤ يمر أيضا بالنقطة $(-6 , 0)$. الميل محسوبا من النقطتين $(4 , 6)$ و $(-6 , 0)$ هو

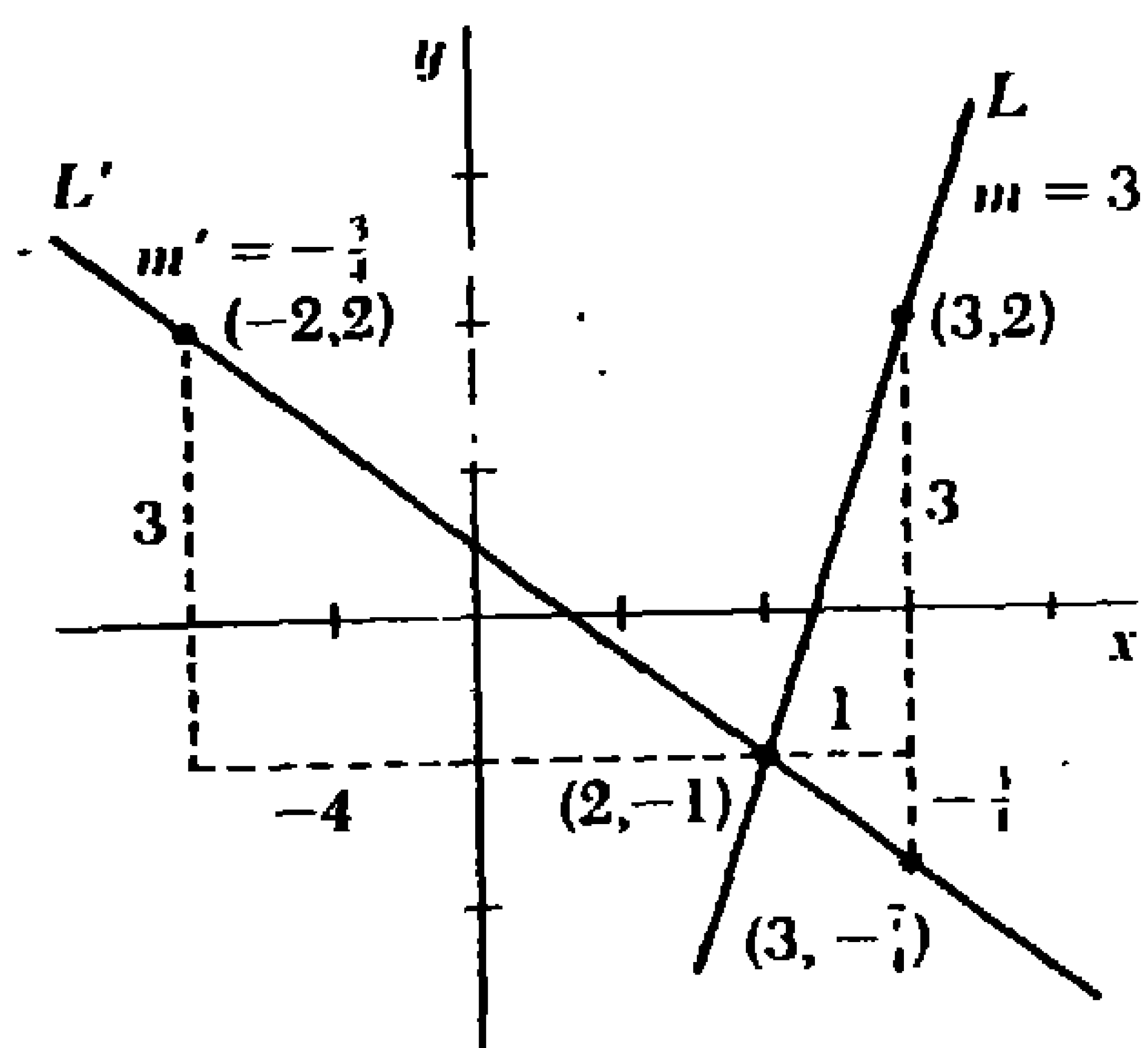
$$m = \frac{6-0}{4+6} = \frac{3}{5}$$

وهى نفس النتيجة السابقة .

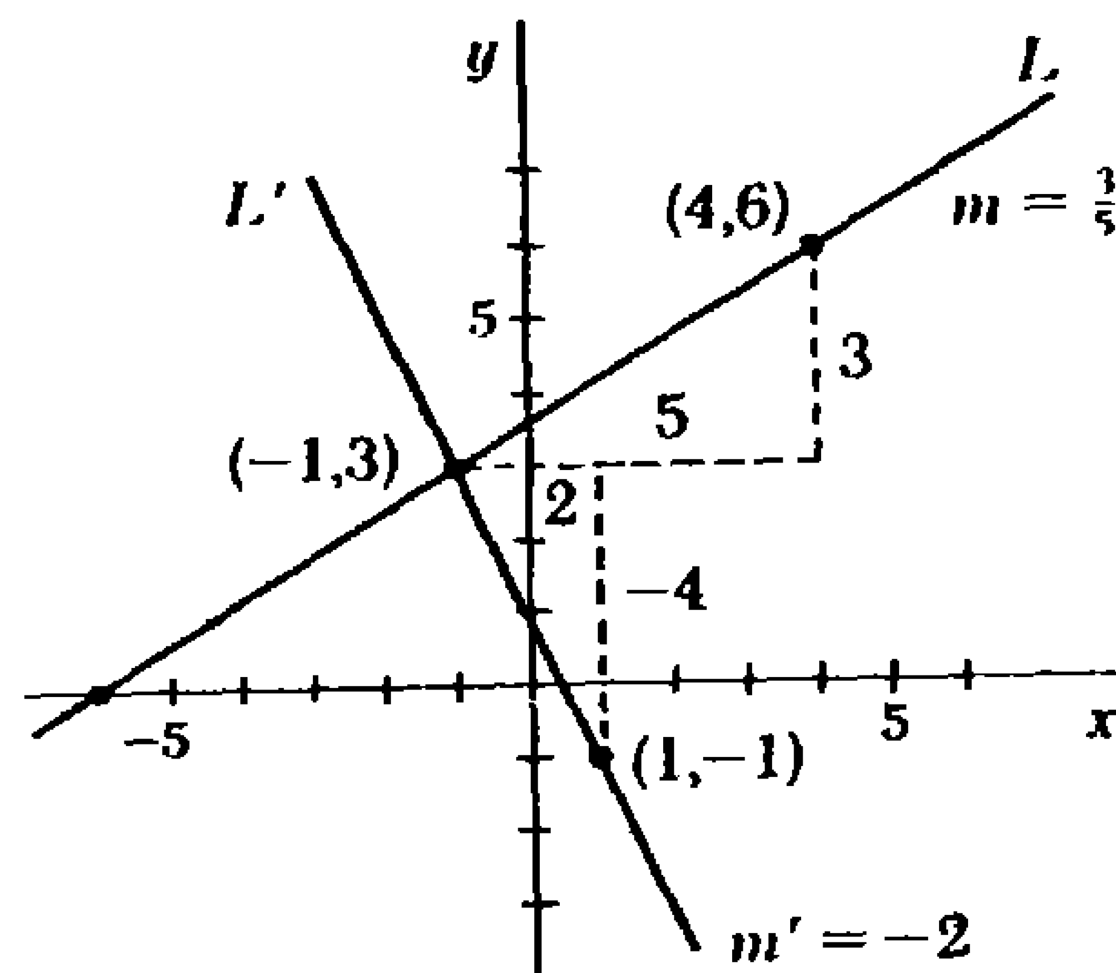
مثال ١ . كون المستقيمين المارين بالنقطة $(2 , -1)$ وميلاهما $-\frac{4}{3}$ و 3 .

الخط المار بالنقطة $(2 , -1)$ وميله 3 يكون صاعدا (شكل ت ـ ٢٥) وعندما تتحرك نقطة عليه من اليسار الى اليمين الاحداثى y يزيد 3 وحدات لكل وحدة زيادة فى الاحداثى x . لتكوين الخط المستقيم ، نبدأ من النقطة $(2, -1)$ ، نتحرك إلى اليمين وحدة واحدة الى النقطة $(3, -1)$ ، ثم إلى أعلى 3 وحدات إلى النقطة $(3, 2)$. الخط L المار بالنقطتين $(3, 2)$ و $(2, -1)$ هو الخط المطلوب . الخط المار بالنقطة $(2, -1)$ وميله $-\frac{4}{3}$ يكون هابطاً وعندما تتحرك نقطة عليه ، الاحداثى y يتناقص $\frac{4}{3}$ وحدة لكل وحدة زيادة فى الاحداثى x لتكوين الخط ، نبدأ من النقطة $(2, -1)$ ، نتحرك الى اليمين وحدة واحدة ، ثم إلى أسفل $\frac{4}{3}$ وحدة فنصل إلى النقطة $(3,-\frac{7}{3})$ الخط المستقيم L' المار بالنقطتين $(3,-\frac{7}{3})$ و $(2, -1)$ هو الخط المطلوب . بدلا من

* التعبيران يرتفع ويهبط يشيران دائماً الى الحركة على الخط المستقيم من اليسار الى اليمين .



شكل ت ـ ٢٥

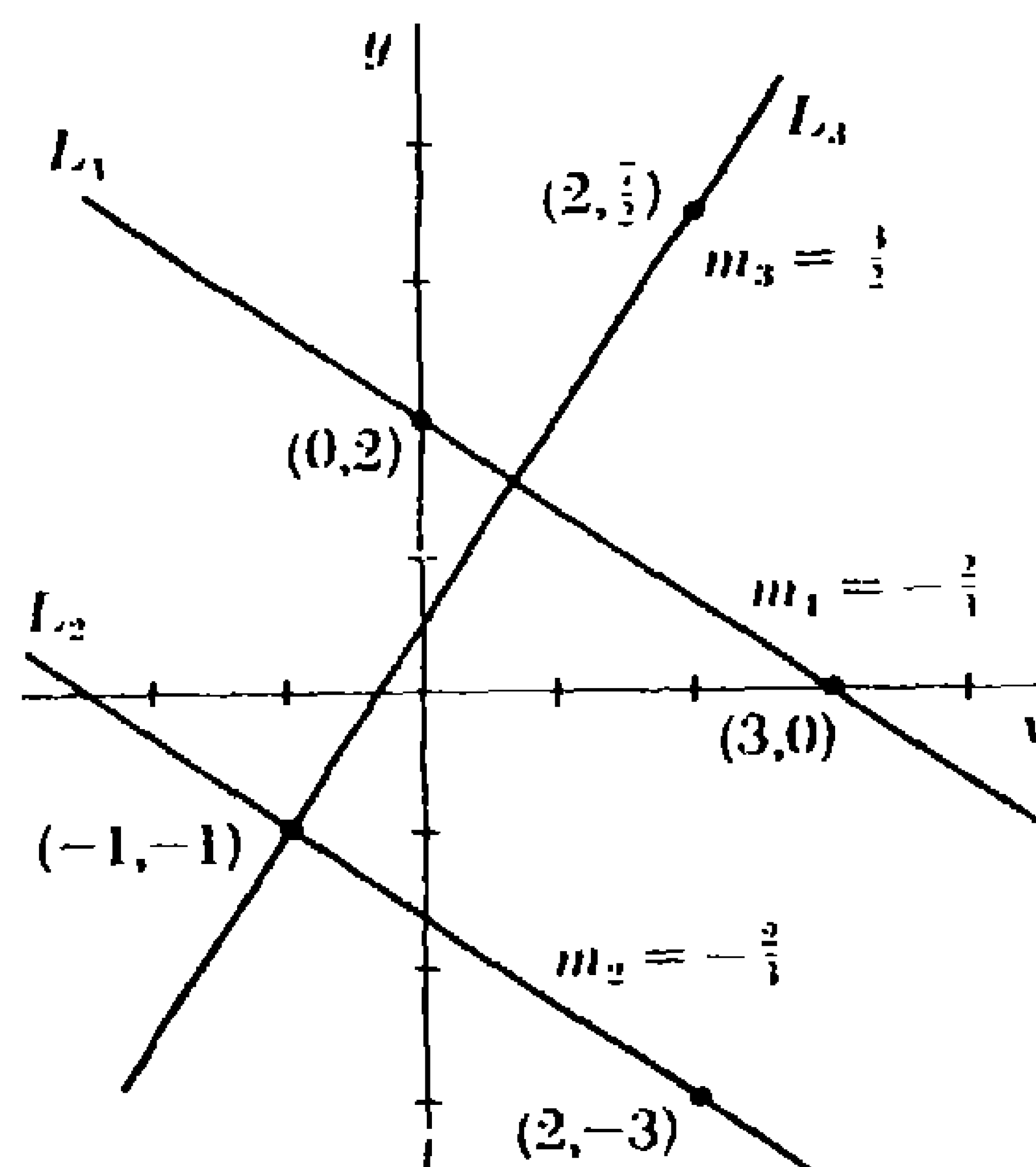


شكل ت ـ ٢٤

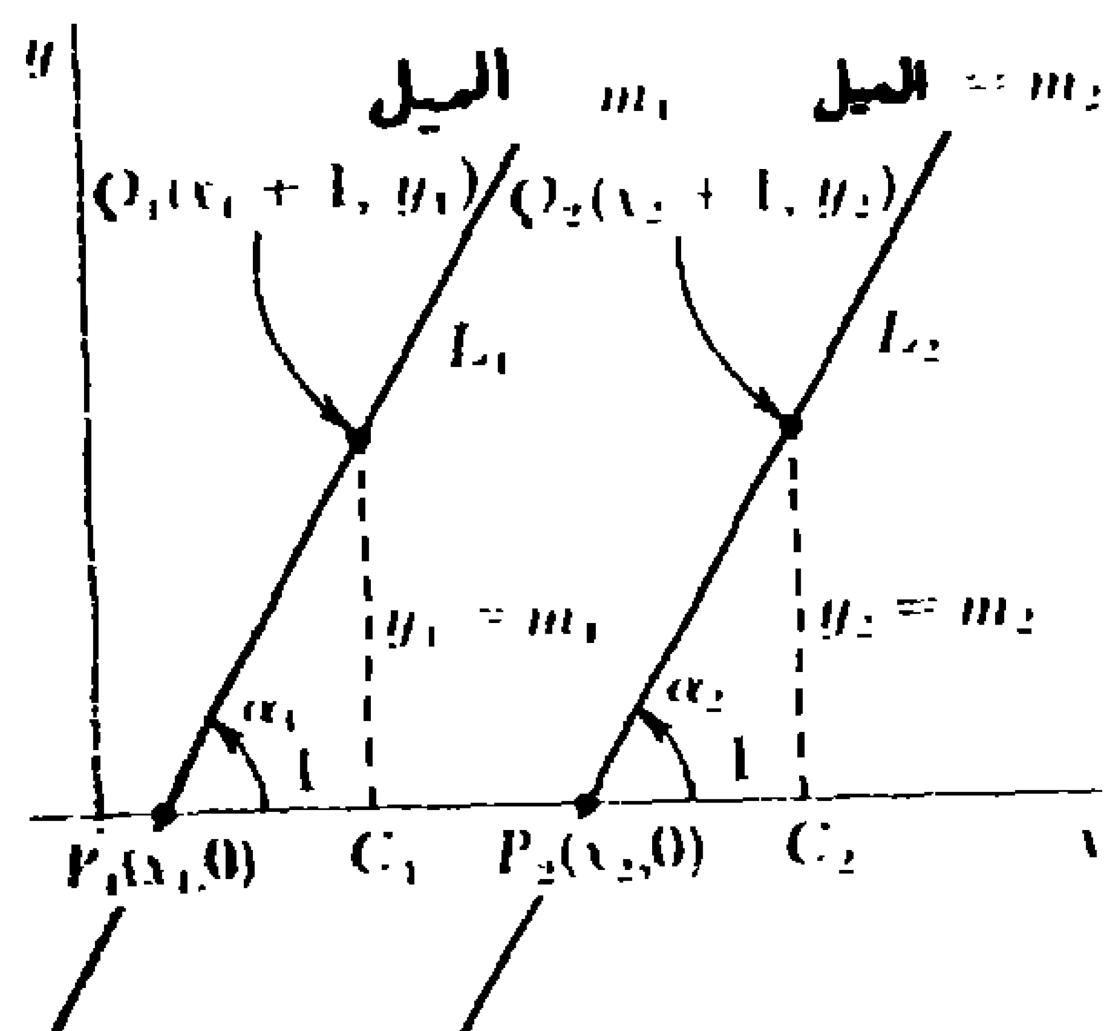
ذلك ، يمكننا أيضاً الابتداء من النقطة (1—, 2) ، نتحرك الى اليسار 4 وحدات ، ثم إلى أعلى 3 وحدات لنصل إلى النقطة (2 ,2—) .

من الواضح جدا أن الخطوط المتوازية لها نفس الميل . أيضا الدليل لتعامد مستقيمين بسيط جدا . الأمران معطيان فى النظرية الآتية .

ت ـ ١١ نظرية . ليكن L_2 و L_1 خطين مستقيمين ميلاهما m_2 و m_1 .
(أولا) L_2 و L_1 يكونان متوازيين اذا واذا فقط كان $m_1 = m_2$.
(ثانيا) L_2 و L_1 يكونان متعامدين اذا واذا فقط كان $m_1 = -1 / m_2$.



شكل ت ـ ٢٦
L_2 و L_1 ميلاهما متساويان فهما متوازيان L_3 و L_1 لهما ميلان كل سالب مقلوب الآخر فهما متعامدان .



شكل ت ـ ٢٧

فمثلا ، فى الشكل ت ـ ٢٦ الخط L_1 الذى يمر بالنقطتين $(3, 0)$ و $(0, 2)$ يوازى الخط L_2 الذى يمر بالنقطتين $(-3, 2)$ و $(-1, -1)$ لأن

$$m_1 = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3} \qquad \text{و} \qquad m_2 = \frac{-1+3}{-1-2} = -\frac{2}{3}.$$

الخط L_3 الذى يمر بالنقطتين $(2,\frac{1}{2})$ و $(-1, -1)$ عمودى على الخط L_1 لأن

$$m_3 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2+1} = \frac{3}{2} = -\frac{1}{m_1}$$

البرهان . (أولا) لتكن النقطتان $P_1(x_1, 0)$ و $P_2(x_2,0)$ هما نقطتا تقاطع المحور x مع المستقيمين L_2 و L_1 ، ولتكن زاويتا الميل هما α_2 و α_1 (شكل ت ـ ٧) . اختر نقطتين Q_1, Q_2 على المستقيمين L_1, L_2 احداثياتهما السينية $x_2 + 1$ و $x_1 + 1$. لتكن احداثياتهما الصادية y_2 و y_1 . ميلا المستقيمين L_2 و L_1 ، محسوبين من النقط P_1, Q_1 و P_2, Q_2 و هما y_2 و y_1 . واذن

$$m_1 = y_1 = \overline{C_1Q_1} \qquad \text{و} \qquad m_2 = y_2 = \overline{C_2Q_2}$$

حيث C_2 و C_1 هما النقطتان الموضحتان فى الشكل . اذا كانت $m_1 = m_2$ ، فان $\overline{C_1 Q_1} = \overline{C_2 Q_2}$ ، المثلثان $P_2 C_2 Q_2$ و $P_1 C_1 Q_1$ يتطابقان ، $\alpha_1 = \alpha_2$ ،والمستقيم L_1 يوازى L_2 وبالعكس ، اذا كان L_2 و L_1 متوازيين ، فان $\alpha_1 = \alpha_2$ ، المثلثان يتطابقان ، $\overline{C_1 Q_1} = \overline{C_2 Q_2}$ و $m_1 = m_2$. اذا كان أى الخطين موازيا للمحور x ، فانه لايوجد جزء مقطوع من المحور x ويجب تعديل البرهان . نترك هذا للقارىء (المسألة ٤٨) .

(ثانيا) ليكن (a,b) احداثيا نقطة التقاطع M للمستقيمين L_2 و L_1 (شكل ت ـ ٢٨) . اختر نقطتين $P_2(c,d_2)$ و $P_1(c, d_1)$ ، الواحدة مباشرة فوق الاخرى ، على L_2 و L_1 . بما أن الخطين لهما ميلان ، فكل منهما لايكون موازيا للمحور y ، ومثل هذا الاختيار ممكن . المستقيمان L_2 و L_1 يتعامدان اذا واذا فقط كان المثلث MP_1P_2 له زاوية قائمة عند M ، اى اذا واذا فقط كان

$$|MP_1|^2 + |MP_2|^2 = |P_2P_1|^2$$

هذه المعادلة تكافىء

$$(c-a)^2 + (d_1-b)^2 + (c-a)^2 + (d_2-b)^2 = (d_1-d_2)^2$$

التى تختزل الى

$$2d_1d_2 - 2d_1b - 2d_2b + 2b^2 = -2(c-a)^2,$$

أى

$$(d_1-b)(d_2-b) = -(c-a)^2.$$

ومن ثم

$$\frac{d_1-b}{c-a}\,\frac{d_2-b}{c-a} = -1$$

بما أن ميلى الخطين L_2 و L_1 هما $m_1 = (d_1-b)/(c-a)$ و $m_2 = (d_2-b)/(c-a)$

هذه المعادلة الاخيرة تصبح

ونكون قد أثبتنا (ثانيا) $$m_1m_2=-1 \qquad (٣)$$

هذه النظرية تقول أن الخطين يكونان متعامدين اذا واذا فقط كان ميل كل منهما سالب مقلوب ميل الآخر ، وذلك بفرض أن كلا من المستقيمين لايكون موازيا لأى من المحورين . المعادلة (٣) هى صورة أخرى لهذا الشرط ، كثيرا ما تستخدم .

مثال ٢ . أثبت أن النقط $A(-2,4)$, $B(2,2)$, و $C(8,-1)$ تقع على خط مستقيم .

الميل m_1 للمستقيم AB هو

$$m_1=\frac{4-2}{-2-2}=-\frac{1}{2}$$

والميل m_2 للمستقيم BC هو

$$m_2=\frac{2+1}{2-8}=-\frac{1}{2}$$

اذن المستقيمان متوازيان ، وبما أن لهما النقطة B مشتركة ، اذن يتحتم انطباقهما .

مثال ٣ . أثبت تحليليا أن المثلث المرسوم داخل نصف دائرة يكون قائم الزاوية .

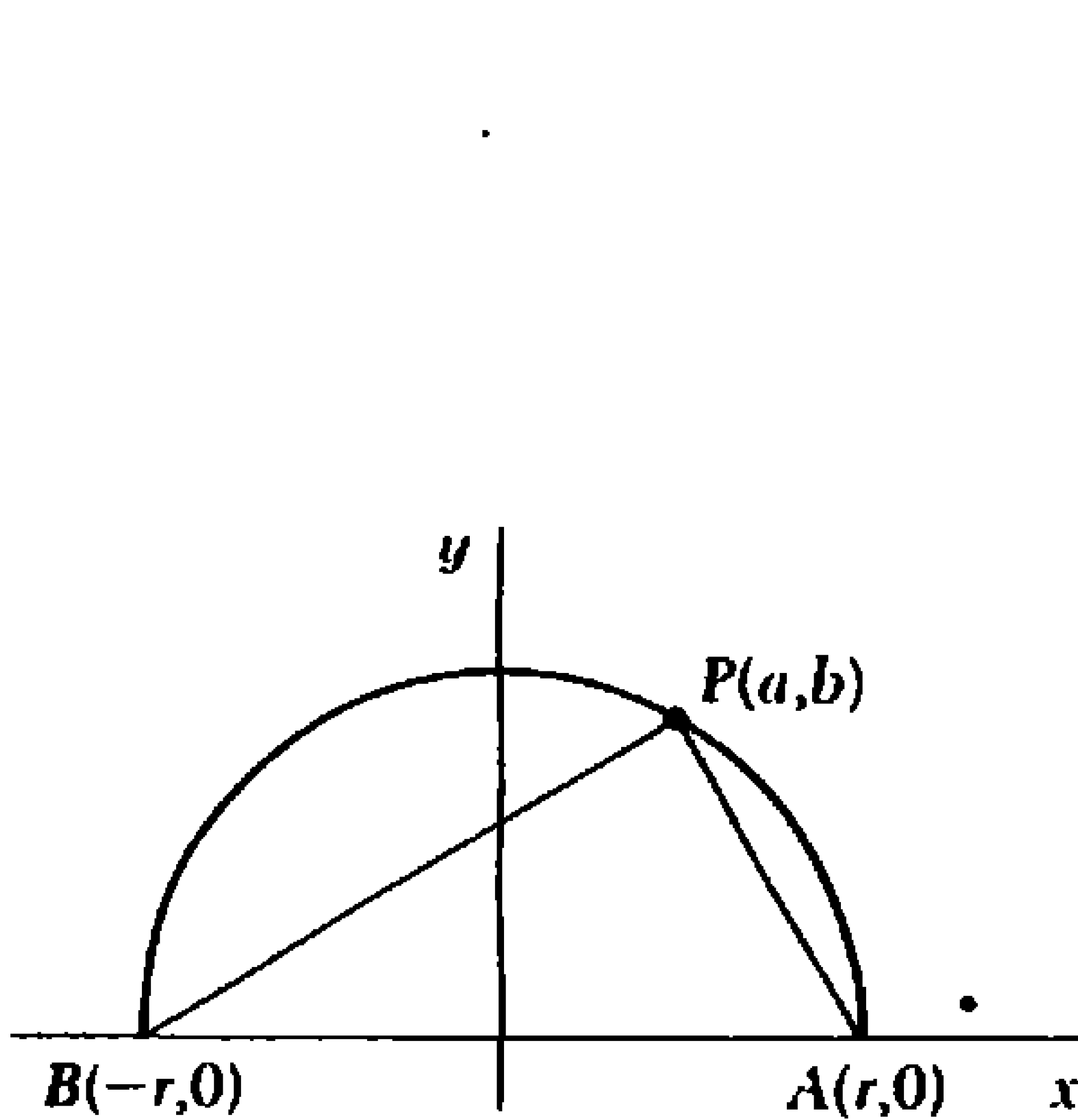
ضع نصف الدائرة مع مثلثها المرسوم داخلها على مستوى الاحداثيات بحيث يكون مركزها عند نقطة الاصل والقطر على المحور x ، كما فى الشكل ت ـ ٢٩ . اذا فرضنا أن r نصف قطر الدائرة ، فان نهايتى القطر B و A لهما الاحداثيات $B(-r,0)$ و $A(r,0)$. ليكن (a,b) احداثى الرأس الثالث P للمثلث . اذا رمزنا لميلى BP و AP بالرمزين m_{BP} و m_{AP} فانه يكون

$$m_{AP}=\frac{b}{a-r}, \qquad m_{BP}=\frac{b}{a+r}, \qquad و \qquad m_{AP}m_{BP}=\frac{b^2}{a^2-r^2}$$

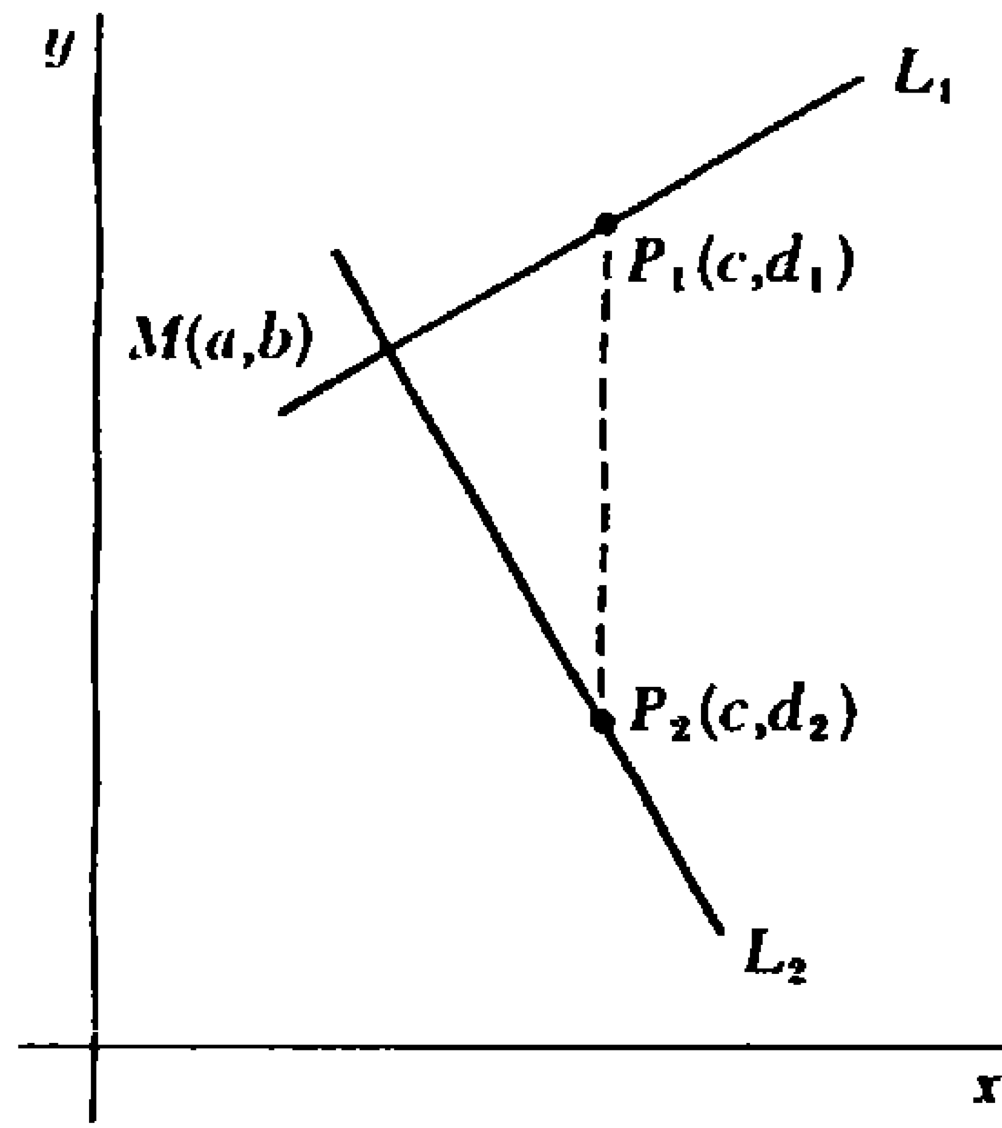
بما أن P على نصف الدائرة ، احداثياها (a,b) يحققان معادلة الدائرة $x^2+y^2=r^2$. أى أن ، $b^2=r^2-a^2$. اذن

$$m_{AP}m_{BP}=\frac{r^2-a^2}{a^2-r^2}=-1$$

فميلا المستقيمين BP و AP كل منهما سالب مقلوب الآخر ، واذن P زاوية قائمة .



شكل ت ـ ٢٩



شكل ت ـ ٢٨

مسائل :

وقع أزواج النقط الآتية وأوجد ميل وزاوية ميل الخط المستقيم الذى يصل بينهما :

١ ـ $(2,1),\ (5,4)$

٢ ـ $(0,-3),\ (4,-3)$

٣ ـ $(1,-1),\ (-5,5)$

٤ ـ $(-2,-1),\ (-2,7)$

٥ ـ $(2,2),\ (2-3\sqrt{3},\ -1)$

٦ ـ $(u,\ v+w),\ (u+v,\ w)$

وقع ازواج النقط الاتية وأوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين وميل الخط العمودى :

٧ ـ $(-2,0),\ (1,4)$

٨ ـ $(6,5),\ (8,-3)$

٩ ـ $(b,0),\ (0,c)$

١٠ ـ $(-1,-1),\ (4,-1)$

١١ ـ $(2,5),\ (2,-8)$

١٢ ـ $(0,3),\ (a,b)$

أثبت أن الخط المستقيم الواصل بين النقطتين الأولى والثانية عمودى على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين الثالثة والرابعة .

١٣ ـ $(-3,6),\ (8,2),\ (0,0),\ (4,11)$

١٤ ـ $(7,8),\ (5,-5);\ (4,1),\ (-9,3)$

١٥ ـ $(-r,0),\ (a,\ \sqrt{r^2-a^2});\ (a,\ \sqrt{r^2-a^2}),\ (r,0)$

أثبت بواسطة الميل أن النقط الثلاث تقع على خط مستقيم :

١٦ ـ $(0,1),\ (2,5),\ (6,13)$

١٧ ـ $(6,3),\ (-3,0),\ (12,5)$

١٨ ـ $(4,2),\ (1,$[illegible]$),\ (-6,7)$

١٩ ـ $(a,\ 2-a),\ (3b,\ 2-3b),\ (-c,\ c+2)$

عين ما اذا كانت النقط الاربع فى المجموعات الآتية تقع على خط مستقيم :

٢٠ ـ $(0,-2),\ (2,-1),\ (6,1),\ (-4,-4)$

٢١ ـ $(-6,5),\ (3,-1),\ (9,-5),\ (0,1)$

٢٢ ـ $(0,3),\ (4,5),\ (6,6),\ (-2,1)$

أثبت أن النقط هى رؤوس متوازى أضلاع وعين ما اذا كان متوازى الاضلاع مستطيلا :

٢٣ ـ $(-2,3),\ (1,4),\ (2,1),\ (-1,0)$

٢٤ ـ $(2,2),\ (-2,10),\ (4,3),\ (0,11)$

٢٥ ـ $(5,-4),\ (-11,16),\ (-1,4),\ (-5,8)$

أى من ثلاثيات النقط الآتية تكون رؤوساء لمثلث قائم الزاوية ؟

٢٦ ـ $(0,0),\ (5,3),\ (7,0)$

٢٧ ـ $(-1,1),\ (1,-3),\ (7,5)$

٢٨ ـ $(0,-5),\ (6,1),\ (-4,-2)$

٢٩ ـ $\left(a,\ \frac{3a-11}{2}\right),\ \left(\frac{3(1-b)}{2},\ b\right),\ (3,-1)$

٣٠ ـ أثبت أن $(-4,-2)$ و $(-2,3)$ ، $(3,1)$ ، $(1,-4)$ هى رؤوس مربع .

٣١ ـ كون خطوطا مستقيمة تمر بالنقطة $(1\ ,\ 3)$ وميلها كالآتى :

$0\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 10$ ولايوجد ميل $-10\ ,\ -2\ ,\ -1\ ,\ -\frac{1}{3}$.

كون خطا مستقيما يمر بكل من النقط الآتية وميله هو العدد المعطى :

٣٢ ـ $(3,0),\ 1$

٣٣ ـ $(2,-2),\ \frac{5}{3}$

٣٤ ـ $(1,2),\ -\frac{7}{5}$

٣٥ ـ $(0,0),\ -\sqrt{2}$

٣٦ ـ اثبت أن النقطة $(3\ ,\ -2)$ تقع على المنصف العمودى للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(6\ ,\ 5)$ و $(-4\ ,\ 1)$.

٣٧ ـ عين قيمة b بحيث أن النقطة $(3\ ,\ b)$ تقع على المستقيم الواصل بين النقطتين $(-1\ ,\ -2)$ و $(3\ ,\ 1)$.

٣٨ ـ عين قيمة a بحيث أن النقط $(a,-1)\ ,\ (2,5)\ ,\ (-4,-2)$ تكون رؤوس مثلث قائم الزاوية وزاويته القائمة عند $(2\ ,\ 5)$.

٣٩ ـ بفرض أن (كما ستثبت فى البند التالى) الشكل البيانى لـ $y = 2x + 3$ هو خط مستقيم ، أوجد ميله .

٤٠ ـ أوجد احداثى نقطة P بحيث أن ميل الخط المستقيم المار بالنقطة P ونقطة الاصل يساوى -2 وميل الخط المستقيم المار بالنقطة P والنقطة $(3\ ,\ 0)$ يساوى $\frac{3}{2}$.

النقط الثلاث المعطاة ، بالترتيب ، هى رؤوس متوازى أضلاع .

أوجد الرأس الرابع :

٤١ ـ $(1,3)\ ,\ (2,0)\ ,\ (-7,0)$　　　٤٢ ـ $(4,3)\ ,\ (3,5)\ ,\ (-2,-2)$

٤٣ ـ اذا كانت النقطتان $(4\ ,\ 3)$ و $(0\ ,\ -3)$ رأسين متجاورين لمربع ، أوجد الرأسين الآخرين ، بفرض أنهما يقعان تحت الرأسين المعطيين .

٤٤ ـ النقط $A(-3,0)\ ,\ B(7,-6)\ ,\ C(4,2)$ هى رؤوس مثلث . أثبت أن الخط المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين BC و AC يوازى الضلع الثالث AB .

٤٥ ـ أثبت أن الخطوط الواصلة بين منتصفات اضلاع المستطيل تكون معين .

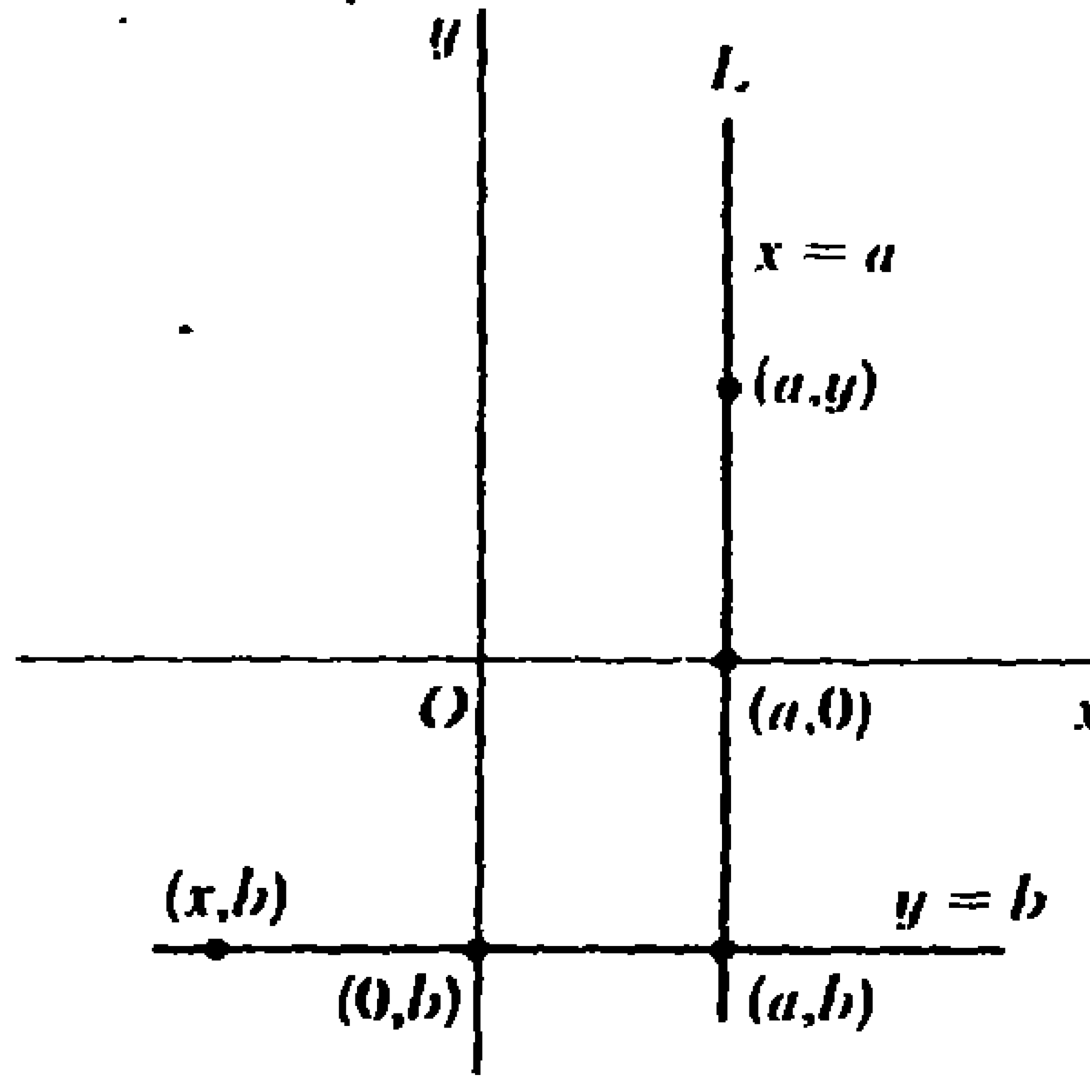
٤٦ ـ اثبت أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين لشبه منحرف توازى الضلعين المتوازيين وأن طولها هو المتوسط الحسابى لطولى الضلعين المتوازيين .

٤٧ ـ أثبت تحليليا أن الخطوط الواصلة بالترتيب بين منتصفات أضلاع شكل رباعى تكون متوازى أضلاع .

٤٨ ـ اثبت النظرية ت ـ ١١ (أولا) للحالة التى فيها أحد المستقيمين يوازى المحور x .

ت ـ ٥
معادلات المستقيمات

فى هذا البند سنستمر فى دراستنا للمستقيمات وسنشتق معادلاتها من السهل ايجاد معادلة خط مستقيم يوازى المحور y . لتكن $(a\ ,\ b)$ أى نقطة على الخط المستقيم (شكل ت ـ ٣٠) . حينئذ ، جميع النقط على الخط المستقيم ، وليس غيرها ، تكون احداثياتها السينية هى a . معادلة الخط المستقيم هى $x = a$ ، لان النقطة تكون على الخط المستقيم اذا واذا فقط كان احداثيها السينى يحقق هذه المعادلة . بالمثل ، الخط الذى يوازى المحور x معادلته تكون على الصورة $y = b$ ، حيث b هى الاحداثى الصادى المشترك لجميع النقط التى على الخط . فمثلا معادلة الخط الذى يمر بالنقطة $(2\ ,\ -4)$ ويوازى المحور x هى $y = -4$. الحالتان الخاصتان المهمتان لما سبق هما المحوران ، x و y نفسهما . المعادلتان لهما هما $y = 0$ و $x = 0$ على الترتيب .



شكل ت ـ ٣٠
النقطة تكون على الخط L الذى يوازى المحور y اذا واذا فقط كان احداثيها السينى يحقق المعادلة $x = a$.

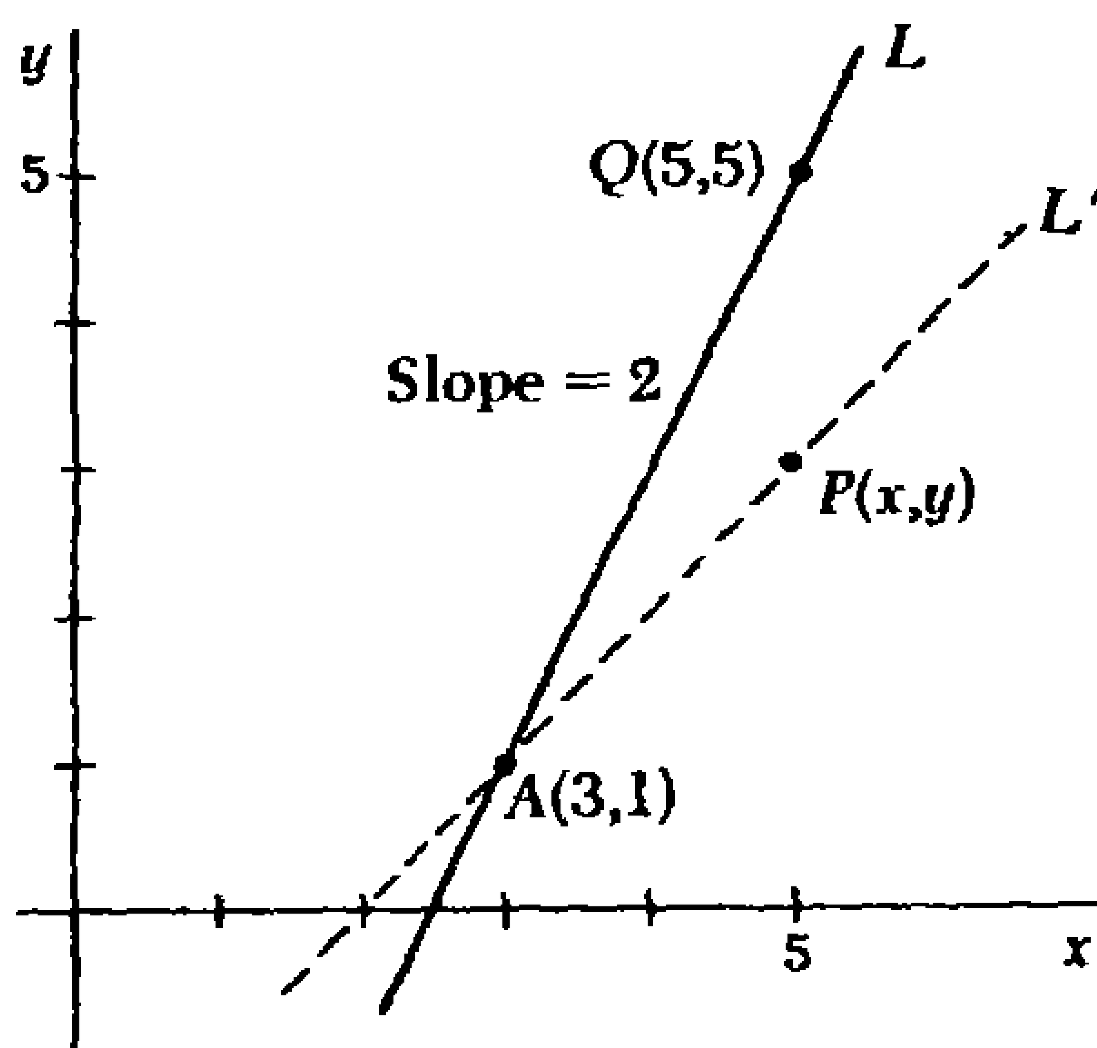
نعود الآن إلى الخطوط غير الموازية لمحور . النظرة المميزة للخط هى استقامته . هندسيا هذا يعنى أنه اذا حسب الميل من نقطتين على الخط ، فاننا نحصل على نفس النتيجة مهما كان اختيار النقطتين . نستخدم هذه الخاصية لاشتقاق معادلة للخط المستقيم الذى يمر بنقطة معطاة وميله معطى ، لكن نوضح أولا الطريقة بمثال خاص .

نعتبر خطا L ميله 2 ويمر بالنقطة $A(3, 1)$ (شكل ت ـ ٣١) . لتكن $P(x, y)$ أى نقطة فى المستوى غير A ميل الخط L' الواصل بين P, A هو $(y-1)/(x-3)$. النقطة P ستكون على L اذا واذا فقط كان ميل L' هو نفسه ميل L ، أى اذا واذا فقط كان x, y عددين بحيث أن المعادلة

$$\frac{y-1}{x-3} = 2$$

تكون صحيحة ، أى اذا واذا فقط كان (x, y) حلا لهذه المعادلة أو تكافئيا ، للمعادلة

$$y - 1 = 2(x - 3) \qquad (١)$$



شكل ت ـ ٣١
P تقع على L اذا واذا فقط كان ميل PA هو 2 ومن ثم اذا واذا فقط كان $(y-1)/(x-3) = 2$.

بما أن $(1 , 3)$ هي ايضا حل للمعادلة (١) ، كل نقطة على L بدون استثناء ، وليس نقطة أخرى ، تحقق هذه المعادلة ، وهذا يثبت أن (١) معادلة للخط . كتوضيح للمناقشة ، نرى أن النقطة $Q(5 ,5)$ تكون على L اذ أن ميل الخط الواصل بين A و Q هو 2 لاحظ أن إحداثيي Q يحققان (١) .

الحالة العامة تماثل هذا المثال . ليكن L أى خط لايوازى المحور y . حينئذ يجب أن يكون له ميل . نسميه m . خذ أى نقطة $A(x_1 , y_1)$ على L (شكل ت ـ ٣٢) . لتكن $P(x , y)$ أى نقطة فى المستوى غير النقطة A . ميل الخط L' المار بالنقطتين A و P هو $(y - y_1) / (x - x_1)$. النقطة P ستكون على L اذا واذا فقط كان L' له نفس الميل مثل L أى اذا واذا فقط كانت x , y عددين بحيث أن المعادلة

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m ،$$

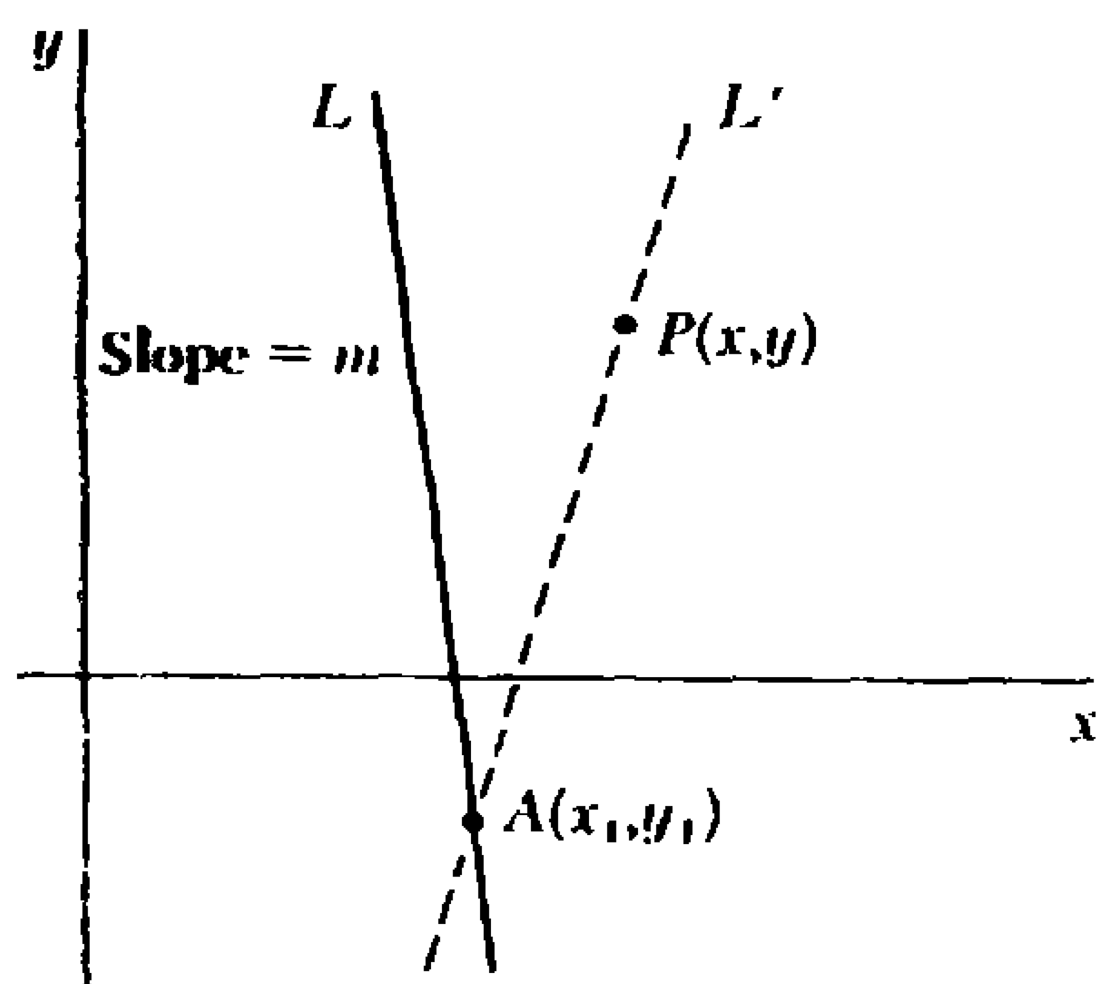
تكون صحيحة ، اى اذا واذا فقط كان (x , y) حلا لهذه المعادلة أو ، تكافئيا ، للمعادلة .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{ت ـ ١٢}$$

بما أن (x , y) أيضا حل للمعادلة ت ـ ١٢ ، كل نقطة على L ، وليس اى نقطة أخرى ، تحقق هذه المعادلة ، وهذا يثبت أن ت ـ ١٢ هى معادلة لـ L .

بما أن الشكل البيانى لمعادلة منحنى هو المنحنى الأصلى ، فإننا نرى أن ، بالعكس ، كل معادلة على هذه الصورة شكلها البيانى هو خط مستقيم . الخط يمر بالنقطة (x_1 , y_1) وميله m . فمثلا ، $y - 5 = - 3 (x - 2)$ يجب أن تكون معادلة خط . الخط يمر بالنقطة $(2 , 5)$ وميله $- 3$.

المعادلة ت ـ ١٢ تسمى صورة الميل ونقطة لمعادلة الخط . عند ايجاد معادلة خط معطى ، عادة نحاول ايجاد ميل الخط وإحداثيى نقطة ما عليه ، لأنه حينئذ يمكن كتابة المعادلة مباشرة باستخدام المعادلة ت ـ ١٢ .



شكل ت ـ ٣٢
P تكون على L اذا واذا فقط كان ميل PA هو m ومن ثم اذا واذا فقط كان $(y - y_1) / (x - x_1) = m$.

مثال ١ . أوجد معادلة الخط L المار بالنقطتين $(3 , -4)$ و $(-6 , 2)$ (شكل ت ـ ٣٣) .
يمكننا أخذ $(x_1 , y_1) = (-6 , 2)$. ميل الخط يمكن ايجاده من النقطتين المعطيتين ، وهو

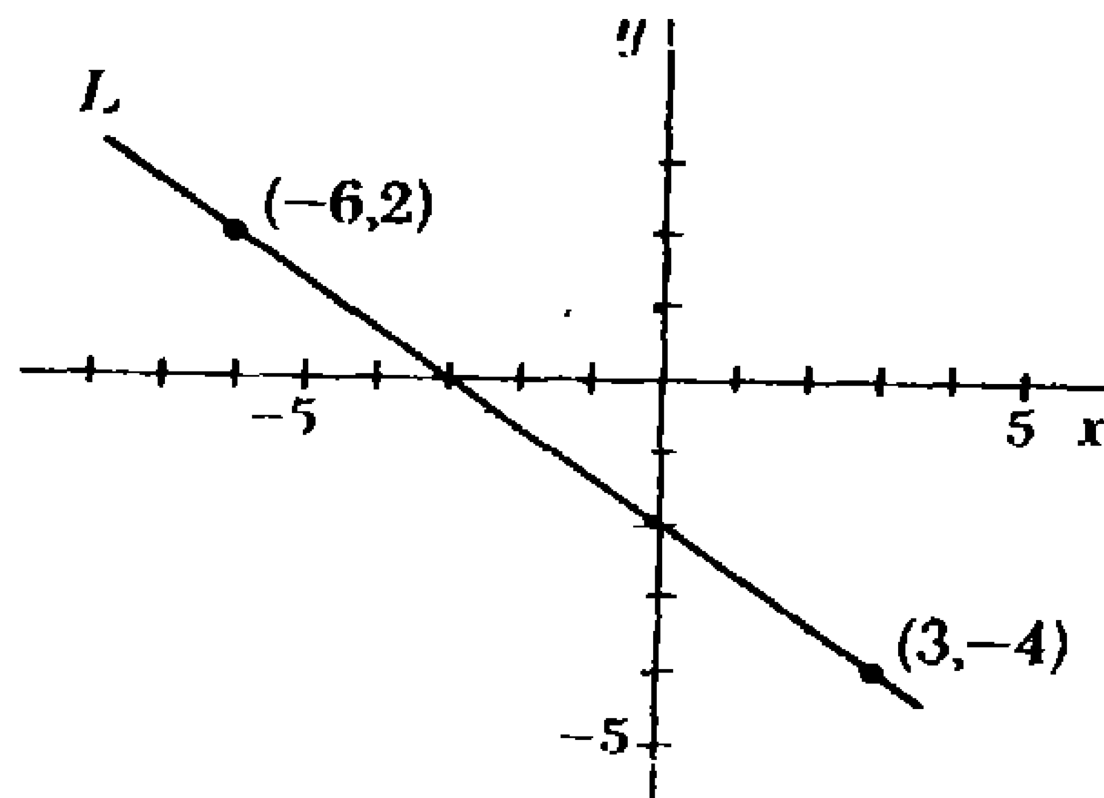
$$m = \frac{2+4}{-6-3} = -\frac{2}{3}$$

بتعويض هذه الأعداد فى المعادلة ت ـ ١٢ ، يكون لدينا

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x+6)$$

كمعادلة للخط . إذا أجرينا الحل لـ y ، نحصل على معادلة مكافئة هى

$$y = -\tfrac{2}{3}x - 2 \qquad (٢)$$



شكل ت ـ ٣٣

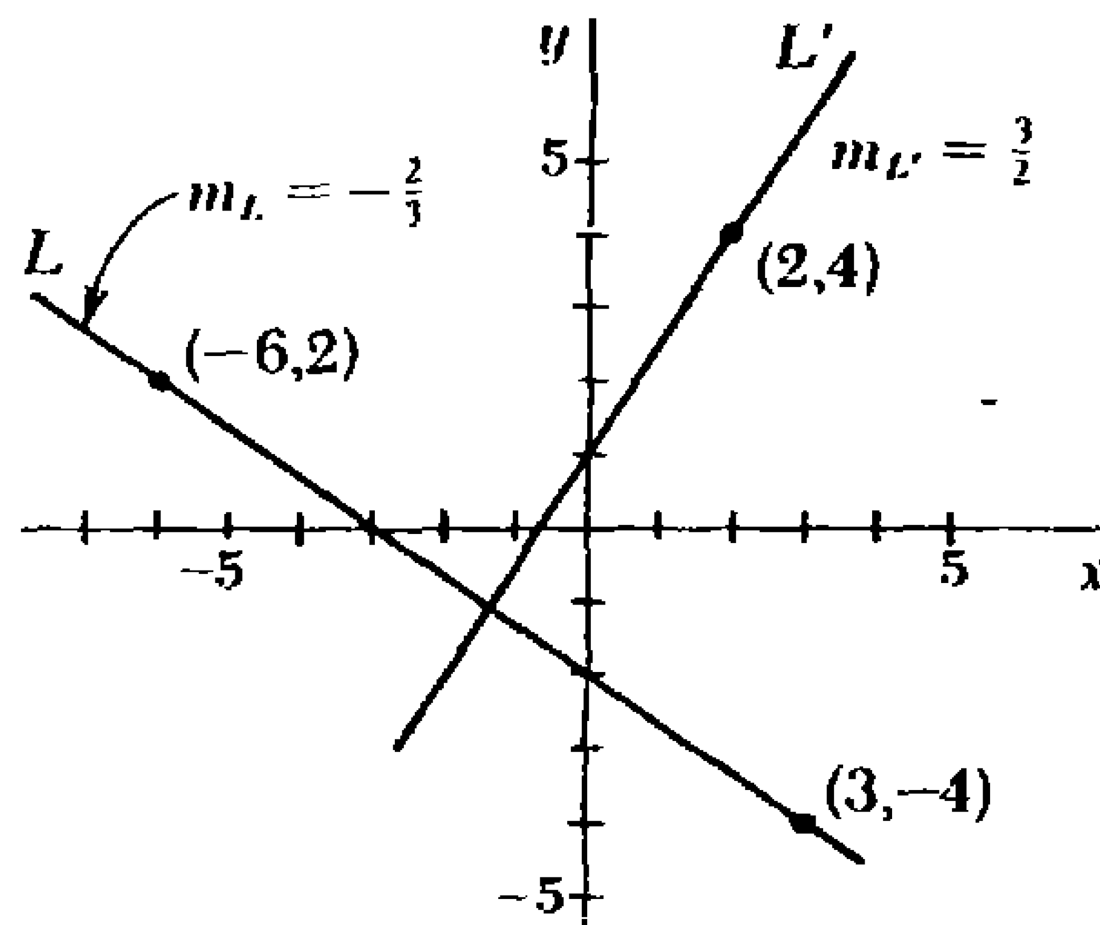
صورة ثالثة مكافئة هى

$$2x + 3y + 6 = 0 \qquad (٣)$$

جميع هذه الصور صحيحة ، لكن قد تكون إحداها أكثر ملاءمة عن الأخرى ، وفقاً للاستخدام الذى ستوضع فيه المعادلة . كاختبار ، نلاحظ أن كلتا النقطتين المعطيتين تحققان (٣) .

كان فى امكاننا ايجاد معادلة L بأخذ $(x_1 , y_1) = (3 , -4)$ ، وبذلك نحصل على : $y + 4 = -\frac{2}{3}(x - 3)$. إذ أجرينا حل هذه المعادلة لـ y ، فإنها تختزل أيضاً إلى (٢) .

مثال ٢ . أوجد معادلة للخط L' المار بالنقطة $(2 , 4)$ وعمودى على الخط L فى مثال ١ (شكل ت ـ ٣٤) .



شكل ت ـ ٣٤

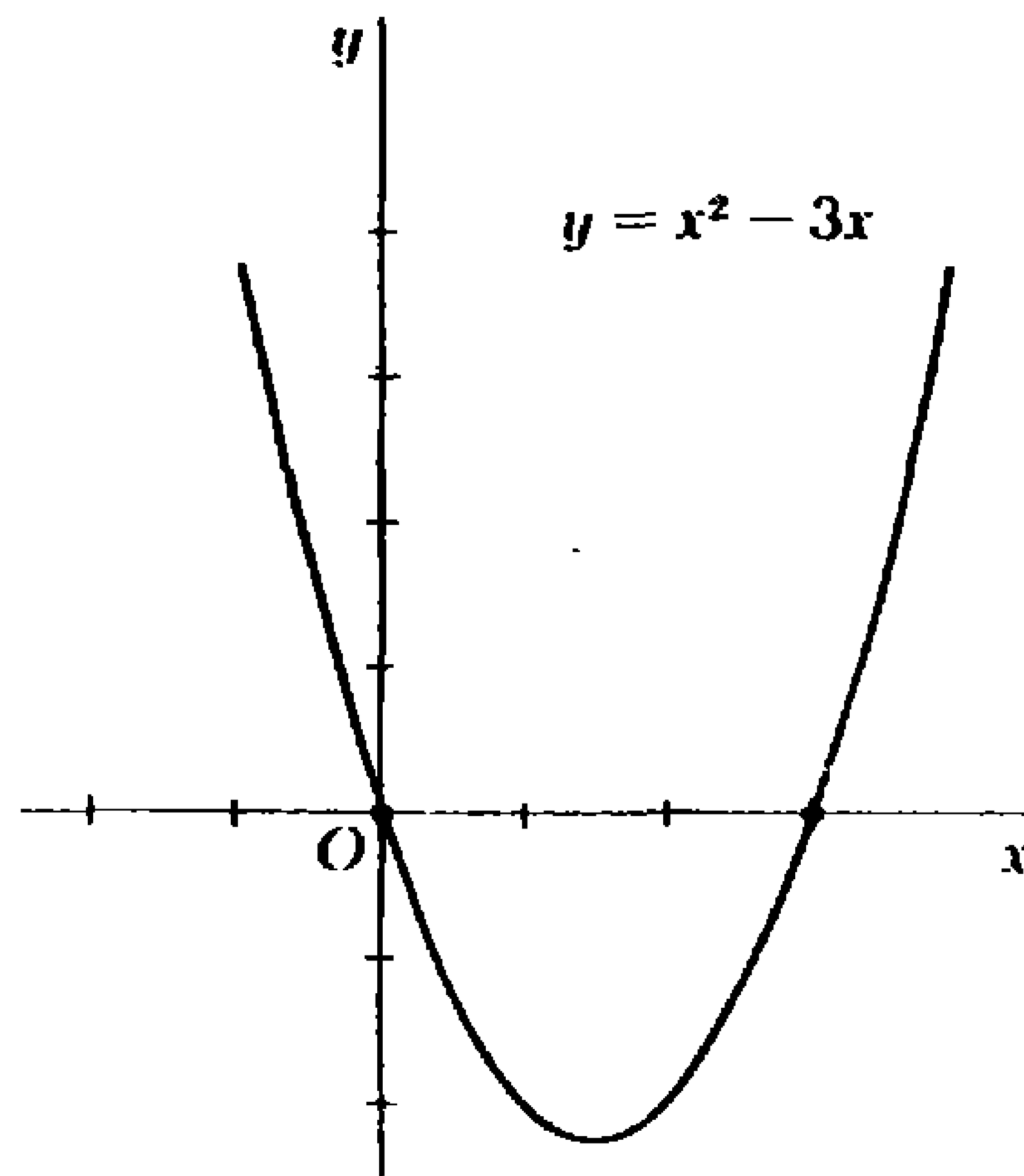
ميل L' هو سالب مقلوب ميل L ، الذى وجدنا أنه $-\frac{2}{3}$ ، وبالتالى هو $\frac{3}{2}$. يمكننا ايجاد معادلة لـ L' باستخدام المعادلة ت ـ ١٢ حيث $(x_1 , y_1) = (2 , 4)$. هذه المعادلة هى

$$y - 4 = \tfrac{3}{2}(x - 2)$$

أو ، تكافئياً $3x - 2y + 2 = 0$. كاختبار جزئى ، نلاحظ أن $(2 , 4)$ تحقق هذه المعادلة الاخيرة .

الاحداثيات السينية للنقط حيث المنحنى يقطع أو يمس المحور x تسمى الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى . بالمثل ، الاحداثيات الصادية للنقط حيث المنحنى يقطع أو يمس المحور y تسمى الأجزاء المقطوعة من المحور y* . الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى توجد بوضع $y = 0$ وحل المعادلة الناتجة لـ x . الاجزاء المقطوعة من المحور y توجد بوضع $x = 0$ والحل لـ y . فمثلا الاجزاء المقطوعة من المحور x بالمنحنى $y = x^2 - 3x$ هى جذور المعادلة $x^2 - 3x = 0$ أى $x = 3$ و $x = 0$. الجزء المقطوع من المحور y هو $y = 0$. الشكل البيانى مخطط فى الشكل ت ـ ٣٥ . الخط L' فى مثال ٢ الذى معادلته $3x - 2y + 2 = 0$ يقطع المحورين عند $(0 , 1)$ و $(-\frac{2}{3},0)$. الجزء المقطوع من المحور x هو $-\frac{2}{3}$ والجزء المقطوع من المحور y هو 1 .

الخط الذى ميله m ويقطع الجزء b من المحور y يمر بالنقطة $(0 , b)$ واذن باستخدام المعادلة ت ـ ١٢ يكون له المعادلة $y - b = m (x - 0)$ ، وهذه تختصر الى

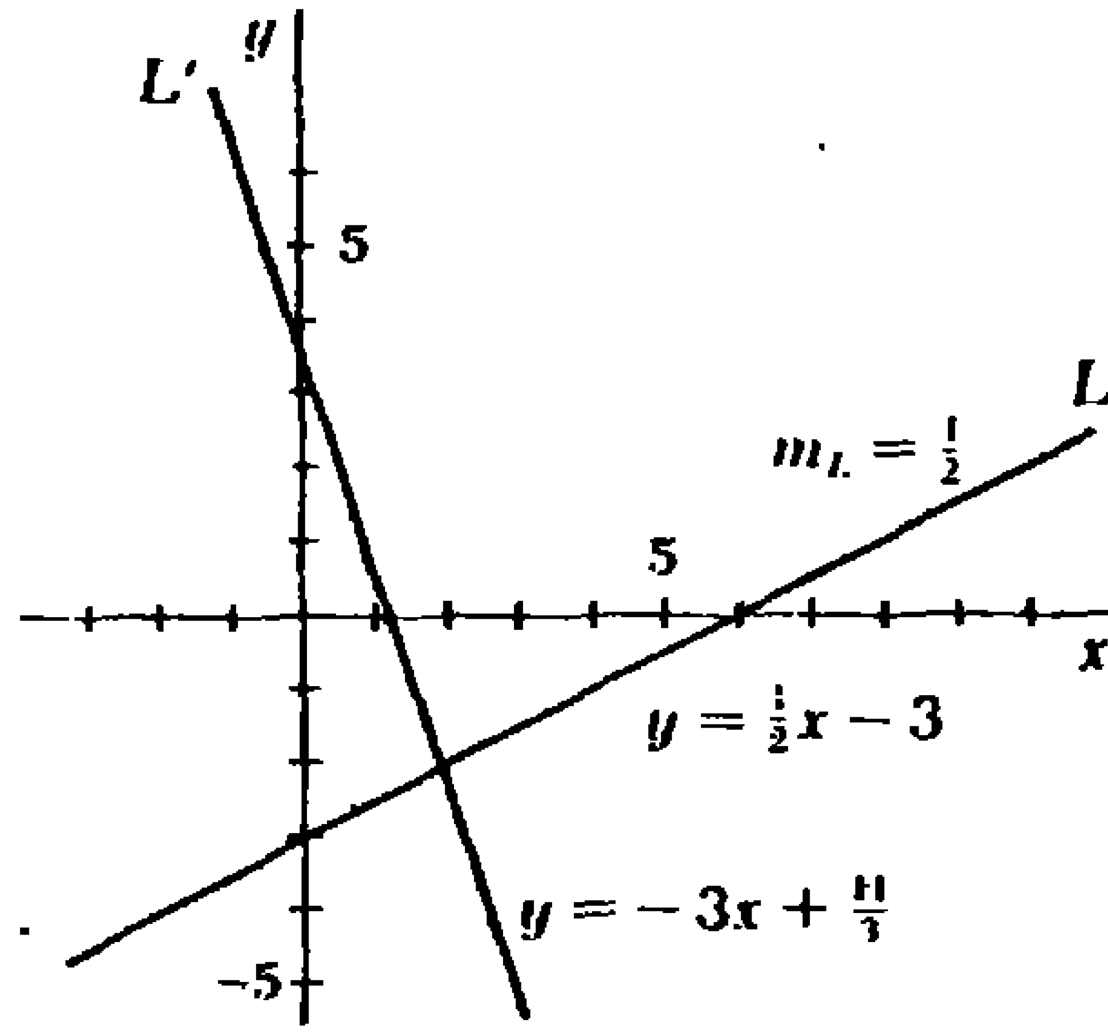


شكل ت ـ ٣٥
الجزءان المقطوعان من المحور x بالمنحنى هما 3 و 0 . الجزء المقطوع من المحور y هو صفر .

$$y = mx + b \qquad \text{ت ـ ١٣}$$

المعادلة ت ـ ١٣ تعرف بصورة الميل والجزء المقطوع لمعادلة الخط . لاحظ أن هنا المصطلح الجزء المقطوع يعنى الجزءالمقطوع من المحور y . فمثلا ، معادلة للخط L الذى ميله $\frac{1}{2}$ ويقطع الجزء 3 — من المحور y (شكل ت ـ ٣٦) هى $y = \frac{1}{2}x - 3$.

* المصطلح الجزء المقطوع يستخدم أيضاً ليعنى نقطة التقاطع نفسها .



شكل ت ـ ٣٦

كل خط لايوازى المحور y يقطع جزءا من المحور y ومن ثم له معادلة على الصورة ت ـ ١٣ . بالعكس وهذا أهم ، كل معادلة على هذه الصورة شكلها البيانى خط مستقيم . معامل x هو ميل الخط ، والحد المطلق هو الجزء المقطوع من المحور y . لنرى ذلك ، نكتب المعادلة ت ـ ١٣ على الصورة

$$y - b = m(x - 0)$$

هذه على الصورة ت ـ ١٢ حيث $y_1 = b$ و $x_1 = 0$ ، ومن ثم هى معادلة للخط الذى يمر بالنقطة $(0 , b)$ وميله m . فمثلا ، المعادلة

$$9x + 3y - 11 = 0 \qquad (٤)$$

تكافىء المعادلة

$$y = -3x + \tfrac{11}{3} \qquad (٥)$$

التى هى على الصورة ت ـ ١٣ . اذن المعادلة (٥) ، وبالتالى (٤) يجب أن تكون معادلة خط ميله $3-$ ويقطع من المحور y الجزء $\frac{11}{3}$. هو الخط L' المخطط فى الشكل ت ـ ٣٦ .

المعادلة التى على الصورة

$$Ax + By + C = 0 \qquad (٦)$$

حيث A , B , C ثوابت ، وحيث B و A ليس كلاهما صفرا ، تسمى معادلة من الدرجة الاولى فى x و y . المعادلة ت ـ ١٣ يمكن كتابتها على الصورة $mx + (-1)\,y + b = 0$. حيث أن هذه على الصورة (٦) حيث $C = b$ و $B = -1$ و $A = m$ ، فاننا نرى أن كل خط لايوازى المحور y يكون له معادلة من الدرجة الاولى . علاوة على ذلك ، كل خط يوازى المحور y يكون له معادلة على الصورة $x - a = 0$ ، التى هى ايضا من الدرجة الاولى . لقد أثبتنا الجزء الأول من النظرية الآتية .

ت ـ ١٤ . نظرية كل خط له معادلة من الدرجة الأولى ، وبالعكس ، كل معادلة من الدرجة الأولى شكلها البيانى خط مستقيم .

لهذا السبب المعادلة من الدرجة الأولى تسمى أيضاً معادلة خطية . لاثبات عكس النظرية ، ندرس المعادلة العامة من الدرجة الأولى

$$Ax + By + C = 0 \qquad (٧)$$

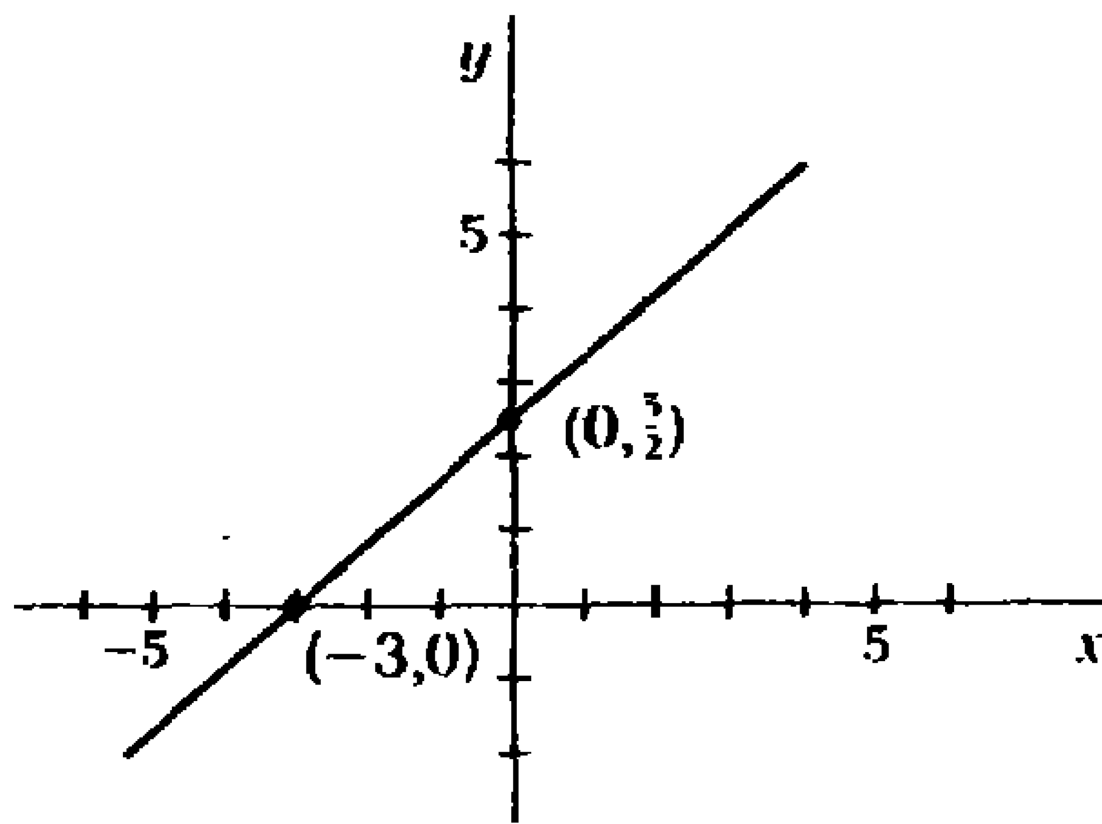
حيث B و A ليس كلاهما صفرا . توجد حالتان للدراسة تبعا لكون B تساوى أو لاتساوى صفرا .
اذا كانت $B = 0$ ، يمكننا حل (٧) لـ y ، ونحصل على

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

هذه على الصورة ت ـ ١٣ وتثبت أنه عندما $B \neq 0$ الشكل البيانى للمعادلة (٧) يكون خطا مستقيما . علاوة على ذلك ، المقدار A / B — هو ميل الخط والمقدار C / B — هو الجزء المقطوع من المحور y . اذا كانت $B = 0$فان $A \neq 0$ ويمكننا حل (٧) لـ x ونحصل على : $x = - C / A$ وهذه معادلة خط يوازى المحور y . اذن فى الحالتين الشكل البيانى للمعادلة (٧) هو خط مستقيم .

مثال ٣ . خطط الشكل البيانى للمعادلة $5x - 6y + 15 = 0$.

بما أن المعادلة من الدرجة الاولى ، فشكلها البيانى يجب أن يكون خطا مستقيما ، ونقطتان ستكونان كافيتين لتعيينه . أسهل نقطتين فى ايجاده هما الجزءان المقطوعان من المحورين . اذا وضعنا $y = 0$ فى المعادلة واجرينا حلها لـ x ، نحصل على 3 — وهو الجزء المقطوع من محور x . بالمثل ، بوضع $x = 0$ نجد أن الجزء المقطوع من المحور y هو $\frac{5}{2}$. بتوقيع النقطتين $(0,\frac{5}{2})$ و $(-3, 0)$ ورسم الخط المار بهما ، نكون قد خططنا الشكل (شكل ت ـ ٣٧) .



شكل ت ـ ٣٧
الشكل البيانى للمعادلة $5x - 6y + 15 = 0$ يخطط بسهولة بتوقيع الأجزاء المقطوعة .

طريقة أخرى هى أن نحل المعادلة المعطاة لـ y ،

$$y = \tfrac{5}{6}x + \tfrac{5}{2}$$

معامل x هو الميل والحد الثابت هو الجزء المقطوع من المحور y . حينئذ نخطط الخط المستقيم المار بالنقطة $(0,\frac{5}{2})$ ، وميله $\frac{5}{6}$.

مثال ٤ . أوجد معادلة الخط المستقيم L المار بالنقطة $(\frac{1}{3},0)$ ويوازى الخط L' الذى معادلته

$$2x - 7y + 21 = 0$$

بحل معادلة L' لـ y ، يكون

$$y = \tfrac{2}{7}x + 3$$

ى أن ميل L' ، وبالتالى ميل L ، هو $\tfrac{2}{7}$. واذن معادلة L هى

$$y - 0 = \tfrac{2}{7}(x - \tfrac{4}{3})$$

، $6x - 21y - 8 = 0$ كاختبار ، نلاحظ أن النقطة المعطاة تحقق هذه المعادلة وأنه اذا حلت معادلة لـ y ، معامل x هو الميل $\tfrac{2}{7}$.

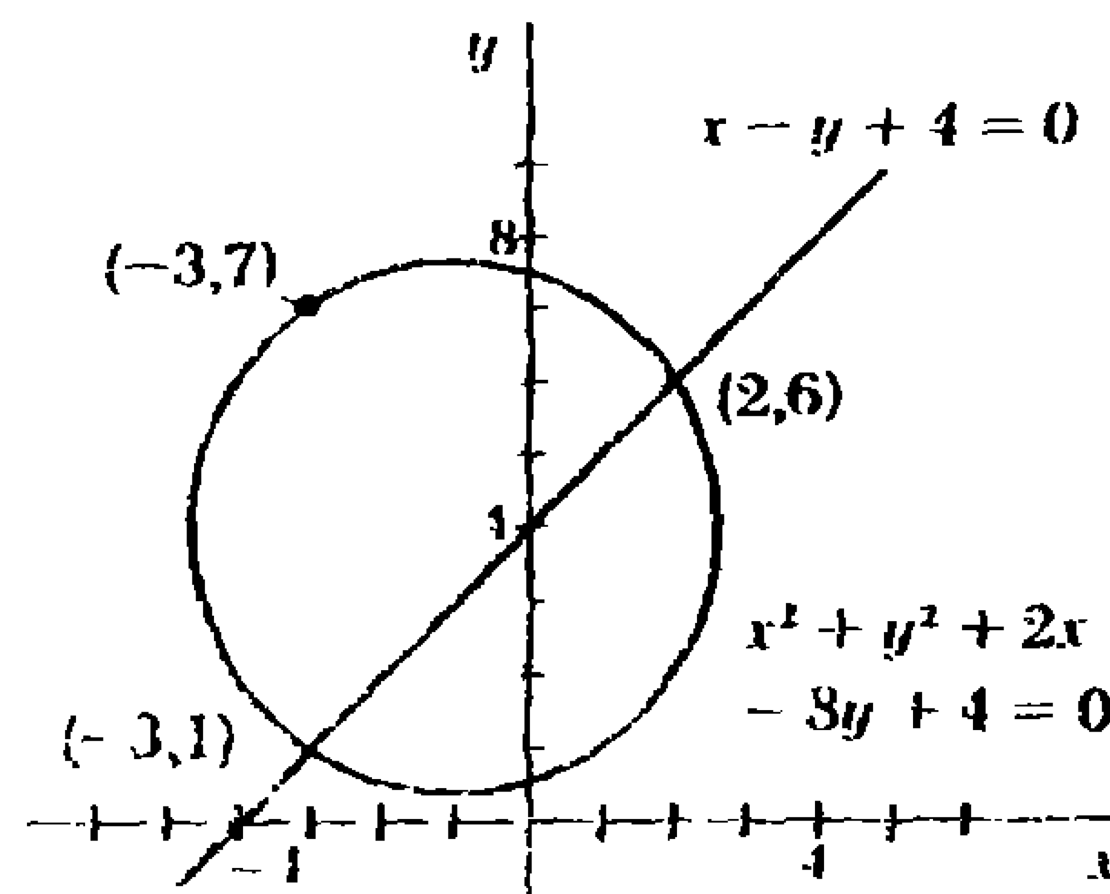
ثال ٥ . أوجد تقاطع الدائرة $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$ والخط $x - y + 4 = 0$.

المنحنيان مخططان فى الشكل ت ـ ٣٨ . نقطة التقاطع ، ان وجدت ، للمنحنيين هى حل شترك لمعادلتيهما . هذا الحل المشترك يمكن ايجاده بحل المعادلتين آنيا . احدى الطرق لاجراء لك هى كما يأتى . حل معادلة واحدة ، مثلا الثانية ، لـ y ، فنحصل على $y = x + 4$ ، وعوض هذه القيمة لـ y فى المعادلة الاخرى :

$$x^2 + (x + 4)^2 + 2x - 8(x + 4) + 4 = 0 \qquad (٨)$$

عمليا ، نحن نبحث عن x التى تجعل قيمة y التى نحصل عليها من معادلة الدائرة هى نفسها التى حصل عليها من الخط . المعادلة (٨) تبسط الى $x^2 + x - 6 = 0$ أى $(x - 2)(x + 3)$. واذن لاحداثيات x لنقطتى التقاطع هى $x = 2$ و $x = -3$. هنا يجب أن نكون حريصين . اذا حاولنا يجاد الاحداثى y لنقطة التقاطع التى احداثيها x هو -3 ، بتعويض -3 لـ x فى معادلة الدائرة ، اننا نحصل على قيمتين لـ y هما 7 ، 1 . هذا لايدعو للدهشة ، لأننا فى الواقع نوجد النقط ، على لدائرة ، التى احداثيها x هو -3 — وتوجد نقطتان . نحن نريد النقطة على الخط المستقيم التى حداثيها x هو -3 ، ولذلك يجب تعويض -3 فى معادلة الخط . اذا فعلنا ذلك ، نحصل على $y = 1$. بالمثل ، عندما $x = 2$ و $y = 6$ واذن نقطتا التقاطع هما $(2, 6)$ و $(-3, 1)$.

عند ايجاد حلول آنية لمعادلات درجاتها أعلى من الأولى ، من الحكمة التأكد ، بالتعويض المباشر فى المعادلات الاصلية ، من الحلول المشتركة المعينة .



شكل ت ـ ٣٨

مسائل

أوجد معادلة الخط الذى يحقق الشروط الآتية :

١ ـ الميل 2 ويمر بالنقطة $(-4, -4)$.

٢ ـ الميل $-\frac{2}{3}$ ويمر بالنقطة $(2,\frac{3}{2})$.

٣ ـ الميل $\frac{7}{4}$ والجزء المقطوع من المحور y. يساوى 2

٤ ـ الميل -1 والجزء المقطوع من المحور x يساوى -3.

٥ ـ الجزء المقطوع من المحور x يساوى α والميل m.

٦ ـ يمر بالنقطة $(1 , 6)$ ويوازى المحور x.

٧ ـ يمر بالنقطة $(1 , -6)$ ويوازى المحور y.

٨ ـ يمر بالنقطتين $(-5 , -3)$ و $(0 , 5)$.

٩ ـ يمر بالنقطتين $(6 , 2)$ و $(-3 , 2)$

١٠ ـ يمر بالنقطتين $(-3 , -4)$ و $(-3 , 1)$.

١١ ـ يمر بالنقطتين $(0 , r)$ و $(h , 0)$.

١٢ ـ الجزء المقطوع من المحور x يساوى 2 والجزء المقطوع من المحور y يساوى 4.

١٣ ـ زاوية الميل $135°$ ويمر بالنقطة $(\frac{3}{2},0)$.

أوجد معادلات الخطوط المارة بالنقطة المعطاة والتى تكون على الترتيب موازية وعمودية على الخط المعطى :

١٤ ـ $(-7,0),\ y = x$ ١٥ ـ $(3,0),\ 2x - 5y + 10 = 0$ ١٦ ـ $(6,-2),\ 7x + 8y + 28 = 0$

١٧ ـ $(0,0),\ x - 4 = 0$ ١٨ ـ $(-3,-\frac{3}{2}),\ 5y + 11 = 0$ ١٩ ـ $(0,5),\ ax + by + c = 0$

أوجد الميل والجزئين المقطوعين من المحور x والمحور y للخطوط المستقيمة الاتية وخطط الخط المستقيم :

٢٠ ـ $x + 2y = 6$ ٢١ ـ $3x - 4y - 12 = 0$ ٢٢ ـ $12x - 5y = 17$ ٢٣ ـ $y - 2 = \frac{1}{3}(x + 5)$

٢٤ ـ $7x + \frac{3}{2}y = 4 + c$ ٢٥ ـ $3y - 2 = 0$ ٢٦ ـ $6x + 13 = 0$ ٢٧ ـ $ax + by + c = 0$

٢٨ ـ $x/a + y/h = 1$ ٢٩ ـ $x = my + b$

أوجد نقطة ، غير نقطة جزء مقطوع ، على المنحنيات الآتية :

٣٠ ـ $2x + 2y + 3 = 0$ ٣١ ـ $3y + 5 = 0$ ٣٢ ـ $x^3 + x + y = 0$

٣٣ ـ $x(y + 2) = 8$ ٣٤ ـ $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 42 = 0$

خطط الشكل البيانى للمتباينات الآتية أو أزواج المتباينات :

٣٥ ـ $4x + y - 10 > 0$ ٣٦ ـ $x + 2y = -1,\ x \geqslant 2$

٣٧ ـ $3x - y \geqslant 4,\ -3x - y \geqslant 4$ ٣٨ ـ $x^2 + y^2 + 6x < 0,\ y \geqslant x + 6$

٣٩ـ رؤوس مثلث هي $A(1,5), B(-1,0)$ و $C(3,-2)$ أوجد معادلة (أ) الضلع AB ، (ب) المنصف العمودى لـ AB ، (ج) المستقيم المتوسط من A (د) العمودى من A على الضلع BC .

أوجد نقط تقاطع الازواج الآتية من الخطوط المستقيمة :

٤٠ ـ $x - 2y - 2 = 0, 3x - y - 11 = 0$ ‏ ‏ ٤١ ـ $2x - 3y + 18 = 0, x + 3 = 0$

٤٢ ـ $x + 2y = 5, 4x - y = -20$ ‏ ‏ ٤٣ ـ $3x + 15y - 9 = 0, 2x + 10y - 5 = 0$

٤٤ ـ $11x + 2y - 15 = 0, 5x - 6y - 3 = 0$ ‏ ‏ ٤٥ ـ $5x + 4y = -20, x + \frac{4}{5}y + 4 = 0$

٤٦ ـ $bx - ay = 0, bx + cy = bc$

٤٧ ـ أوجد معادلة الخط الذى يمر بنقطة تقاطع الخطين $x - 3y - 1 = 0$ و $4x - y + 18 = 0$ ويكون (أ) موازيا للخط $2x - y - 6 = 0$ ، (ب) عموديا على الخط $2x - y - 6 = 0$.

٤٨ ـ أوجد معادلة الخط الذى يمر بنقطة تقاطع الخطين $2x + 3y + 2 = 0$ و $3x + 2y - 7 = 0$ ومركز الدائرة $4x^2 + 4y^2 + 20x - 16y - 157 = 0$

٤٩ ـ اوجد الشرط على معاملات المعادلة $A'x + B'y + C' = 0$ لكى يكون شكلها البيانى موازيا للخط $Ax + By + C = 0$. اذا كان الخطان متوازيين ، ماذا يحدث جبريا عندما نحاول حل المعادلتين آنيا ؟

خطط المستقيمات والدوائر الآتية وأوجد نقط تقاطعها :

٥٠ ـ $3x - 4y = 0, x^2 + y^2 = 25.$ ‏ ‏ ٥١ ـ $x - y - 8 = 0, x^2 + y^2 - 12x + 8y = 0$

٥٢ ـ $3x + 4y + 10 = 0, x^2 + y^2 - 10x = 0$ ‏ ‏ ٥٣ ـ $2x - y - 10 = 0, x^2 + y^2 + 6x + 4y - 23 = 0$

أوجد معادلة المماس لكل من الدوائر الآتية عند النقطة المعطاة :

٥٤ ـ $x^2 + y^2 = 34, (3,5)$ ‏ ‏ ٥٥ ـ $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0, (0,0)$

٥٦ ـ $x^2 + y^2 - 8y - 84 = 0, (-6,12)$

٥٧ ـ اوجد معادلتى المماسين اللذين ميلاهما $1-$ ، للدائرة التى مركزها عند نقطة الاصل ونصف قطرها 10 .

٥٨ ـ اوجد نقطة تقاطع المماسين للدائرة و $x^2 + y^2 + 16x + 30y = 0$ عند $(0 , 0)$ وعند $(-16 , 0)$.

٥٩ ـ اوجد معادلة الخط الذى يوازى الخطين المتوازيين $2x - 3y + 12 = 0$ و $2x - 3y - 3 = 0$ وفى $1/3$ المسافة بين الخطين وأقرب الى الخط الاول .

٦٠ ـ اثبت أن الخط الذى يقطع من المحور x جزءا قدره a ويقطع من المحور y جزءا قدره b له معادلة على الصورة $x/a + y/b = 1$.

٦١ ـ اوجد معادلة الخط الذى يمر بالنقطة (x_1 , y_1) ويوازى الخط $Ax + By + C = 0$

٦٢ ـ اوجد معادلة الخط المار بالنقطة (x_1 , y_1) وعمودى على الخط $Ax + By + C = 0$

٦٣ ـ خطط الشكل البيانى للمنحنيين $y = mx$ و $y = x^3 + x$. لاى قيم m توجد نقطة تقاطع واحدة ؟

أوجد المسافة من كل من النقط الآتية الى الخط المعطى (ارشاد : أوجد معادلة الخط المار بالنقطة وعمودى على الخط) .

٦٤ - $(0,0),\ 12x + 5y = 15$ ٦٥ - $(2,1),\ 3x - 4y = 10$

٦٦ - اثبت أن المسافة من النقطة (x_1 , y_1) الى الخط $Ax + By + C = 0$ تعطى بالصيغة

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(انظر الارشاد فى المسألة ٦٤)

٦٧ - أوجد المسافة العمودية بين الخطين المتوازيين $x + 2y + 10 = 0$ و $x + 2y + 4 = 0$

(ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٦٨ - أوجد معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة $(3 , - 4)$ وتمس الخط $4x + 3y + 20 = 0$) .

ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٦٩ - اوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه النقط $(4,4),\ (8,-12)$, and $(12,10)$.

(ارشاد : انظر المسألة ٦٦) .

٧٠ - النقطة $(7 , - 4)$ تنصف وتر فى الدائرة $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ أوجد معادلة الوتر وطول الوتر .

٧١ - اوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط $(1,4),\ (-3,-2)$, and $(7,0)$. بايجاد نقطة تقاطع المنصفات العمودية للقطع المستقيمة الواصلة بين النقط .

٧٢ - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطة $(1 , 8 -)$ ومركزها يقع على الخطين $3x - 5y + 18 = 0.$ و $2x + 3y - 26 = 0$

٧٣ - اوجد معادلة الدائرة التى مركزها على المحور x وتمر بالنقطتين $(1 , 2-)$ و $(3 , 2)$.

٧٤ - اوجد معادلة الدائرة التى مركزها عند النقطة $(1 , 4)$ وتمس الخط $3x - 4y = -3$.

٧٥ - اوجد معادلة الدائرة التى تمس الخط $8x - 9y = -20$ عند النقطة $(2 , 4)$ وتمر بنقطة الاصل . [ارشاد : خذ فى الاعتبار القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة الاصل والنقطة $(2 , 4)$]

٧٦ - اوجد معادلتى المماسين للدائرة $x^2 + y^2 = 10$ من النقطة $(5 , 5)$. (ارشاد : أوجد معادلة خط اختيارى ميله m ويمر بالنقطة المعطاة . ثم اختر m بحيث أن الخط يقابل الدائرة فى نقطة واحدة فقط) .

٧٧ - اوجد معادلة الخط المار بالنقطة $(5 , 3)$ ويقطع من المحورين جزئين متساويين .

٧٨ - اوجد معادلة الخط الذى يمر بالنقطة $(3 , 1)$ ويكون مع المحورين y و x الموجبين مثلثا مساحته 8 .

٧٩ - اوجد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث أن الفرق بين مربعى بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوى مقدارا ثابتا .

٨٠ ـ مثلث اثنان من رؤوسه عند $A(a, 0)$ و $B(-a, 0)$. أوجد المحل الهندسى للرأس الثالث C اذا كان ميل الخط AC ضعف ميل الخط BC .

٨١ ـ اثبت أن لكل قيمة لـ m المعادلة $mx - y - 2 - 4m = 0$ شكلها البيانى خط مستقيم . اثبت أن جميع هذه الخطوط تمر بنقطة مشتركة وأوجد احداثييها . أوجد الخط من بين هذه الخطوط الذى يمر بالنقطة $(5, 2)$.

٨٢ ـ اثبت أن المستقيمات المتوسطة للمثلث تتقابل فى نقطة تقسم كل مستقيم متوسط بنسبة ١ : ٢ من منتصف الضلع المناظر الى الرأس المقابل .

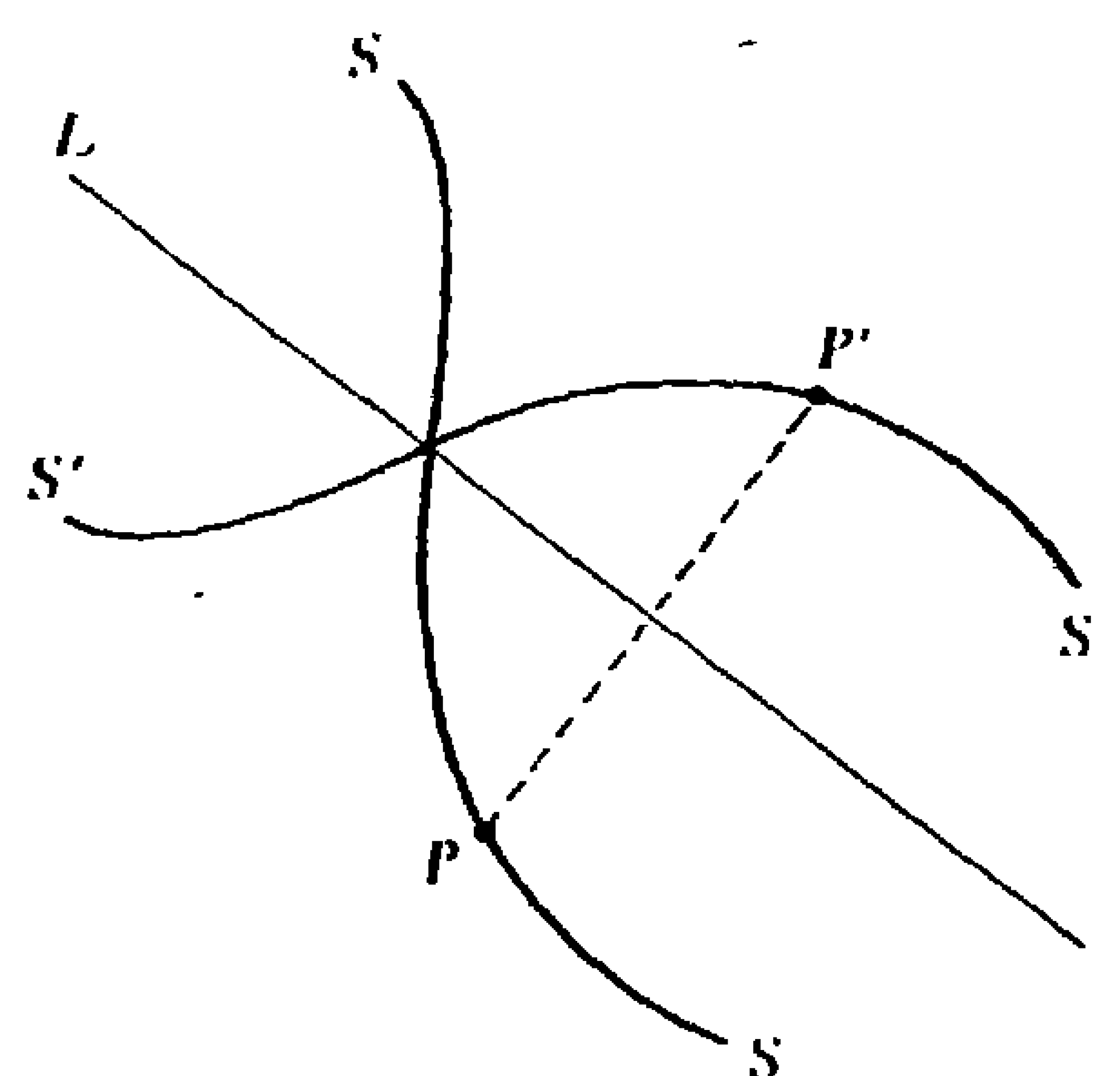
ت ـ ٦
الانعكاسات والتماثل

فى البند ت ـ ١ شرحنا ماذا يقصد بانعكاس نقطة فى مستقيم . هنا ندرس انعكاسات المنحنيات .

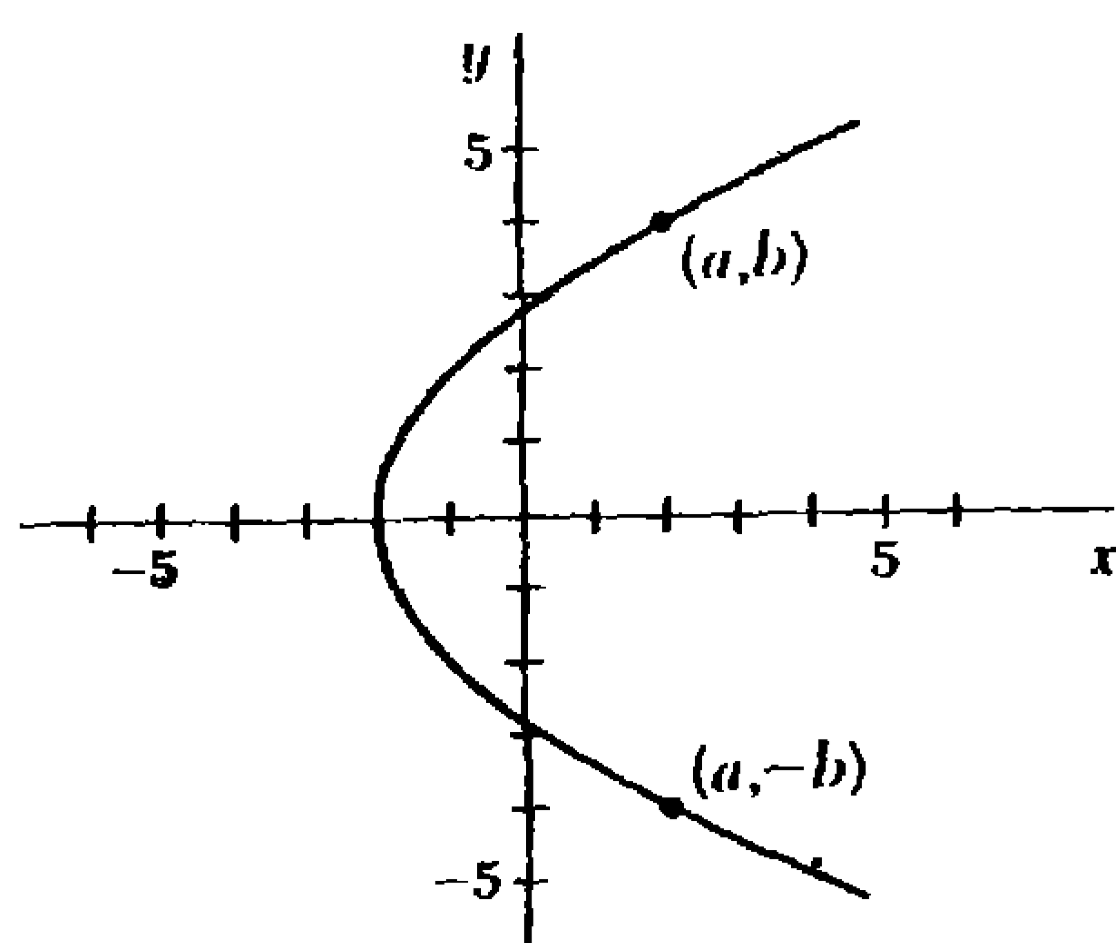
لتكن S فئة مستوية من النقط ، التى لغرضنا ستكون عادة منحنى ، وليكن L خطا معطى فى المستوى . الفئة S' المتكونة من الانعكاسات فى L لنقطة الفئة S تسمى انعكاس S فى L .

فى الشكل ت ـ ٣٩ المنحنى S' هو انعكاس المنحنى S فى الخط المستقيم L . بالطبع ، S ايضا انعكاس المنحنى S' . إذا كانت فئة الانعكاسات تنطبق على الفئة الاصلية ، فان الفئة الاصلية يقال انها متماثلة فى L . فمثلا الدائرة متماثلة فى كل قطر من أقطارها . القطع المكافىء $y^2 = 4(x + 2)$ ، المخطط فى الشكل ت ـ ٤٠ ، متماثل فى المحور x . إذا تصورنا أننا نطوى المستوى على طول خط التماثل للشكل المتماثل ، فان نصفى الشكل سينطبقان .

اذا كانت الانعكاسات فى نقطة A بدلا من فى خط مستقيم ، فان الفئة S' تسمى انعكاس S فى A ، واذا كانت S' تنطبق على S ، فان S يقال أنها متماثلة فى النقطة A . الدائرة متماثلة فى



شكل ت ـ ٣٩
s' انعكاس S فى L .



شكل ت ـ ٤٠
القطع المكافىء $y^2 = 4(x + 2)$ متماثل فى المحور x .

مركزها . المنحنى $y = 1 / x$ ، المخطط فى الشكل ت ـ ١٣ ، متماثل فى نقطة الاصل . القطع المكافىء بالشكل ت ـ ٤٠ ليس متماثلا فى نقطة الاصل ، ولافى أى نقطة .

التماثل فى المحورين وفى نقطة الاصل هام بوجه خاص .

ت ـ ١٥ نظرية

(أولا) المنحنى يكون متماثلا فى المحور y اذا كان لكل نقطة (x , y) على المنحنى النقطة $(-x , y)$ أيضا تكون على المنحنى .

(ثانيا) المنحنى يكون متماثلا فى المحور x اذا كان لكل نقطة (x , y) على المنحنى النقطة $(x , -y)$ أيضا تكون على المنحنى .

(ثالثا) المنحنى يكون متماثلا فى نقطة الاصل اذا كان لكل نقطة (x , y) على المنحنى النقطة $(-x , -y)$ أيضا تكون على المنحنى .

النظرية هى مجرد اعادة نص تعريف التماثل عندما يكون الخط المستقيم محورا .

يمكن الحصول على معادلة انعكاس المنحنى فى المحور y باستبدال x بـ $-x$ فى معادلة المنحنى . فمثلا ، اذا كان C المنحنى

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 11x + 24)$$

فان معادلة انعكاسه C' فى المحور y هى

$$y = \tfrac{1}{2}[(-x)^2 - 11(-x) + 24] = \tfrac{1}{2}(x^2 + 11x + 24)$$

(شكل ت ـ ٤١) . لترى لماذا يكون الامر كذلك ، دع C' الشكل البيانى للمعادلة المحولة التى تحصل عليها باستبدال x بـ $-x$. $P'(-x , y)$ تكون الانعكاس فى المحور y للنقطة $P(x , y)$. اذا كانت $P(x , y)$ على المنحنى ، فان (x , y) هى حل لمعادلة C . واذن $(-x ,y)$ هى حل للمعادلة المحوله ، وتكون $P'(-x,y)$ على C' . وتبعا لذلك ، الشكل البيانى للمعادلة المحولة هو انعكاس C . بالمثل ، اذا استبدلنا y بـ $-y$ ، فاننا نحصل على معادلة انعكاس المنحنى فى المحور x

التماثل خاصية هامة للمنحنى وعادة يمكن استخدامه لتبسيط تخطيطه . من السهل التحديد من معادلة المنحنى ما اذا كان متماثلا فى محور . اذا كان عندما تستبدل x بـ $-x$ المعادلة الناتجة تكافىء المعادلة الاصلية ، فان المنحنى يكون متماثلا فى المحور y لانه ينطبق على انعكاسه فى ذلك المحور . لاختبار التماثل فى المحور x ، نستبدل y بـ $-y$ ونعين ما اذا كانت المعادلة الناتجة تكافىء الاصلية . القطع المكافىء $y^2 = 4 (x + 2)$ فى الشكل ت ـ ٤٠ متماثل فى المحور x لان المعادلة $(-y)^2 = 4 (x + 2)$ تكافىء المعادلة الأصلية المنحنى $y = 1 / x$ فى الشكل ت ـ ١٣

شكل ت ـ ٤١

C' انعكاس C فى المحور y .

ليس متماثلا فى المحور x . استبدال y بـ $-y$ يعطى هنا المعادلة $-y = 1/x$ ، التى لاتكافىء المعادلة $y = 1/x$.

المنحنى يكون متماثلا فى نقطة الاصل اذا واذا فقط كان استبدال y و x بـ $-y$ و $-x$ يعطينا معادلة مكافئة . هذا الاختبار يثبت أن المنحنى $y = 1/x$ ، الذى وجدنا حالا لأنه غير متماثل فى المحور x ، متماثل فى نقطة الاصل . الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ متماثلة فى نقطة الاصل ، وهى ايضا متماثلة فى كلا المحورين .

مسائل

أوجد معادلات انعكاسات المنحنيات الآتية فى المحورين y و x . هل المنحنى متماثل فى أى محور؟ فى نقطة الأصل ؟

١ ـ $x + 2y = 0$ ٢ ـ $2x - y = 5.$ ٣ ـ $x = 3$ ٤ ـ $y = x^2 - 4$

٥ ـ $y = x^4$ ٦ ـ $xy^2 = 16.$ ٧ ـ $y = x^3$ ٨ ـ $y = |x|$

٩ ـ $y = x/(x^2 + 1)$ ١٠ ـ $y = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{13}$

١١ ـ $y = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n}$ ١٢ ـ $y = \sin x$ ١٣ ـ $y = \cos x$

١٤ ـ وضح كيف تحصل على معادلة انعكاس منحنى فى نقطة الاصل معادلته معطاه . وضح بالقطع المكافىء $y = x(x - 3)$.

١٥ ـ اثبت أنه اذا كان المنحنى متماثلا فى كلا المحورين y و x فانه يكون متماثلا فى نقطة الاصل هل العكس صحيح ؟

١٦ - اذا كان المنحنى متماثلا فى نقطة الاصل ومتماثلا فى أحد محورى الاحداثيات ، هل من الضرورى أن يكون متماثلا فى المحور الآخر ؟

١٧ - اثبت هندسيا وجبريا (أى باستخدام الاحداثيات) أن انعكاس نقطة فى نقطة الاصل يمكن الحصول عليه بانعكاس النقطة فى احد محورى الاحداثيات ثم انعكاس هذه الصورة فى محور الاحداثيات الآخر .

١٨ - انعكس الخط $y = mx$ فى المحور y ، ثم انعكست هذه الصورة فى المحور x . قارن بين الوضعين الابتدائى والنهائى للخط واشرح .

خطط المنحنيات الآتية وانعكاساتها فى الخط $y = x$. ما هى معادلة منحنى الانعكاس ؟

١٩ - $x - y - 4 = 0$	٢٠ - $y = -x$	٢١ - $y = \frac{1}{3}x$
٢٢ - $x^2 + y^2 = 6$	٢٣ - $y = 0$	٢٤ - $x - y = 0$
٢٥ - $y = \frac{3}{2}x - 5$	٢٦ - $y = \frac{1}{2}x^2$	٢٧ - $xy = 1$

٢٨ - كيف يمكننا الحصول على معادلة منحنى الانعكاس فى الخط $y = x$ من معادلة منحنى معطى ؟ أعط دليلا لان يكون المنحنى متماثلا فى الخط $y = x$ ، بدلالة معادلته .

٢٩ - ماهما ميلا الانعكاسين فى المحورين y و x لخط ميله m ؟

٣٠ - ماهو ميل الانعكاس فى الخط $y = x$ لخط ميله m ؟

ت - ٧

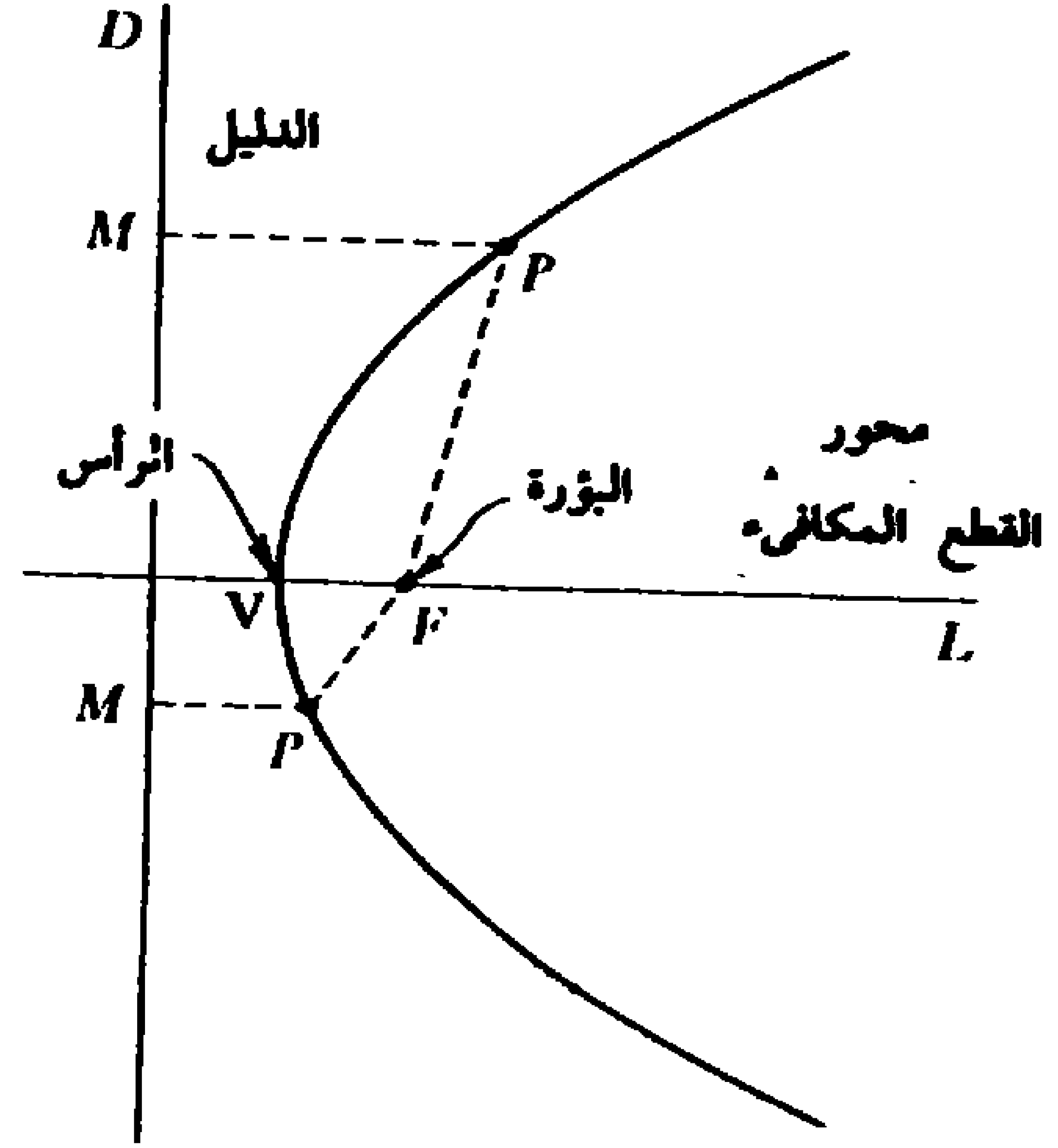
القطع المكافىء

فى هذا البند والبندين الآتيين سندرس ثلاثة أنواع هامة من المنحنيات ، تعرف معا بالقطوع المخروطية ، لان كل منها يمكن الحصول عليه بتقاطع مخروط ومستوى . الاغريق درسوها عن هذا الطريق ، لكن سنجد أنه من الأسهل تعريفها تعريفا مختلفا .

ت - ١٦ تعريف . القطع المكافىء هو فئة جميع النقط فى المستوى التى على بعدين متساويين من نقطة ثابتة ومستقيم ثابت فى المستوى .

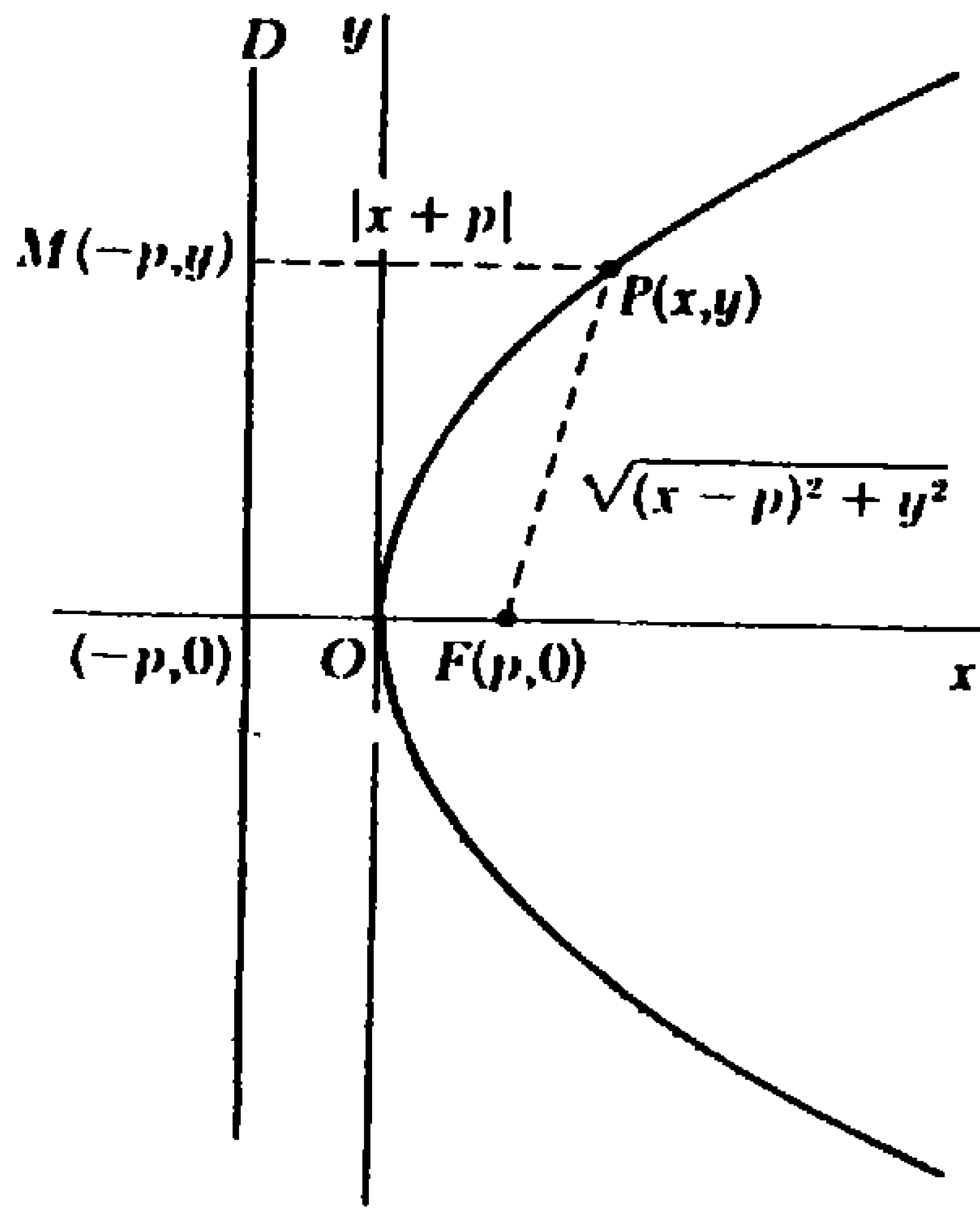
القطع المكافىء النمطى موضح فى الشكل ت - ٤٢ . النقطة الثابتة F تسمى البؤرة والمستقيم الثابت D يسمى الدليل . لجميع النقط P على المنحنى ، $|PF| = |PM|$ المستقيم L المار بالبؤرة عموديا على الدليل هو محور القطع المكافىء ونقطة التقاطع V للقطع المكافىء مع محوره هى رأس القطع المكافىء . الرأس فى منتصف المسافة بين البؤرة والدليل . القطع المكافىء متماثل فى محوره ، والبؤرة « داخل » المنحنى .

لايجاد معادلة القطع المكافىء ، يجب ادخال نظام احداثيات . أبسط معادلة نحصل عليها هى عندما نختار نظام الاحداثيات بحيث أن رأس القطع المكافىء يكون عند نقطة الاصل ومحوره ينطبق



شكل ت ـ ٤٢

P تكون على القطع المكافىء اذا واذا فقط كان $|PF| = |PM|$.



شكل ت ـ ٤٣

القطع المكافىء $y^2 = 4px$.

على أحد محورى الاحداثيات . ضع القطع المكافىء فى هذا الوضع بمحوره على المحور x ومفتوحا الى اليمين (شكل ت ـ ٤٣) . احداثيات البؤرة F تكون $(P , 0)$ لعدد ما P ، والدليل يقطع المحور x عند النقطة $(P , 0)$. موقع العمود من أى نقطة $P (x , y)$ على الدليل هو $M (-P , y)$. ويكون $|PF| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ و $|PM| = |x + p|$. من تعريف القطع المكافىء $P(x,y)$ ستكون على المنحنى اذا واذا فقط كان $|PF|+|PM|$ أى اذا واذا فقط كان (x , y) حلا للمعادلة .

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p| \qquad (١)$$

هذه اذن معادلة للقطع المكافىء . معادلة مكافئة وأبسط منها يمكن ايجادها بكتابة مربعى طرفى المعادلة (١) ، وهى

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \qquad (٢)$$

هذه المعادلة تكافىء المعادلة (١) لان الجذر حقيقى لجميع x , y وكل من طرفى (١) ليس سالبا . المعادلة (٢) تختصر الى

$$y^2 = 4px$$

ت ـ ١٧

وهى معادلة للقطع المكافىء ملائمة أكثر من (١) .

اذا كان القطع المكافىء مفتوحا الى اليسار $P < 0$ ، لكن المعادلة ت ـ ١٧ تظل صحيحة . لقد

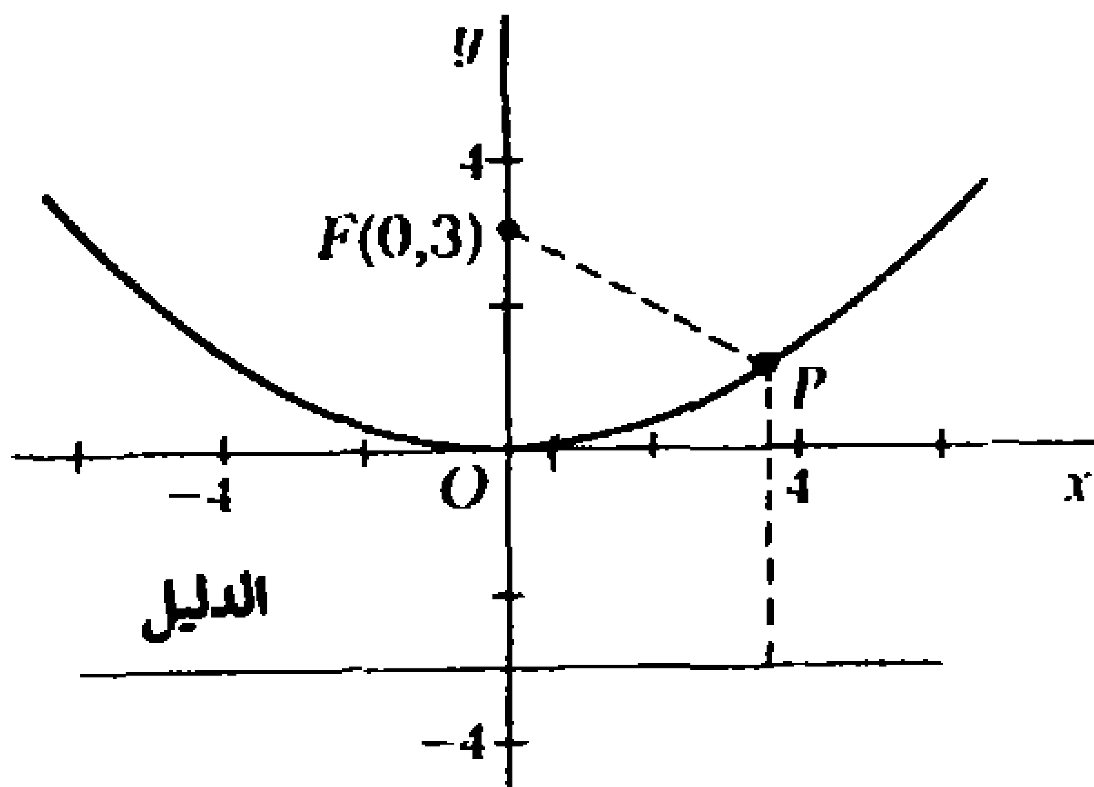
أثبتنا أيضا أن بالعكس ، كل معادلة على الصورة ت ـ ١٧ هى معادلة قطع مكافىء رأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور x ، وبؤرته عند $(P , 0)$. القطع المكافىء يفتح الى اليمين أو الى اليسار تبعا لكون $P > 0$ أو $P < 0$ اذا استبدلت yـ y — فى المعادلة ت ـ ١٧ ، فاننا نحصل على معادلة مكافئة . هذا يثبت جبريا تماثل القطع المكافىء فى محوره .

الآن نضع القطع المكافىء بحيث أن رأسه يظل عند نقطة الاصل لكن محوره على المحور y (شكل ت ـ ٤٤) . دورا y و x الان يتبادلان ، وبرهان مشابه لذلك الذى استخدم لاشتقاق المعادلة ت ـ ١٧ سيثبت أن معادلة للقطع المكافىء فى هذا الوضع هى

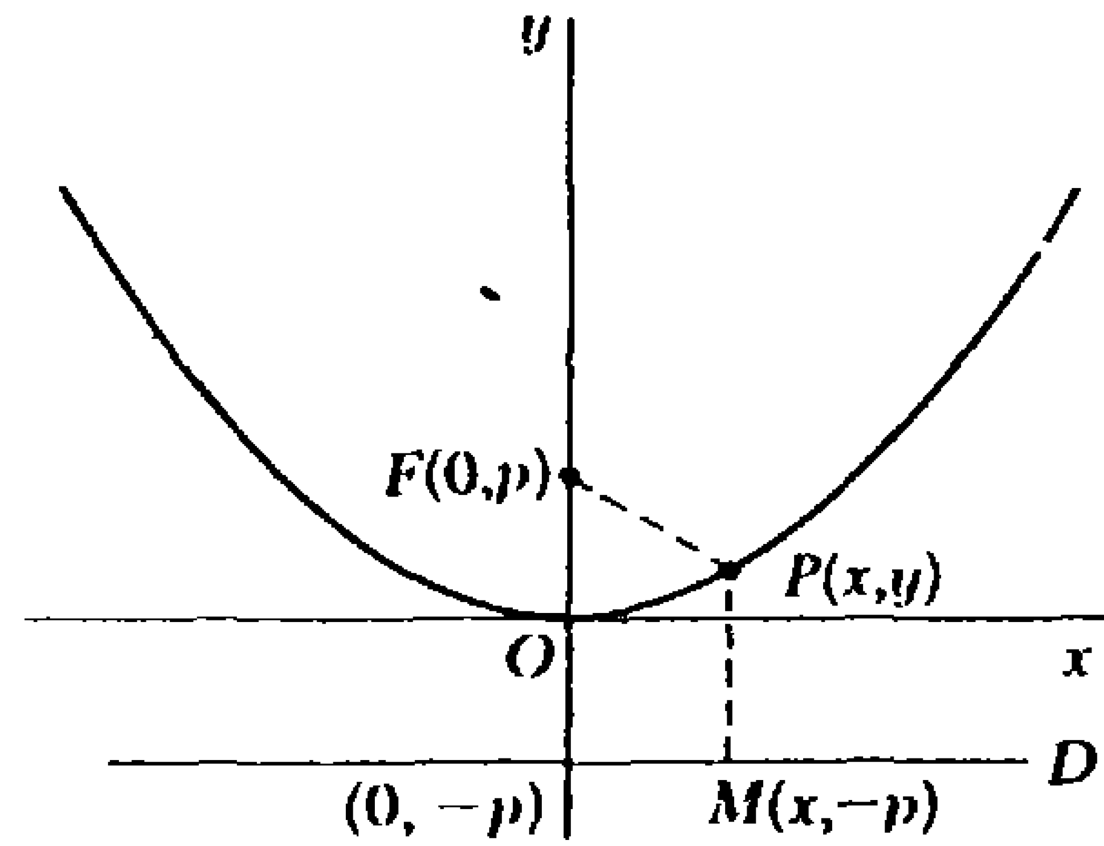
$$x^2 = 4py \qquad \text{ت ـ ١٨}$$

القطع المكافىء يفتح لأعلى أو لأسفل تبعا لكون العدد $P > 0$ أو $P < 0$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع المكافىء الذى رأسه عند نقطة الاصل وبؤرته عند $(0 , 3)$ (شكل ت ـ ٤٥) .



شكل ت ـ ٤٥
القطع المكافىء $x^2 = 12y$.



شكل ت ـ ٤٤
القطع المكافىء $x^2 = 4py$.

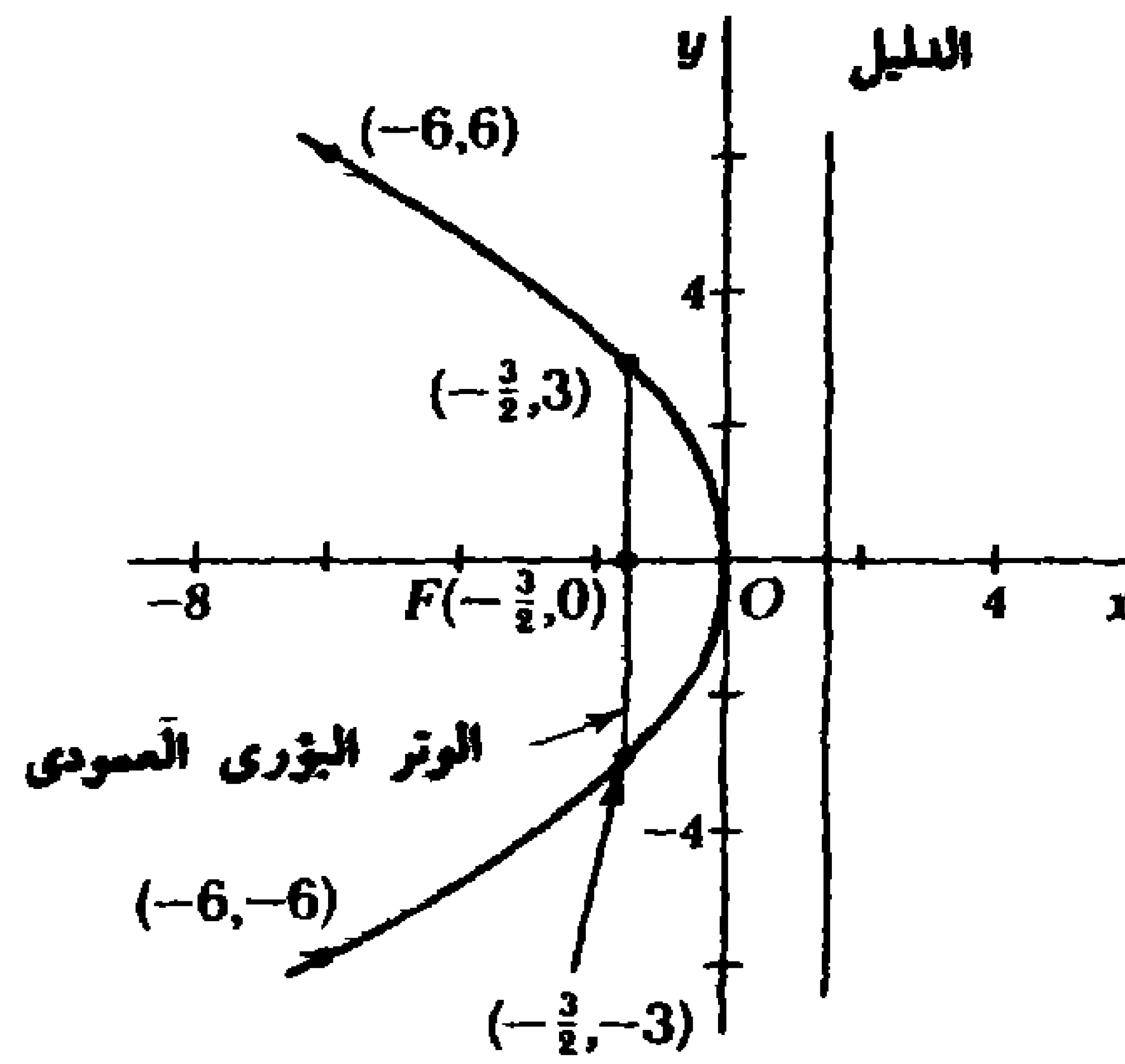
القطع المكافىء يفتح لأعلى وله معادلة على الصورة ت ـ ١٨ . هنا $p = 3$ واذن المعادلة هى $x^2 = 12y$. كل نقطة على هذا القطع المكافىء تكون على بعدين متساويين من البؤرة $F (0,3)$ والدليل $y = -3$.

الوتر المار بالبؤرة وعمودى على محور القطع المكافىء يسمى الوتر البؤرى العمودى . طرفا الوتر البؤرى العمودى عادة يوجدان بسهولة من المعادلة ، ويفيد أن فى تخطيط المنحنى .

مثال ٢ . ميز وخطط المنحنى الذى معادلته هى $y^2 = -6x$.

اذا كتبنا المعادلة هكذا $y^2 = 4(-\frac{3}{2})x$ ، نرى أنها على الصورة ت ـ ١٧ حيث $p = -\frac{3}{2}$. واذن المنحنى يجب أن يكون قطعا مكافئا رأسه عند نقطة الأصل ، ومحوره على المحور x ، ولأن P سالبه ، القطع يفتح الى اليسار . البؤرة تكون عند النقطة $(-\frac{3}{2},0)$. بما أن جميع القطوع

المكافئة متشابهه ، وتختلف فقط فى الاتساع ، المعلومات السابقة مع ثلاث أو أربع نقط اضافية توجد من المعادلة ، مثلا طرفا الوتر البؤرى العمودى والنقطتان $(-6, \pm 6)$ تكفى لأن نستطيع عمل تخطيط تقريبى للمنحنى (شكل ت ـ ٤٦) . نهايتا الوتر البؤرى توجدان بتعويض الاحداثى x للبؤرة ، الذى هو $-\frac{3}{2}$ ، عن x فى المعادلة $y^2 = -6x$ للقطع المكافىء ، ثم الحل لـ y . هذا يعطى $y = \pm 3$ ، وتكون احداثيات طرفى الوتر البؤرى العمودى هى $(-\frac{3}{2}, \pm 3)$. الدليل هو الخط المستقيم $x = \frac{3}{2}$.



شكل ت ـ ٤٦

القطع المكافىء $y^2 = -6x$.

اذا اجرينا حل المعادلة ت ـ ١٨ لـ y ، فاننا نحصل على $y = ax^2$ ، حيث $a = 1/4p$. واذن المعادلة التى على هذه الصورة هى قطع مكافىء رأسه عد نقطة الاصل ومحوره على المحور y ، ومفتوح لاعلى أو لاسفل تبعا لكون a موجبة أو سالبة بالمثل ، المعادلة $x = ay^2$ هى قطع مكافىء على الصورة ت ـ ١٧ .

فى بند ت ـ ١٠ سنثبت أن القطع المكافىء الذى محوره يوازى أحد محورى الاحداثيات لكن رأسه ليس بالضرورة عند نقطة الاصل معادلته تكون على الصورة

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0 \tag{٣}$$

أو

$$x = ay^2 + by + c, \qquad a \neq 0. \tag{٤}$$

تبعا لكون محور القطع المكافىء يوازى المحور y أو المحور x . برهان آخر مخطط فى المسألة ٣٧ . العكس أيضا صحيح : كل معادله فى y و x من الدرجة الثانية ، فيها متغير واحد مربع ولايوجد حد xy ، تكون معادلة قطع مكافىء محوره يوازى أحد محورى الاحداثيات . القطع المكافىء فى (٣) يفتح لاعلى اذا كانت $a > 0$ اذ أن المعادلة توضح أن y تكون كبيرة وموجبة عندما تكون x كبيرة . القطع المكافىء يفتح لاسفل اذا كانت $a < 0$ ، اذ أن y تكون كبيرة وسالبه عندما

تكون x كبيرة . لأسباب مماثلة القطع المكافىء فى (٤) يفتح الى اليمين أو الى اليسار تبعا لكون $a > 0$ أو $a < 0$.

المعادلات التى على الصورة (٣) أو (٤) يمكن تخطيطها بسرعة . بما أننا نعرف الشكل والوضع العامين لهذه القطوع المكافئة فاننا نحتاج فقط الى توقيع عدد قليل من النقط . عادة تكفى الاجزاء المقطوعة والرأس . باستخدام التفاضل أو المسألة ٣٨ ، ليس من الصعب اثبات أن الاحداثى x للرأس للمعادلة (٣) هو$-b / 2a$. الاحداثى y يمكن حينئذ . ايجاده من المعادلة .

مثال ٣ . خطط المنحنى $y = -x^2 + 3x + 10$

نعرف أن المنحنى قطع مكافىء لان المعادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد فقط . محوره يوازى المحور y ، وبما أن y تكون كبيرة وسالبه عندما تكونx كبيرة ، فالقطع المكافىء يجب أن يفتح لأسفل . بوضع $y = 0$ فى المعادلة والحل لـ x نوجد الجزئين المقطوعين من المحور x وهما 5 و-2 . بالمثل ، بوضع $x = 0$ نوجد الجزء المقطوع من المحور y وهو 10 . الاحداثى x للرأس هو $\frac{3}{2}$ والاحداثى y ، كما يوجد من المعادلة ، هو $\frac{49}{4}$. من هذه المعلومات نخطط الشكل البيانى (شكل ت ـ ٤٧) .

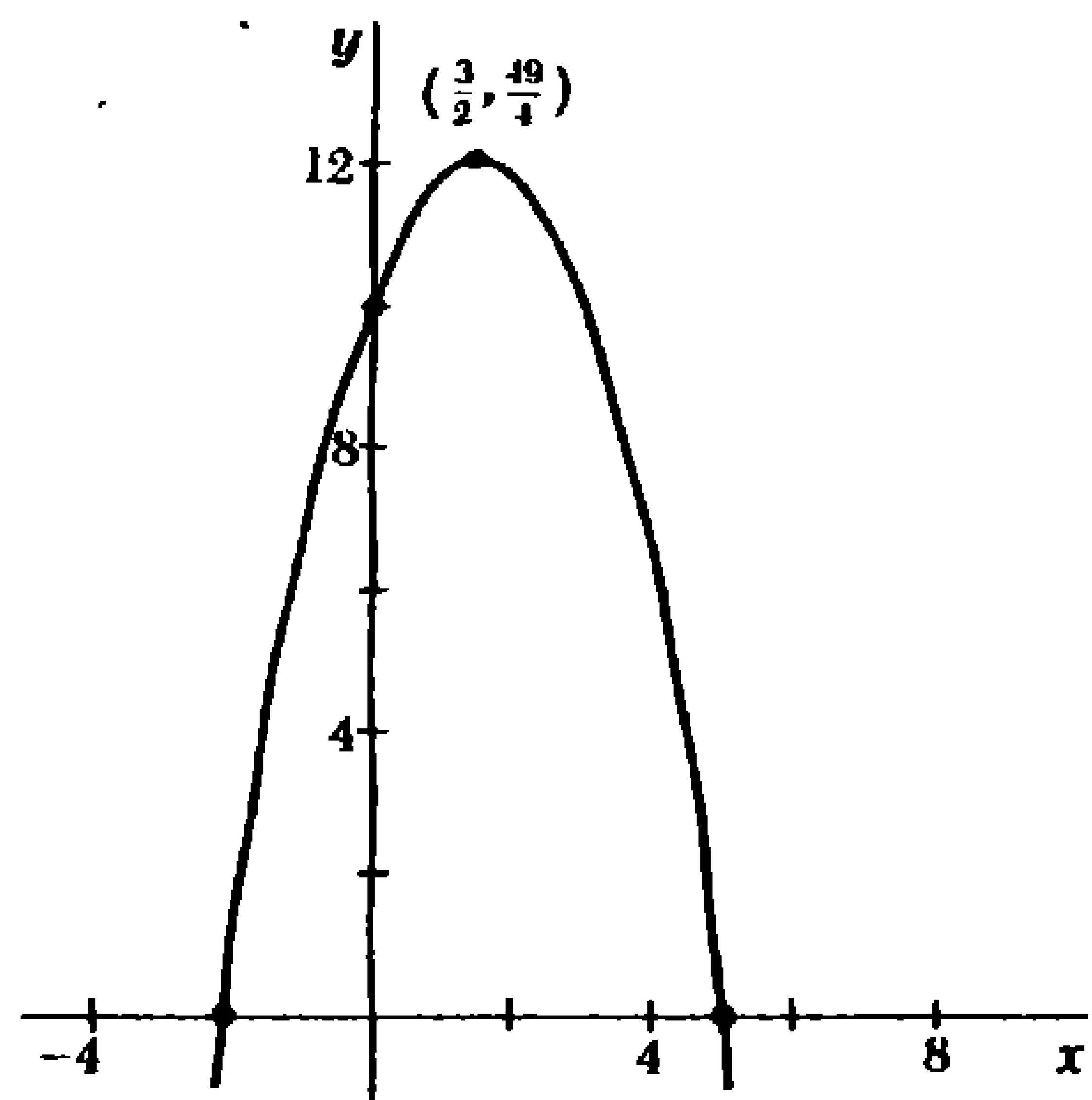
مثال ٤ . خطط المنحنى

$$y = 2\sqrt{x-3} \qquad (٥)$$

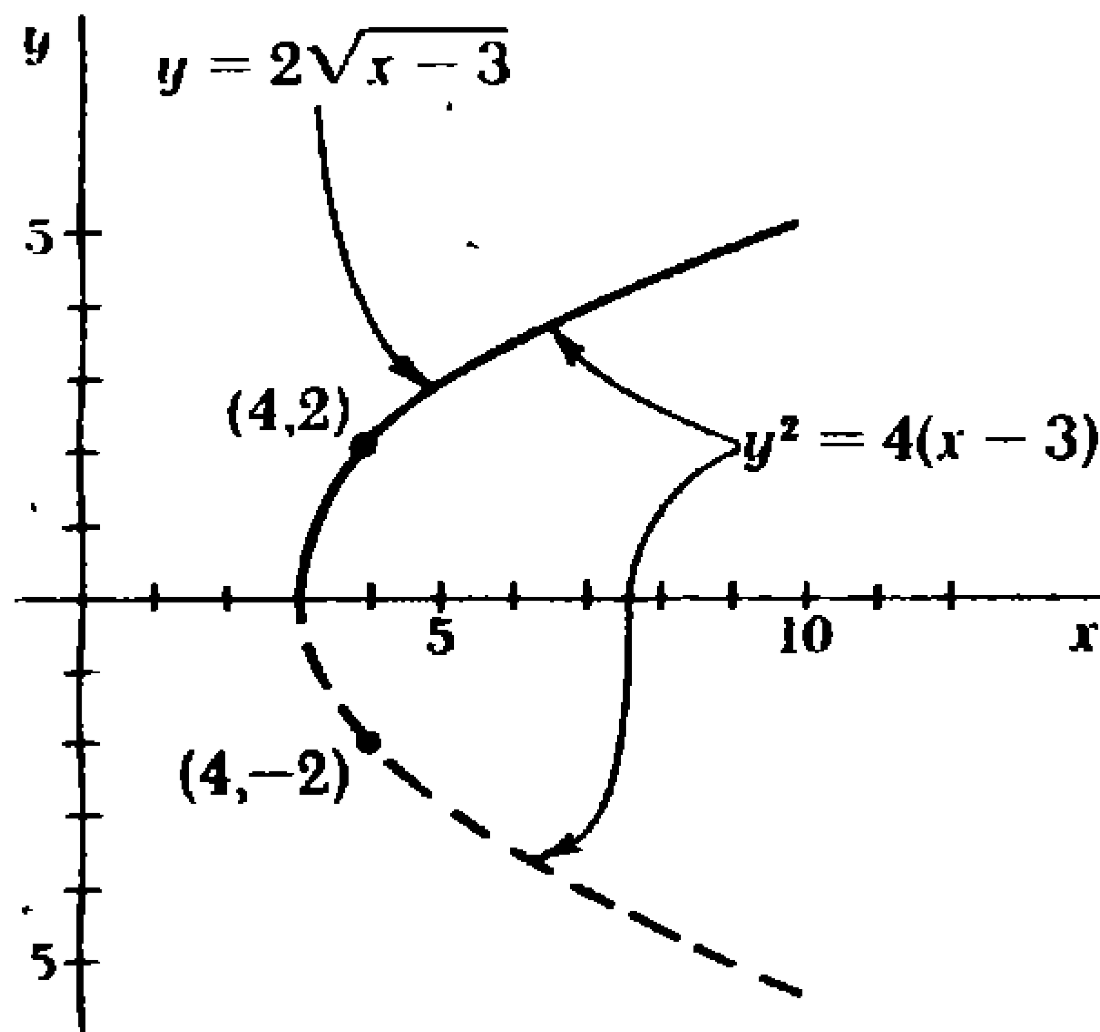
رغم أن المعادلة

$$y^2 = 4(x-3) \qquad (٦)$$

التى نحصل عليها بكتابة مربع كل من طرفى المعادلة (٥) لاتكون مكافئة للمعادلة (٥) ، الا أن كل نقطة على (٥) تكون ايضا على (٦) ، وبالتالى الشكل البيانى لـ (٥) سيكون جزءا من الشكل البيانى لـ (٦) ، الشكل البيانى لـ (٦) هو قطع مكافىء رأسه عند $(3 , 0)$ ويفتح الى اليمين .



شكل ت ـ ٤٧
القطع المكافىء $y = -x^2 + 3x + 10$.



شكل ت ـ ٤٨
الشكل البيانى للمنحنى $y = 2\sqrt{x-3}$ هو النصف الأعلى للقطع المكافىء $y^2 = 4(x-3)$.

هو المنحنى الكامل فى الشكل ت ـ ٤٨ . أى نقطة (x , y) حيث $y \geqslant 0$ تحقق (٦) ايضا تحقق (٥) ، واذن الشكل البيانى لـ (٥) هو النصف الأعلى للقطع المكافىء .

معادلة القطع المكافىء الذى محوره لايوازى أحد محورى الاحداثيات توجد بسهولة بطريقة دوران المحاور وهذه سندرسها فى البند ت ـ ١١ .

القطع المكافىء منحنى له خواص هندسية كثيرة . وله أيضا استخدامات عملية . مسير القذيفة يقترب من قطع مكافىء ويكون قطعا مكافئا حقيقيا اذا لم توجد مقاومة هواء . التقوسات المكافئة تستخدم كدعامات للكبارى . الكابل الدعامى الرئيسى لكوبرى معلق هو قوس قطع مكافىء . عاكسات الأضواء الكاشفة والمرايا العاكسة فى التليسكوبات هى عادة سطوح مكافئة مكونة من دوران قطع مكافىء حول محوره . الاضواء الكاشفة حيث يكون العاكس هكذا وحيث يكون مصدر الضوء عند البؤرة تصدر أشعة متوازية ، والتليسكوب العاكس يعمل العكس بأن يركز أكبر كمية من الضوء القادم من نجم ، عند عين الراصد ، الموضوعة عند البؤرة . هذه تسمى الخاصية البؤرية للقطع المكافىء .

مسائل

أوجد معادلة القطع المكافىء الذى يحقق الشروط الآتية :

١ ـ الرأس $(0 , 0)$ والبؤرة $(0 , 6)$.

٢ ـ الرأس $(0 , 0)$ والبؤرة $(-3 , 0)$.

٣ ـ البؤرة $(-\frac{3}{2} , 0)$ والدليل $x = \frac{3}{2}$.

٤ ـ الرأس $(0 , 0)$ والدليل $y = c$.

٥ ـ البؤرة $(a , 0)$ والدليل $x = -a$.

أوجد احداثيات الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل للقطوع المكافئة الآتية . خطط المنحنى

٦ ـ $y^2 = 24x$ ٧ ـ $x^2 = -10y$ ٨ ـ $x^2 - \sqrt{3}y = 0$ ٩ ـ $y = cx^2$ ١٠ ـ $4y^2 + ax = 0$

استخدم تعريف القطع المكافىء لايجاد معادلة القطع المكافىء الذى يحقق الشروط الآتية :

١١ ـ الرأس $(2 , 0)$ والبؤرة $(5 , 0)$ ١٢ ـ البؤرة $(2 , 4)$ والدليل $y = -5$

١٣ ـ الرأس $(-4 , -4)$ والدليل $x = 0$

١٤ ـ الرأس $(0 , k)$ والبؤرة $(0 , k - p)$

خطط الأشكال البيانية للمعادلات الاتية :

١٥ ـ $y = \frac{1}{2}x^2$ ١٦ ـ $y^2 = -30x$ ١٧ ـ $y = 3 - x^2$

١٨ ـ $y = x^2 + 8$ ١٩ ـ $x^2 - 8x + 2y = 0$ ٢٠ ـ $y^2 = 36 - x$

٢١ ـ $2y^2 - x - 10 = 0$ ٢٢ ـ $y = x^2 - ax, a > 0$ ٢٣ ـ $y = -x^2 + 4x - 4$

٢٤ ـ $3x^2 + x - y + 4 = 0$ ٢٥ ـ $4y^2 + 4x - 20y = -25$ ٢٦ ـ $y = -7 + 5x - x^2$

٢٧ ـ $2y^2 + x + 10y = 0$ ٢٨ ـ $y^2 = x^2 - 4x + 4$ ٢٩ ـ $y = \sqrt{x}$.

٣٠ـ $y = \sqrt{-x}$ ٣١ـ $y = -\sqrt{x+4}$

٣٢ـ أوجد معادلة الوتر الواصل بين النقطتين على القطع المكافىء $x^2 = -12y$ اللتين احداثياهما x هما $4,8$.

٣٣ـ أوجد المسافة من بؤرة القطع المكافىء $y^2 = kx$ إلى نقطة على القطع المكافىء احداثيها x هو a .

٣٤ـ أوجد معادلة القطع المكافىء الذى رأسه عند نقطة الأصل ومحوره على المحور y ويمر بالنقطة $(4 , 3)$.

٣٥ـ النقط الثلاث $(2 , 1)$ و $(1 , 1-)$, $(2 , -1)$ لاتقع على خط مستقيم . (أ) أوجد معادلة القطع المكافىء الذى يمر بالنقط الثلاث ومحوره يوازى المحور y [ارشاد : اوجد معادلة على الصورة (٣)] . (ب) أوجد معادلة القطع المكافىء الذى يمر بالنقط الثلاث ومحوره يوازى المحور x .

٣٦ـ مذنب يتحرك فى مدار على شكل قطع مكافىء بؤرته الشمس . عندما يكون على بعد d miles من الشمس ، الزاوية من محور القطع المكافىء الى الخط المستقيم الواصل بين الشمس والمذنب هى $60°$. ما هو أقرب بعد للمذنب عن الشمس ؟

٣٧ـ اثبت أن القطع المكافىء الذى رأسه عند النقطة (h , k) ومحوره يوازى المحور x له المعادلة $(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$ ، حيث p هى المسافة الموجهة من الرأس إلى البؤرة . (إرشاد : أوجد إحداثيى البؤرة واستخدم تعريف القطع المكافىء .) اثبت ان هذه المعادلة على الصورة (٤) .

٣٨ـ بفرض أن القطع المكافىء الذى محوره يوازى المحور y له معادلة على الصورة $a \neq 0$ و $y = ax^2 + bx + c$ اثبت أن الاحداثى x للرأس هو $-b / 2a$ (ارشاد : أوجد الاحداثيين x لنقطتى تقاطع القطع المكافىء مع خط مستقيم أفقى مناسب) .

٣٩ـ لتكن N نقطة تقاطع دليل القطع المكافىء ومحوره . أثبت أن المستقيمين المارين بالنقطة N وطرفى الوتر البؤرى العمودى يتعامدان . (ارشاد : ادخل نظاما للاحداثيات يختار بحيث أن القطع المكافىء تكون له معادلة بسيطة .)

٤٠ـ اثبت أن لأى نقطة على القطع المكافىء ، النقطه ومسقط النقطة على الدليل ، والبؤرة تكون رؤوس مثلث متساوى الساقين .

٤١ـ أوجد المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث أن بعدها عن النقطة $(8 , 0)$ يزيد اربع وحدات عن بعدها عن الخط المستقيم $y + 4 = 0$.

٤٢ـ رأسان من مثلث هما $A(c,0)$ و $B(-c , 0)$. أوجد المحل الهندسى للرأس الثالث P اذا كان ميل PB يقل بواحد صحيح عن ميل PA .

٤٣ـ رسمت قطع مستقيمة من نقطة الاصل الى القطع المكافىء $y^2 = 4Px$. صف فئة منتصفات هذه الأوتار .

أوجد نقط التقاطع لأزواج المنحنيات الآتية وافحص نتائجك بتخطيط أشكالها البيانية :

٤٤ ـ $x - y = 0,\ x^2 + 6y = 0$ ٤٥ ـ $x + y - 8 = 0,\ y^2 - 4x + 2 = 0$

٤٦ ـ $y = 2x^2 + 8x,\ 2y = x^2 + 4x - 15$ ٤٧ ـ $y^2 = 4px,\ x^2 = 4py$

٤٨ ـ $y = x^3,\ y = 2x^2 + 3x$ ٤٩ ـ $x^2 + y^2 - 25 = 0,\ x^2 + 3y - 21 = 0$

٥٠ ـ اثبت أن الدائرة $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ والقطع المكافىء $y^2 = 4px$ حيث $p > 0$ و $a > 0$ يتقاطعان فى نقطة واحدة فقط مالم يكن $a > 2p$.

٥١ ـ خطط الشكل البيانى للمعادلة $y = |x^2 - 3|$

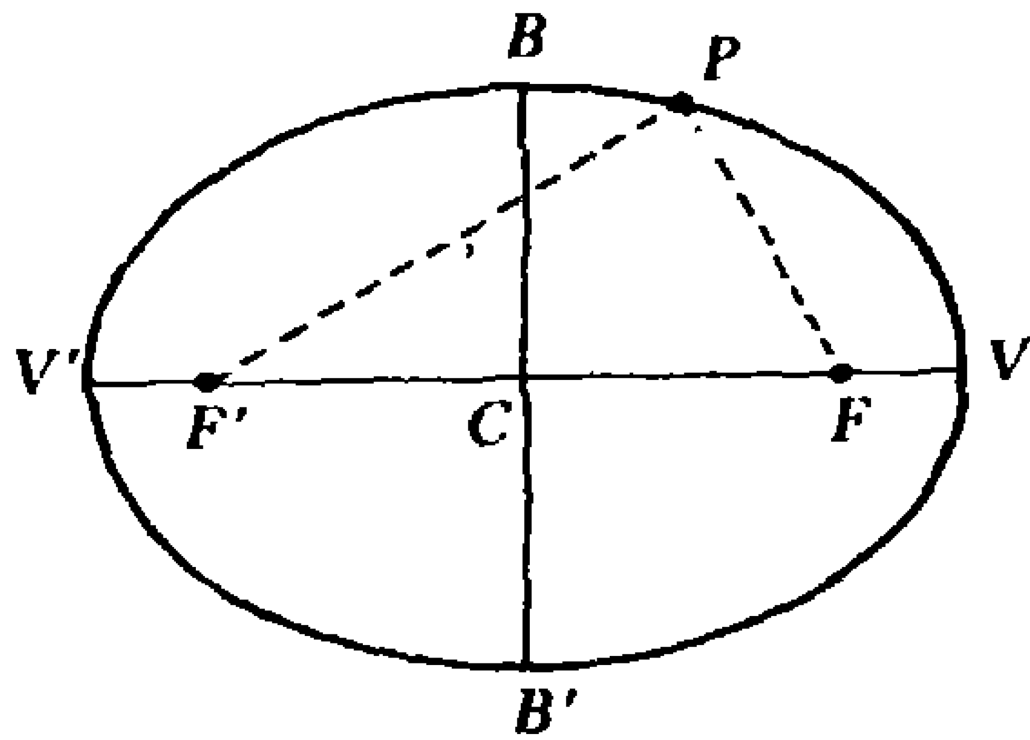
٥٢ ـ خطط الشكل البيانى للمعادلة $y = x|x - 2|$

٥٣ ـ المماس لقطع مكافىء عند نقطة P يمكن تعريفه بأنه الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة P ولايوازى محوره ولايقطع القطع المكافىء فى أى نقطة أخرى . أوجد معادلة المماس للقطع المكافىء $y = x^2$ عند النقطة $P(a\ ,\ a^2)$ (ارشاد : أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله m ويمر بالنقطة P ، ثم اختر m بحيث أن الخط يكون له نقطة تقاطع واحدة فقط مع القطع المكافىء) .

ت ـ ٨
القطع الناقص

ت ـ ١٩ تعريف . القطع الناقص هو فئة جميع النقط فى المستوى التى حاصل جمع بعديها عن نقطتين ثابتتين فى المستوى مقدار ثابت .

القطع الناقص النمطى موضح فى الشكل ت ـ ٤٩ . النقطتان الثابتتان F' و F تسميان بؤرتى القطع الناقص . لجميع النقط P على المنحنى $|PF| + |PF'| = 2a$ ، حيث $2a$ هو الثابت المعطى* . النقطة C التى فى منتصف المسافة بين البؤرتين هى المركز ، والنقطتان V' و V فى



شكل ت ـ ٤٩
P تكون على القطع الناقص اذا واذا فقط كان
$|PF| + |PF'| = 2a$

---

* معادلة القطع الناقص تكون أبسط اذا رمزنا للثابت بالرمز $2a$ وليس بالرمز a .

الشكل هما الرأسان . القطعتان المستقيمتان BB' و VV' هما المحور الاكبر والمحور الاصغر للقطع الناقص .

القطع الناقص يمكن رسمه آلياً . ضع مسمارين صغيرين عند البؤرتين واربط طرفاً واحداً من خيط طوله $2a$ بأحد المسمارين والطرف الآخر بالمسمار الآخر . إذا تحرك قلم رصاص P ، مستودا على الخيط ، بحيث يحفظ الخيط دائماً مشدوداً ، فإن $|PF| + |PF'|$ يكون مقداراً ثابتاً ، والقلم الرصاص يرسم قطعا ناقصا . اذا كانت F' و F منطبقتين ، القطع الناقص يكون دائرة .

لإيجاد معادلة القطع الناقص ، نحتاج الى نظام للاحداثيات . المعادلة تكون ابسط ما يمكن اذا وضع القطع الناقص على مستوى الاحداثيات بحيث أن البؤرتين تكونان على المحور x والمركز يكون عند نقطة الأصل (شكل ت ـ ٥٠) . اذا كانت $2c$ هى المسافة بين البؤرتين ، فان البؤرتين هما $c \geqslant 0$, $F'(-c, 0)$ و $F(c,0)$. النقطة $P(x,y)$ تكون على المنحنى اذا واذا فقط كان $|PF| + |PF'| = 2a$ حيث $2a$ هو الثابت المعطى أى إذا وإذا فقط كان (x, y) حلا للمعادلة

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (١)$$

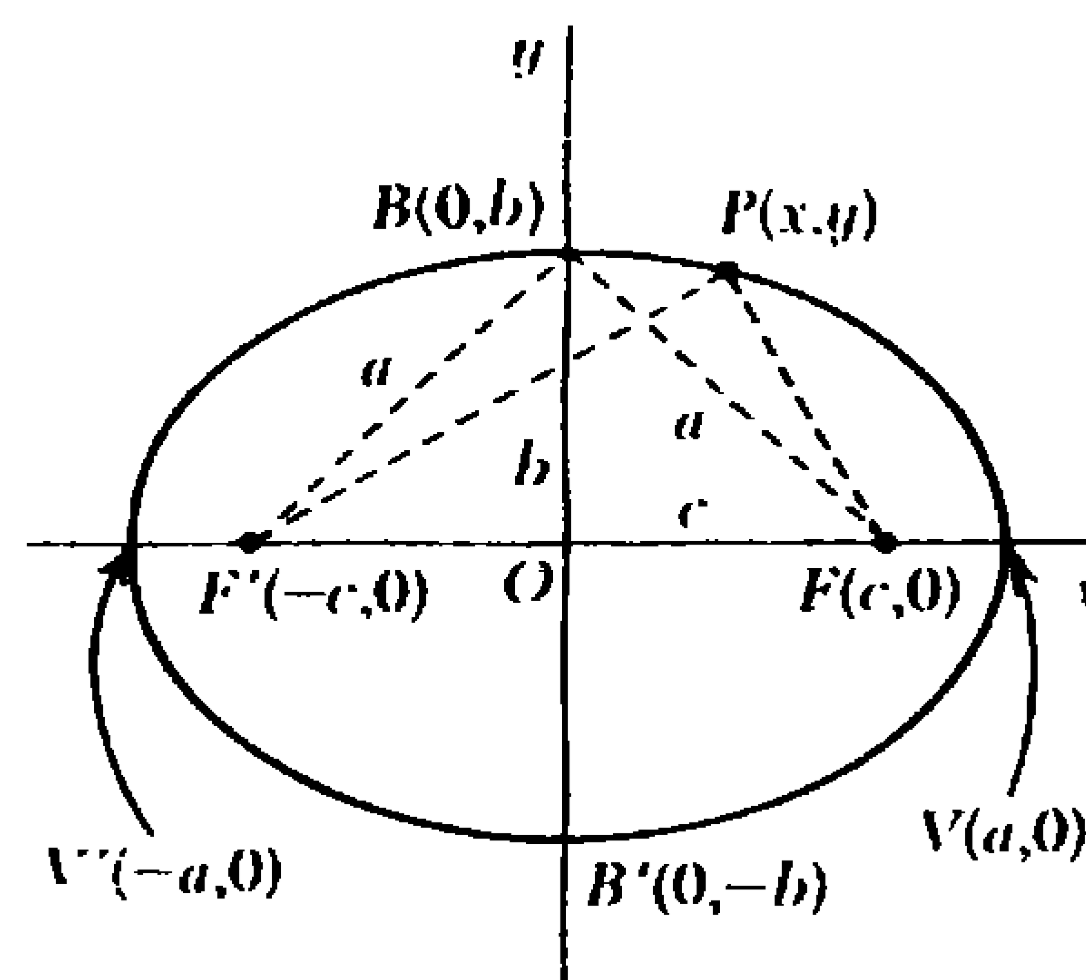
هذه إذن معادلة للقطع الناقص عندما يوضع حسب الوصف السابق .

هذه المعادلة يمكن تبسيطها الى حد كبير . اذا نقلنا الحد الثانى فى (١) الى الطرف الايمن ثم كتبنا مربعى طرفى المعادلة الناتجة ، فاننا نحصل بعد الاختصار والترتيب على

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

بكتابة مربعى الطرفين مرة أخرى ، والاختصار وإعادة الترتيب نحصل على

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (٢)$$



شكل ت ـ ٥٠

القطع الناقص $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ البؤرتان على المحور x .

حاصل الجمع $|PF| + |PF'| = 2a$ لطولى ضلعين من المثلث PFF' فى الشكل ت ـ ٥٠ يكون أكبر من الطول $|FF'| = 2c$ للضلع الثالث . واذن $a > c \geqslant 0$ وحيث أن $a^2 - c^2$ موجب فهو يساوى مربع عدد موجب ما وليكن b :

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad (٣)$$

بتعويض b^2 لـ $a^2 - c^2$ فى (٢) ، يكون لدينا

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (٤)$$

وبالقسمة على a^2b^2 يكون

ت ـ ٢٠
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

المعادلة ت ـ ٢٠ أبسط من (١) ، لكن ليس واضحا بحال من الاحوال أن المعادلتين متكافئتان . كتابة مربع معادلة عادة لايعطينا معادلة مكافئة ، وقد فعلنا ذلك مرتين فى اشتقاق المعادلة ت ـ ٢٠ . الا أنه يمكننا اثبات أن أى حل للمعادلة ت ـ ٢٠ هو حل لـ (١) ، وبالتالى المعادلتان متكافئتان (المسألة ٣٢) . نتيجة لذلك ، المعادلة ت ـ ٢٠ هى معادلة للقطع الناقص .

من المعادلة ت ـ ٢٠ نرى أن القطع الناقص متماثل فى كلا المحورين وفى نقطة الاصل (شكل ت ـ ٥٠) . الجزءان المقطوعان من المحور x هما $(\pm a , 0)$ والجزءان المقطوعان من المحور y هما $(0 , \pm b)$. المعادلة (٣) من السهل تذكرها . النقطة B فى الشكل ت ـ ٥٠ هى احدى أوضاع P ، واذن $|BF| + |BF'| = 2a$ وبما أن $|BF| = |BF'|$ اذن $|BF| = a$ والمعادلة (٣) هى مجرد نظرية فيثاغورث للمثلث OFB . إذا أجرينا حل (٤) لـ y ، فإننا نحصل على

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

بما أن y تكون تخيلية لـ $|x| > a$ ، فالمنحنى يقع بين المستقيمين $x = -a$ و $x = a$. بالمثل ، بالحل لـ x نرى أن المنحنى يقع بين الخطين الافقيين $y = -b$ و $y = b$.

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص الذى بؤرتاه $(\pm 3 , 0)$ وطول محوره الأكبر 12 .

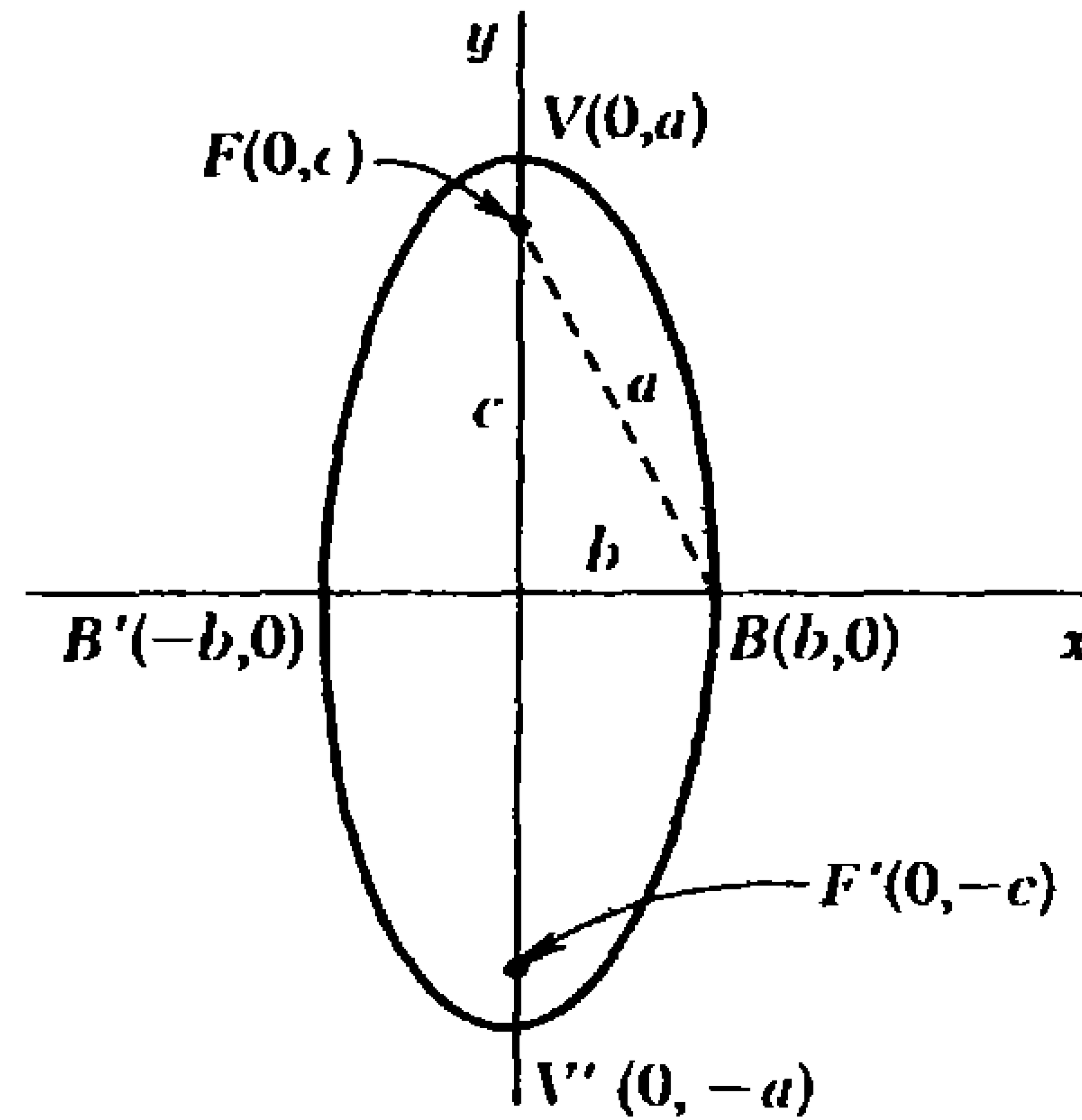
بما أن بؤرتى القطع الناقص على المحور x ومركزه عند نقطة الاصل ، فمعادلته تكون على الصورة ت ـ ٢٠ . يجب أن نوجد b^2 و a^2 . طول المحور الاكبر هو $2a$ ، اذن $a = 6$. موقع البؤرتين يتضمن أن $c = 3$ ، ومن ثم ، من (٣) ، $b^2 = 27$. بتعويض هاتين القيمتين لـ b و a فى المعادلة ت ـ ٢٠ ، يكون لدينا

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$$

كمعادلة للقطع الناقص .

اذا كانت البؤرتان على المحور y عند النقطتين $(0 \pm c)$ (شكل ت ـ ٥١) ، فان دورى x , y يتبادلان ، ومعادلة القطع الناقص تكون

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{ت ـ ٢١}$$



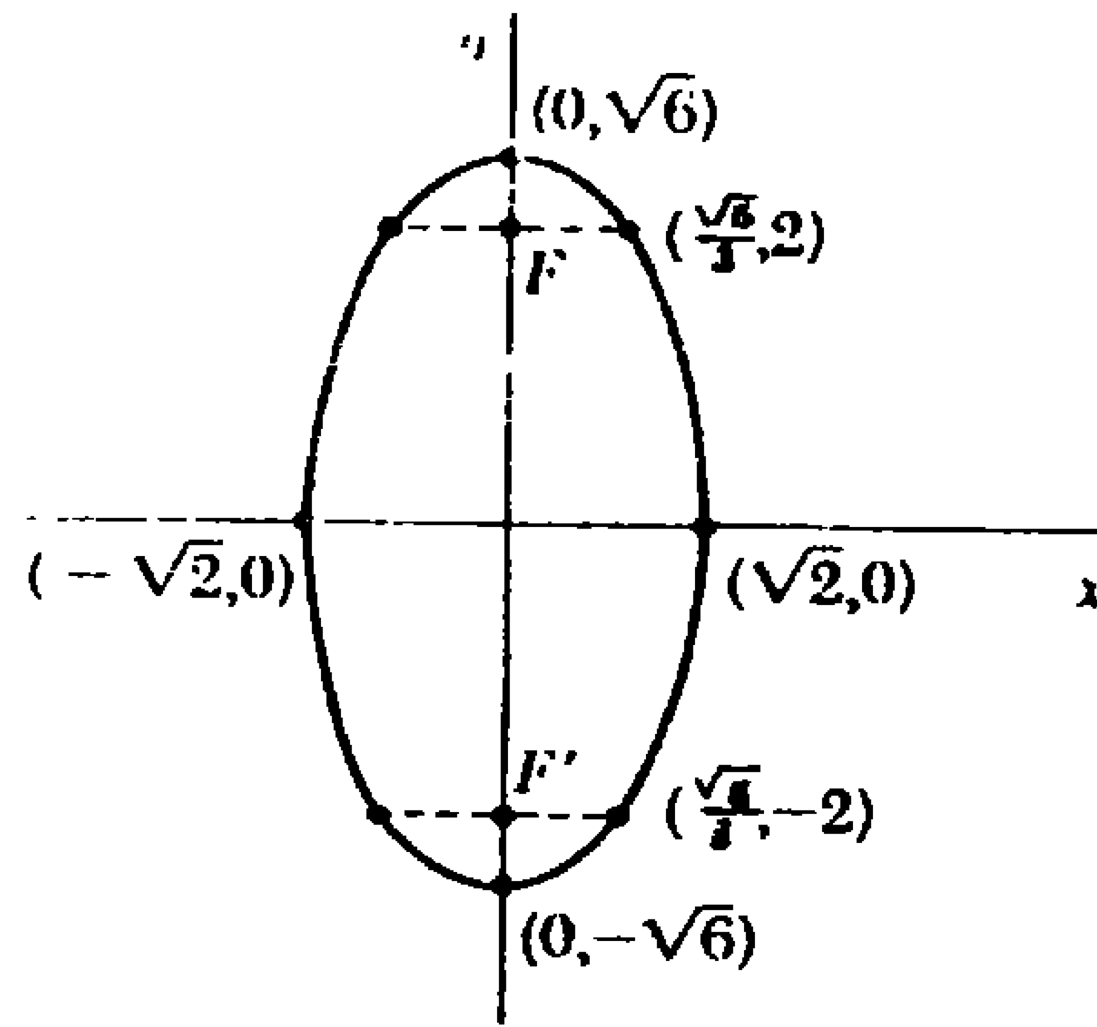
شكل ت ـ ٥١

القطع الناقص $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ البؤرتان على المحور y .

المعادلتان ت ـ ٢٠ ، ت ـ ٢١ تسميان الصورتين القياسيتين لمعادلة القطع الناقص . اى معادلة على احدى هاتين الصورتين او على الصورة (٤) ، شكلها البيانى قطع ناقص . أكبر المقامين هو a^2 والاصغر b^2 . من السهل التحديد من المعادلة ما اذا كان المحور الاكبر على المحور x او على المحور y بايجاد الاجزاء المقطوعة . البؤرتان تكونان دائما على المحور الاكبر . طول المحور الاكبر والمحور الاصغر هما $2b$ و $2a$ ، والاول دائما أطول من الثانى مالم يكن القطع الناقص دائرة .

مثال ٢ خطط المنحنى $3x^2 + y^2 = 6$

المعادلة على الصورة (٤) فهى قطع ناقص مركزه عند نقطة الأصل ومحواره على محورى الاحداثيات . الجزءان المقطوعان من المحور x هما $(\pm\sqrt{2}, 0)$ والجزءان المقطوعان من المحور y هما $(0, \pm\sqrt{6})$. فالقطع الناقص محوره الأكبر على المحور y . النقط الأربع تكفى لتخطيط تقريبى . لتخطيط أفضل ، نقط أطراف الوترين البؤريين العموديين ، اللذين هما الوتران الماران بالبؤرتين وعموديان على المحور الاكبر ، تكون مفيدة . بما أن $a = \sqrt{6}$ (الأكبر بين $\sqrt{6}$ ، $\sqrt{2}$) ، $b = \sqrt{2}$ فان $c = 2$ والبؤرتان هما $(0, \pm 2)$ ؛ (a , b , c دائما موجبة) . احداثيات أطراف الوترين البؤريين العموديين يمكن ايجادها بتعويض $c = 2$ لـ y فى معادلة القطع الناقص والحل لـ x . وهى $(\pm\sqrt{6}/3, \pm 2)$. المنحنى مخطط فى الشكل ت ـ ٥٢ .



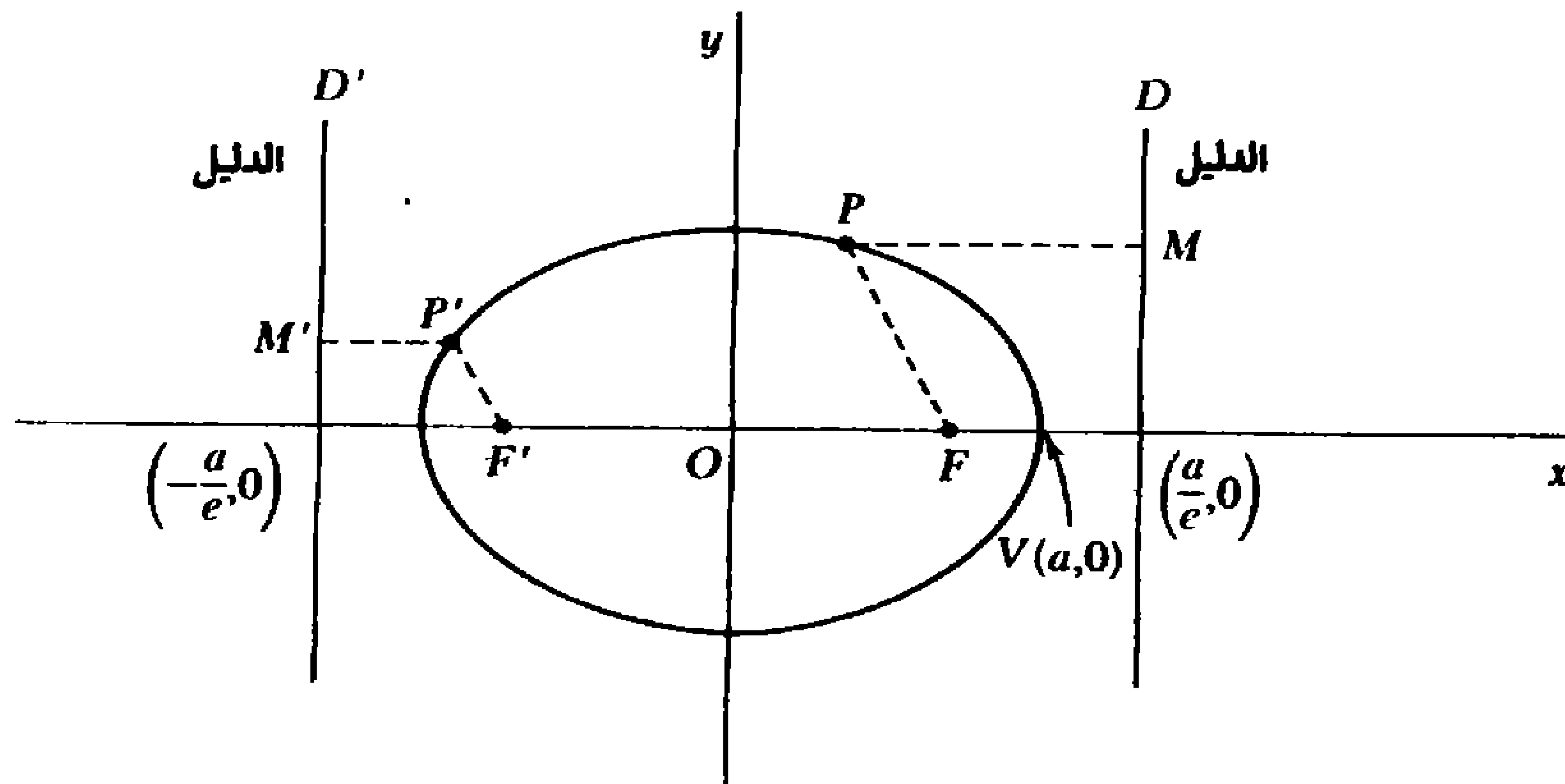
شكل ت ـ ٥٢
القطع الناقص $3x^2 + y^2 = 6$.

النسبة a الى b تحدد تدوير أو فلطحة القطع الناقص ، لكن مقياسا أكثر شيوعاً هو النسبة c / a ، ويسمى الاختلاف المركزى للقطع الناقص ويرمز له بالرمز e :

$$e = \frac{c}{a}$$

بما أن $0 \leqslant c < a$ فان $0 \leqslant e < 1$. اذا كانت $e = 0$ ، فحينئذ $c = 0$ ، البؤرتان تنطبقان ، ويصبح القطع الناقص دائرة . المعادلة ت ـ ٢٠ تعكس ذلك لانه عندئذ يكون $b = a$. اذا كانت e قريبة من 1 ، فان c تكاد تكون مساوية لـ a و b تكاد تكون صفرا ، والقطع الناقص يكون طويلا ونحيفا ، والبؤرتان تكونان قريبتين من الطرفين .

اذا لم يكن القطع الناقص دائرة ، أى كانت $e \neq 0$ فان الخط المستقيم D الذى معادلته هى $x = a / e$ يكون موجودا ويقطع المحور x على يمين (لماذا ؟) الرأس $V(a, 0)$ للقطع الناقص ت ـ ٢٠ (شكل ت ـ ٥٣) له خاصية متميزة هى أنه لأى نقطة P على القطع الناقص يكون



شكل ت ـ ٥٣
لجميع النقط P على القطع الناقص ، $|PF|/|PM| = e < 1$.

$|PF| / |PM| = e$ ، حيث M هى مسقط P على D وحيث F البؤرة الأقرب الى D . من التماثل ، الخط المستقيم D' الذى معادلته هى $x = -a/e$ والبؤرة الأخرى F' لهما دور مماثل . بالتناظر مع القطع المكافىء ، D' و D يسميان الدليلين للقطع الناقص . نترك برهان هذه الحقائق للطالب (المسألة ٣٠)

معادلات القطوع الناقصة التى مراكزها ليست عند نقطة الأصل أو التى محاورها ليست موازية لمحاور الأحداثيات ستناقش فى البندين ت ـ ١٠ ، ت ـ ١١ .

الكواكب تتحرك فى مدارات على شكل قطع ناقص بؤرته الشمس . الاختلاف المركزى لمدار الارض هو بالتقريب 0.017 ، لذلك مسارها يكاد يكون دائره . المدار التابع للأرض يكون على شكل قطع ناقص له بؤرة عند مركز الارض .

مسائل

أوجد معادلة القطع الناقص الذى يحقق الشروط الآتية :

١ ـ البؤرتان $(\pm 4 , 0)$ والرأسان $(\pm 6 , 0)$.

٢ ـ البؤرتان $(0 , \pm 3)$ والرأسان $(0 , \pm 5)$.

٣ ـ البؤرتان $(0 , \pm \sqrt{20})$ وطرفا المحور الأصغر $(\pm 3 , 0)$.

٤ ـ البؤرتان $(\pm 2\sqrt{3} , 0)$ والرأسان $(\pm 4 , 0)$.

٥ ـ الرأسان $(\pm 4 , 0)$ والاختلاف المركزى $\frac{1}{2}$.

٦ ـ الرأسان $(0 , \pm 5)$ ويمر بالنقطة $(-2 , 1)$.

٧ ـ البؤرتان $(\pm 2 , 0)$ ويمر بالنقطة $(4 , 4/\sqrt{5})$.

خطط الشكل البيانى للقطوع الناقصة الآتية . أوجد احداثيات الرأسين ، والبؤرتين ، وطرفى المحور الاصغر .

٨ ـ $x^2/9 + y^2/4 = 1$ ٩ ـ $x^2 + y^2/9 = 1$ ١٠ ـ $x^2/5 + y^2/4 = 1$

١١ ـ $9x^2 + 25y^2 = 225$ ١٢ ـ $25x^2 + 16y^2 = 400$ ١٣ ـ $4x^2 + 4y^2 = 9$

١٤ ـ $x^2 + 4y^2 = 1$ ١٥ ـ $2x^2 + y^2 = 1$ ١٦ ـ $2x^2 + 3y^2 = 10$

أوجد الاختلاف المركزى ومعادلتى الدليلين لكل من المقطوع الناقصة الآتية :

١٧ ـ $x^2/16 + y^2/25 = 1$ ١٨ ـ $25x^2 + 9y^2 = 225$ ١٩ ـ $4x^2 + 5y^2 = 20$

٢٠ ـ $x^2 + 27y^2 = 3$ ٢١ ـ $x^2 + y^2 = 10$

٢٢ ـ اوجد المحل الهندسى لنقطة حاصل جمع بعديها عن $(0 , 6)$ و $(0 , 0)$ يساوى 10 .

٢٣ ـ اوجد معادلة القطع الناقص الذى يمر بنقطة الاصل وبؤرتاه عند النقطتين $(2,-2)$ و $(-2,2)$.

٢٤ ـ اوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وله بؤرة عند $(0\ ,\ -3)$ والدليل المناظر هو $y = -6$.

٢٥ ـ خطط الشكل البيانى للمتباينة $x^2 + 4y^2 < 36$

٢٦ ـ خطط الشكل البيانى للمتباينة $(4x^2 + 25y^2 - 100)(25x^2 + y^2 - 25) < 0$

٢٧ ـ اثبت أن طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ is $2b^2/a$ هو $2b^2 / a$.

٢٨ ـ اوجد مساحة المربع المرسوم داخل القطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

٢٩ ـ اوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه عند نقطة الأصل ، ومحوره الاصغر على المحور x ، ويمر بالنقطتين $(3\ ,\ \sqrt{6}/2)$ و $(-2\ ,\ 2)$.

٣٠ ـ اثبت أن الدليل D الذى معادلته $x = a / e$ للقطع الناقص غير الدائرى $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ يقطع المحور x على يمين الرأس $V(a\ ,\ 0)$ وأن لاى نقطة P على القطع الناقص $|PF|/|PM| = e$ ، حيث F هى البؤرة $(c\ ,\ 0)$ $M,$ هى مسقط P على D .

٣١ ـ قطعة مستقيمة طولها 12 in طرفاها على محورى الاحداثيات . اوجد المحل الهندسى لنقطة على القطعة بحيث تكون 4 in من الطرف على المحور x . (ارشاد : لتكن θ هى الزاوية مقيسة فى اتجاه عقرب الساعة من المحور x الى الخط المستقيم . عبر عن احداثى النقطة بدلالة θ)

٣٢ ـ فى اشتقاق المعادلة ت ـ ٢٠ ، عمليا أثبتنا أن كل حل للمعادلة (١) هو حل لـ ت ـ ٢٠ . اكمل برهان تكافؤ (١) ، ت ـ ٢٠ بملىء تفصيلات البرهان الاتى للعكس وهو أن كل حل لـ ت ـ ٢٠ هو حل للمعادلة (١) : لتكن $(x\ ,\ y)$ حلا للمعادلة ت ـ ٢٠ . حل ت ـ ٢٠ لـ y^2, $y^2 = (a^2 - c^2)(1 - x^2/a^2)$ $\therefore y^2$ وعوض الطرف الأيمن من هذه لـ y^2 فى التعبير $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. هذا يختزل الى $|a - (c/a)x| + |a + (c/a)x|$ اثبت أن $-a \leqslant x \leqslant a$ يتضمن أن $-a \leqslant x \leqslant a$ implies $a - (c/a)x > 0$ ومن ثم تكون $(x\ ,\ y)$ حلا للمعادلة (١) .

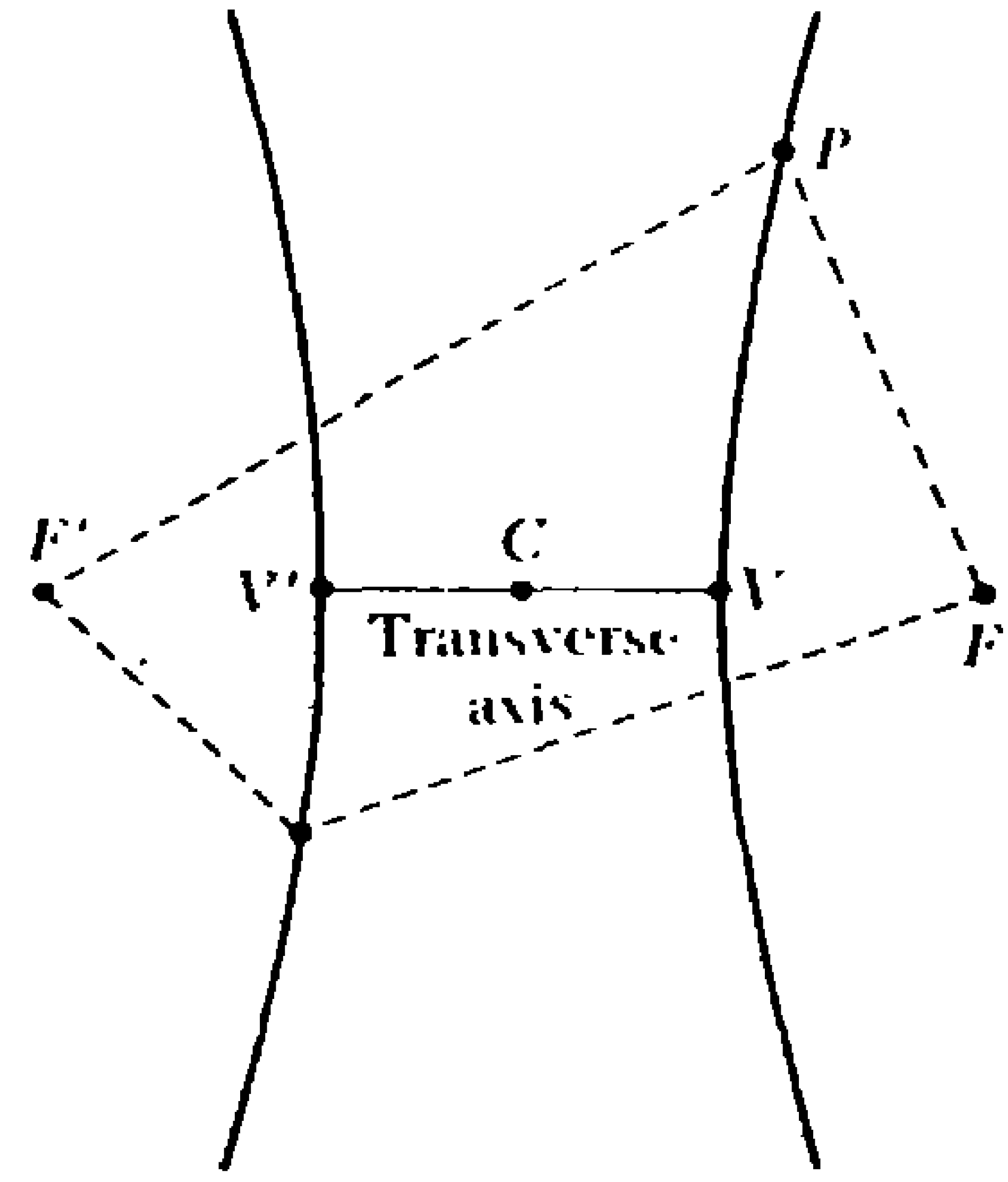
ت ـ ٩

القطع الزائد

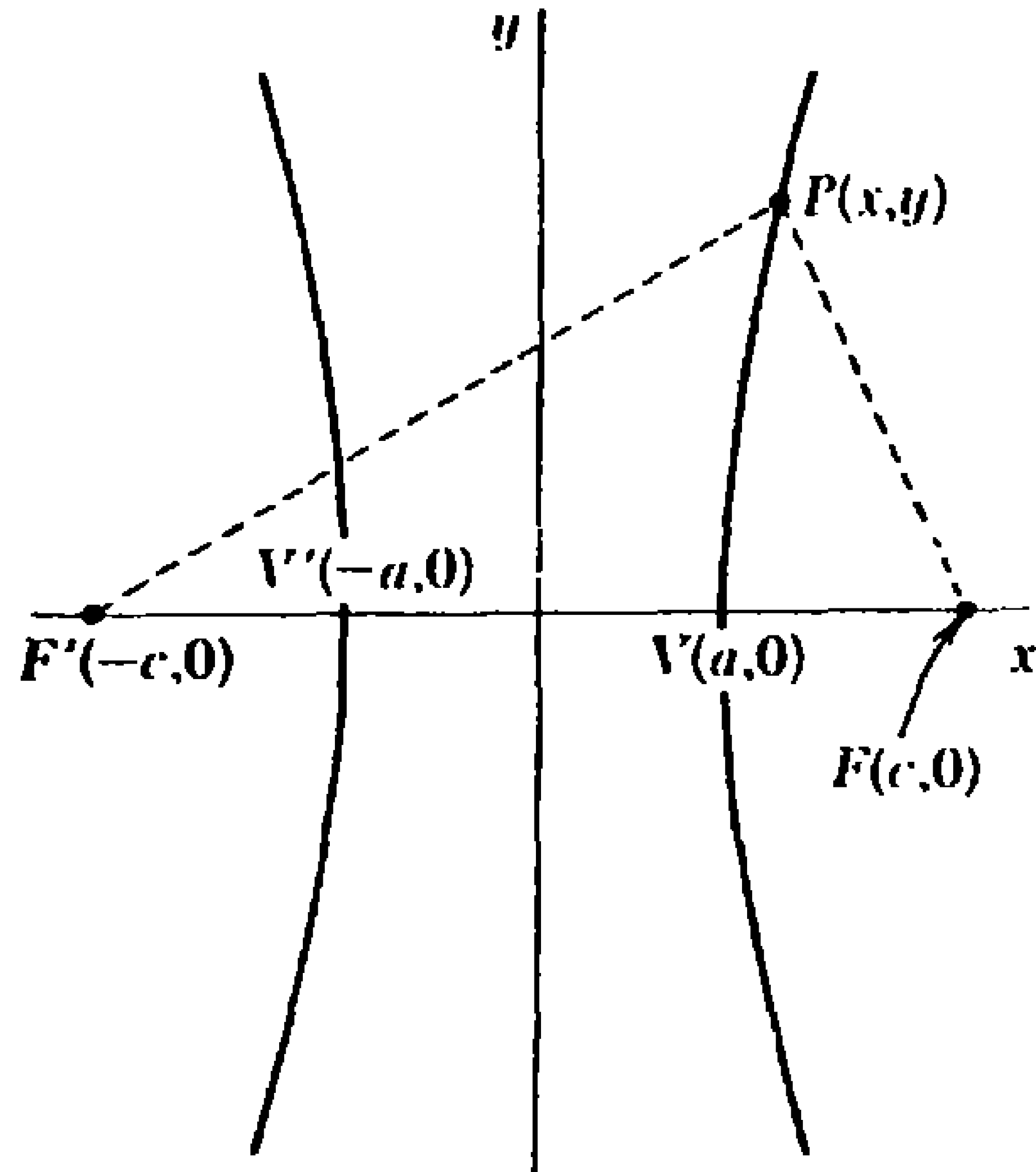
ت ـ ٢٢ تعريف . القطع الزائد هو فئة جميع النقط فى المستوى التى فرق مسافتيها عن نقطتين ثابتتين فى المستوى يكون مقدارا ثابتا موجبا .

قطع زائد نمطى موضح فى الشكل ت ـ ٥٤ . النقطتان الثابتتان F' و F هما البؤرتان ، النقطتان V' و V هما الرأسان ، النقطة C هى المركز ، والقطعة المستقيمة VV' هى المحور القاطع للقطع الزائد . النقطة P تكون على القطع الزائد اذا واذا فقط كان

$$|PF| - |PF'| = 2a \quad \text{أو كان} \quad |PF'| - |PF| = 2a, \qquad (١)$$



شكل ت ـ ٥٤
P على القطع الزائد اذا واذا فقط كان
$|PF| - |PF'| = \pm 2a.$



شكل ت ـ ٥٥
القطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
البؤرتان على المحور x .

حيث $2a$ هو الثابت المعطى . هاتان المعادلتان يمكن الجمع بينهما فى معادلة واحدة

$$|PF| - |PF'| = \pm 2a \qquad (٢)$$

القطع الزائد على جزءين يسميان فرعين . الفرع الأيسر يظهر من الاشارة زائده فى (٢) والفرع الأيمن من الاشارة ناقص .

لايجاد معادلة للقطع الزائد ، نضعه ، مثل القطع الناقص ، على نظام الاحداثيات بحيث يكون مركزه عند نقطة الأصل وبؤرتاه على المحور x (شكل ت ـ ٥٥) . اذا كانت المسافة بين البؤرتين $2c$ فان احداثيات البؤرتين هما $F'(-c, 0), c > 0$ و $F(c, 0)$. من (٢) النقطة $P(x, y)$ تكون على المنحنى اذا واذا فقط كانت (x, y) حلا للمعادلة .

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a \qquad (٣)$$

باتباع الطريقة التى اتبعناها للقطع الناقص هذه يمكن اختزالها

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (٤)$$

هذه تبدو أنها تطابق المعادلة التى حصلنا عليها للقطع الناقص عند هذه المرحلة ، لكن يوجد فرق خفى . الطرف الأيسر لأى المعادلتين فى (١) هو الفرق $2a$ بين طولى ضلعين من المثلث PFF' فى الشكل ت ـ ٥٥ وذلك يكون أقل من الطول $2c$ للضلع الثالث FF' . هنا $0 < a < c$ فيكون الان $a^2 - c^2$ سالبا . واذن $a^2 - c^2 = -b^2$ لعدد ما $b > 0$ أو تكافئيا ، $b^2 = c^2 - a^2$. بتعويض $-b^2$ لـ $a^2 - c^2$ فى (٤) ، يكون لدينا

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (٥)$$

وبالقسمة على a^2b^2 ، يكون

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

ت ـ ٢٣

بالعكس يمكن اثبات أن كل حل للمعادلة ت ـ ٢٣ هو حل لـ (٣) (المسألة ٣٨) . أى أن المعادلتين متكافئتان ، ت ـ ٢٣ معادلة للقطع الزائد . القطع الزائد ت ـ ٢٣ متماثل فى كلا المحورين . الجزءان المقطوعان من المحور x هما a ± . المنحنى لايقطع المحور y . اذا أجرينا (٥) لـ y ، فاننا نحصل على

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

ولأن y تخيلية لـ $|x| < a$ ، المنحنى يقع على يمين الخط المستقيم $x = a$ وعلى يسار الخط المستقيم $x = -a$ ومن جهة أخرى ، من التعبير لـ x

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$$

نرى أن y يمكن أن تكون أى عدد ، والمنحنى يكون غير محدود من أعلى أوأسفل .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الزائد الذى رأساه $(\pm 5 , 0)$ وبؤرتاه $(\pm 6 , 0)$.

القطع الزائد ستكون له معادلة على الصورة ت ـ ٢٣ ، اذ أن مركزه عند نقطة الاصل والبؤرتان على المحور x . يجب أن نوجد a , b موقع الرأسين والبؤرتين يتضمن أن $c = 6$ و $a = 5$. بما أن $b^2 = c^2 - a^2$ ، اذن $b^2 = 11$. بتعويض هاتين القيمتين لـ b و a فى المعادلة ت ـ ٢٣ ، نحصل على $x^2/25 - y^2/11 = 1$ كمعادلة للقطع الزائد .

الخطان المستقيمان الماران بنقطة الاصل

$$L':\ y=-\frac{b}{a}x \quad \text{و} \quad L:\ y=\frac{b}{a}x$$

هما خطان تقاربيان للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ، (شكل ت ـ ٥٦) . نثبت ذلك باثبات أن المسافة الرأسية $|PP'|$ بين نقطة P على النصف العلوى للفرع الايمن للقطع الزائد والنقطة P' على الخط المستقيم L فوق P مباشرة تقترب من الصفر عندما تتحرك P بعيدا الى مالا نهاية . بما أن المسافة العمودية من P الى L اقل من $|PP'|$ ، هذا سيثبت أن P تقترب قربا شديدا من L . النصف الأسفل للفرع الأيمن والفرع الايسر يجب أن يسلكوا بالمثل ، لتكن احداثيات P' و P هى $P(x , y)$ و $P'(x' , y')$. بما أن P' على L ، P على النصف العلوى للقطع الزائد ، يكون

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \quad \text{و} \quad y'=\frac{b}{a}x$$

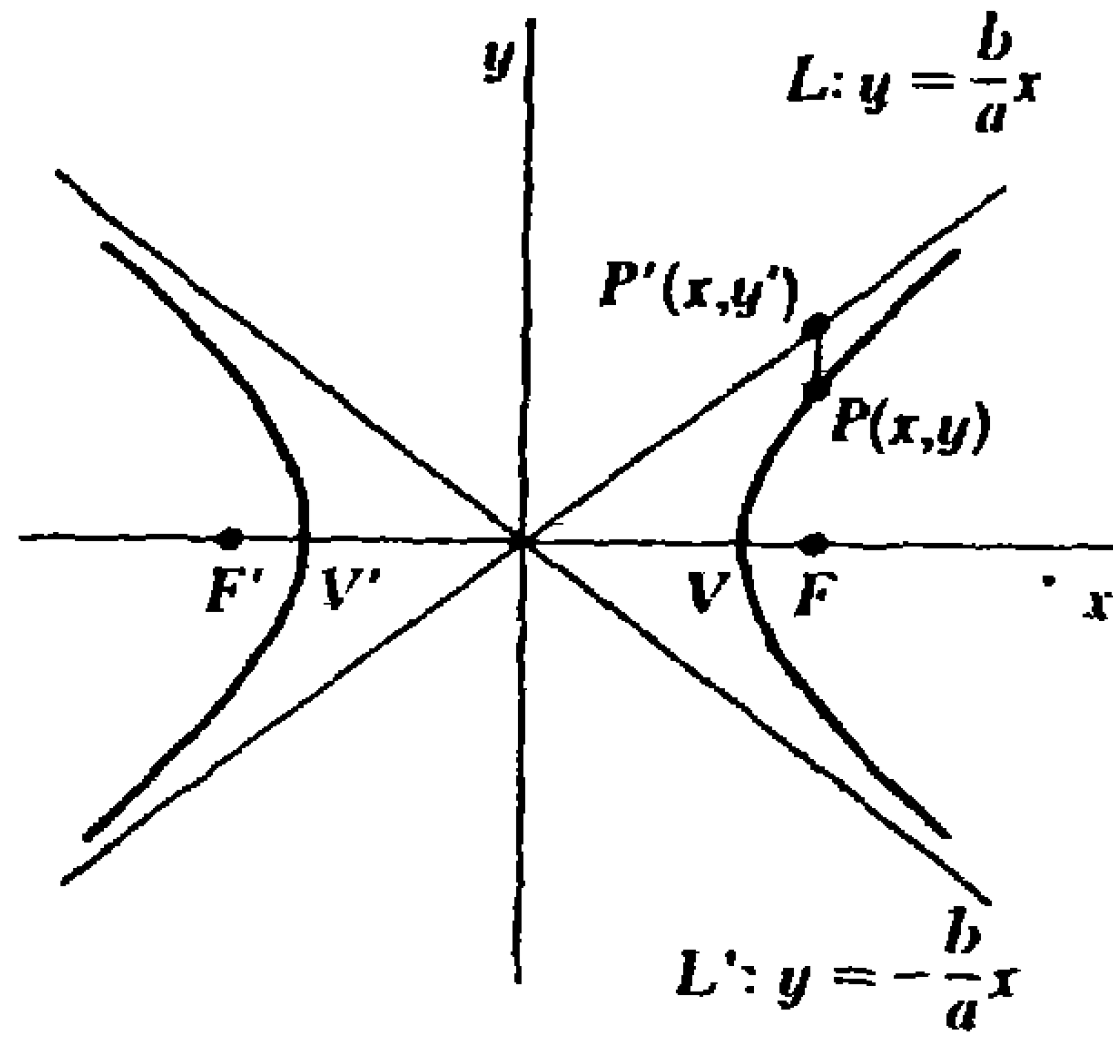
المسافة $|PP'|$ هى

$$|PP'|=y'-y=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$$

اذا ضربنا البسط والمقام للمقدار الاخير فى $x+\sqrt{x^2-a^2}$ فاننا نحصل على

$$|PP'|=\frac{b}{a}\,\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

عندما تسير P الى مالانهاية على المنحنى ، x تصبح كبيرة والتعبير الاخير يوضح أن المسافة $|PP'|$ تقترب من الصفر . المنحنى $xy=1$ ، الذى خططناه فى الشكل ت ـ ١٣ ، ببند ت ـ ٢ ، هو قطع زائد أدير بحيث يكون محورا الاحداثيات خطيه التقاربيين .

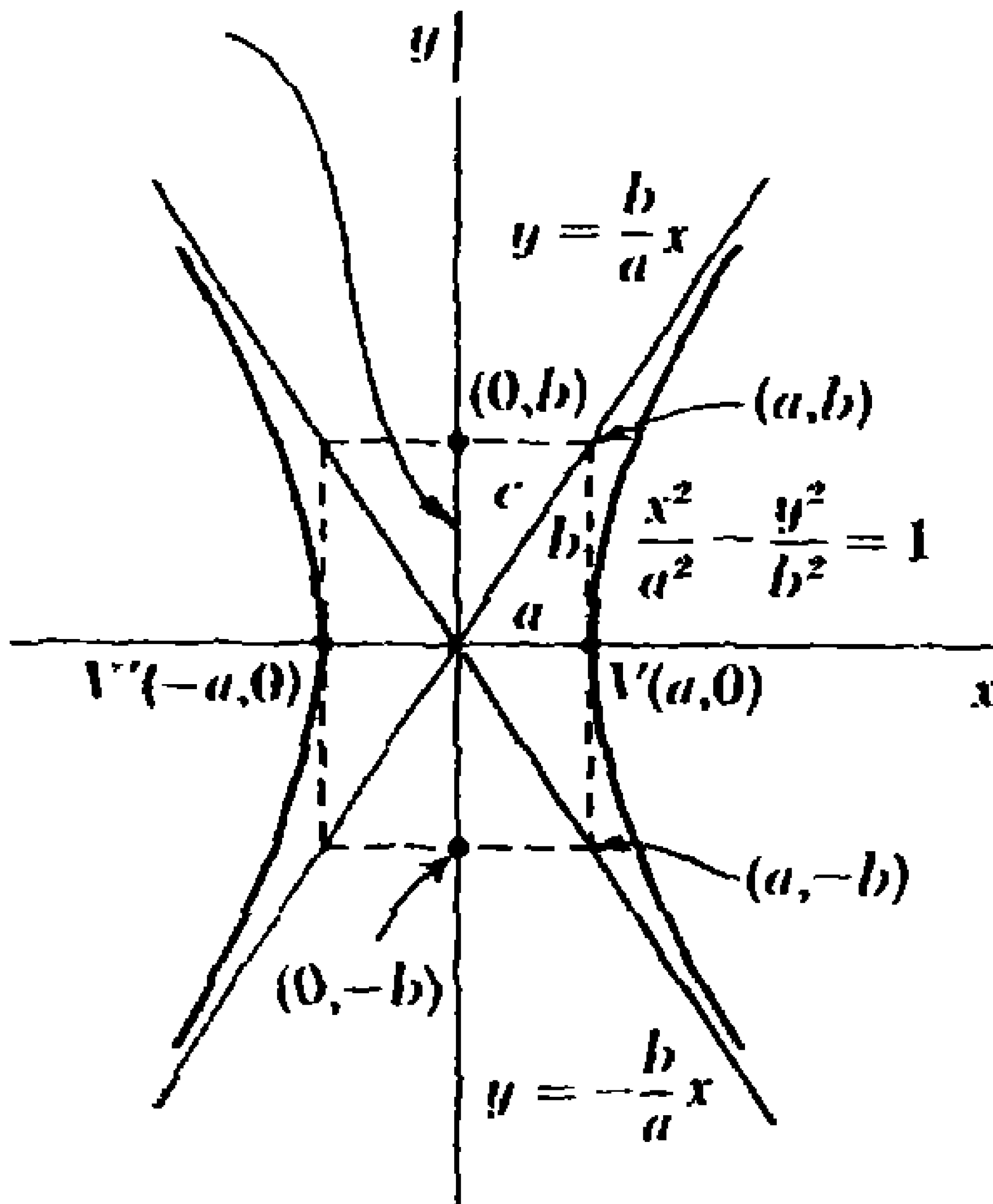


شكل ت ـ ٥٦

عندما تسير P الى مالا نهاية على المنحنى ، $|PP'|$ تقترب من الصفر . واذن L هو خط تقاربى .

الخطان التقاربيان يساعدان فى تخطيط القطع الزائد . لرسم الخطين التقاربيين ، نوقع النقط $(0,\pm b)$ و $V'(-a,0)$ و $V(a,0)$ على المحورين ونكون المستطيل الذى أضلاعه تمر بهذه النقط الاربع وتوازى المحورين ، كما هو موضح فى الشكل ت ـ ٥٧ . قطرا المستطيل ميلاهما $\pm b/a$ ولذلك ، عند مدهما يكونان الخطين التقاربيين . برسم الخطين التقاربيين وتوقيع الرأسين ، يمكن تخطيط القطع الزائد بسرعة ودقة . القطعة المستقيمة من $(0,b)$ الى $(0,-b)$ تسمى المحور المرافق للقطع الزائد . اذا كانت بؤرتا القطع الزائد على المحور y ، فان دورى y و x يتبادلان معادلته تكون

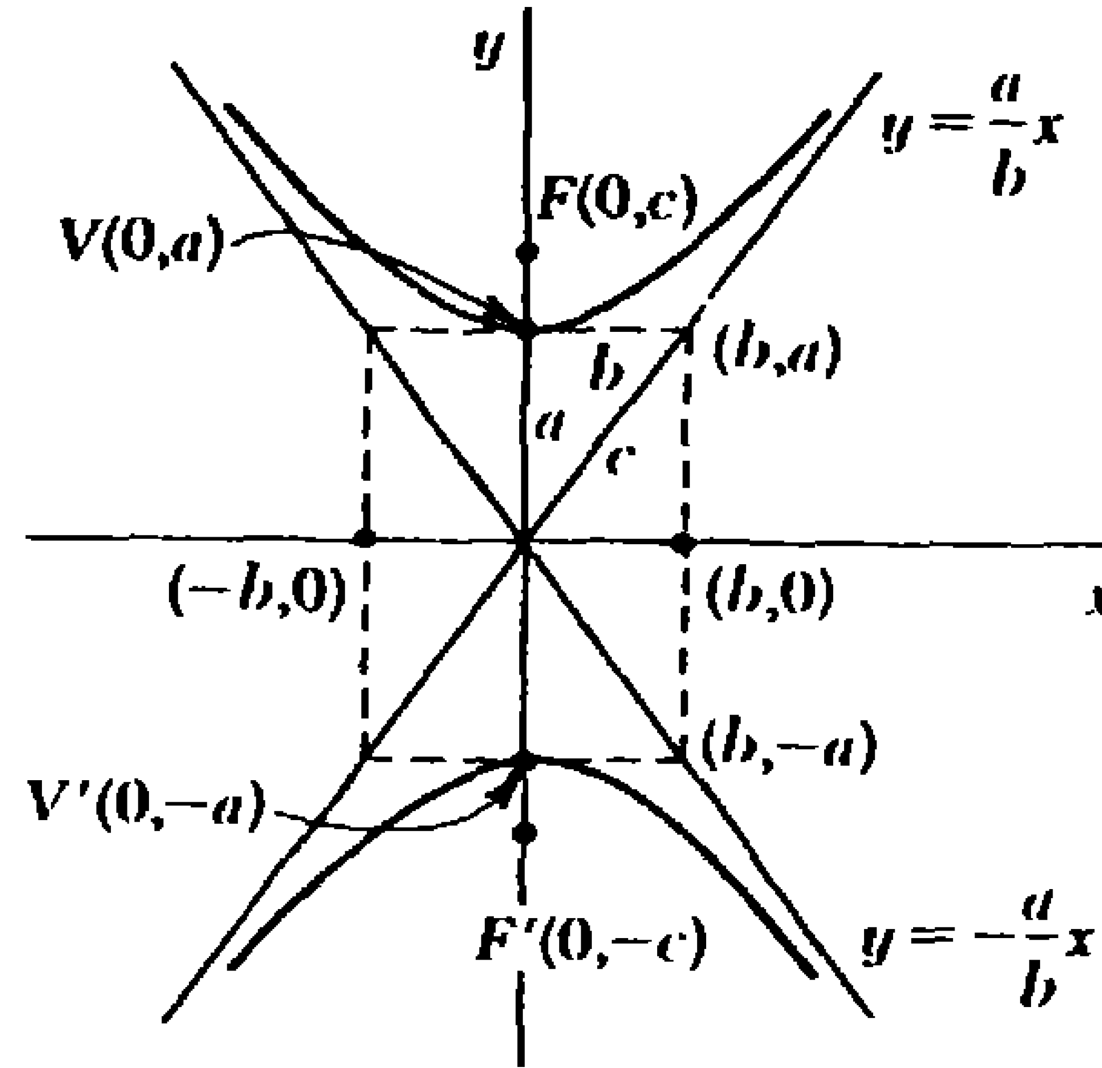
$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad \text{ت ـ ٢٤}$$



شكل ت ـ ٥٧

الخطان التقاربيان هما قطر المستطيل .

والخطان التقاربيان هما المستقيمان $y = \pm a\, x / b$ (شكل ت ـ ٥٨) .



شكل ت ـ ٥٨

القطع الزائد $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ البؤرتان على المحور y .

المعادلتان ت ـ ٢٣ ، ت ـ ٢٤ هما الصورتان القياسيتان لمعادلة القطع الزائد . فى أى مسألة من السهل تحديد فى أى اتجاه يفتح القطع الزائد بايجاد الاجزاء المقطوعة . معادلتا الخطين التقاربيين توجدان ليس بتذكر الصيغ بل برسم المستطيل وايجاد احداثيى احد رؤوسه .

شكل القطع الزائد يقاس بالاختلاف المركزى $e = c / a$. حيث أن $c > a$ فان $e > 1$.

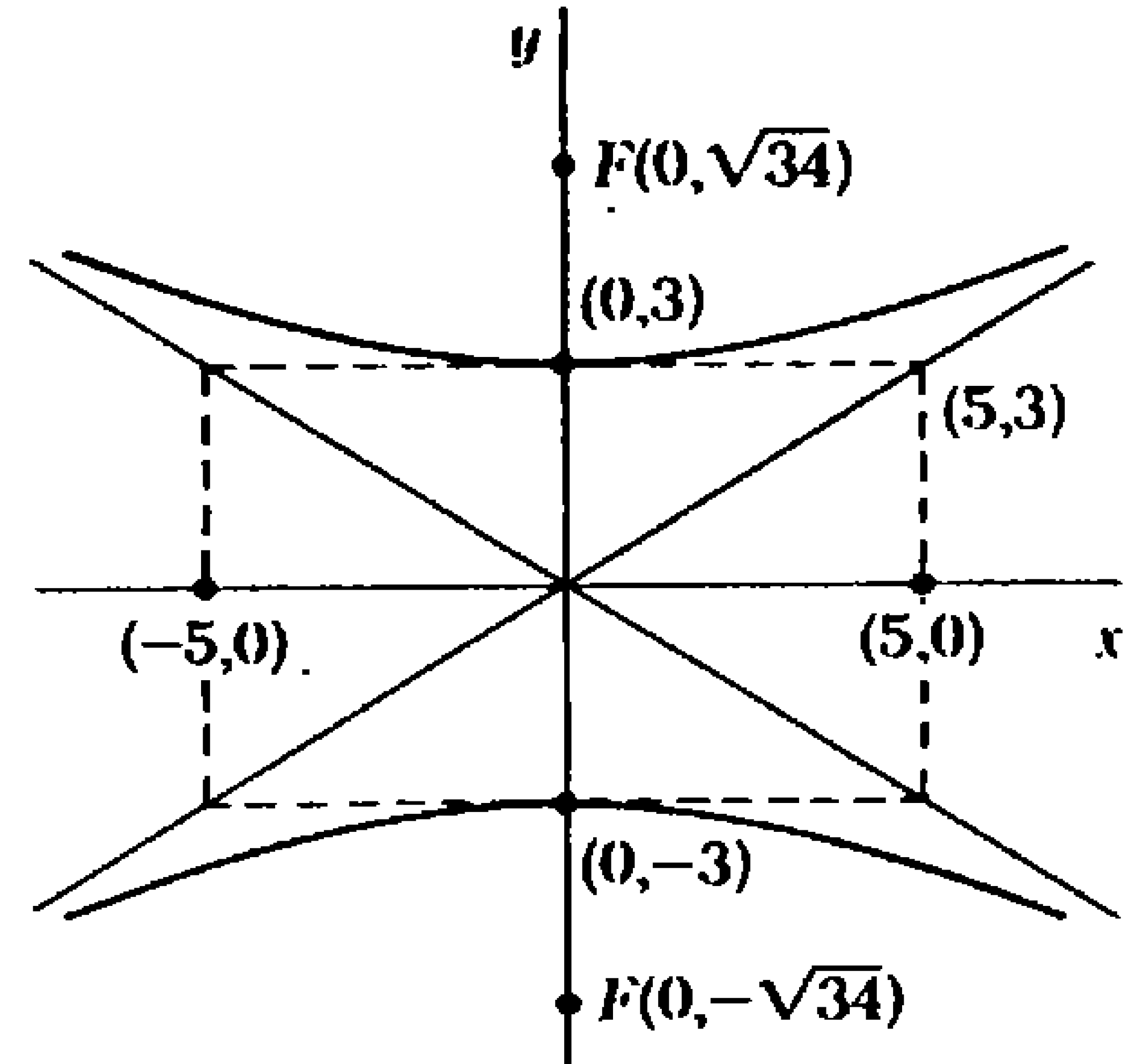
مثال ٢ . خطط المنحنى $25y^2 - 9x^2 = 225$

المعادلة على الصورة ت ـ ٢٤ . اذن المنحنى قطع زائد مركزه عند نقطة الأصل ومحوره القاطع على أحد محورى الاحداثيات . بما أن الجزءين المقطوعين من المحور y هما ± 3 ولاتوجد اجزاء مقطوعة من المحور x ، فالقطع الزائد يفتح لاعلى وأسفل . من الصورة القياسية

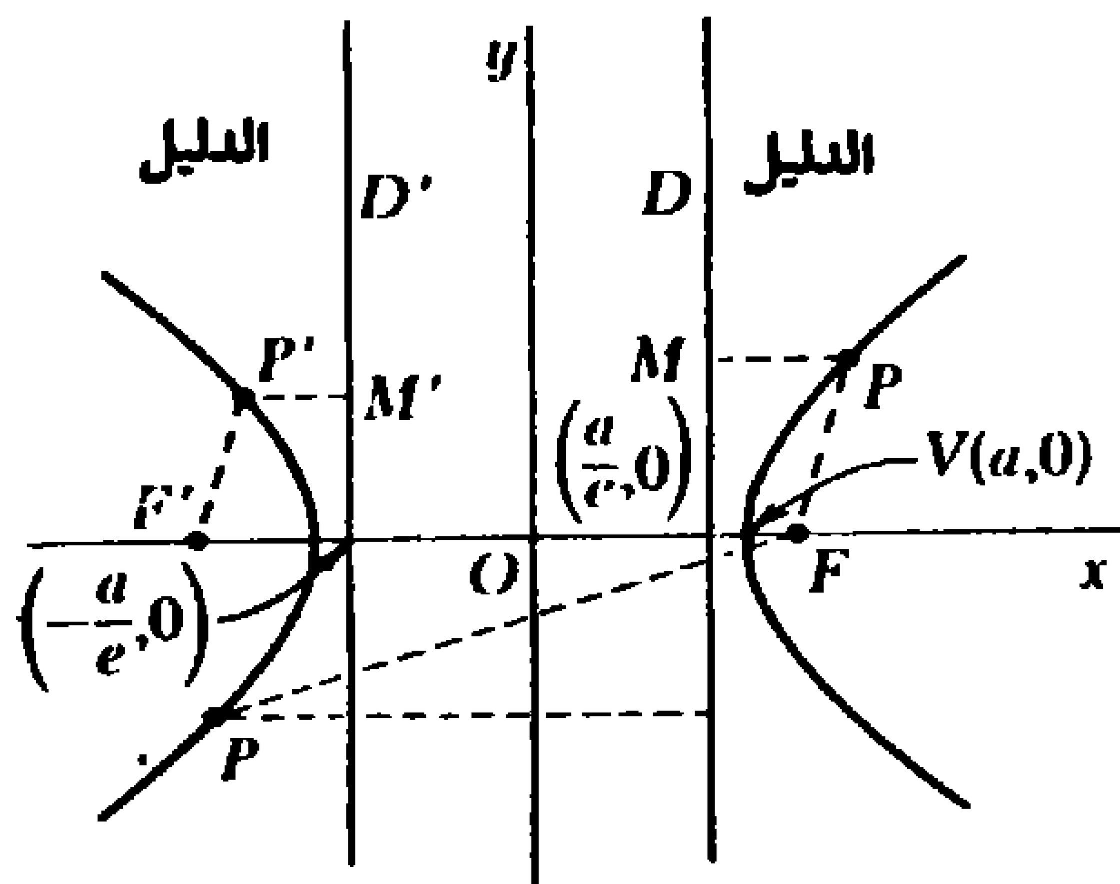
$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

نرى أن $a^2 = 9$ (وجدت من قبل) وأن $b^2 = 25$. نرسم المستطيل وقطريه اللذين هما الخطان التقاربيان (شكل ت ـ ٥٩) ، ونخطط المنحنى . بما أن $c^2 = a^2 + b^2 = 34$ ، البؤرتان هما $F(0, \sqrt{34})$ و $F'(0, -\sqrt{34})$. الاختلاف المركزى هو $\sqrt{34}/3 \approx 1.9$. معادلتا الخطين التقاربيين هما $y = \pm 3x / 5$.

الخط المستقيم D الذى معادلته هى $x = a / e$ يسمى دليلا للقطع الزائد ت ـ ٢٣ (شكل ت ـ ٦٠) . وهو يقطع المحور x بين المركز والرأس $V(a, 0)$ (لماذا ؟) . مثل القطع الناقص ، لأى نقطة P على القطع الزائد $|PF|/|PM| = e$ حيث M هى مسقط P على D وحيث F



شكل ت ـ ٥٩
القطع الزائد $25y^2 - 9x^2 = 225$.



شكل ت ـ ٦٠
لجميع النقط P على القطع الزائد ، يكون
$|PF|/|PM| = e > 1$.

البؤرة الأقرب الى D . الخط المستقيم D' المتماثل الوضع ومعادلته $x = -a/e$ ، هو أيضا دليل وله نفس الخاصية بالنسبة الى البؤرة الثانية F' . نترك البرهان للقارىء (المسألة ٣٧)

رغم أن القطع المكافىء والقطع الناقص والقطع الزائد قد عرفوا كمسائل محل هندسى مختلفة ، الا أن لهم خاصية مشتركة هى خاصية البؤرة ـ الدليل : $|PF|/|PM| = e$ ، حيث $e = 1$ فى حالة القطع المكافىء . هذه الخاصية أيضا تميز هذه المنحنيات الثلاثية بمعنى أن ، ماعدا فى حالة الدائرة ، كل يمكن تعريفه كمسألة محل هندسى : اذا كان D خطا مستقيما معطى وكانت F نقطة ليست على الخط ، فإن فئة جميع النقط P التى تجعل $|PF|/|PM| = e$ حيث M هى مسقط P على D وحيث e ثابت موجب ، هى قطع مخروطى له بؤرة عند F وله دليل D . القطع المخروطى هو ناقص اذا كانت $0 < e < 1$ ، وقطع مكافىء اذا كانت $e = 1$ ، وقطع زائد اذا كانت $e > 1$. نترك البرهان كتمرين (المسألة ٥٠ ، بالبند ت ـ ١٠) . من الطبيعى أن نعرف الاختلاف المركزى للقطع المكافىء بأن يكون الواحد الصحيح .

نتيجة لقانون نيوتن للجاذبية جميع الاجسام فى المجموعة الشمسية تتحرك تحت قوة جاذبية الشمس فى مسيرات هى قطوع مخروطية لها الشمس كبؤرة . اذا كان المسير لتابع قطعا ناقصا فان التابع سيعود فى فترات منتظمة ، لكن اذا كان المسير قطعا زائد أو قطعا مكافئا فان التابع سوف لايعود . خمس مشاهدات تكفى لتحديد المسير ، ومنها يمكن حساب الزمن الذى يلزم لعودة التابع اذا كان المسير على شكل قطع ناقص .

مسائل

أوجد معادلة القطع الزائد الذى يحقق الشروط الاتية :

١ ـ البؤرتان $(\pm 6 , 0)$ والرأسان $(\pm 4 , 0)$.

٢ ـ البؤرتان $(\pm 13 , 0)$ والرأسان $(\pm 5 , 0)$.

٣ ـ البؤرتان $(0 , \pm 10)$ والرأسان $(0 , \pm 6)$.

٤ ـ الرأسان $(\pm 4 , 0)$ والخطان التقاريان $y = \pm \frac{5}{4} x$.

٥ ـ الرأسان $(0 , \pm 2\sqrt{2})$ ويمر بالنقطة $(3 , -1)$.

٦ ـ البؤرتان $(0 , \pm \sqrt{3})$ وميل خط تقاربى 2 .

٧ ـ الرأسان $(\pm a , 0)$ والاختلاف المركزى $\sqrt{2}$.

٨ ـ البؤرتان $(\pm \sqrt{15} , 0)$ ويمر بالنقطة $(4 , \sqrt{3})$.

خطط الشكل البيانى للقطوع الزائدة الآتية . أوجد احداثيات الرأسين والبؤرتين ومعادلتى الخطين التقاربيين .

٩ ـ $x^2/9 - y^2/4 = 1$　　١٠ ـ $x^2/2 - y^2/6 = 1$　　١١ ـ $y^2/12 - x^2/2 = 1$

١٢ ـ $25y^2 - 16x^2 = 400$　　١٣ ـ $4x^2 - 10y^2 = 20$　　١٤ ـ $x^2/8 - y^2/3 = -1$

١٥ ـ $9x^2 - 9y^2 = -4$　　١٦ ـ $20x^2 - 5y^2 = 1$　　١٧ ـ $x^2 - y^2 = a^2$

١٨ ـ $mx^2 - y^2 = mn$

أوجد الاختلاف المركزى ومعادلتى الدليلين للقطوع الزائدة الآتية :

١٩ ـ $x^2/16 - y^2/25 = 1$　　٢٠ ـ $y^2/2 - x^2/8 = 1$　　٢١ ـ $4y^2 - 9y^2 = 36$

٢٢ ـ $15x^2 - y^2 = 15$　　٢٣ ـ $2x^2 - 3y^2 = 12$　　٢٤ ـ $x^2 - y^2 = a^2$

٢٥ ـ خطط الشكل البيانى للمعادلة $x^2/4 - y^2/9 = 0$

٢٦ ـ اوجد المحل الهندسى للنقطة التى الفرق بين بعديها عن النقطتين $(-10 , 0)$ و $(0 , 0)$ يساوى 8 .

٢٧ ـ اوجد معادلة القطع الزائدة الذى بؤرتاه عند $(5 , 0)$و$(1 , 0)$ ويمر بالنقطة $(12 , 10)$.

٢٨ ـ أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وله بؤرة عند $(3 , 0)$ ، والدليل المناظر هو $x = 2$.

٢٩ ـ اوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرتاه على المحور y وله نفس الخطين التقاربيين مثل القطع الزائد $x^2/2 - y^2/5 = 1$

٣٠ ـ خطط الشكل البيانى للمتباينة $3x^2 - 5y^2 \geqslant 30$

٣١ ـ اثبت أن طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ هو $2b^2 / a$

٣٢ ـ اوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه عند نقطة الاصل ، وبؤرتاه على المحور y ، ويمر بالنقطتين $(4 , -\sqrt{13})$ و $(2 , 2)$.

٣٣ ـ صف شكل القطع الزائد لقيم e القريبة من 1 . أى هل هو طويل وضيق أم واسع ومفرطح ؟ كيف يتغير الشكل عندما تتزايد e ؟

٣٤ ـ اثبت أن القطوع المخروطية $x^2/(15-\alpha) + y^2/(6-\alpha) = 1$ لها بؤرة مشتركة لجميع قيم α ادرس وخطط المنحنيات لقيم α المختلفة .

٣٥ ـ خطط الشكل البيانى للمعادلة $x^4 - (y^2 - 16)^2 = 0$

٣٦ ـ رجل يسمع فى آن واحد طقطقة ماسورة البندقية وصوت رصاصة تصيب الهدف . أثبت أن جميع المواضع الممكنة له تقع على قطع زائد .

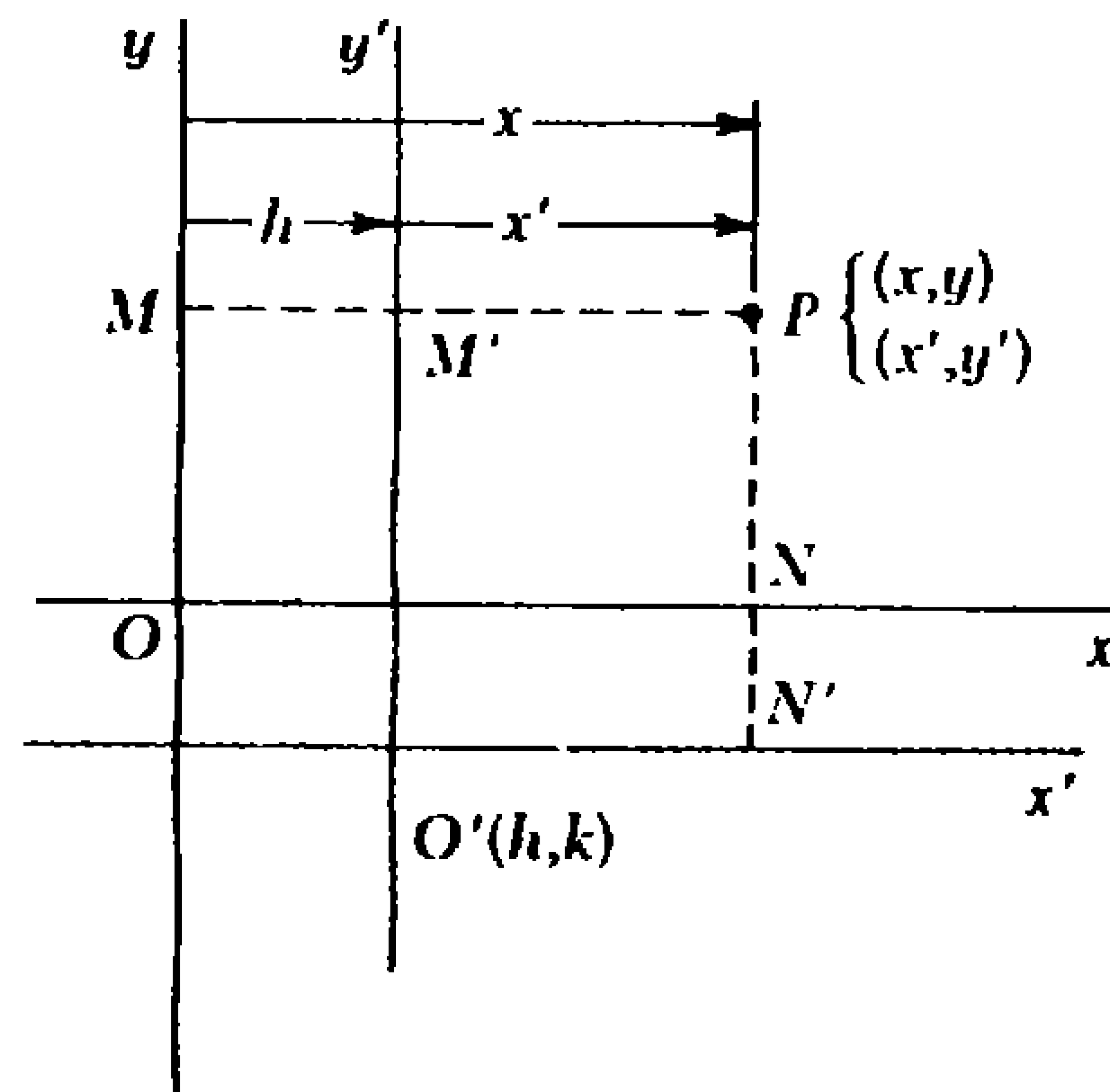
٣٧ ـ اثبت أن الدليل D الذى معادلته $x = a/e$ للقطع الزائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ يقطع المحور x بين المركز والرأس $V(a, 0)$ وأن لاى نقطة P على القطع الزائد ، $|PF|/|PM| = e$ حيث F هى البؤرة $(c, 0)$ وحيث M هى مسقط P على D .

٣٨ ـ اكمل برهان تكافؤ المعادلة ت ـ ٢٣ والمعادلة (٣) باثبات أن كل حل لـ ت ـ ٢٣ هو حل لـ (٣) . (ارشاد : انظر المسألة ٣٢ ، بند ت ـ ٨) .

ت ـ ١٠

نقل المحاور

احداثيا نقطة فى المستوى يعتمدان على موضعى المحورين . النقطة P فى الشكل ت ـ ٦١ التى احداثياها هما (x, y) بالنسبة الى المحورين x, y لها الاحداثيان (x', y') بالنسبة الى المحورين x', y' اذا كان ، كما هنا ، المحوران x', y' موازيين للمحورين y و x وفى نفس الاتجاه ، فاننا نقول أنه حدث نقل للمحورين فى المستوى .



شكل ت ـ ٦١
احداثيا النقطة P يعتمدان على موضعى المحورين .

العلاقة بين فئتى احداثيات P بسيطة فى هذه الحالة . بوجه خاص . ليكن احداثيا نقطة الاصل الجديدة O' هما (h , k) بالنسبة الى المحورين x و y ، ولتكن M' و M كما هو موضح فى الشكل . بدلالة المسافات الموجهة .

$$h = \overline{MM'} \quad و \quad x = \overline{MP}, \quad x' = \overline{M'P}$$

بالمعادلة ت ـ ٢ ، $\overline{MP} = \overline{MM'} + \overline{M'P}$ ف النظر عن موقع M' على الخط المستقيم الواصل بين P و M . اذن $x = h + x'$. بالمثل ، $y = \overline{NP} = \overline{NN'} + \overline{N'P} = k + y'$ المعادلتان

$$x' = x - h, \qquad y' = y - k \qquad \text{ت ـ ٢٥}$$

اللتان نحصل عليهما بالحل لـ y' و x' ، تعطيان احداثى P فى النظام $x'y'$ بدلالة احداثييها فى النظام xy . فمثلا ، اذا كانت O' احداثياها $(3 , -2)$ فى النظام xy ، فان المعادلتين ت ـ ٢٥ تصبحان $y' = y + 2$ و $x' = x - 3$ ، والنقطة P التى احداثياها $(4 , 8)$ فى النظام xy لها الاحداثيات $(5 , 6)$ فى النظام $x'y'$. المعادلتان ت ـ ٢٥ ، والفئة الملازمة .

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k \qquad \text{ت ـ ٢٦}$$

التى تعطى احداثى P فى النظام xy بدلالة احداثييها فى النظام $x'y'$ ، تسميان معادلات النقل .

من الطبيعى أن المنحنى سيكون معادلتان مختلفان بالنسبة الى نظامى الاحداثيات . القطع المكافىء فى الشكل ت ـ ٦٢ له المعادلة

$$y^2 = 8x \qquad (١)$$

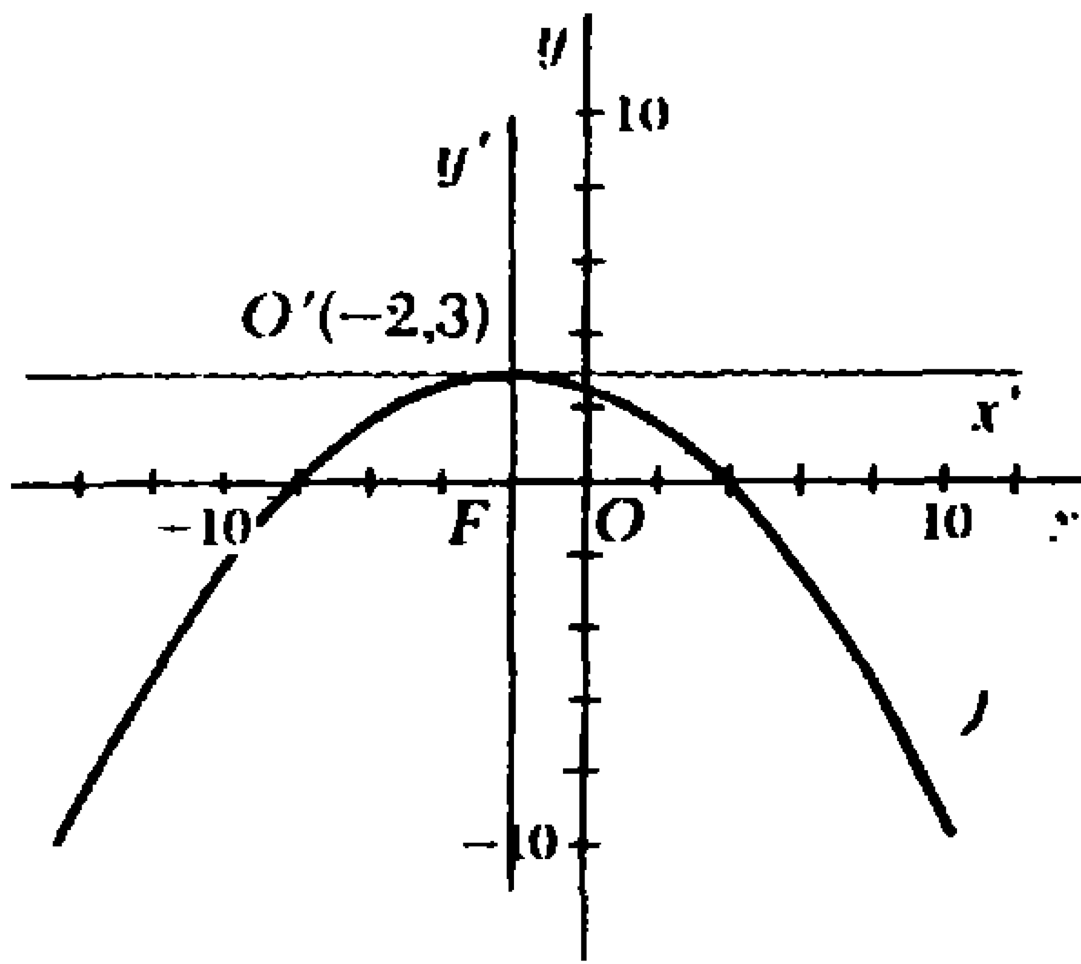
فى النظام xy . اذا أدخل نظام احداثيات جديد حيث نقطة الاصل عند $(4 , 2)$ ، فان معادلتى النقل ، من المعادلتين ت ـ ٢٦ هما

$$x = x' + 4, \qquad y = y' + 2 \qquad (٢)$$

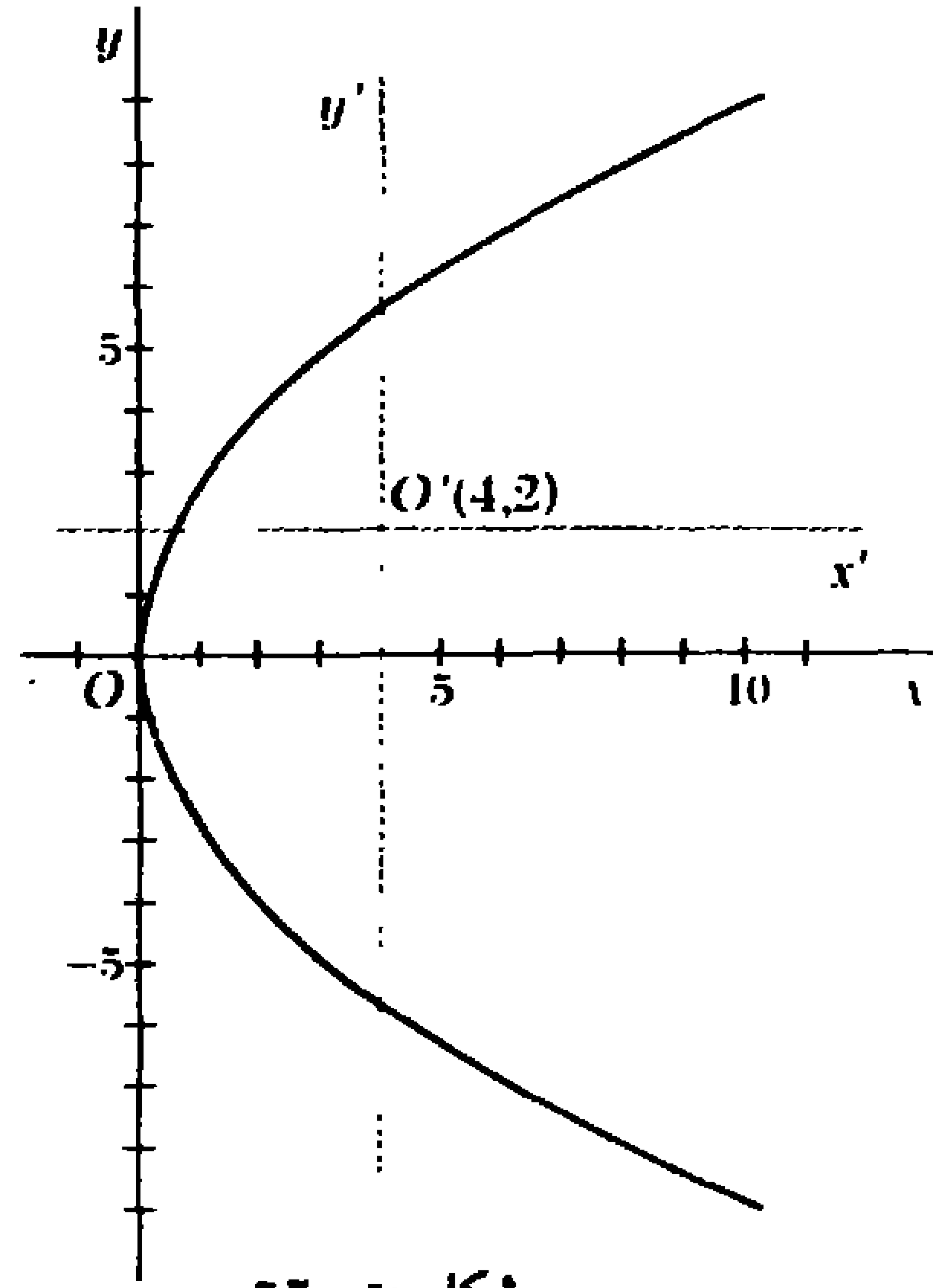
اذا عوضنا $x' + 4 , y' + 2$ لـ y و x فى (١) ، فاننا نحصل على

$$(y' + 2)^2 = 8(x' + 4) \qquad (٣)$$

النقطة P تكون على المنحنى اذا واذا فقط كان احداثياها (x , y) يحققان المعادلة $y^2 = 8x$. لكن هذا يحدث اذا واذا فقط كان احداثياها (x' , y') ، المحسوبان من (٢) ، يحققان (٣) . ومن ثم (٣) هى معادلة القطع الزائد فى النظام $x'y'$.



شكل ت ـ ٦٣
القطع المكافىء
$(x + 2)^2 = -12(y - 3)$.



شكل ت ـ ٦٢
القطع المكافىء $y^2 = 8x$ له المعادلة
$(y' + 2)^2 = 8(x' + 4)$
فى النظام $x'y'$.

هذا المثال يقترح طريقة لايجاد معادلات القطوع المخروطية التى محاورها توازى محورى الاحداثيات لكن مراكزها لاتكون عند نقطة الاصل .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع المكافىء الذى رأسه عند النقطة $(-2, 3)$ وبؤرته عند $(-2, 0)$.

المنحنى موضح فى الشكل ت ـ ٦٣ . ندخل نظام احداثيات جديد حيث نقطة الاصل O' عند رأس القطع المكافىء وحيث المحوران x' و y' يوازيان المحورين x و y . بالنسبة الى هذا النظام القطع المكافىء يكون فى وضع قياسى حيث $p = -3$ وبالتالى له المعادلة

$$x'^2 = -12y' \tag{٤}$$

معادلتا النقل هما $x' = x + 2 , y' = y - 3$. تعويض $x + 2$ و $y - 3$ لـ x' و y' فى (٤) يعطى معادلة القطع المكافىء فى النظام xy وهى $(x + 2)^2 = -12\,(y - 3)$ أو ، بالحل لـ y هى

$$y = -\tfrac{1}{12}(x^2 + 4x - 32)$$

القطع الناقص فى الشكل ت ـ ٦٤ مركزه عند (h , k). لايجاد معادلته ، ادخل نظام احداثيات جديد $x'y'$ حيث نقطة الاصل عند مركز القطع الناقص وحيث المحوران يوازيان المحورين y و x. بالنسبة الى هذا النظام القطع الناقص له المعادلة

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

معادلتا النقل هما $x' = x - h$ و $y' = y - k$. ومن ثم معادلة القطع الناقص فى النظام xy هى

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (٥)$$

بطريقة مماثلة ، يمكننا اثبات أن القطع الزائد الذى مركزه عند (h, k) ومحوره القاطع يوازى المحور x ، له المعادلة

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (٦)$$

وأن القطع المكافىء الذى رأسه عند (h, k) ومحوره يوازى المحور x له المعادلة

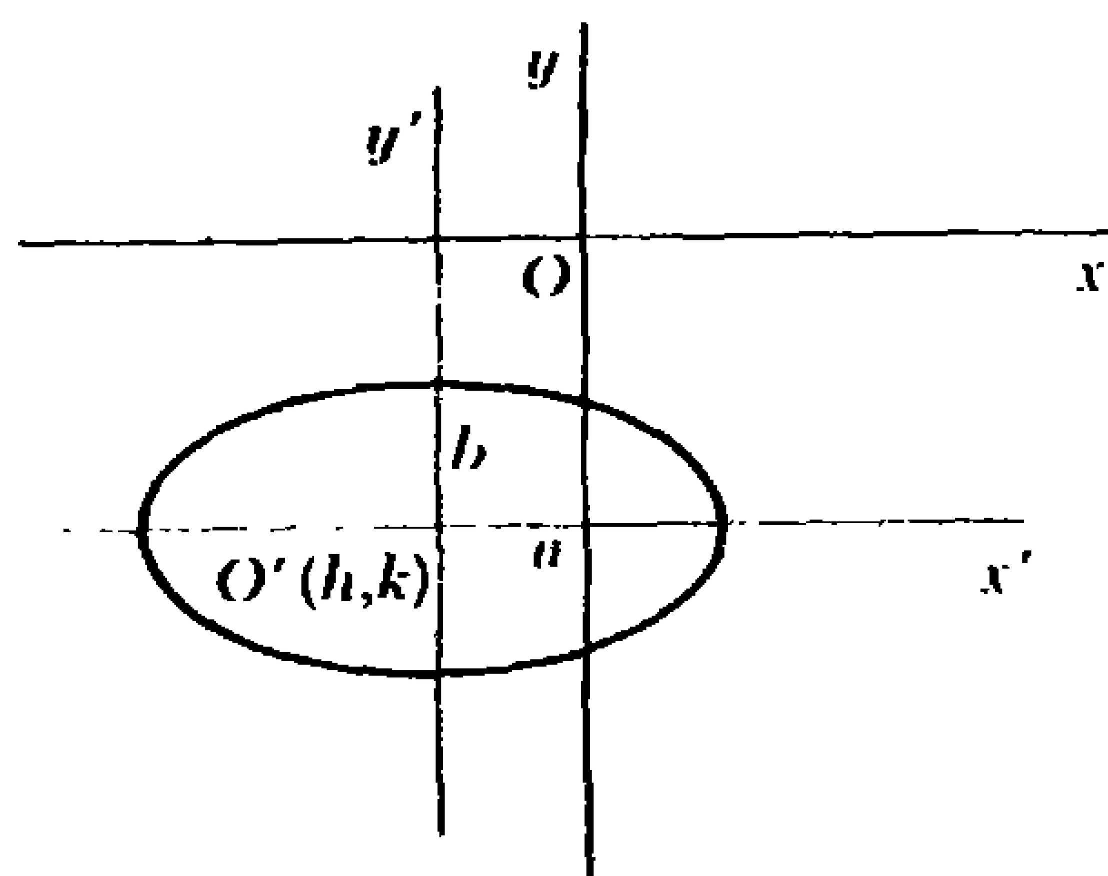
$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (٧)$$

نحصل على معادلات مماثلة اذا دارت القطوع المخروطية زاوية $90°$.

عندما تجرى عمليات الضرب فى (٥) و (٦) و (٧) ، نحصل فى كل حالة ، بعد جمع الحدود المتشابهة على معادلة على الصورة

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (٨)$$

هذه معادلة من الدرجة الثانية فى y و x لكن بدون حد xy . كل قطع مخروطى له محور يوازى محورا للاحداثيات معادلته تكون على هذه الصورة . مع استثناءات بسيطة ، العكس أيضا صحيح . نوضح بأمثلة .



شكل ت - ٦٤

القطع الناقص $(x-h)^2/a^2 + (y-k)^2/b^2 = 1$

مثال ٢ . أثبت أن $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ هى معادلة قطع زائد وخطط شكله البيانى . نحاول اعادة كتابة المعادلة فى احدى الصورتين

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

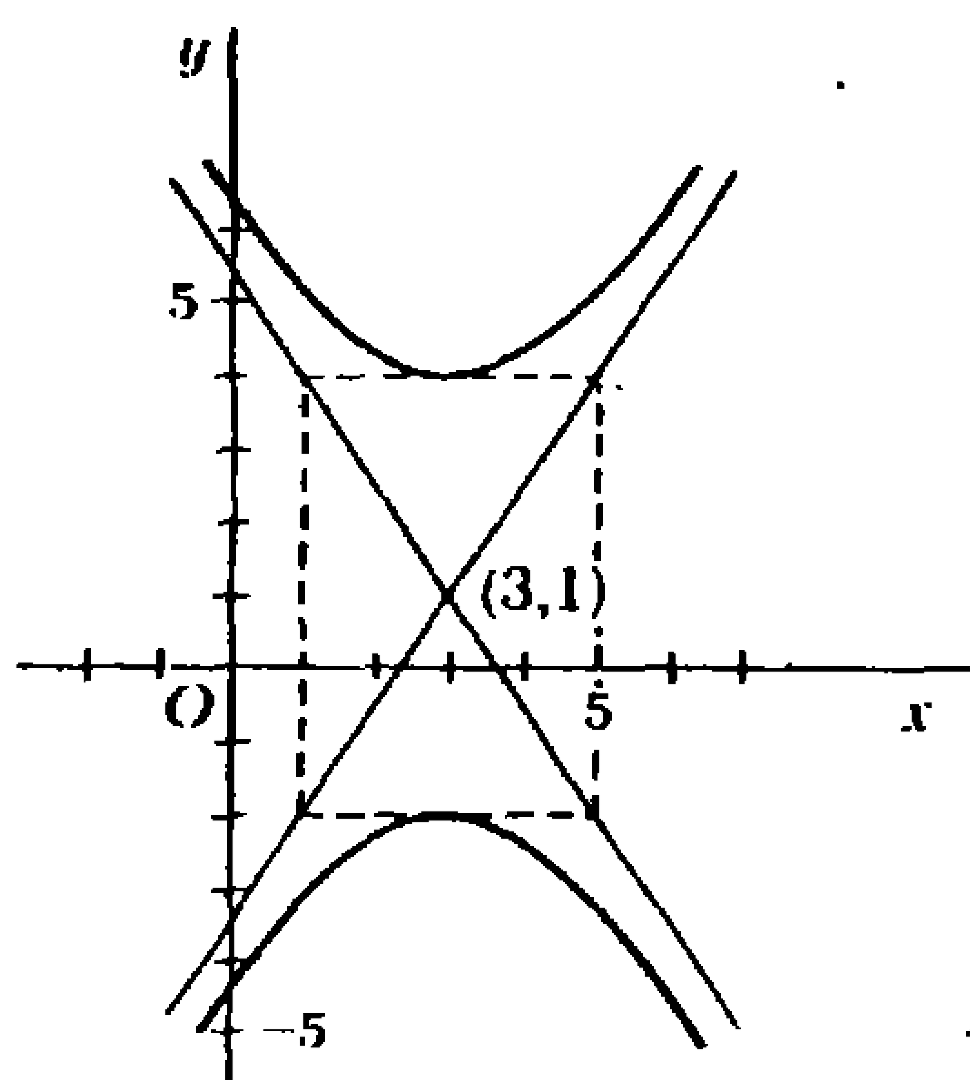
لاجراء ذلك ، نكمل المربعين على حدود y و x ، كما سبق أن فعلنا لايجاد مركز دائرة من معادلتها . لدينا

$$9(x^2-6x)-4(y^2-2y)=-113,$$
$$9(x^2-6x+9)-4(y^2-2y+1)=-113+81-4,$$
$$9(x-3)^2-4(y-1)^2=-36,$$
$$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1.$$

اذا وضعنا $y'=y-1$ و $x'=x-3$ ، فان المعادلة الاخيرة تصبح

$$\frac{y'^2}{9}-\frac{x'^2}{4}=1$$

لقد نقلنا المحورين الى النقطة $(3,1)$ واختزلنا المعادلة الى الصورة القياسية لقطع زائد مفتوح لأعلى ولأسفل . مركزه هو $(3,1)$ فى النظام xy . بما أن $a=3$ ، الرأسان هما $(3,-2)$ و $(3,4)$. الخطان التقاربيان يتقاطعان عند المركز وميلاهما $\pm\frac{3}{2}$. المنحنى مخطط فى الشكل ت - ٦٥ .



شكل ت - ٦٥
القطع الزائد
$(y-1)^2/9-(x-3)^2/4=1$

مثال ٣ . ميز وخطط المنحنى $y^2-6x+6y-6=0$

بما أنه لايوجد حد x^2 ، نكمل المربع على حدود y فقط :

$$y^2+6y+9=6x+6+9,$$
$$(y+3)^2=6x+15=6(x+\tfrac{5}{2}).$$

اذا وضعنا $y'=y+3$ و $x'=x+\frac{5}{2}$ ، المعادلة تختزل الى $y'^2=6x'$ وهى قطع مكافىء فى الصورة القياسية رأسه عند $(-\frac{5}{2}\ ,\ -3)$ فى النظام xy ومفتوح الى اليمين . بما أن $p=\frac{3}{2}$ ، البؤرة تكون عند النقطة $(-1\ ,\ -3)$. المنحنى مخطط فى الشكل ت - ٦٦ .

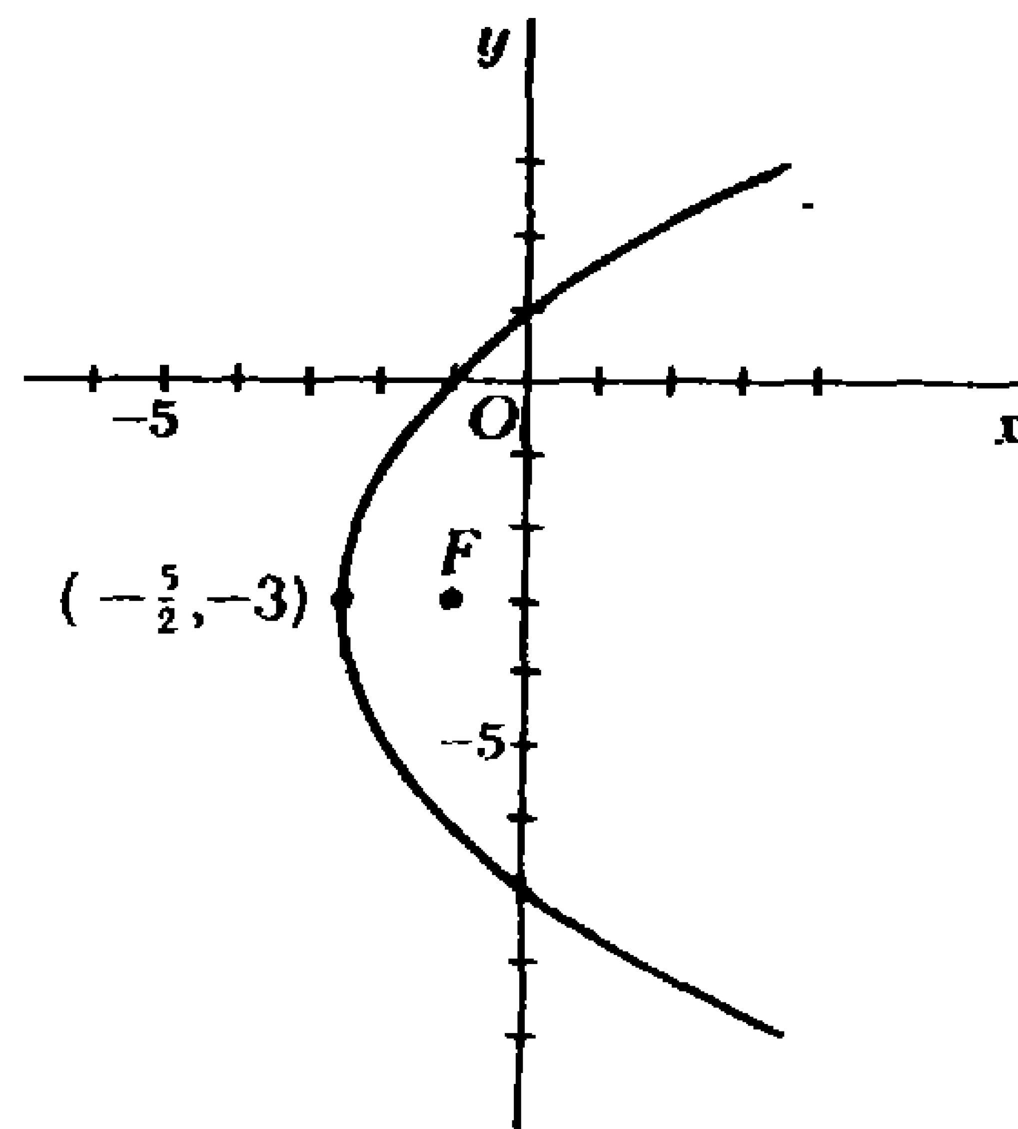
مثال ٤ . خطط الشكل البيانى للمعادلة $x^2 - 4y^2 + 4x -$
باكمال المربعين ، يمكن اثبات أن هذه المعادلة تكافىء المعادلة

$$(x+2)^2 - 4(y+5)^2 = 0$$

أو ، بنقل المحورين ، تكافىء المعادلة $x'^2 - 4y'^2 = 0$. هذه تكتب كحاصل ضرب عاملين

$$(x' - 2y')(x' + 2y') = 0$$

اذن الشكل البيانى يتكون من خطين مستقيمين ميلاهما $\pm \frac{1}{2}$ ويتقاطعان عند (5 — , 2—) فى النظام xy .



شكل ت ـ ٦٦
القطع المكافىء
$(y+3)^2 = 6(x + \frac{5}{2})$

كما يوضح هذا المثال ليست كل معادلة من الدرجة الثانية تمثل قطعا مخروطيا . الا أن معظم المعادلات تمثل قطعا مخروطيا والقطع المخروطى يمكن تمييزه وتخطيطه باكمال المربع . الحالات الشاذة ، أشكالها البيانية خط مستقيم أو خطان مستقيمان أو نقطة واحدة ، وقد لايكون لها شكل بيانى . اذا كان الشكل البيانى قطعا مخروطيا فيمكن معرفة نوعه مباشرة من (٨) . الشكل البيانى يكون قطعا ناقصا أو قطعا زائدا تبعا لكون C و A لهما نفس الاشارة أولهما اشارتان مختلفتان ، ويكون قطعا مكافئا ، اذا كان أحدهما ، لكن ليس كلاهما ، صفرا . نترك البرهان للقارىء (المسألة ٤٠) .

مسائل :

أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الاتية :

١ ـ قطع مكافىء ، رأسه (0 , 1) ويؤرته $(0 , \frac{5}{2})$.
٢ ـ قطع مكافىء ، رأسه (2— , 2—) ويؤرته (2— , 2).
٣ ـ قطع مكافىء ، رأسه (3 , 5) ودليله $y = 5$.

٤ ـ قطع مكافىء ، رأسه $(3 , -2)$ ويمر بنقطة الاصل .

٥ ـ قطع مكافىء ، رأسه $(b , 0)$ ودليله $x = a$

٦ ـ قطع ناقص ، رأساه $(3 , 4)$ و $(-1 , 4)$ وطرفا المحور الأصغر $(1 , 5)$ و $(1 , 3)$.

٧ ـ قطع ناقص ، رأساه $(2 , 0)$ و $(-8 , 0)$ وبؤرتاه $(0 , 0)$ و $(-6 , 0)$.

٨ ـ قطع ناقص ، رأساه $(-2 , -4)$ و $(-2 , 2)$ ويمس المحور y .

٩ ـ قطع ناقص ، رأساه $(3 , -4)$ و $(3 , 2)$ ويمر بالنقطة $(1\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}-1)$.

١٠ ـ قطع زائد ، رأساه $(6 , 2)$ و $(0 , 2)$ وبؤرتاه $(7 , 2)$ و $(-1 , 2)$.

١١ ـ قطع زائد ، بؤرتاه $(-3 , -5)$ $(-3 , 1)$ واختلافه المركزى $\frac{3}{2}$.

١٢ ـ قطع زائد ، رأساه $(-2 , -4)$ $(0 , -4)$ وميلا خطيه التقاربين ± 3 .

١٣ ـ قطع زائد ، بؤرتاه $(-2 , 2 + \sqrt{13})$ و $(-2 , 2 - \sqrt{13})$ وخطاه التقاربيان $2x + 3y - 2 = 0$ و $2x - 3y + 10 = 0$.

١٤ ـ قطع زائد ، بؤرتاه $(-2 , 2)$ و $(2 , 2)$ ويمر بالنقطة $(2 , -1)$.

١٥ ـ قطع زائد ، مركزه (h , k) ومحوره القاطع يوازى المحور y

١٦ ـ اوجد احداثيات بؤرتى القطع الناقص الذى رأساه عند $(-1 , -3)$ و $(5 , -3)$ ، وطرفا محوره الأصغر عند $(2 , -5)$ و $(2 , -1)$.

لكل من المعادلات الاتية (أ) ميز وخطط الشكل البيانى ، (ب) أوجد احداثيات الرؤوس ، (ج) اوجد احداثيات البؤر ، (د) أوجد معادلات الخطوط التقاربية أن وجدت .

١٧ ـ $y = \frac{1}{8}(x-6)^2$

١٨ ـ $\frac{(x+2)^2}{10} + (y+3)^2 = 1$

١٩ ـ $\frac{(y-3)^2}{2} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

٢٠ ـ $y^2 + x + 2y - 1 = 0$

٢١ ـ $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$

٢٢ ـ $x^2 - y^2 + 10y = 0$

٢٣ ـ $y^2 + x + y = 0.$

٢٤ ـ $x^2 - 2x + 6y + 25 = 0$

٢٥ ـ $x^2 + y^2 + 7y + 5 = 0.$

٢٦ ـ $4x^2 + 5y^2 - 80y + 300 = 0$

٢٧ ـ $-x^2 + y^2 - 2x + 6y + 7 = 0$

٢٨ ـ $4x^2 - 25y^2 + 32x + 100y + 64 = 0$

٢٩ ـ $6x^2 - 5y^2 - 12x = -21.$

٣٠ ـ $9x^2 - 36x + 16y - 28 = 0$

٣١ ـ $x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 7 = 0$

٣٢ ـ $y^2 - 10y + 25 = 0.$

٣٣ ـ $x^2 - 9x = -18.$

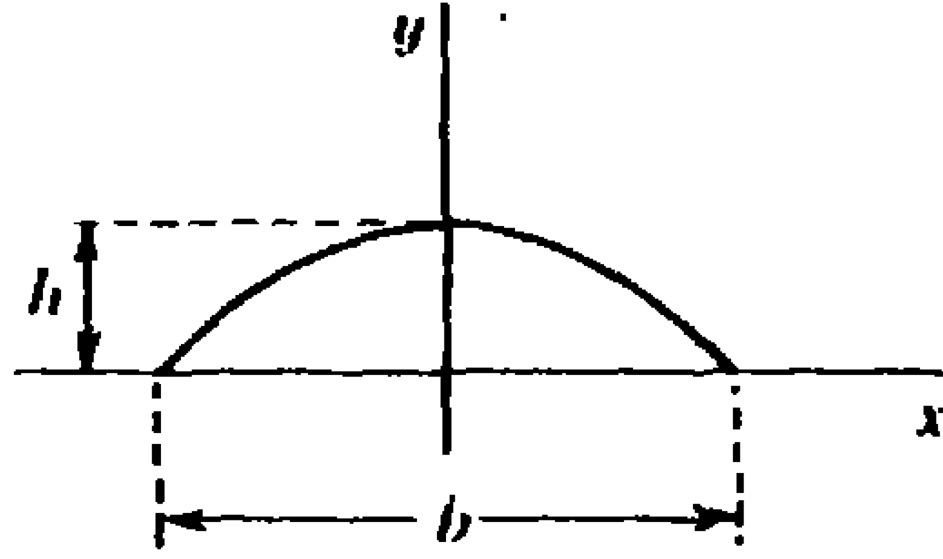
٣٤ ـ $2x^2 + 3y^2 - 4x - 12y + 14 = 0$

٣٥ ـ $2x^2 + y^2 + 4x + 2y + 6 = 0$

٣٦ ـ اشتق معادلة الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها عند (h , k) من معادلة الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها عند نقطة الاصل .

٣٧ ـ من معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الاصل وميله m اشتق معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (x_1 , y_1) وميله m .

٣٨ ـ اوجد معادلة قوس القطع المكافىء بشكل ت ـ ٦٧ الذى قاعدته طولها b وارتفاعه h.



شكل ت ـ ٦٧

٣٩ ـ اثبت أن القطع المكافىء الذى محوره يوازى محورا للاحداثيات معادلته تكون على الصورة $y = ax^2 + bx + c$ أو $x = ay^2 + by + c$ حيث $a = 0$. بالعكس ، أثبت أن المعادلة $y = ax^2 + bx + c$ و $a \neq 0$ ، هى معادلة قطع مكافىء محوره يوازى المحور y وأن الاحداثى x للرأس هو $-b / 2a$.

٤٠ ـ اثبت أن الشكل البيانى لـ (٨) يكون قطعا ناقصا او قطعا زائدا تبعا لكون B و A لهما نفس الاشارة او لهما اشارتان مختلفتان ، ويكون قطعا مكافئا اذا كانت A أو C لكن ليس كلاهما ، صفرا .

٤١ ـ اوجد معادلة القطع الناقص الذى له بؤرة عند $(4 , 1)$ ، والدليل المناظر $x = 3$ ، والاختلاف المركزى $\frac{2}{3}$.

٤٢ ـ اثبت أن القطعتين المكافئتين $y^2 = 4b^2 + 4bx$ و $y^2 = 4a^2 - 4ax$ لهما بؤرة مشتركة لاى اختيار للعددين الموجبين b و a. خطط اشكالهما البيانية عندما $b = 1 , 2 , 5$ و : $a = 1 , 2 , 4$. يمكن اثبات أن كل منحنى من إحدى المجموعتين يقطع كل منحنى من المجموعة الأخرى على التعامد

باجراء نقل مناسب للمحورين ، بسط معادلات كل من المنحنيات الاتية وخطط شكلها البيانى :

٤٣ - $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 6$ ٤٤ - $y = 4/(x - 2)$

٤٥ - $y = (x + 1)^3$ ٤٦ - $xy - 3x + 5y = 15$

٤٧ ـ اثبت أن المنحنى $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ متماثل فى الخط المستقيم $x = 2$

٤٨ ـ اوجد معادلة انعكاس القطع المكافىء $x^2 - 6x - 3y + 9 = 0$ فى الخط المستقيم $= 3$

٤٩ ـ اوجد نقطة تماثل للمنحنى $y = 3/(x + 4) + 1$

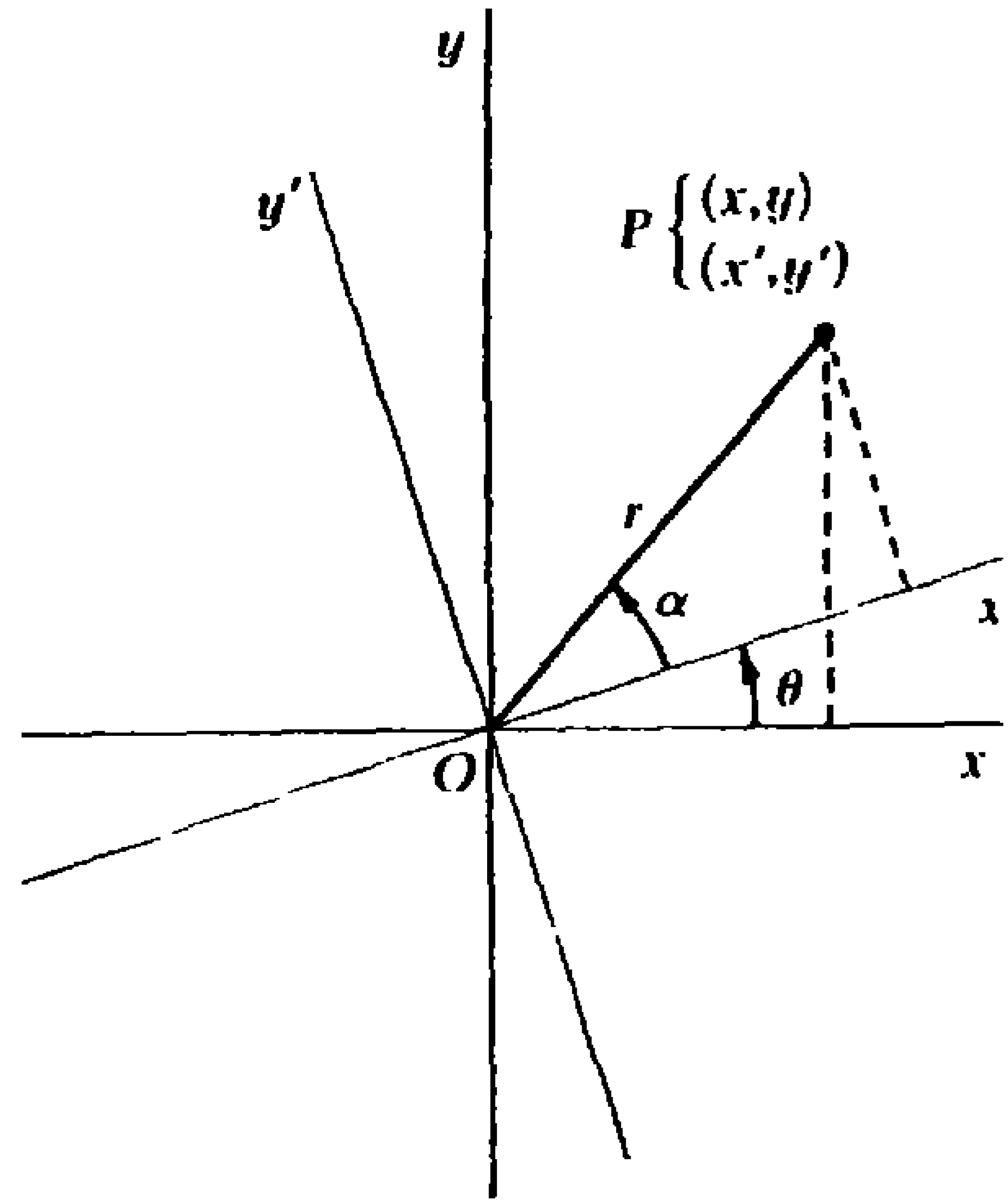
٥٠ ـ ليكن D خطا مستقيما معطى ، ولتكن F نقطة ليست عليه . اثبت أن فئة النقط P التى تحقق $e = |PF|/|PM|$ حيث M مسقط P على D وحيث e مقدار ثابت موجب ، تكون قطعا ناقصا أو قطعا مكافئا أو قطعا زائدا تبعا لكون $e < 1$ أو $e = 1$ أو $e > 1$ [ارشاد : أدخل نظاما للاحداثيات حيث D يكون المحور y وحيث F تكون عند نقطة ما $(r , 0)$ و $r > 0$] .

ت - ١١
دوران المحاور

اذا دار المحوران y و x حول نقطة الأصل الى وضع y' و x' ، كما فى الشكل ت - ٦٨ ، فان العلاقة بين فئتى الاحداثيات (x', y') و (x, y) لنقطة P فى المستوى يمكن ايجادها كما يلى . لتكن θ زاوية دوران المحورين فى اتجاه ضد عقرب الساعة ولتكن α الزاوية من المحور x' الموجب الى الشعاع OP ، حيث $-180 < \alpha \leqslant 180°$. اذا كانت r ترمز الى طول القطعة المستقيمة OP، فانه من تعريف الدوال المثلثية، يكون $y = r \sin(\alpha + \theta)$ و $x = r \cos(\alpha + \theta)$. باستخدام صيغتى الجيب وجيب التمام لحاصل جمع زاويتين ، يكون

$$x = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$
$$y = r\sin(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

لكن $y' = r\sin\alpha$ و $x' = r\cos\alpha$ واذن



شكل ت - ٦٨
دوران المحورين θ .

ت - ٢٧ $\quad x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

هاتان المعادلتان تعطيان احداثى P فى النظام xy بدلالة احداثييها فى النظام $x'y'$. بحل المعادلتين آنيا ل y' و x' ، نحصل على المعادلتين اللتين تعطيان احداثى P فى النظام $x'y'$ بدلالة احداثييها فى النظام xy :

ت - ٢٨ $\quad x' = x\cos\theta + y\sin\theta. \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$

فمثلا ، اذا كانت $\theta = 30°$ ، النقطة P التى احداثياها $(4, 2)$ فى النظام xy لها ، باستخدام المعادلتين ت - ٢٨ ، الاحداثيان $(2\sqrt{3}+1, -2+\sqrt{3})$ فى النظام $x'y'$. المعادلات ت -

٢٧ ، ت ـ ٢٨ تسمى معادلات الدوران . خلافا لنقل المحورين ، يلزم أن نعرف كلا الاحداثيين y و x للنقطة لتعيين احداثيها x' .

مثال ١ . أوجد معادلة القطع الناقص

$$2x^2 + 4y^2 = 1 \qquad (1)$$

اذا دار المحوران زاوية $45°$.

معادلتا الدوران ، باستخدام المعادلتين ت ـ ٢٧ ، هما

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

بتعويض الطرفين الايمنين من هاتين ، لـ y و x فى (١) ، يكون لدينا

$$(x' - y')^2 + 2(x' + y')^2 = 1$$

أى

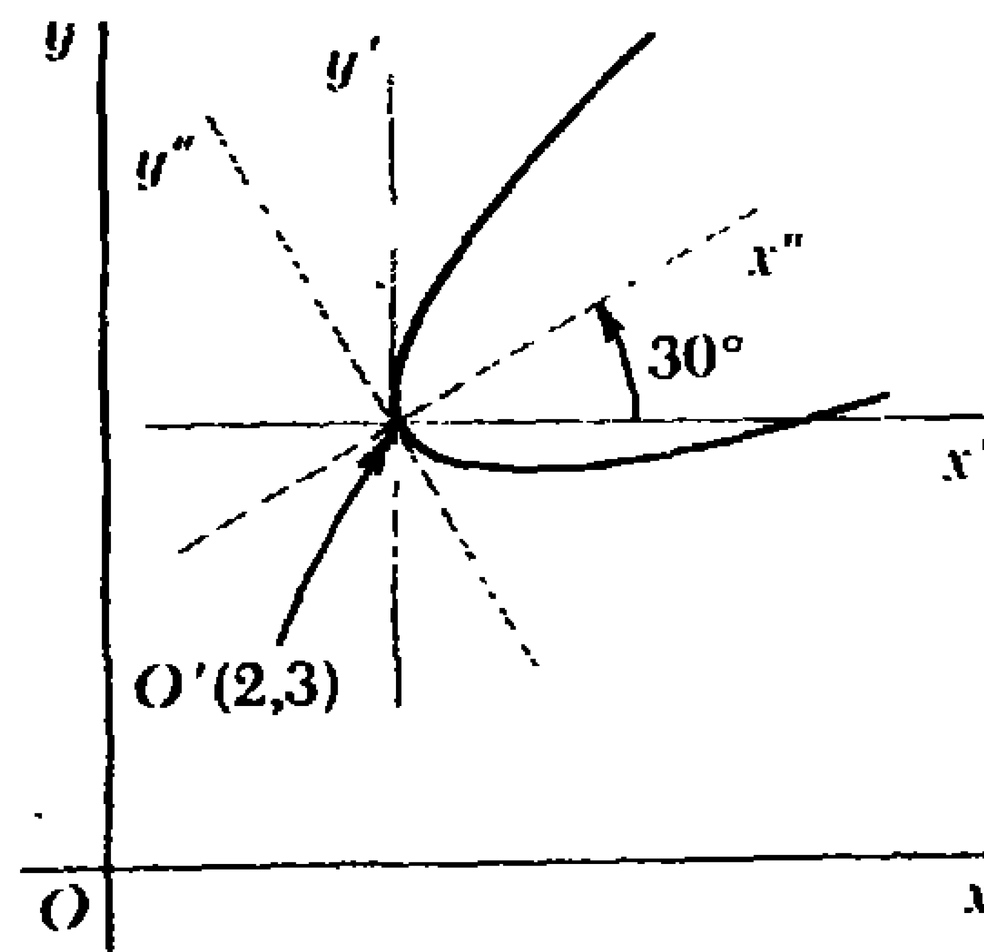
$$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 = 1 \qquad (2)$$

كمعادلة للقطع الناقص فى النظام $x'\,y'$.

المعادلة (٢) من الدرجة الثانية وتشتمل على حد $x'\,y'$. سنرى بعد قليل أن الحد xy فى معادلة من الدرجة الثانية يشير الى أن محورى القطع المخروطى لايوازيان محورى الاحداثيات .

بالجمع بين النقل والدوران يمكننا إيجاد معادلة قطع مخروطى موضوع فى أى مكان فى المستوى . نفرض أننا نريد ايجاد معادلة قطع مكافىء رأسه عند $(2, 3)$ ، ومحوره يميل بزاوية $30°$ على المحور x ، وحيث $p = \frac{1}{4}$ (شكل ت ـ ٦٩) . ندخل نظامين جديدين للاحداثيات . الاول له نقطة الاصل O' عند رأس القطع المكافىء والمحوران y' و x' يوازيان المحورين y و x . النظام الثانى له نفس نقطة الاصل O' لكن المحورين y'' و x'' يميلان بزاوية $30°$ على المحورين y' و x' . بالنسبة الى المحورين y'' و x'' القطع المكافىء يكون فى الوضع القياسى ومعادلته هى

$$y''^2 = x'' \qquad (3)$$



شكل ت ـ ٦٩

معادلتا دوران المحورين y' و x' الى المحورين y'' و x'' هما ، باستخدام المعادلتين ت ـ ٢٨ ،

$$x'' = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'), \qquad y'' = \tfrac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y')$$

بتعويض الطرفين الايمنين لـ y'' و x'' فى (٣) نحصل عى معادلة القطع المكافىء فى النظام $x'y'$ ،

$$\tfrac{1}{4}(-x' + \sqrt{3}y')^2 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$$

أى

$$x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2 - 2\sqrt{3}x' - 2y' = 0$$

معادلتا نقل المحورين y و x الى المحورين y' و x' هما $y' = y - 3$ و $x' = x - 2$. واذن معادلة القطع المكافىء فى النظام xy هى

$$(x-2)^2 - 2\sqrt{3}(x-2)(y-3) + 3(y-3)^2 - 2\sqrt{3}(x-2) - 2(y-3) = 0$$

أى

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 4(-1+\sqrt{3})x + 4(\sqrt{3}-5)y + 37 - 8\sqrt{3} = 0 \qquad (٤)$$

يمكن بالمثل الحصول على معادلة أى قطع مخروطى بالبدء بقطع مخروطى مناسب ، فى وضع قياسى ، ثم اجراء دوران ونقل المحورين .

ت ـ ٢٩ $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

تسمى المعادلة العامة من الدرجة الثانية فى y و x . المعادلتان (١) و (٤) على هذه الصورة . كل قطع مخروطى فى وضع قياسى له معادلة من الدرجة الثانية فى y و x . التعويضات المستخدمة فى دوران المحورين لاتؤثر على الدرجة لكن توصل الى معادلة على الصورة ت ـ ٢٩ . أى أن كل قطع مخروطى له معادلة على الصورة ت ـ ٢٩ ، بصرف النظر عن وضعه ماعدا عندما يكون الشكل البيانى لاوجود له ، أو يكون نقطة ، أو خطا مستقيما أو مستقيمين ، العكس أيضا صحيح : كل معادلة على الصورة ت ـ ٢٩ شكلها البيانى قطع مخروطى نثبت ذلك الآن .

بدوران المحورين ، بند ت ـ ٢٧ ، المعادلة ت ـ ٢٩ تتحول الى

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \qquad (٥)$$

حيث

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta,\\
B' &= B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C-A)\sin\theta\cos\theta,\\
C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta,\\
D' &= D\cos\theta + E\sin\theta,\\
E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta,\\
F' &= F.
\end{aligned} \qquad (٦)$$

من الممكن دائما اختيار زاوية الدوران θ بحيث أن $B' = 0$. بما أن

$$\begin{aligned}
B' &= B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C-A)\sin\theta\cos\theta\\
&= B\cos 2\theta + (C-A)\sin 2\theta,
\end{aligned}$$

هذا يمكن اجراؤه باختيار θ بحيث أن

$$\cot 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{A-C}{B}$$

لكن اذا كانت $B' = 0$ ، فالمعادلة (٥) ، التى هى معادلة القطع المخروطى فى النظام بعد الدوران ، ليس بها حد $x'y'$ ، وقد أثبتنا فى البند السابق أن مثل هذه المعادلة هى معادلة قطع مخروطى محوراه يوازيان محورى الاحداثيات x' و y' ، بفرض أنها لاتكون احدى الحالات المستثناة التى سبق الاشارة اليها . واذن المعادلة ت ـ ٢٩ يجب أن يكون لها نفس القطع المخروطى كشكلها البيانى . بعد دوران المحورين لتصبح $B' = 0$ ، يمكن نقل المحورين الجديدين لتنعدم الحدود الخطية ، ثم يخطط القطع المخروطى .

مثال ٢ . ميز وخطط القطع المخروطى $x^2 + xy + y^2 = 6$

هنا $A = B = C = 1$. لحذف الحد xy ، ندير المحورين زاوية θ بحيث أن $\cot 2\theta = (A - C)/B = 0$. لذلك تكون $\theta = 45°$ و $2\theta = 90$ ، ومعادلتا الدوران تكونان

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

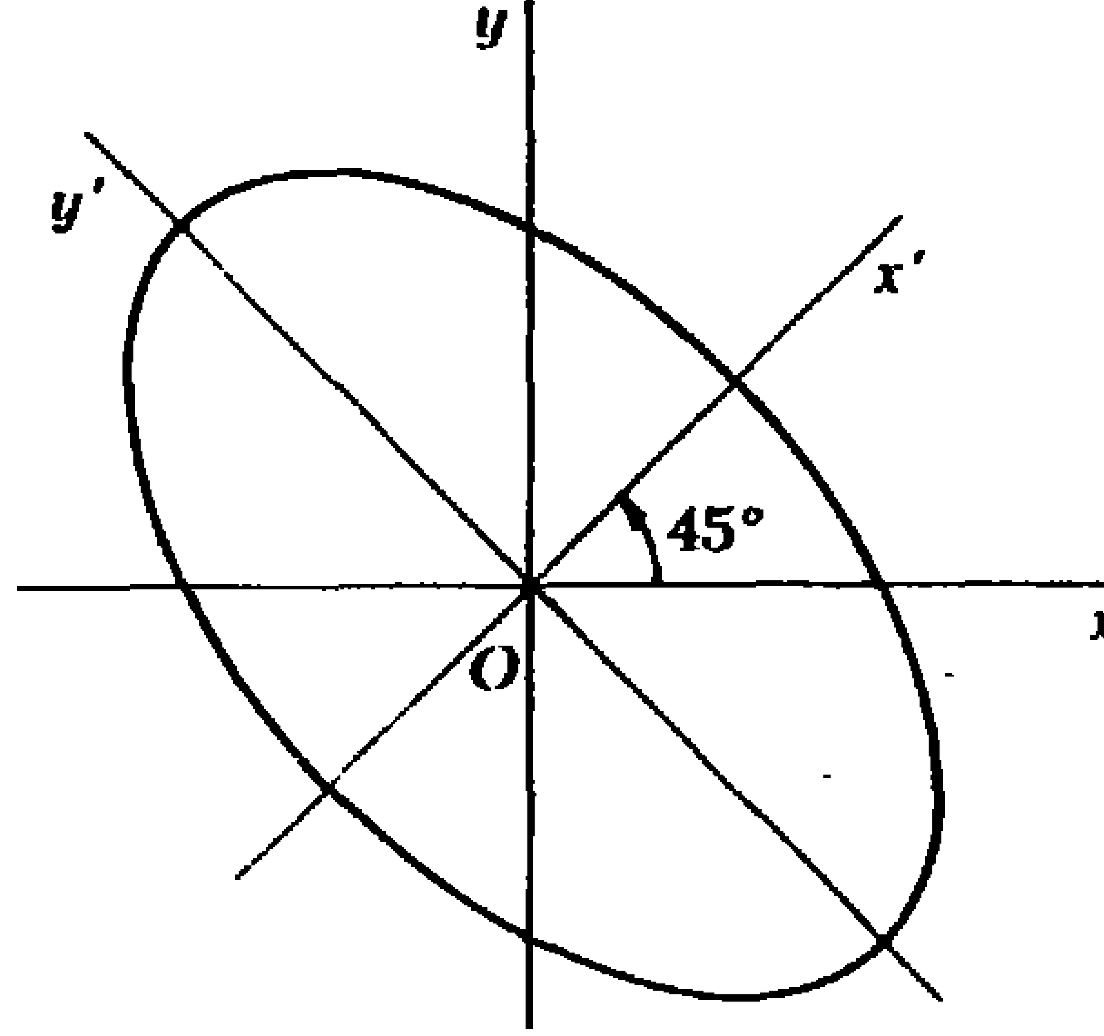
معادلة القطع المخروطى بالنسبة الى المحورين الجديدين هى

$$\tfrac{1}{2}(x'-y')^2 + \tfrac{1}{2}(x'-y')(x'+y') + \tfrac{1}{2}(x'+y')^2 = 6$$

أى

$$3x'^2 + y'^2 = 12$$

القطع المخروطى هو قطع ناقص محوره الاكبر على المحور y'. القطع مخطط فى الشكل ت ـ ٧٠ .



شكل ت ـ ٧٠
القطع الناقص $x^2 + xy + y^2 = 6$.

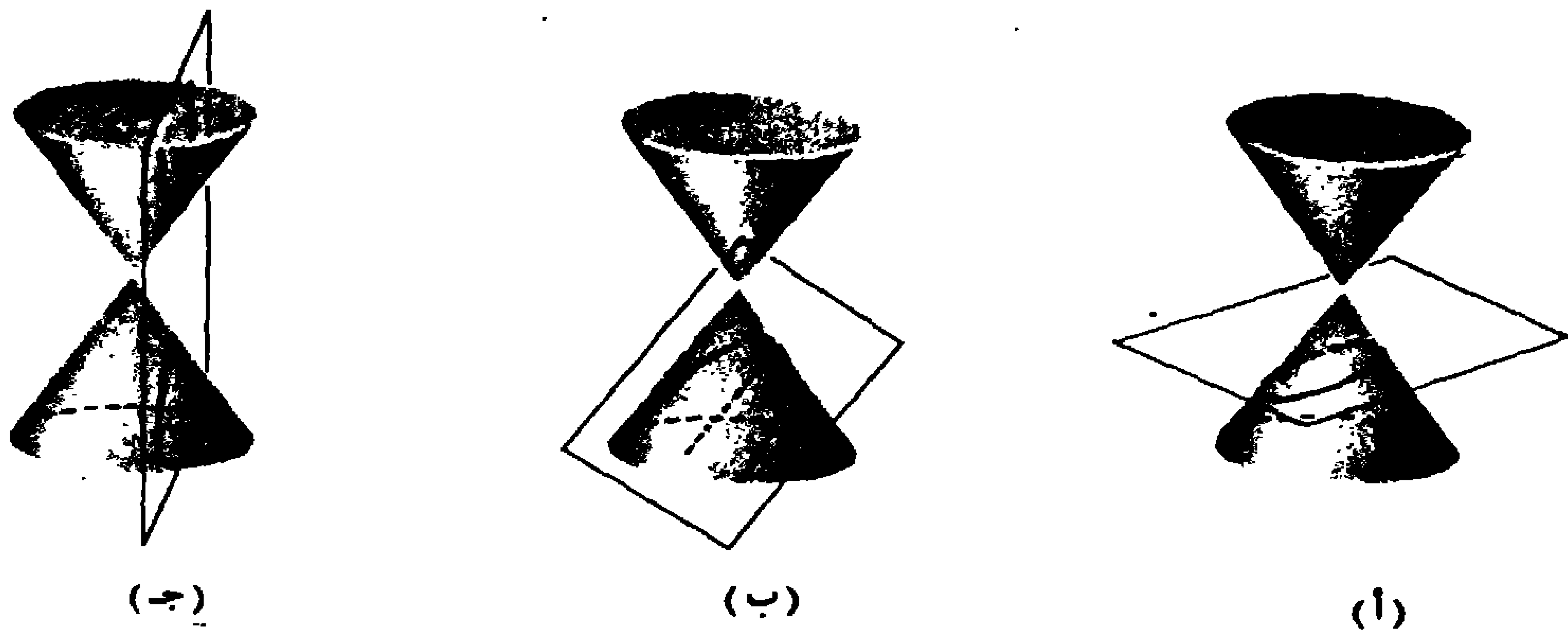
باستخدام (٦) ، ليس من الصعب ، وإن كان مملا ، اثبات أنه بدوران المحورين أى زاوية θ ، المعاملات ت ـ ٢٩ ، (٥) تحقق العلاقة

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

المقدار $B^2 - 4AC$ يسمى مميز القطع المخروطى والمعادلة السابقة توضح أنه لايتغير بدوران المحورين ، أى انه مقدار ثابت تحت دوران المحورين . اذا دار المحوران بحيث اصبحت $B' = 0$ فحينئذ يكون $B^2 - 4AC = -4A'C'$ في البند السابق رأينا أن القطع المخروطى الذى معادلته على الصورة (٥) حيث $B' = 0$ هو (أ) قطع مكافىء اذا كانت $A' = 0$ أو $C' = 0$ ، أى كانت $A'C' = 0$ ، (ب) قطع ناقص اذا كانت C' و A' ولهما نفس الاشارة ، أى كان $A'C' > 0$ ، (ج) قطع زائد اذا كانت C' و A' لهما اشارتان مختلفتان ، أى كان $A'C' < 0$. هذا يثبت أن الشكل البيانى للمعادلة العامة ت ـ ٢٩ من الدرجة الثانية فى y و x هو (أ) قطع مكافىء اذا كان $B^2 - 4AC = 0$ (ب) قطع ناقص اذا كان $B^2 - 4AC < 0$ (ج) قطع زائد اذا كان $B^2 - 4AC > 0$ ، وذلك بفرض أن المعادلة لاتكون احدى الحالات الشاذة التى أشرنا اليها من قبل.

المستوى الذى يقطع مخروطا دائريا قائما عموديا على محور المخروط يقطع المخروط فى دائرة . اذا مال المستوى الى حد ما فانه يقطع المخروط فى قطع ناقص غير دائرى (شكل ت ـ ٧١أ) .

عندما يميل المستوى أكثر ، التقاطع الذى على شكل قطع ناقص يصبح أطول وأضيق . عندما يميل المستوى بزاوية بحيث يكون موازيا للرسم المقابل للمخروط ، فانه لايقطع المخروط فى منحنى مقفل والتقاطع يكون قطعا مكافئا (شكل ت ـ ٧١ ب) . اذا زاد ميل المستوى ، فانه يقطع



شكل ت - ٧١ . مستوى يقطع المخروط فى
(أ) قطع ناقص ، (ب) قطع مكافىء (ج) قطع زائد .

الجزءين العلوى والسفلى لامتداد المخروط والتقاطع يكون قطعا زائدا (شكل ت - ٧١ ج) .
برهان ذلك موجود فى بعض كتب الهندسة التحليلية أو فى

Thomas, "Calculus and Analytic Geometry," 4th ed., Addison-Wesley, 1968, p. 354.

مسائل

أوجد احداثيات النقط الآتية اذا دارت المحاور بالزاوية المعطاة :

١ - $(1,0), 45°$.　　٢ - $(2,-6), 135°$.　　٣ - $(0,1), -30°$.　　٤ - $(1,2), 90°$.

أوجد معادلة المستقيمات الآتية اذا دارت المحاور بالزاوية المعطاة

٥ - $y = \frac{1}{2}x, 60°$.　　٦ - $y = 2x - 4, 90°$.　　٧ - $y = mx, 90°$.　　٨ - $y = -x, -45°$.

أوجد معادلة كل من القطوع المخروطية الآتية :

٩ - قطع زائد ، مركزه $(0\ ,\ 0)$, $b = 6$ و $a = 4$ ، زاوية ميل المحور القاطع $45°$.

١٠ - قطع ناقص ، مركزه $(0\ ,\ 3)$, $b = 1$ و $a = 3$ ، زاوية ميل المحور الاكبر $135°$.

١١ - قطع ناقص ، مركزه $(1-\ ,\ 2-)$, $b = 2$ و $a = 4$ ، زاوية ميل المحور الاكبر $30°$.

١٢ - قطع مكافىء ، رأسه $(1-\ ,\ 1)$, $p = 2$ زاوية ميل محوره $60°$ — مفتوح لأعلى .

استخدم المميز لتمييز الشكل البيانى للمعادلات الآتية . بسط المعادلة بالدوران او النقل ، أوكليهما ، وخطط الشكل البيانى .

١٣ - $x^2 + xy + y^2 = 1$

١٤ - $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 8$

١٥ - $9x^2 - 6xy + y^2 - 9 = 0$

١٦ - $4x^2 + 4xy + y^2 - 3y = 6$

١٧ - $x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 = 1$

١٨ - $7x^2 + 8xy + y^2 = 3$

١٩ - $x^2 - xy + y^2 - x - y = 3$.

٢٠ - $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5x - 4y = 12$

٢١ - $2x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 3y = 6$.

٢٢ - $5x^2 - 4xy - y^2 + 24x + 6y - 5 = 0$

٢٣ - $5x^2 - 4xy + 2y^2 = 6$.

٢٤ - $3x^2 - 4xy + 8x = 1$

٢٥ - $x^2 + 2xy + y^2 = 3$.

٢٦ - $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 = 0$

٢٧ - $xy - 3x + 2y = 6$

٢٨ - $2x^2 + xy - y^2 - 2x + 7y - 12 = 0$

أوجد احداثيات رؤوس القطوع المخروطية الآتية :

٢٩ - $3y^2 - 4xy + 8y = 1$

٣٠ - $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 20$

٣١ - $7y^2 - 24xy + 120y + 144 = 0$

٣٢ - $4x^2 - 4xy + y^2 = 6$

اوجد معادلات الخطوط التقاربية للقطوع الزائدة الآتية :

٣٣ - $xy = a^2$

٣٤ - $x^2 - xy + 1 = 0$

٣٥ - $5x^2 - 6xy - 3y^2 = -3$

٣٦ - $2x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 3y = 6$

٣٧ - اوجد الاختلاف المركزى للقطع المخروطى $\sqrt{2}x - 2xy = 5$ وخطط شكله البيانى

٣٨ - مساحة القطع الناقص الذى طولا نصفى محوريه b و a هى πab . أوجد مساحة القطع الناقص $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 48$

٣٩ - اثبت أن المعادلة $y = (x + 1)/(x - 1)$ تمثل قطعا زائدا وخطط شكله البيانى .

٤٠ - اثبت أن معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لاتتغير اذا دار المحوران زاوية θ .

٤١ - بدوران المحورين 180° احصل على معادلة القطع المكافىء $y^2 = -8x$ من المعادلة $y^2 = 8x$.

٤٢ - اذا دار المحوران 90 ، اثبت أن القطع الناقص الذى معادلته $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ فى النظام xy يكون له المعادلة $x'^2/b^2 + y'^2/a^2 = 1$ فى النظام $x'y'$.

٤٣ - أثبت أن أى معادلة على الصورة ت - ٢٩ حيث $B \neq 0$ و $A = C = 0$ هى قطع زائد .

٤٤ - احصل على معادلتى ت - ٢٨ بحل معادلتى ت - ٢٧ لـ y' و x' .

٤٥ ـ اثبت النص فى الكتاب أن $B^2 - 4AC$ لايتغير بدوران المحورين ، حيث C و B و A هى المعادلات فى المعادلة ت ـ ٢٩ .

٤٦ ـ أثبت أن $D^2 + E^2$ و $A + C$ ، حيث E و D و C و A هى المعاملات فى المعادلة ت ـ ٢٩ ، لايتغيران بدوران المحورين . أى أن ، $D^2 + E^2 = D'^2 + E'^2$ و $A + C = A' + C'$

٤٧ ـ أثبت أن $B^2 - 4AC$ حيث C و B و A هى المعاملات فى المعادلة ت ـ ٢٩ ، لايتغير بنقل المحورين .

٤٨ ـ أثبت أن $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ هى معادلة جزء من قطع مكافىء وخطط شكله انبيانى (ارشاد : أدر المحورين زاوية 45°).

ملحق أ
جدول التكاملات

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$ ١ -

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ٢ -

$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$ ٣ -

$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \qquad n \neq -1$ ٤ -

$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left(\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right) + C, \qquad n \neq -1, -2$ ٥ -

$\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2}(ax - b\ln|ax+b|) + C$ ٦ -

$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2}\left(\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right) + C$ ٧ -

$\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right| + C$ ٨ -

$\int \frac{x}{(ax+b)(cx+d)} dx = \frac{1}{ad-bc}\left(-\frac{b}{a}\ln|ax+b| + \frac{d}{c}\ln|cx+d|\right) + C$ ٩ -

$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\left(\frac{-1}{ax+b} - \frac{c}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right) + C$ ١٠ -

$\int \frac{x}{(ax+b)^2(cx+d)} dx = \frac{1}{ad-bc}\left[\frac{b}{a(ax+b)} + \frac{d}{ad-bc}\ln\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\right] + C$ ١١ -

$\int x\sqrt{ax+b}\, dx = \frac{-2}{15a^2}(2b-3ax)(ax+b)^{3/2} + C$ ١٢ -

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + \sqrt{b}\,\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C, \qquad b>0$$ ۱۳ - (أ)

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} - 2\sqrt{-b}\,\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \qquad b<0$$ (ب)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C, \qquad b>0$$ ۱٤ - (أ)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C, \qquad b<0$$ (ب)

$$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$ ۱۵ -

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$ ۱٦ -

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$ ۱۷ -

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$ ۱۸ -

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right) + C$$ ۱۹ -

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$ ۲۰ -

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$ ۲۱ -

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$ ۲۲ -

$$\int \frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2\pm x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}\right| + C$$ ۲۳ -

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\frac{x}{a} + C$$ ۲٤ -

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}\right| + C$$ ۲۵ -

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C$$ ۲٦ -

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{8}\left[x(2x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2} - a^4\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right] + C$$ ۲۷ -

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{8}\left[x(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + a^4\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C$$ ۲۸ -

$$\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x} + \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$ ۲۹ -

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$ -٣٠

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,dx = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2} \mp a^2 \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|) + C$$ -٣١

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(-x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$ -٣٢

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2\pm x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2\pm x^2}}{a^2x} + C$$ -٣٣

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$ -٣٤

$$\int (x^2\pm a^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{8}[x(2x^2\pm 5a^2)\sqrt{x^2\pm a^2} + 3a^4\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|] + C$$ -٣٥

$$\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{8}\left[2x(a^2-x^2)^{3/2} + 3a^2x\sqrt{a^2-x^2} + 3a^4\sin^{-1}\frac{x}{a}\right] + C$$ -٣٦

$$\int \frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}} + C$$ -٣٧

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C$$ -٣٨

$$\int \frac{dx}{x(a^2\pm x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2\pm x^2}} - \ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}{x}\right|\right) + C$$ -٣٩

$$\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}} + \sec^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$ -٤٠

$$\int \frac{x^2}{(x^2\pm a^2)^{3/2}}\,dx = \frac{-x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} + \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$$ -٤١

$$\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$ -٤٢

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2\pm a^2)^{3/2}} = \frac{-(2x^2\pm a^2)}{a^4x\sqrt{x^2\pm a^2}} + C$$ -٤٣

$$\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{2x^2-a^2}{a^4x\sqrt{a^2-x^2}} + C$$ -٤٤

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$ -٤٥

$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$ -٤٦

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$ -٤٧

$$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,dx = \tfrac{1}{6}(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2} + C$$ -٤٨

$$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$ -٤٩

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$ ٥٠-

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$$ ٥١-

$$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\frac{x-a}{a} + C$$ ٥٢-

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ ٥٣-

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ ٥٤-

$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$ ٥٥-

$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$ ٥٦-

$\int \sec x\,dx = \ln|\tan x + \sec x| + C$ ٥٧-

$\int \csc x\,dx = -\ln|\cot x + \csc x| + C$ ٥٨-

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$ ٥٩-

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$ ٦٠-

$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - x + C$ ٦١-

$\int \cot^2 x\,dx = -\cot x - x + C$ ٦٢-

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ ٦٣-

$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$ ٦٤-

$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x(2 + \sin^2 x) + C$ ٦٥-

$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\sin x(2 + \cos^2 x) + C$ ٦٦-

$\int \tan^3 x\,dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ ٦٧-

$\int \cot^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$ ٦٨-

$\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$ ٦٩-

$\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}(\csc x\cot x + \ln|\csc x + \cot x|) + C$ ٧٠-

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$ ٧١-

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$ ٧٢-

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx$$ ٧٣-

$$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx$$ ٧٤-

$$\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2}x\tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx$$ ٧٥-

$$\int \csc^n x = \frac{-1}{n-1}\csc^{n-2}x\cot x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x\,dx$$ ٧٦-

$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}(-2\sin x\cos^3 x + \sin x\cos x + x) + C$ ٧٧-

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = \frac{1}{n+m}\sin^{n+1}x\cos^{m-1}x + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n x\cos^{m-2}x\,dx,$$ (أ) ٧٨-

$n \neq -m$*

$$\int \sin^n x\cos^m x\,dx = \frac{-1}{n+m}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\,dx$$ (ب)

$n \neq -m$*

---

* اذا كانت $n = -m$ ، استخدام رقم ٧٣ أو ٧٤ .

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}\,dx = \frac{-\sin^{n-1} x}{(n-m)\cos^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos^m x}\,dx, \qquad n \neq m\ ^{*}$$ ٧٩ -

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\cos^{n-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx, \qquad m \neq n\ ^{**}$$ ٨٠ -

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\tan x| + C$$ ٨١ -

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \sec x + \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + C$$ ٨٢ -

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\csc x + \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$ ٨٣ -

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = -2\cot 2x + C$$ ٨٤ -

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^{n-2} x}$$ ٨٥ -

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = \frac{-1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$ ٨٦ -

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \frac{-1}{(n-1)\sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} + \frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos^m x}$$ (أ) ٨٧ -

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^m x} = \frac{1}{(m-1)\sin^{n-1} x \cos^{m-1} x} + \frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^n x \cos^{m-2} x}$$ (ب)

$$\int \frac{dx}{1 \pm \sin x} = \frac{\sin x \mp 1}{\cos x} + C$$ ٨٨ -

$$\int \frac{dx}{1 \pm \cos x} = \frac{-\cos x \pm 1}{\sin x} + C$$ ٨٩ -

$$\int \sin nx \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n-m)x}{n-m} - \frac{\sin (n+m)x}{n+m}\right] + C$$ ٩٠ -

$$\int \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n-m)x}{n-m} + \frac{\sin (n+m)x}{n+m}\right] + C$$ ٩١ -

$$\int \sin nx \cos mx\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (n-m)x}{n-m} + \frac{\cos (n+m)x}{n+m}\right] + C$$ ٩٢ -

$$\int x \sin x\,dx = \sin x - x\cos x + C$$ ٩٣ -

$$\int x \cos x\,dx = \cos x + x\sin x + C$$ ٩٤ -

$$\int x^2 \sin x\,dx = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x + C$$ ٩٥ -

$$\int x^2 \cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x + C$$ ٩٦ -

$$\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx$$ ٩٧ -

---

* اذا كانت $n = m$ ، استخدم رقم ٧٣ .

** اذا كانت $m = n$ ، استخدم رقم ٧٤ .

$\int x^n \cos x \, dx = x^n \sin x + nx^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, dx$ ٩٨ -

$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$ ٩٩ -

$\int \tan^{-1} x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln (x^2+1) + C$ ١٠٠ -

$\int \sec^{-1} x \, dx = x \sec^{-1} x - \ln |x + \sqrt{x^2-1}| + C$ ١٠١ -

$\int x^n \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ ١٠٢ -

$\int x^n \tan^{-1} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tan^{-1} x - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \, dx$ ١٠٣ -

$\int e^x \, dx = e^x + C$ ١٠٤ -

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ١٠٥ -

$\int xe^x \, dx = e^x(x-1) + C$ ١٠٦ -

$\int x^2 e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$ ١٠٧ -

$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$ ١٠٨ -

$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C$ ١٠٩ -

$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C$ ١١٠ -

$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$ ١١١ -

$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C$ ١١٢ -

$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C$ ١١٣ -

$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$ ١١٤ -

$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$ ١١٥ -

$\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C$ ١١٦ -

$\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$ ١١٧ -

$\int \frac{x^m}{(\ln x)^n} \, dx = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m}{(\ln x)^{n-1}} \, dx$ ١١٨ -

ملحق ب

الجداول العددية

جدول *I* زوايا نصف قطرية الى درجات ودقائق وبالعكس

نصف قطرية	درجات ودقائق
.00029	1′
.00058	2′
.00087	3′
.00116	4′
.00145	5′
.00175	6
.00204	7′
.00233	8′
.00262	9′
.00291	10′
.00582	20′
.00873	30′
.01164	40′
.01454	50′
.01745	1°
.03491	2°
.05236	3°
.06981	4°
.08727	5°
.10472	6°
.12217	7°
.13963	8°
.15708	9°
.17453	10°
.26180	15°
.52360	30°
1.04720	60°
1.57080	90°

درجات ودقائق	نصف قطرية
0° 3.44′	.001
0° 6.88′	.002
0°10.31′	.003
0°13.75′	.004
0°17.19′	.005
0°20.63′	.006
0°24.06′	.007
0°27.50′	.008
0°30.96′	.009
0°34.38′	.01
1° 8.75′	.02
1°43.13′	.03
2°17.51′	.04
2°51.89′	.05
3°26.26′	.06
4° 0.64′	.07
4°35.02′	.08
5° 9.40′	.09
5°43.77′	.1
11°27.55′	.2
17°11.32′	.3
22°55.10′	.4
28°38.87′	.5
34°22.65′	.6
40° 6.42′	.7
45°50.20′	.8
51°33.97′	.9
57°17.75′	1.0
114°35.49′	2.0
171°53.24′	3.0
229°10.99′	4.0
286°28.73′	5.0
343°46.48′	6.0
401° 4.25′	7.0
458°21.97′	8.0
515°39.72′	9.0

1″ = 0.0000048 نصف قطرية
60″ = 1′ = 0.0002909 نصف قصرة
3600″ = 60′ = 1° = 0.01745329 نصف قطرية
180° = π radians = 3.14159265 radians

جدول II الدوال المثلثية

درجات	نصف قطرية	جا	ظا	ظتا	جتا		درجات
0	.000	.000	.000	—	1.000	1.571	90
1	.017	.017	.017	57.29	1.000	1.553	89
2	.035	.035	.035	28.64	.999	1.536	88
3	.052	.052	.052	19.081	.999	1.518	87
4	.070	.070	.070	14.301	.998	1.501	86
5	.087	.087	.087	11.430	.996	1.484	85
6	.105	.105	.105	9.514	.995	1.466	84
7	.122	.122	.123	8.144	.993	1.449	83
8	.140	.139	.141	7.115	.990	1.431	82
9	.157	.156	.158	6.314	.988	1.414	81
10	.175	.174	.176	5.671	.985	1.396	80
11	.192	.191	.194	5.145	.982	1.379	79
12	.209	.208	.213	4.705	.978	1.361	78
13	.227	.225	.231	4.331	.974	1.344	77
14	.244	.242	.249	4.011	.970	1.326	76
15	.262	.259	.268	3.732	.966	1.309	75
16	.279	.276	.287	3.487	.961	1.292	74
17	.297	.292	.306	3.271	.956	1.274	73
18	.314	.309	.325	3.078	.951	1.257	72
19	.332	.326	.344	2.904	.946	1.239	71
20	.349	.342	.364	2.747	.940	1.222	70
21	.367	.358	.384	2.605	.934	1.204	69
22	.384	.375	.404	2.475	.927	1.187	68
23	.401	.391	.424	2.356	.921	1.169	67
24	.419	.407	.445	2.246	.914	1.152	66
25	.436	.423	.466	2.144	.906	1.134	65
26	.454	.438	.488	2.050	.899	1.117	64
27	.471	.454	.510	1.963	.891	1.100	63
28	.489	.469	.532	1.881	.883	1.082	62
29	.506	.485	.554	1.804	.875	1.065	61
30	.524	.500	.577	1.732	.866	1.047	60
31	.541	.515	.601	1.664	.857	1.030	59
32	.559	.530	.625	1.600	.848	1.012	58
33	.576	.545	.649	1.540	.839	.995	57
34	.593	.559	.675	1.483	.829	.977	56
35	.611	.574	.700	1.428	.819	.960	55
36	.628	.588	.727	1.376	.809	.942	54
37	.646	.602	.754	1.327	.799	.925	53
38	.663	.616	.781	1.280	.788	.908	52
39	.681	.629	.810	1.235	.777	.890	51
40	.698	.643	.839	1.192	.766	.873	50
41	.716	.656	.869	1.150	.755	.855	49
42	.733	.669	.900	1.111	.743	.838	48
43	.750	.682	.933	1.072	.731	.820	47
44	.768	.695	.966	1.036	.719	.803	46
45	.785	.707	1.000	1.000	.707	.785	45
		جتا	ظتا	ظا	جا	نصف قطرة	درجات

جدول *III* اللوغاريتمات للأساس *10* .

العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396
العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

جدول *III.* اللوغاريتمات للأساس *10* (تابع)

العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996
العدد	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

جدول IV. اللوغاريتمات الطبيعية

n	$\log_e n$	n	$\log_e n$	n	$\log_e n$
.0	—	4.5	1.5041	9.0	2.1972
.1	−2.3026	4.6	1.5261	9.1	2.2083
.2	−1.6094	4.7	1.5476	9.2	2.2192
.3	−1.2040	4.8	1.5686	9.3	2.2300
.4	− .9163	4.9	1.5892	9.4	2.2407
.5	− .6931	5.0	1.6094	9.5	2.2513
.6	− .5108	5.1	1.6292	9.6	2.2618
.7	− .3567	5.2	1.6487	9.7	2.2721
.8	− .2231	5.3	1.6677	9.8	2.2824
.9	− .1054	5.4	1.6864	9.9	2.2925
1.0	.0000	5.5	1.7047	10	2.3026
1.1	.0953	5.6	1.7228	11	2.3979
1.2	.1823	5.7	1.7405	12	2.4849
1.3	.2624	5.8	1.7579	13	2.5649
1.4	.3365	5.9	1.7750	14	2.6391
1.5	.4055	6.0	1.7918	15	2.7081
1.6	.4700	6.1	1.8083	16	2.7726
1.7	.5306	6.2	1.8245	17	2.8332
1.8	.5878	6.3	1.8405	18	2.8904
1.9	.6419	6.4	1.8563	19	2.9444
2.0	.6931	6.5	1.8718	20	2.9957
2.1	.7419	6.6	1.8871	25	3.2189
2.2	.7885	6.7	1.9021	30	3.4012
2.3	.8329	6.8	1.9169	35	3.5553
2.4	.8755	6.9	1.9315	40	3.6889
2.5	.9163	7.0	1.9459	45	3.8067
2.6	.9555	7.1	1.9601	50	3.9120
2.7	.9933	7.2	1.9741	55	4.0073
2.8	1.0296	7.3	1.9879	60	4.0943
2.9	1.0647	7.4	2.0015	65	4.1744
3.0	1.0986	7.5	2.0149	70	4.2485
3.1	1.1314	7.6	2.0281	75	4.3175
3.2	1.1632	7.7	2.0142	80	4.3820
3.3	1.1939	7.8	2.0541	85	4.4427
3.4	1.2238	7.9	2.0669	90	4.4998
3.5	1.2528	8.0	2.0794	95	4.5539
3.6	1.2809	8.1	2.0919	100	4.6052
3.7	1.3083	8.2	2.1041	200	5.2983
3.8	1.3350	8.3	2.1163	300	5.7038
3.9	1.3610	8.4	2.1282	400	5.9915
4.0	1.3863	8.5	2.1401	500	6.2146
4.1	1.4110	8.6	2.1518	600	6.3069
4.2	1.4351	8.7	2.1633	700	6.5511
4.3	1.4586	8.8	2.1748	800	6.6846
4.4	1.4816	8.9	2.1861	900	6.8024

جدول V . الدالة الاسية

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
.00	1.0000	1.0000	3.0	20.086	.0498
.05	1.0513	.9512	3.1	22.198	.0450
.10	1.1052	.9048	3.2	24.533	.0408
.15	1.1618	.8607	3.3	27.113	.0369
.20	1.2214	.8187	3.4	29.964	.0334
.25	1.2840	.7788	3.5	33.115	.0302
.30	1.3499	.7408	3.6	36.598	.0273
.35	1.4191	.7047	3.7	40.447	.0247
.40	1.4918	.6703	3.8	44.701	.0224
.45	1.5683	.6376	3.9	49.402	.0202
.50	1.6487	.6065	4.0	54.598	.0183
.55	1.7333	.5769	4.1	60.340	.0166
.60	1.8221	.5488	4.2	66.686	.0150
.65	1.9155	.5220	4.3	73.700	.0136
.70	2.0138	.4966	4.4	81.451	.0123
.75	2.1170	.4724	4.5	90.017	.0111
.80	2.2255	.4493	4.6	99.484	.0101
.85	2.3396	.4274	4.7	109.95	.0091
.90	2.4596	.4066	4.8	121.51	.0082
.95	2.5857	.3867	4.9	134.29	.0074
1.0	2.7183	.3679	5.0	148.41	.0067
1.1	3.0042	.3329	5.1	164.02	.0061
1.2	3.3201	.3012	5.2	181.27	.0055
1.3	3.6693	.2725	5.3	200.34	.0050
1.4	4.0552	.2466	5.4	221.41	.0045
1.5	4.4817	.2231	5.5	244.69	.0041
1.6	4.9530	.2019	5.6	270.43	.0037
1.7	5.4739	.1827	5.7	298.87	.0033
1.8	6.0496	.1653	5.8	330.30	.0030
1.9	6.6859	.1496	5.9	365.04	.0027
2.0	7.3891	.1353	6.0	403.43	.0025
2.1	8.1662	.1225	6.5	665.14	.0015
2.2	9.0250	.1108	7.0	1096.6	.0009
2.3	9.9742	.1003	7.5	1808.0	.0006
2.4	11.023	.0907	8.0	2981.0	.0003
2.5	12.182	.0821	8.5	4914.8	.0002
2.6	13.464	.0743	9.0	8103.1	.0001
2.7	14.880	.0672	9.5	13,360	.00007
2.8	16.445	.0608	10.0	22,026	.00004
2.9	18.174	.0550			

جدول VI. القوى والجذور والمقلوبات

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1/n$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1/n$
0	0	0	0.000	0.000	—	50	2 500	125 000	7.071	3.684	.0200
1	1	1	1.000	1.000	1.0000	51	2 601	132 651	7.141	3.708	.0196
2	4	8	1.414	1.260	.5000	52	2 704	140 608	7.211	3.733	.0192
3	9	27	1.732	1.442	.3333	53	2 809	148 877	7.280	3.756	.0189
4	16	64	2.000	1.587	.2500	54	2 916	157 464	7.348	3.780	.0185
5	25	125	2.236	1.710	.2000	55	3 025	166 375	7.416	3.803	.0182
6	36	216	2.449	1.817	.1667	56	3 136	175 616	7.483	3.826	.0179
7	49	343	2.646	1.913	.1429	57	3 249	185 193	7.550	3.849	.0175
8	64	512	2.828	2.000	.1250	58	3 364	195 112	7.616	3.871	.0172
9	81	729	3.000	2.080	.1111	59	3 481	205 379	7.681	3.893	.0169
10	100	1 000	3.162	2.154	.1000	60	3 600	216 000	7.746	3.915	.0167
11	121	1 331	3.317	2.224	.0909	61	3 721	226 981	7.810	3.936	.0164
12	144	1 728	3.464	2.289	.0833	62	3 844	238 328	7.874	3.958	.0161
13	169	2 197	3.606	2.351	.0769	63	3 969	250 047	7.937	3.979	.0159
14	196	2 744	3.742	2.410	.0714	64	4 096	262 144	8.000	4.000	.0156
15	225	3 375	3.873	2.466	.0667	65	4 225	274 625	8.062	4.021	.0154
16	256	4 096	4.000	2.520	.0625	66	4 356	287 496	8.124	4.041	.0152
17	289	4 913	4.123	2.571	.0588	67	4 489	300 763	8.185	4.062	.0149
18	324	5 832	4.243	2.621	.0556	68	4 624	314 432	8.246	4.082	.0147
19	361	6 859	4.359	2.668	.0526	69	4 761	328 509	8.307	4.102	.0145
20	400	8 000	4.472	2.714	.0500	70	4 900	343 000	8.367	4.121	.0143
21	441	9 261	4.583	2.759	.0476	71	5 041	357 911	8.426	4.141	.0141
22	484	10 648	4.690	2.802	.0455	72	5 184	373 248	8.485	4.160	.0139
23	529	12 167	4.796	2.844	.0435	73	5 329	389 017	8.544	4.179	.0137
24	576	13 824	4.899	2.884	.0417	74	5 476	405 224	8.602	4.198	.0135
25	625	15 625	5.000	2.924	.0400	75	5 625	421 875	8.660	4.217	.0133
26	676	17 576	5.099	2.962	.0385	76	5 776	438 976	8.718	4.236	.0132
27	729	19 683	5.196	3.000	.0370	77	5 929	456 533	8.775	4.254	.0130
28	784	21 952	5.292	3.037	.0357	78	6 084	474 552	8.832	4.273	.0128
29	841	24 389	5.385	3.072	.0345	79	6 241	493 039	8.888	4.291	.0127
30	900	27 000	5.477	3.107	.0333	80	6 400	512 000	8.944	4.309	.0125
31	961	29 791	5.568	3.141	.0323	81	6 561	531 441	9.000	4.327	.0123
32	1 024	32 768	5.657	3.175	.0312	82	6 724	551 368	9.055	4.344	.0122
33	1 089	35 937	5.745	3.208	.0303	83	6 889	571 787	9.110	4.362	.0120
34	1 156	39 304	5.831	3.240	.0294	84	7 056	592 704	9.165	4.380	.0119
35	1 225	42 875	5.916	3.271	.0286	85	7 225	614 125	9.220	4.397	.0118
36	1 296	46 656	6.000	3.302	.0278	86	7 396	636 056	9.274	4.414	.0116
37	1 369	50 653	6.083	3.332	.0270	87	7 569	658 503	9.327	4.431	.0115
38	1 444	54 872	6.164	3.362	.0263	88	7 744	681 472	9.381	4.448	.0114
39	1 521	59 319	6.245	3.391	.0256	89	7 921	704 969	9.434	4.465	.0112
40	1 600	64 000	6.325	3.420	.0250	90	8 100	729 000	9.487	4.481	.0111
41	1 681	68 921	6.403	3.448	.0244	91	8 281	753 571	9.539	4.498	.0110
42	1 764	74 088	6.481	3.476	.0238	92	8 464	778 688	9.592	4.514	.0109
43	1 849	79 507	6.557	3.503	.0233	93	8 649	804 357	9.644	4.531	.0108
44	1 936	85 184	6.633	3.530	.0227	94	8 836	830 584	9.695	4.547	.0106
45	2 025	91 125	6.708	3.557	.0222	95	9 025	857 375	9.747	4.563	.0105
46	2 116	97 336	6.782	3.583	.0217	96	9 216	884 736	9.798	4.579	.0104
47	2 209	103 823	6.856	3.609	.0213	97	9 409	912 673	9.849	4.595	.0103
48	2 304	110 592	6.928	3.634	.0208	98	9 604	941 192	9.899	4.610	.0102
49	2 401	117 649	7.000	3.659	.0204	99	9 801	970 299	9.950	4.626	.0101
						100	10 000	1 000 000	10.000	4.642	.0100

أجوبة المسائل الفردية الترقيم

الفصل الأول

بند ١ ـ ١

١ - $\{1,2,3,4,5,6\}$.
٣ - $\{3,-3\}$
٥ ـ $\emptyset$.

١٥ ـ $\{x \mid x > \frac{5}{2},\ x \text{ in } Z\}$.
١٧ ـ $\{x \mid x = 3n,\ n \text{ in } Z\}$.

١٩ ـ $\{x \mid x = 6n,\ n \text{ in } Z,\ 1 \leqslant n \leqslant 16\}$.
٢٣ ـ الفئة المتكونة من فريقين يلعبان الكرة

٢٧ - $\{-1,0,1,2,3,4\}, \emptyset$.
٢٩ - $\{a,b,c,d,x,z\},\ \{b\},\ \{a,b,c,d,x,y,z\},\ \emptyset$.

٣٣ ـ لا
٣٥ ـ 3

بند ١ ـ ٢

١ ـ مقفلة تحت كلتا العمليتين . ٣ ـ مقفلة تحت الضرب .

٥ ـ مقفلة تحت كلتا العمليتين . ٧ ـ مقفلة تحت كلتا العمليتين .

١٣ ـ $\{1.8,1.74,1.733,1.7321,1.73206,1.732052\}$, $\{1.7,1.73,1.732,1.7320,1.73205,1.732051\}$.

١٥ ـ $\frac{3}{7}$.
١٧ ـ -4 .
١٩ ـ -5 .
٢١ ـ لايوجد حل .

٢٣ - $-5, 1$.
٢٥ ـ $-\frac{7}{2}$.

بند ١ ـ ٣

٢١ ـ $(-3,-2)$. ٢٣ ـ (a,b) . ٢٥ ـ $(0,2], \emptyset$. ٢٧ ـ $[-4,4], (-4,2)$.

٢٩ - $(-5,-1) \cup (-2,5),\ (0,5),\ \emptyset$.

بند ١ ـ ٤

١ ـ متكافئة .
٣ ـ متكافئة .
٥ ـ متكافئة .

٧ ـ لايوجد حل .
٩ ـ 2 .
١١ ـ $(-1/a,\infty)$.

١٣ ـ $(-\infty,\frac{30}{7})$.
١٥ ـ $(-6,4]$
١٧ ـ $(d-\epsilon/3,\ d+\epsilon/3)$

١٩ ـ $(\frac{3}{2},\infty)$
٢١ ـ $(-\infty, 2-\sqrt{7}] \cup [2+\sqrt{7}, \infty)$
٢٣ ـ $(-\infty,-3) \cup (4,\infty)$

٢٥ ـ جميع الاعداد الحقيقية .
٢٧ ـ $[-2,2]$
٢٩ ـ $[1,\infty)$

٣١ - $[\frac{3}{2},\frac{7}{2})$
٣٣ - $[8,\frac{43}{4})$
٣٥ ـ لايوجد حل .

٣٧ ـ جميع الاعداد الحقيقية .
٣٩ ـ $(-\infty,-1] \cup [2,\infty)$

٤١ ـ $(-\infty,-2\sqrt{6}] \cup [2\sqrt{6},\infty)$

بند ١ - ٥

١ - 17 . ٣ - $-\frac{3}{2}$. ٥ - 14 . ٧ - $\frac{99}{70}-\sqrt{2}$.

٩ - $6-2\sqrt{6}$. ١١ - $1, \frac{5}{3}$. ١٣ - $\pm 5, \pm\sqrt{15}$. ١٧ - $(-3,5)$.

١٩ - $[1,3]$. ٢١ - $[-31,33]$. ٢٣ - $(-\infty,-\frac{5}{7}] \cup [1,\infty)$. ٢٥ - $(\frac{1}{9},\frac{1}{5})$.

٢٧ - $(-2,3)$. ٢٩ - $[0,2] \cup \{6\}$. ٣١ - $c=\pm d$.

بند ١ - ٦

١ - 1 . ٣ - لايوجد ٥ - $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

٧ - $-5, \frac{1}{2}$. ٩ - $-2, 1, 7$. ١١ - $\frac{1}{2}, \pm i$.

١٣ - $-\frac{1}{2}, 3$. ١٥ - $(x+5)(x-1)$. ١٧ - $(2y+1)(y-1)^2$.

١٩ - $t(t-4)(t+2)(t+4)$. ٢١ - $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)(x+1)(x-2)$.

٢٣ - $(x-1)[x+(1+\sqrt{2})][x+(1-\sqrt{2})]$. ٢٥ - $(u-1)\left(u+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(u+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

٢٧ - لايوجد حل ٢٩ - $(-\infty,-4]$. ٣١ - $(-\infty,-1) \cup (-1,3)$. ٣٧ - $x^2-16x+52$.

٣٩ - الاعداد الصحيحة الموجبة الفردية.

٤١ - $2(x-1)^2+8(x-1)+7, 2(x+2)^2-4(x+2)+1$

الفصل الثانى

بند ٢ - ١

١ - (أ) $\frac{49}{25}$ (ب) $\pm\frac{4}{3}$ (ج) $2.999824; \sqrt{3}$. (د) لا يوجد .

٣ - $\{x|x \leq 5\}, \{x|x \geq 0\}$ لا $\frac{9}{2}, 5, 5+a/2$.

٥ - $\{2\}$ وجميع الاعداد الحقيقية , 2 , 2 , 2 , 2 , 2

٧ - $\{t|t$ وحقيقية $t \neq \pm 1\}$ لا $1, -3, \frac{1}{8}, 3/(y^2+2y+3)$

٩ - (أ) $-11, 1, 7, 2$ (ب) جميع الاعداد الحقيقية ، جميع الاعداد الحقيقية ،

(ج) $F(x)=2x+1$

١١ - (أ) غير معرفة وغير معرفة و 4 و $\frac{1}{5}$ و $\frac{3}{2}$ و 1 ،

(ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ و 2 — ولاحل و $\sqrt{2}$ (ج) $\{-2\} \cup (0,\infty)$ $(0,\infty)$

١٣ - $\{ x \mid x$ وكسرية $-2 \leqslant x < 2 \}$ غير معرفة وغير معرفة 4 و 1 وغير معرفة $\frac{1}{4}$

١٥ - (أ) $2, -1, 44, 2a^2 - 5a + 2, 43, 65, -14, 54, (2 - 5x + 2x^2)/x^2$ ،

(ج) لا ، (د) لا ، (ه) 2 و $\frac{1}{2}$ ، (و) $\frac{5}{4}$ و 0.

١٧ - لا

١٩ - (أ) $2, 8 - \sqrt{2}, 3r^2 - r + 2, (3m^2 - nm + 2n^2)/n^2, 3x^2 - x - 3a^2 + a, 3x^2 - (6a + 1)x + (3a^2 + a + 2)$

(ب) $3h^2 + 11h + 12, 3h^2 - 19h + 32, 3h^2 - h + 2, 3h^2 - (1 - 6a)h + (3a^2 - a + 2)$

(ج) $3h + 11$ ، (د) $6x + 3h - 1$ ، (هـ) $3x + 11$

٢١ - $y = -x + 2$. ٢٣ - $y = (-6 - h)x + 16 + 4h$. ٢٥ - $y = (2 - a_1 - a_2)x + a_1 a_2$.

٢٧ - $(-\infty, -4] \cup [4, \infty] \cup \{0\}$ ٢٩ - جميع الاعداد الحقيقية . ٣١ - (أ) $6a^2$ (ب) $6V^{2/3}$.

٣٣ - $d(x) = (\frac{1}{16}x^4 - 2x + 5)^{1/2}$.

٣٥ - $4x\sqrt{r^2 - x^2}$ ، حيث r نصف قطر الدائرة ، x طول نصف القاعدة .

٣٧ - لا . ٣٩ - نعم . ٤١ - نعم .

بند ٢ - ٢

١٩ - $[-3,3]$. ٢١ - $300x - x^2$.

٢٣ - النطاق هو جميع الاعداد الحقيقية الموجبة ، المدى هو $\{6, 12, 18, 24, \ldots\}$

٢٥ - ساكن ، متحرك الى الخلف ، بين $2 . 5, 3$ hr ، 50 mph .

بند ٢ - ٣

١٧ - جميع x حيث $\leqslant x < 7$ ٢٥ - $6 [x + 1]$.

٢٧ - جميع الاعداد الصحيحة الموجبة .

بند ٢ - ٤

١ - $2, -7, -\frac{1}{5}, -5, -6, 4$.

٣ - (أ) $x^2 + \sqrt{x} - 2$ (ب) $-x^2 + \sqrt{x} + 2$ (ج) $\sqrt{x}(x^2 - 2)$ (د) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 - 2}$ (هـ) $\sqrt{x^2 - 2}$ (و) $x - 2$

٥ - (أ) $\frac{x^4 + 3x + 2}{x^2(3x + 2)}$ (ب) $\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2(3x + 2)}$ (ج) $\frac{1}{x(3x + 2)}$ (د) $\frac{x^3}{3x + 2}$ (هـ) $\frac{1}{3 + 2x^2}$ (و) $\frac{9x^2 + 12x + 4}{x^2}$

٧ - لا ٩ - $\frac{3z + 1}{z - 1}$ ، الواحد الصحيح يجب استبعاده ١١ - $f(x) = x^4 + 1/x - 3x^2, g(x) = 5$.

١٣ - $f(x) = x - x^2, g(x) = x^2$. ١٥ - $f(t) = t - 1, g(t) = t$.

١٧ - $f(x) = x, g(x) = x^2 + 5x$. ١٩ - $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x$.

٢١ - $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x + 8$. ٢٣ - $f(x) = 2x^2 - 3x + 5, g(x) = x + 1$.

بند ٢ - ٥

٣ - 8 .   ٥ - $-\frac{7}{2}$.   ٧ - $\sqrt{6}$.   ٩ - -5 .

١١ - -20 .   ١٣ - $3c+1$.   ١٥ - 0 .   ١٧ - $-\frac{2}{5}$.

١٩ - $\frac{b^2-3b}{b-4},\ b\neq 4$ ،   ٢١ - $\sqrt{x^2+4x}$.   ٢٣ - -7 .   ٢٥ - $\frac{157}{8}$.

٢٧ - $\lim_{x\to 1} f(x)=5$, yes. $\lim_{x\to 3} f(x)=3$, yes .

٢٩ - نعم $\lim_{t\to 0} g(t)=0$. $\lim_{t\to 1^-} g(t)=1,\ \lim_{t\to 1^+} g(t)=-2$.

٣١ - $\lim_{x\to 2^-} F(x)=8,\ \lim_{x\to 2^+} F(x)=0$.   ٣٣ - $\lim_{x\to 0^-} u(x)=0,\ \lim_{x\to 0^+} u(x)=\infty$.

٣٥ - $\lim_{t\to 0^-} \frac{x}{|x|}=-1,\ \lim_{t\to 0^+} \frac{x}{|x|}=1$.   ٣٧ - $\lim_{x\to 2^-} (x-[x])=1,\ \lim_{x\to 2^+} (x-[x])=0$.

٣٩ - -5 .   ٤١ - $-\frac{1}{6}$.   ٤٣ - $\frac{5}{81}$.   ٤٥ - لاتوجد نهاية   ٤٧ - $1/2\sqrt{c}$.

٤٩ - $-\infty$.   ٥١ - -1 .   ٥٣ - لاتوجد نهاية .

٥٥ - ∞ إذا كانت $a \geqslant 0$ ، $-\infty$ اذا كانت $a < 0$.   ٥٧ - $\frac{1}{2}$.

٥٩ - (أ) 1 (ب) 1 (ج) $2x-3$ ،   (د) $2x-3$ ،

٦١ - (أ) $1/2\sqrt{6}$ (ب) $1/2\sqrt{6}$ (ج) $1/2\sqrt{a}$ (د) $1/2\sqrt{a}$

٦٣ - (أ) $(\sqrt{\frac{49}{2}}, \sqrt{\frac{51}{2}})$ ، (ب) $(\sqrt{24.9}, \sqrt{25.1})$ ، (ج) $(\sqrt{25-\epsilon}, \sqrt{25+\epsilon})$

٦٥ - (أ) $(2.8, 3.2)$ ، (ب) $(2.98, 3.02)$ ، (ج) $(3-2/\sqrt{N}, 3+2/\sqrt{N})$

٦٩ - $\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$. $0, -0.1, -0.02, -0.003, -0.0004, -10^{-9}$.

بند ٢ - ٦

١ - متصلة .   ٣ - متصلة .   ٥ - متصلة من جهة اليسار .

٧ - متصلة .   ٩ - متصلة .   ١١ - متصلة .

١٣ - متصلة فى كل مكان .

١٥ - متصلة من جهة اليسار ولكن ليس من جهة اليمين عند 1 .

١٧ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 5 .

١٩ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند $\pm a$.

٢١ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 5 .

٢٣ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند a .

٢٥ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 0 .
٢٧ - متصلة من جهة اليمين وليس من جهة اليسار .
٢٩ - غير متصلة من جهة اليمين أو اليسار عند 0 عند كل عدد صحيح .
٣١ - -4 ‏ ٣٣ - 0 .
٣٥ - f غير متصلة عند أي عدد
٣٧ - π متصلة إلا عند كل عدد أولي

بند ٢ - ٧

١ - (أ) $(-5, -3)$ مع حذف -4 ، (ب) $(-\frac{9}{2}, -\frac{7}{2})$ مع حذف -4 ،
(ج) $(-4-2\epsilon, -4+2\epsilon)$ مع حذف -4 .
٣ - $(4.4, 5.6)$ مع حذف 5 ، $(4.8, 5.1)$ مع حذف 5 ، الأول هو أكبر جوار منقوص .
١٧ - $1, 0$.

بند ٢ - ٨

١ - 100 . ‏ ٣ - -7 . ‏ ٥ - $2\pi/3$. ‏ ٧ - $-\frac{3}{2}$. ‏ $6\sqrt{7}$.
١١ - 1 . ‏ ١٣ - 29^{17} . ‏ ١٥ - $-\frac{1}{2}$. ‏ ١٧ - 4 . ‏ ١٩ - $\frac{3}{2}\sqrt[5]{5}$.
٢١ - $\frac{(c^3+1)c}{c-1}$ if $c \neq 1$. ‏ ٢٣ - $\frac{2}{7}$. ‏ ٢٥ - -2 . ‏ ٢٧ - -1 .

٢٩ - متصلة . ‏ ٣١ - متصلة . ‏ ٣٣ - غير متصلة من جهة اليمين أو جهة اليسار .
٣٥ - متصلة . ‏ ٣٧ - متصلة اذا كانت $c \neq 2$
٣٩ - متصلة من جهة اليمين ولكن ليس من جهة اليسار .

بند ٢ - ٩

١ - جميع z ‏ ٣ - $-2 < x < 2$ ‏ ٥ - جميع $y \neq m$
٧ - جميع $\pm\sqrt{8}$ و $x \neq 0$ ‏ ٩ - جميع $x \neq 1$

الفصل الثالث

بند ٣ - ١

١ - (أ) $\frac{17}{2}$ (ب) $\frac{11}{2}, 3, g'(x) = 3$ ‏ ٣ - $0, -4a$. ‏ ٥ - $-\frac{2}{9}, -2/(c+1)^2$. ‏ ٧ - $\frac{3}{2}$.

٩ - -10 . ١١ - $-4, -4x-4$. ١٣ - $-\frac{1}{6}$. ١٥ - $2u$.

١٧ - $-1/(x-4)^2$. ١٩ - $-10/x^3$. ٢١ - $3t^2+2t$. ٢٣ - $\frac{1}{3}x^{-2/3}$.

٢٥ - $6x+1$. ٢٧ - $2x, (0,-4), (\frac{3}{2},-\frac{7}{4}), (-1,-3)$.

٢٩ - الأجزاء المقطوعة : $(0,0), (1,0), (-1,0)$ الميل هو $3x^2-1$.
الميل يكون صفرا عند $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

٣١ - $3x+y-5=0, x-3y-5=0$.

٣٣ - لا ، نعم ، لا . المحور y ، الخط المستقيم $y=2$.

٣٥ - $f'_+(0)=1, f'_-(0)=-1$.

بند ٣ - ٢

١ - 5 ٣ - $6z^5$. ٥ - $4\sqrt{3}x^3+10x-2$.

٧ - $3(42z^6+20z^4)$. ٩ - $\frac{a}{2}(8x^7-1)$. ١١ - $t-t^5+t^2-1$.

١٣ - $m(2y+b)$. ١٥ - $-17t^{16}+16t^7$. ١٧ - $4x^3+4x-1$.

١٩ - $24t+60t^4+24t^7$. ٢١ - $6bz(z^2-1)^2$ .. ٢٣ - $nax^{n-1}+mbx^{m-1}$.

٢٧ - $6, 4, 2t+4, 6-2t^2, -1$. ٢٩ - -3024 .

٣١ - $4x-2y+7=0, 2x+4y+6=0$. ٣٣ - $x+4y+1=0$.

٣٥ - $2x+y+7=0$ ، مماس أفقي عند $(-1, -4)$ ، الأجزاء المقطوعة ؟ ؟
$(-3,0), (1,0), (0,-3)$

٣٧ - $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

٣٩ - $dy/dx > 0$ لـ $x > 1$, $dy/dx > 0$ لـ $x < 1$.

٤١ - $f'(x)-m$. ٤٣ - $2x^3$. ٤٥ - $\frac{3}{2}t^2+4t$.

٤٧ - $\frac{1}{4}z^4-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2-z$. ٤٩ - $y+y^2+\frac{1}{3}y^3$.

٥١ - $f'(x)=2x-2$ إذا كانت $x < 3$, $f'(x)=3$ إذا كانت $x > 3$, $f'(3)$ لاتوجد

٥٣ - -7 ٥٥ - عند كل عدد صحيح ، 0

بند ٣ - ٣

١ - $6x-6$. ٣ - $18s^2+6s-2$. ٥ - $18y^2-12y^3-10y^4$. ٧ - $8t^3(t^4-1)$.

٩ - $5\sqrt{2}\pi t^4+6\sqrt{2}t^2-4\pi t$. ١١ - $\frac{\pi br}{a}(2a-3r)$. ١٣ - $2(20y^4-8y^3+6y^2-3)$

١٥ - $25x^4+28x^3-15x^2-14x-10$. ١٧ - $-\frac{1}{x^2}$. ١٩ - $\frac{20}{(2z+5)^2}$.

٢١ - $15\left(t^2-\frac{1}{t^4}\right)$. ٢٣ - $\frac{6bu^2-2u^3}{(2b-u)^2}$. ٢٥ - $-\frac{2x-3}{(x^2-3x-4)^2}$.

٢٧ - $3x^2+6-\frac{9}{x^2}$. ٢٩ - $-2-\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2}$. ٣١ - $\frac{2(u^4-1)}{u^3}$.

٣٣ - $-\frac{10(x+2)}{(x-3)^3}$. ٣٥ - $\frac{-9x^4+4x^3+15x^2+4x-4}{(3x+2)^2}$. ٣٧ - $\frac{-8z^5+12z^3+12z^2+36}{(z^2-3)^2(z^3-6)^2}$.

٣٩ - $\frac{6v^2}{(v^3+1)^2}$. ٤١ - $\frac{2}{3}, 2$. ٤٣ - ± 1 . ٤٥ - 0 .

٤٧ - $\pm a$. ٤٩ - $\sqrt[3]{\frac{k}{2\pi}}$. ٥١ - $\frac{dy}{dx}=1+\frac{3}{x^2}$. ٥٣ - $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+4x^2-1}{(1+x^2)^2}$.

٥٥ - $x-ay-a=0$ ، مماس أفقى عند $(0\,,\,-1)$

٥٧ - قابلة للتفاضل عند أى عدد المقام عنده لايساوى صفرا .

بند ٣ - ٤

١ - $10x(x^2+3)^4$. ٣ - $102x(3x^2+5)^{16}-\frac{4}{3}x$. ٥ - $-\frac{2x-3}{(x^2-3x-4)^2}$.

٧ - $3\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)$. ٩ - $-(40x^3+148x^2-11x+24)(2+x+4x^2)(3-5x+x^2)^2$.

١١ - $\frac{6x}{(x^2-3)^4}$. ١٣ - 0 . ١٥ - $-2u(u-1)^{-3}(u+1)$.

١٧ - $(2x-1)^7(20x^2+88x-5)+17$. ١٩ - $\frac{3(2x-1)(1-x)^2}{(2-3x)^2}$. ٢١ - $\frac{-8(v+2)}{(v-2)^3}$

٢٣ - $\frac{-3(a^2-z^2)^2(a^2+z^2)}{z^4}$. ٢٥ - $(x-2)^2(x+5)^3(x+1)(9x^2+20x-13)$.

٢٧ - $\pm 1, \frac{1}{5}$. ٢٩ - $-\frac{5b}{9a}, -\frac{b}{a}, 0$. ٣١ - $\frac{1}{8}$. ٣٣ - $\frac{H}{3}$ ،

٣٥ - $10\left(5x+\frac{1}{25x^2}\right)$. ٣٧ - 1 . ٣٩ - $(6x-2)\cos(3x^2-2x-2)$.

بند ٣ - ٥

١ - $-2x^{-3/2}$. ٣ - $1.33x^{0.33}$. ٥ - $2\pi r+\sqrt{r}$.

٧ - $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$. ٩ - $\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. ١١ - $\frac{1+0.4x^{0.6}}{(1+x^{0.6})^2}$.

١٣ - $\frac{1}{3}(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{-2/3}$. ١٥ - $\frac{80}{3\pi}\left(\frac{80}{\pi}t\right)^{-2/3}$.

۱۷- $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$. ۱۹- $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$. ۲۱- $\frac{4x+7x^4}{2\sqrt{1+x^3}}$.

۲۳- $\frac{(3x+2)(3x^2+4x)^{1/2}}{2}$. ۲۵- $(80x+38)(4x+1)^{1/2}$. ۲۷- $\frac{7x-1}{2\sqrt{7}x^{3/2}}$.

۲۹- $-\frac{2a+bz}{2z^2\sqrt{a+bz}}$. ۳۱- $\frac{1}{(t+1)^{3/2}(t-1)^{1/2}}$. ۳۳- $\frac{2}{(1-2x)^{3/2}(1+2x)^{1/2}}$.

۳۵- $\frac{2x+3}{3(x+1)^{4/3}}$. ۳۷- $1+\frac{3(x+2)}{2(x+1)^{3/2}}$. ۳۹- $\frac{5x^{3/2}(a^2-x^2)}{2(x^2+a^2)^{7/2}}$.

۴۱- $\frac{16x-5}{(x+2)^2\sqrt{8x^2+5}}$. ۴۳- $\frac{7x^2-3c^2}{6\sqrt{x}(x^2-c^2)^{2/3}}$.

۴۵- $\frac{(x^3+2)(-7x^4+18x^2-2x)}{(4+\sqrt{x})^{3/2}\sqrt{3-x^2}}-\frac{\sqrt{3-x^2}(x^3+2)^2}{2\sqrt{x}(4+\sqrt{x})^2}$. ۴۷- $0, t\neq 0$.

۴۹- $\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ۵۱- $x-12y-16=0$. ۵۳- $z=x$.

۵۵- $5x-16y+9=0$. ۵۷- $\pm b$; none. ۵۹- $2; 1$.

۶۱- $0, \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}; \pm a$. ۶۳- $-3, \frac{1}{3}; -2$. ۶۵- $0, -\frac{15}{7}; -\frac{5}{2}$.

بند ۳ - ۶

۱- $12t^2-6t$. ۳- $\frac{15}{4}\sqrt{x}$. ۵- $6t-\frac{1}{4}(1-t)^{-3/2}$ ۷- $-\frac{36}{25}(3u+2)^{-9/5}$.

۹- $15(4x^3-\frac{3}{4}x^{-3/2})$. ۱۱- $\frac{6(2+x^2)}{(4-x^2)^{5/2}}$. ۱۳- $\frac{2x^3+6a^2x}{(x^2-a^2)^3}$ ۱۵- $\frac{36(8-u^2)}{u^3(12-u^2)^{3/2}}$.

۱۷- $\frac{4(x+4)}{9x^{5/3}}$. ۱۹- $7, -1; 3$. ۲۱- لایوجد ، 1. ۲۳- 0 ؛ لایوجد

۲۵- $\frac{72}{x^5}$. ۲۷- $\frac{-112}{27(x-1)^{10/3}}$. ۳۱- $f^{(5)}(x)=0$.

۳۳- $n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$. ۳۵- $(-1)^n\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdots n(n+1)}{(t+1)^{n-2}}$.

۳۷- $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n}x^{-(2n-1)/2}, n\geq 2$. ۳۹- $xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)$.

بند ۳ - ۷

۱- $\frac{x^2}{2}+5x+C$. ۳- $t+C$. ۵- $\frac{bx^2}{2}-bax+C$. ۷- $\frac{\pi r^3}{3}+C$.

۹- $a^2x-\frac{1}{3}x^3+C$. ۱۱- $\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+C$. ۱۳- $x^4+\frac{4}{3}x^3+C$. ۱۵- $z^4-\frac{2}{5}z^5+6z+C$.

۱۷- $\frac{a^2c}{2}r^2+\frac{2ac}{3}r^3+\frac{c}{4}r^4+C$. ۱۹- $\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3x^3}+C$. ۲۱- $-\frac{3}{x}-\frac{11}{12x^4}+C$.

٢٣ - $\frac{2}{3}w^{3/2}-2w^{1/2}+C$. ٢٥ - $-\frac{5}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{10}{3z^3}+C$. ٢٧ - $\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$.

٢٩ - $\frac{x^6}{2}-10x^3+C$. ٣١ - $-\frac{1}{72}(3-4x)^{18}+C$.

٣٣ - $\frac{1}{7}x^7+\frac{18}{5}x^5+36x^3+216x+C$. ٣٥ - $\frac{-1}{t-1}+C$. ٣٧ - $\frac{1}{5}(2z^3+5z-1)^5+C$

٣٩ - $\sqrt{2x+3}+C$. ٤١ - $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}+C$. ٤٣ - $\frac{3}{32}(4x^2-6)^{4/3}+C$

٤٥ - $\frac{-1}{12b(by^4-c)^3}+C$. ٤٧ - $\frac{1}{5}(x^3+8)^{5/3}+C$. ٤٩ - $\frac{1}{3}(x^3+5)$

بند ٣ - ٨

١٥ - $f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3+10x+C$. ١٧ - $s=\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2t}+C$.

١٩ - $u=2x^{1/2}-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C$. ٢١ - $g(t)=\frac{7}{3(1+t^3)}+C$.

٢٣ - $y=c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n$, $c_1, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية .

٢٥ - $F(t)=\frac{t^3}{3}-3t^2+t+\frac{25}{3}$. ٢٧ - $y=\frac{a}{3}(x^3+2)$.

٢٩ - $y=\frac{1}{96}(48t^4+32t^3+48t^2+461)$. ٣١ - $y=\sqrt{10-x^2}+3-\sqrt{6}$.

٣٣ - $f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x+7)$. ٣٥ - $y=\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{1}{2}x^2-6x+\frac{25}{6}$.

٣٧ - $y=-\frac{1}{3}x^3+6$. ٣٩ - $y=-1/x-\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

٤١ - $y=\frac{1}{3}(2x^3-21x-26)$. ٤٣ - C أي ثابت, $y=1/2x+Cx+\frac{11}{2}-C$.

بند ٣ - ٩

١ - لجميع الأعداد الحقيقية , $f(x)=\frac{1}{2}x+2$. ٣ - $f(x)=\sqrt{-x/3},\ x\leqslant 0$.

٥ - $f_1(x)=\frac{1}{2}(-5+\sqrt{25-4x}),\ x\leqslant\frac{25}{4};\ f_2(x)=\frac{1}{2}(-5-\sqrt{25-4x}),\ x\leqslant\frac{25}{4}$.

٧ - $f_1(x)=x^{3/2},\ x\geqslant 0;\ f_2(x)=-x^{3/2},\ x\geqslant 0$. ٩ - $f(x)=0,\ x=0$.

١١ - $\frac{3x^2+y}{x(1+4x)}, \frac{6x(1+2x)}{(1+4x)^2}$. ١٣ - $\frac{1}{3y^2}, \frac{1}{3}x^{-2/3}$. ١٥ - $\frac{29x-2}{y}, \pm\frac{29x-2}{\sqrt{29x^2-4x+1}}$.

١٧ - $\frac{1}{7}$. ١٩ - $-\frac{2x}{y}$. ٢١ - $\frac{3x^2}{2y}$. ٢٣ - $\frac{6x-y}{x}$.

٢٥ - $\frac{(x-3)(3x-4)}{y}$. ٢٧ - $-\frac{2x+y}{x+2y}$. ٢٩ - $\frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)}$. ٣١ - $-\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}$.

۳۳ - $\frac{4x-y^2-3}{y(2x-3y)}$ ۳۵ - $-\sqrt{\frac{y}{x}}$ ۳۷ - $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ ۳۹ - $-\frac{y^2}{x^2}$

٤١ - $\frac{2x-y-1}{1+x}$ ٤٣ - $\frac{3(xy)^{2/3}-y}{x+6y(xy)^{2/3}}$ ٤٥ - $\frac{1}{2}\sqrt{y}(2-\sqrt{y})^2$

٤٧ - $2x+y-4=0, 2x-4y+1=0$ ٤٩ - $15x-y-4=0, x+15y+60=0$

٥١ - $5x+11y+17=0, 11x-5y-21=0$ ٥٣ - $5x+3y+3=0, 3x-5y-5=0$

٥٥ - $x-4y=0, 4x+y-34=0.$

٥٧ - $\frac{x}{y}, -\frac{a^2}{y^3}$ ٥٩ - $-\frac{y}{x+2y}, \frac{4}{(x+2y)^3}$ ٦١ - $\frac{x^2-ay}{ax-y^2}, \frac{2a^3xy}{(ax-y^2)^3}$

٦٣ - $\frac{5}{6}, -\frac{13}{72}$ ٦٥ - $\frac{-6}{13}, \frac{396}{13^3}$ ٧٧ - $\frac{1}{3x^2}$

٧٩ - $\frac{1}{6x^2-2x+6}$ ٨١ - $g_3(x)=\begin{cases}\sqrt{25-x^2}, & -5 \leq x \leq 0,\\ -\sqrt{25-x^2}, & 0 < x \leq 5.\end{cases}$

الفصل الرابع

بند ٤ - ١

١ - (أ) نهاية عظمى عند 3 — ، نهاية صغرى عند 2 ، (ب) نهاية عظمى عند 3 — ، نهاية صغرى عند 1 .

٣ - (أ) عظمى عند 5 ، صغرى عند 0 ، (ب) لاعظمى عند π/2 — ، لاتوجد نهاية

١ - (أ) نهاية عظمى عند 3 — ، نهاية صغرى عند 2 ، (ب) نهاية عظمى عند 3 — ، نهاية صغرى عند 1 .

٣ - (أ) عظمى عند 5 ، صغرى عند 0 ، (ب) لاعظمى ولاصغرى ، (ج) لاعظمى ولاصغرى .

٥ - عظمى وصغرى عند أى عدد فى [0 , 3].

٧ - عظمى عند 1 — , 5 — وصغرى عند 3 —.

٩ - (أ) عظمى عند $-\frac{3}{2}$ ، صغرى عند 5 — , 2 ، (ب) عظمى عند $-\frac{3}{2}$ لاتوجد نهاية صغرى ، (ج) عظمى عند $-\frac{3}{2}$ ، صغرى عند 5 — .

١١ - (أ) عظمى عند 2 ، صغرى عند 0 ، (ب) عظمى عند 2 , 4 — وصغرى عند 8 — .

١٣ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 2 .

١٥ - عظمى عند 2 — ، صغرى عند 2 .

١٧ - عظمى عند 3 , 3 — ، صغرى عند 0 .

١٩ - عظمى عند a / 6 ، صغرى عند a / 2 , 0 .

٢١ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 2 —

٢٣ - عظمى عند 2 ، صغرى عند 0 .
٢٥ - عظمى عند 3 , 3 — وصغرى عند 0 .
٢٧ - عظمى عند 4 ، صغرى عند 0 .
٢٩ - عظمى عند 0 ، صغرى عند 3 —.
٣١ - عظمى عند 1 صغرى عند 4 و 0 .
٣٣ - أكبر ميل عند 3 ، أصغر ميل عند 5.
٣٥ - $2x(25-x^2), [0,5], 500/3\sqrt{3}$

بند ٤ - ٢

١ - $\frac{3}{2}$ ٣ - $-2, \frac{1}{2}, 3$ ٥ - $-\frac{3}{2}$ ٧ - $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ١٧ - تتحقق .
١٩ - لاتتحقق ، النتيجة صحيحة . ٢١ - لاتتحقق ، النتيجة غير صحيحة .
٢٣ - لاتتحقق ، النتيجة صحيحة . ٣١ - $-\frac{1}{3}$

بند ٤ - ٣

١ - تتناقص فى [1 , 2] .
٣ - تتزايد فى [1 , 1 —] ، غير مطردة الزيادة وغير مطردة النقصان فى [6 , 0] .
٥ - تتزايد فى (4 , 1) وفى [4 , 0] .
٧ - تتناقص فى [4 , 0] ، وتتزايد فى (∞ , 6).
٩ - تتزايد فى (∞ , ∞ —) .
١١ - لاتتزايد باطراد ولاتتناقص باطراد فى (∞ , ∞ —) .
١٣ - لاتتزايد باطراد ولاتتناقص باطراد فى [3 , 3 —] .
١٥ - تتناقص فى (∞ , ∞).
١٧ - تتزايد فى (∞ , ∞ —).
١٩ - تتزايد فى (∞ , 2) و [3 — , ∞ —) وتتناقص فى [2 , 3 —] .
٢١ - تتناقص فى (∞ , ∞ —).
٢٣ - تتناقص فى [0 , ∞—) ، تتزايد فى (∞ , 0] .
٢٥ - تتناقص عند [4 , 0] و [4 — , ∞ —) ، وتتزايد فى (∞ , 4] و [0 , 4 —] .
٢٧ - تتناقص فى (∞ , 0) و (0 , ∞ —) .
٣١ - تتزايد فى كل فترة .
٣٣ - لا . ٤١ - نعم . ٤٣ - لا .

بند ٤ - ٤

٤٣ - أكبر ميل 28 ، أصغر ميل -8.

٤٥ - أكبر ميل 75 ، أصغر ميل -5.

٥٣ - بين -3 و -4 ، بين 4 و 3.

٥٥ - $b > 3$.

٥٧ - بالضبط جذر واحد حقيقى إذا كانت $a < -27$ أو $a > 5$ ، بالضبط جذران حقيقيان مختلفان إذا كانت $a = -27$ أو $a = 5$ ، ثلاثة جذور حقيقية مختلفة اذا كانت $-27 < a < 5$.

بند ٤ - ٥

١ - (هـ) نهاية صغرى محلية ، ونهاية عظمى محلية .

٣ - عظمى محلية عند $\frac{5}{2}$.

٥ - لاتوجد نهاية قصوى محلية .

٧ - عظمى محلية عند 2 ، صغرى محلية عند 6 .

٩ - صغرى محلية عند 3.

١١ - عظمى محلية عند -4.

١٣ - صغرى محلية عند 0 إذا كانت n زوجية ، لاتوجد نهاية قصوى محلية اذا كانت n فردية .

١٥ - صغرى محلية عند 1 ، عظمى محلية عند -1.

١٧ - صغرى محلية عند $\pm\sqrt{2}$.

١٩ - عظمى محلية عند -2 ، صغرى محلية عند 0 .

٢١ - صغرى محلية عند 2.

٢٣ - لا .

بند ٤ - ٦

٥ - مقعر لأعلى فى $(-\infty , \infty)$.

٧ - مقعر لاسفل فى $(-\infty,-\frac{1}{2}]$ مقعر لأعلى فى $[-\frac{1}{2},\infty)$ نقطة انقلاب عند $(-\frac{1}{2},-\frac{13}{2})$.

٩ - مقعر لأسفل فى $(-\infty,\frac{3}{2}]$ مقعر لأعلى فى $[\frac{3}{2},\infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(\frac{3}{2},-\frac{9}{2})$.

١١ - مقعر لأعلى فى $(-\infty , \infty)$.

١٣ - مقعر لأعلى فى $(-\infty , 0] , [\frac{2}{3},\infty)$ ، مقعر لأسفل فى $[0,\frac{2}{3}]$ ، نقطتا انقلاب عند $(\frac{2}{3},\frac{25}{9})$ و $(0,1)$.

١٥ ـ مقعر لأعلى فى $[\sqrt{15}/3, \infty)$ و $(-\infty, -\sqrt{15}/3]$ ، مقعر لاسفل فى $[-\sqrt{15}/3, \sqrt{15}/3]$ ، نقطتا انقلاب عند $(\pm\sqrt{15}/3, \frac{190}{9})$

١٧ ـ مقعر لأسفل فى $(-\infty, \infty)$.

١٩ ـ مقعر لأسفل فى $(-\infty, 0]$ ، مقعر لأعلى فى $[0, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(0, -1)$

٢١ ـ مقعر لأعلى فى $(-\infty, 3]$ ، مقعر لأسفل فى $[3, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(3, \frac{162}{5})$.

٢٣ ـ مقعر لأعلى فى $[a/\sqrt{3}, \infty)$ $(-\infty, -a/\sqrt{3}]$ ، مقعر لأسفل فى $[-a/\sqrt{3}, a/\sqrt{3}]$ نقطتا انقلاب عند $(\pm a/\sqrt{3}, 3/4a^2)$.

٢٥ ـ مقعر لأعلى فى $(-\infty, 2)$ ، مقعر لأسفل فى $(2, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(2, 0)$.

٢٧ ـ مقعر لأسفل فى $(-\infty, 0]$ ، مقعر لأعلى فى $[0, \infty)$ ، نقطة انقلاب عند $(0, 0)$.

٢٩ ـ مقعر لأعلى فى $[1/6^{3/5}, \infty)$ و $(-\infty, 0)$ ، مقعر لأسفل فى $(0, 1/6^{3/5}]$ ، نقطتا انقلاب عند $(1/6^{3/5}, 10/3\sqrt[5]{6})$ و $(0, 0)$.

٣١ ـ $3x - y + 4 = 0$ ٣٣ ـ $\pm 8x - 3y - 6 = 0$ ، $(\pm 1, [illegible])$ ٣٥ ـ $\pm 3\sqrt{30}/200$

٣٧ ـ (أ) $f(x) = x^3 + x$ (ب) $f(x) = x^4 + 10x + 2$ (ج) $f(x) = x$

بند ٤ ـ ٧

١ ـ صغرى محلية عند a . ٣ ـ عظمى محلية عند -1 ، صغرى محلية عند 3 .

٥ ـ صغرى محلية عند $\frac{3}{4}$ ٧ ـ عظمى محلية عند -1 ، صغرى محلية عند $\frac{1}{5}$

٩ ـ صغرى محلية عند A .

١١ ـ عظمى محلية عند 0 ، صغرى محلية عند 4 .

١٣ ـ عظمى محلية عند $\sqrt[3]{2}$.

١٥ ـ صغرى محلية عند $-\frac{1}{2}$ و -2 ، عظمى محلية عند $-\frac{5}{4}$

١٧ ـ عظمى محلية عند $\sqrt{30/5}$ و $-\sqrt{6}$ صغرى محلية عند $\sqrt{6}$ و $-\sqrt{30}/5$.

١٩ ـ صغرى محلية عند $1/\sqrt[3]{2}$

٢١ ـ صغرى محلية عند $-\sqrt{3}$ ، عظمى محلية عند $\sqrt{3}$.

٢٣ ـ صغرى محلية عند -4 ، عظمى محلية عند 2 .

٢٥ ـ صغرى محلية عند 0 .

٢٧ ـ صغرى محلية عند $-\frac{16}{3}$.

٢٩ ـ عظمى محلية عند -1 ، صغرى محلية عند 0 .

٣١ ـ صغرى محلية عند $0, 4$ ، عظمى محلية عند 1 .

٣٣ ـ الميل ليس له نهاية قصوى محلية .

٣٥ ـ الميل له نهاية عظمى محلية 4 عند -2 ونهاية صغرى محلية $\frac{11}{4}$ عند $-\frac{1}{2}$

٣٧ ـ الميل له نهاية عظمى محلية $\sqrt{6}$ عند 0 .

٣٩ ـ $b = 5$ و $a = -4$ ، نقطة صغرى محلية .

بند ٤ ـ ٨

٢٧ - $(\pm 1/\sqrt{3}, 3)$

٢٩ - $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} + \frac{3}{4}), (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3} + \frac{3}{4})$

٣١ ـ $\frac{67}{7}$ من أعلى ، $\frac{67}{7}$ من أسفل

٣٥ ـ $\sqrt{3}$ من أسفل ، $\sqrt{3}$ — من أسفل .

٣٩ ـ لا يوجد مماس رأسى .

٤١ ـ مماس رأسى عند $(8, 0)$.

٤٣ ـ لا يوجد مماس رأسى .

بند ٤ ـ ٩

١ ـ 12 amperes

٣ - 40 ft (frontage) by 80 ft

٧ - $10 + 2\sqrt{13}$ by $4 + 2\sqrt{13}$ by $7 - \sqrt{13}$ in., 20 by 14 by 2 in

٩ - $c\sqrt{6}/3$ by $c/\sqrt{3}$ (طول المحور) ، حيث c طول الوتر

١١ - $r\sqrt{2}$ by $r/\sqrt{2}$

١٣ - $a\sqrt{2}$ by $b\sqrt{2}$

١٥ - $(2,0)$

١٧ - 5 by 5 ft

١٩ - 3 by 3 by 1.5 ft

٢١ - $\sqrt[3]{10}$ by $\sqrt[3]{10}$ by $2\sqrt[3]{10}$ ft

٢٣ - $r = R\sqrt{6}/3, h = R/\sqrt{3}$ حيث R نصف قطر الكرة

٢٥ ـ لاتوجد نهاية صغرى

٢٧ ـ (أ) لاتوجد نهاية عظمى ، (ب) لاتوجد نهاية عظمى ، (ج) $A\left(\frac{a^2+b^2}{a}, 0\right)$

٢٩ ـ عند B

$B\left(0, \frac{a^2+b^2}{b}\right)$.

٣١ ـ ft $\frac{20}{3}$ من الموقد الاصغر .

٣٣ ـ عند النقطة $40 / (\pi + 4)$ من الطرف للمساحة الصغرى . لاتوجد مساحة عظمى اذا كان يتحتم تكوين مربع . اذا كنا لانحتاج الى تكوين مربع ، نستخدم السلك بأكمله لعمل الدائرة ذات المساحة العظمى .

٣٥ ـ $\pi/2$

٣٧ ـ $a + b$

٣٩ - $(2,4)$

٤١ - $(\frac{9}{4}, -3)$

٤٣ - $\frac{14}{9}$

٤٧ ـ $[3, \infty)$

٤٩ - $(0,2]$

٥١ - 70 .

٥٣ ـ $a = 30{,}000, b = -7000$, \$1.76

٥٥ - $x = 5 - \sqrt{3}, y = 2(3 - \sqrt{3})$

٥٧ ـ إذا كان B' و A' هما مسقطى B و A على الخط المستقيم ، ليكن $|AA'| = a, |BB'| = b, |A'B'| = c$ إذا كانت P نقطة الانعكاس فإن $|A'P| = ac/(a+b)$

بند ٤ ـ ١٠

١ ـ إلى اليسار ٣ ـ إلى اليمين ٥ ـ إلى اليسار ، إلى اليمين وإلى اليسار .

٧ ـ تتحرك إلى اليسار فى $[\frac{1}{2}, \infty -)$ ، تتحرك إلى اليمين فى $(\infty , \frac{1}{2}]$

٩ ـ تتحرك إلى اليمين فى $(\infty , \infty -)$.

١١ ـ تتحرك إلى اليسار فى $(\infty , \sqrt{3}]$ و $[\sqrt{3}- , \infty -)$ ، تتحرك إلى اليمين فى $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

١٣ ـ تتحرك إلى اليسار فى $(\infty , 4]$ و $[0 , \infty -)$ ، تتحرك إلى اليمين فى $[0 , 4]$.

١٥ ـ تتحرك إلى اليسار فى $[1 , \infty -)$ ، تتحرك إلى اليمين فى $(\infty , 1]$.

١٧ ـ تتحرك إلى اليسار فى $(\infty , 1]$ و $[0 , \infty -)$ ، تتحرك إلى اليمين فى $[0 , 1]$.

١٩ ـ تتحرك إلى اليمين فى $[0 , \infty -)$ ، تتحرك إلى اليسار فى $(\infty , 0]$.

٢١ 400 ft, 80 ft, 48 ft ٢٣ $10, \frac{1}{250}$ ٢٥ $50m$

٢٧ 66, −9 ٢٩ −4, 0 ٣١ 13, 15

٣٥ $s = t^{3/2} + 2$ ٣٧ $s(t) = 1 + 3t^2 - t^3, s(2) = 5; 2$ ٣٩ 170 ft

٤١ ـ 48 ft/sec/sec. ٤٣ ـ 225 ft, 15 sec. ٤٥ ـ 5 sec. ٤٧ $\frac{1}{2}$.

بند ٤ ـ ١١

١ ـ 99 ft ٥ ـ $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t$. ٧ ـ 8 sec, 160 ft/sec

٩ ـ $v_0^2/1960$ cm. ١١ ـ $32\sqrt{3}$ ft/sec ١٥ ـ 18 ft

بند ٤ ـ ١٢

١ ـ 52 ٥ ـ $\frac{7}{12}$ ٧ ـ $5/72\pi$ in./min, $\frac{10}{3}$ sq in./min

٩ ـ $-\frac{16}{11}$ units per second ١١ ـ $-\frac{6Gmm'}{r^3} 10^7$ ١٣ ـ 1.68 lb/sq in./sec

١٥ ـ $-4000/\sqrt{101}$ mph. ١٧ ـ 260 ft/min. ١٩ ـ $\frac{5}{24}$ ft/min ٢١ $625/8\pi$ cm/min

٢٣ ـ تتناقص −2 sq cm/min ٢٥ ـ تتزايد 16 cu in./sec ٢٧ ـ $-\frac{288}{13}\pi$ sq cm/min

٢٩ ـ $-136/\sqrt{53}$ mph, $\frac{39}{13}$ hr ٣١ ـ $\frac{20}{61}$ sec ٣٥ ـ $254/\sqrt{307}$ ft/sec

٣٧ ـ $-\sqrt{5}/18$ ft/min ٣٩ ـ $848\pi/5$ sq ft/min ٤١ ـ تتناقص -1120π cu cm/sec

بند ٤ ـ ١٣

١ ـ التكلفة $F(x) = 0.07x + 500$ dollars ، متوسط التكلفة = $0.07 + 500/x$ dollars.

٣ ـ نعم ٩ ـ 60, $150 ١١ ـ $62.33, 113 ١٧ ـ نعم إذا كانت $R'' < F''$ عند هذا المستوى .

بند ٤ - ١٤

١ - $(6x-5)\,dx$ ٣ - $\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}+2u\right)du$ ٥ - $\frac{(7x^6+5x^4)}{3(x^7+x^5+1)^{2/3}}\,dx$

٧ - $\frac{2x-1}{3y^2+1}\,dx$ ٩ - $\frac{3}{2}$ ١١ - $-0.1, 0.2$ ١٣ - -0.0037 ١٥ - -0.000556

١٧ - -0.6 ١٩ - 0.00714 ٢١ - 0.0075 ٢٥ - π cu in ٢٧ - $\frac{5}{432}$ in

٢٩ - $gt\,\Delta t$ ft, $g\,\Delta t$ ft/sec ، حيث Δt الخطأ فى t .

٣٣ - 4.8 $ds=-\frac{2c}{t^3}dt.$ $c=500.$ ٣٧ - *7.143* ٣٩ - *9.87* ٤١ - *0.0098*

٤٣ - 0.1289. ٤٥ - *0.999* ٤٧ - *33.77* أصغر

٥١ - (أ) $\frac{g}{4\pi^2}$ ft,

(ب) الدورة تزداد بمقدار *0.0000617* sec ، تفقد *5.33* cec /day (ج) تنقص بمقدار *0.0016* sec .

بند ٤ - ١٥

١ - $y^2=x^2-2x+2C$

٣ - $s=(\frac{4}{3}t^3+12t+C)^{1/4}$

٥ - $y=(x+C)^3$

٧ - $r^2=2(\theta-1/\theta)+C$

٩ - $x^2t^2+2Cx^2+2x+1=0$

١١ - $(y^2+6)^{1/2}=-\frac{1}{2}(2x^2-3)^{1/2}+C$

١٣ - $y=x^2/2+C_1$ and $y=-x^2/2+C_2$

١٥ - $y=-\sqrt{\frac{2}{3}x^3+9}$

١٧ - $y=\sqrt{24-1/(x^2-1)}$

١٩ - $k=-\frac{31}{640},\ h=(-\frac{31}{256}t+1)^{2/5}$

٢١ - $k=-\frac{63}{16},\ y=\frac{-4}{\sqrt{63x^2+1}}$

٢٣ - $y=[(x^2+1)^3+7]^{2/3}+1$

٢٥ - $\frac{1}{3}y^3+4y=x^3+4/x+C$

٢٧ - $y=x/(\frac{5}{2}x^3+10x+1)$

٢٩ - لايوجد منحنى هكذا

٣١ - $s(9)=20.\ v(9)=20$

٣٣ - $72\pi(3-2\sqrt{2})$ cu ft; $15(2+\sqrt{2})$ sec

٣٥ - $2(3)^{5/2}/(3^{5/2}-2^{5/2})\approx 3.14$ min

٣٧ - $2\pi(4+\sqrt{3})^3$ sq ft/min

الفصل الخامس

بند ٥ - ١

١ - $1+2+3+\cdots+n$ ٣ - $1-1+3+13+29+51+79$

٥ - $(i+b)^2+(2i+b)^2+(3i+b)^2+(4i+b)^2+(5i+b)^2$

٧ - $\sum_{n=4}^{8}\frac{1}{n^2}$. ٩ - $\sum_{n=1}^{10}\frac{z^{n+1}}{n}$ ١١ - $\sum_{n=1}^{7}(3n+1)$

١٣ - a_n-a_0 ١٧ - na

١٩ - $[-10, -\frac{29}{3}, -\frac{28}{3}, -9, -\frac{26}{3}, -\frac{25}{3}, -8]$ ٢١ - $[-2, -\frac{1}{5}, \frac{8}{5}, \frac{17}{5}, \frac{26}{5}, 7]$

٢٣ - $\left[\sqrt{2}, \frac{5+2\sqrt{2}}{3}, \frac{10+\sqrt{2}}{3}, 5\right]$ ٢٥ - (أ) 29 (ب) 37.5 (ج) 37

٢٧ - (أ) 5.828 (ب) 7.515 (ج) 8.65 ٢٩ - (أ) 3.7944 (ب) 2.8 (ج) 3.6968

٣١ - *23, 14.* ٣٣ - *45,20.* ٣٥ - *16 , — 14.25.*

٣٧ - *0.947* و *1.303.* ٣٩ - خذ المتوسط . ٤١ - *9* (المساحة بالضبط) .

٤٣ - *6.167* (المساحة صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية) . ٤٥ - $\frac{32}{3}$ (المساحة بالضبط) .

٤٧ - $\frac{4}{3}$ (المساحة بالضبط) ٤٩ - *5* و *50.* ٥١ - الدوال الثابتة

بند ٥ - ٣

١ - $\frac{35}{2}$ ٣ - 12 ٥ - $\frac{17}{6}$ ٧ - $-\frac{3}{4}$ ٩ - $-\frac{1}{2}b^4$

١١ - $\frac{27}{2}$ ١٣ - 13 ١٥ - $\frac{44}{3}$ ١٧ - $\frac{11}{4}$ ١٩ - $-\frac{52}{3}$

٢١ - $F(2) = 1, F(7) = \frac{49}{4}, F(0) = 0$

٢٥ - $\frac{x^2+2}{x^2}$ ٢٧ - $\frac{1}{1+t^4}$ ٢٩ - $\sqrt{a^2-x^2}$ ٣١ - $-\sqrt{1+t^2}$ ٣٣ - $f(b) - f(a)$

٤١ - $-\frac{\sqrt{5x^2-1}}{x^3}$ ٤٣ - $-3(3x-2)\sqrt{3x-1}$ ٥٥ - $\sqrt{3}$

٥٧ - الدالة المكاملة ليست متصلة فى فترة التكامل ، والتكامل لايوجد .

بند ٥ - ٤

١ - 39 ٣ - $\frac{52}{3}$ ٥ - $\frac{16}{3}$ ٧ - $\frac{82}{3}$ ٩ - $\frac{26}{3}$ ١١ - $\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1).$

١٣ - $\frac{21}{12}$ ١٥ - $\frac{29}{2}$ ١٧ - 18 ١٩ - $\frac{32}{3}$ ٢١ - $\frac{15}{4}$ ٢٣ - $\frac{125}{6}$

٢٥ - $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ ٢٧ - $\frac{4}{3}$ ٢٩ - $\frac{16}{3}$ ٣١ - $\frac{937}{12}$ ٣٣ - $\frac{44}{3}$ ٣٥ - $\frac{148}{3}$

٣٧ - $\frac{16}{3}$ ٣٩ - $\frac{32}{3}$ ٤١ - $\frac{27}{4}$ ٤٣ - $\frac{1}{12}$ ٤٥ - $ab/3$ ٤٧ - $\frac{1192}{15}$

٤٩ - $\frac{75}{4}$ ٥١ - 4 ٥٣ - $24\sqrt{3}/5$

بند ٥ - ٥

١ - (أ) 8.750 (ب) 8.687 ٣ - 35.000 ٥ - 0.684. ٧ - 13.319 ٩ - 36.000

١١ - 0.668 ١٣ - 13.388 ١٥ - 3.929. ١٧ - 0.399 ١٩ - 1.819

٢١ - *2.492* (المساحة صحيحة الى ثلاثة ارقام عشرية) ٢٣ - (أ) 2.996 ، (ب) 3.084

بند ٥ - ٦

١ - 9π ٣ - 2π ٥ - $729\pi/35$ ٧ - 16π ٩ - $108\pi/5$ ١١ - $\pi a^3/15$

١٣ - 128π ١٥ - $86\pi/15$ ١٧ - $88\pi/3$ ١٩ - $\frac{1}{3}a^3$ ٢١ - $125\pi/3$

٢٣ - 6.531 (الحجم صحيح الى ثلاثة أرقام عشرية)

٢٥ - (أ) $128\pi/5$. (ب) 8π (ج) $256\pi/15$ (د) $40\pi/3$

٢٧ - $117\pi/8$ ٢٩ - $1408\pi/15$ ٣١ - $13\pi/3$ ٣٣ - 12π

٣٥ - (أ) $4\pi ab^2/3$ ، (ب) $4\pi a^2/3$

٣٧ - $32\pi p^3/15$ حيث p هى المسافة من الرأس الى البؤرة .

٣٩ - $4\pi/3$ ٤٣ - $16\pi/15$ ٤٥ - $f(x) = \sqrt{(2x+3)/\pi}$

٤٧ - (أ) $\frac{16}{3}r^3$ ، حيث r نصف قطر القاعدة ، (ب) $\frac{8}{3}r^3$ (ج) $\frac{4}{3}r^3$ (د) $4r^3/\sqrt{3}$.

٤٩ - $\frac{1}{2}\pi r^2 h$ ، ٥١ - $\frac{4}{3}b^2 a$ ٥٣ - $\frac{2}{3}r^3$ ٥٥ - $\frac{64}{15}p^4$

٥٧ - $2\sqrt{3}\pi d^2$ ٥٩ - $\frac{4}{3}\pi(b^2 - a^2)^{3/2}$

٦١ - $\frac{8}{9}r^3$ ، حيث r نصف قطر الدائرة .

بند ٥ - ٧

١ - $\frac{2}{3}(z-3)^{3/2}$ ٣ - $\dfrac{2(ax+b)^{3/2}}{3a}$ ٥ - $\frac{1}{2}\sqrt{1+2t^2}$

٧ - $\frac{3}{20}(5x^2-10)^{2/3}$ ٩ - $\frac{5}{12}(x^4+2)^{3/5}$ ١١ - $\dfrac{-2}{x^2+x+1}$

١٣ - $\dfrac{-1}{1680}(2-4x)^{20}(1+40x)$ ١٥ - $(1+x)^{n+1}\left[\dfrac{(1+x)^2}{n+3} - \dfrac{2(1+x)}{n+2} + \dfrac{1}{n+1}\right]$

١٧ - $\dfrac{2(2a+by)}{b^2\sqrt{a+by}}$ ١٩ - $\frac{3}{64}(4x-3)^{4/3}[\frac{16}{7}x^2 + \frac{18}{7}x + \frac{81}{14}]$

٢١ - $-\frac{3}{14}(x^2+15)(20-x^2)^{4/3}$ ٢٣ - $\dfrac{-3(1-x^2)^{4/3}}{8x^{8/3}}$

٢٥ - $\frac{2}{135}(9x-4)(3x+2)^{3/2}$ ٢٧ - 13 ٢٩ - $\dfrac{111,623}{72}$ ٣١ - $\frac{1}{4}$.

٣٣ - $\frac{1}{20}(13 - 7\sqrt{7})$ ٣٥ - $\frac{8}{3}(4-\sqrt{2})$ ٣٧ - $\frac{11}{30}\pi$.

بند ٥ - ٨

٣ - 2 — ، لايوجد حد أدنى أكبر ٥ - $8, 3$. ٧ - $\frac{1}{2}, 1$

٩ - $1, 0$ ١١ - $\sqrt[3]{4}$. لايوجد حد ادنى أكبر ١٣ - $\frac{2}{3}$

بند ٥ ـ ٩

١ ـ القيمتان العظمى والصغرى هما *101* فى [$-1, 3$] ، *1* و *5* فى [-1 , *2*] , *5* و *10* فى [2,3]

٣ ـ $m_p = 21,\ u_p = 42;\ m_t = 26.375,\ u_t = 38.375.$

٥ ـ $m_p = 4.828,\ u_p = 9.065;\ m_t = 6.146,\ u_t = 8.519$

٧ ـ 0.005

مسائل متنوعة

١ ـ *150* .

٣ ـ *24k* ، حيث *k* ثابت التناسب .

٥ ـ $81\pi k$ ، حيث *k* ثابت التناسب .

٧ ـ *2* قوة شمعة .

الفصل السادس

بند ٦ ـ ١

١ ـ $2\pi/3$ ٣ ـ $-5\pi/3$ ٥ ـ 0.2444 ٧ ـ 60° ٩ ـ −630° ١١ ـ 143°14′

١٣ ـ 1 ١٥ ـ −1 ١٧ ـ 0.4794 ١٩ ـ 0.2675 ٣١ ـ الدورة 2π ٣٣ ـ 1.974

٣٥ ـ π ٣٧ ـ $2\pi/3$ ٣٩ ـ $2\pi/n$ ٤١ ـ 2π ٤٣ ـ No ٤٥ ـ 1

٤٧ ـ المضاعف المشترك البسيط لـ p, q ٤٩ ـ فردية ٥١ ـ فردية

٥٣ ـ لافردية ولازوجية .

بند ٦ ـ ٢

٣ ـ 1 ٥ ـ لاتوجد ٧ ـ 0 ٩ ـ 1 ١١ ـ 0 ١٣ ـ $\frac{5}{4}$

١٥ ـ $-\infty$ ١٧ ـ $\pi/2$ ١٩ ـ $\frac{1}{2}$ ٢١ ـ 1 ٢٣ ـ $\frac{3}{2}$ ٢٥ ـ 0

٢٧ ـ $\frac{3}{2}$ ٢٩ ـ 0 ٣١ ـ −1 ٣٣ ـ $\cos x$ ٣٧ $\frac{1}{2}$

بند ٦ ـ ٣

١ ـ $\sec^2 x - \sin x$ ٣ ـ $\sec\theta\tan\theta - 5\csc^2\theta$

٥ ـ $5\sec 5\alpha\tan 5\alpha$ ٧ ـ $\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

٩ ـ $-\sin x\cot 3x - 3\csc^2 3x\cos x$ ١١ ـ $-6(3x+7)\sin(3x+7)^2$

١٣- $-\frac{12\cos 4x}{\sin^2 4x}$.

١٥- $\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$.

١٧- $2t\csc^2 \pi t(1-\pi t\cot \pi t)$.

١٩- $3\left(\sin\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}\right)$.

٢١- $3a\sin^2 ax\cos ax-\cos bx+bx\sin bx$

٢٣- $\left(\frac{1}{1-u}\sec\frac{u}{1-u}\right)^2$.

٢٥- $3(\cos 3x-\sin 3x)$.

٢٧- $-\cos^2 y\sec^2 x$.

٢٩- $\frac{2\csc^2(2x+y)}{\csc y\cot y-\csc^2(2x+y)}$.

٣١- $2\sec^2 u\tan u$.

٣٣- $4\sec 2x(\sec^2 2x+\tan^2 2x)$.

٣٥- 0.159.

٣٧- 4, 5.774.

٣٩- $2x-y=0$.

٤١- $-\cos\sqrt{k}x$.

٤٧- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

٤٩- $(2n\pi, 0)$, n أى عدد صحيح · $(2n\pi$

٥١- n ,$\left(\frac{2n-1}{2}\pi, 0\right)$ أى عدد صحيح .

٥٣- $(\pi/6+n\pi,0)$, n أى عدد صحيح .

٥٥- لاتوجد نقط انقلاب .

٥٧- $\frac{1}{6}(5\pi+3\sqrt{3}), \frac{1}{6}(\pi-3\sqrt{3})$.

٥٩- لاتوجد قيمة عظمى أو صغرى

٦١- $\frac{5}{4}, -1$.

٦٣- $2\cos t$. تتحرك الى اليمين فى $[-2\pi,-3\pi/2]$, $[-\pi/2,\pi/2]$, and $[3\pi/2,2\pi]$ ؛ تتحرك الى اليسار فى $[-3\pi/2,-\pi/2]$ and $[\pi/2,3\pi/2]$

٦٥- $-\frac{1}{2}\cos 2w+C$

٦٧- $\frac{1}{2}\tan 2y+C$

٦٩- $-\frac{15\sqrt{3}}{4\pi}$

٧١- $2(\sqrt{2}-1)$

٧٣- $-\frac{3}{4}\cos\frac{4x}{3}+8\tan\frac{x}{2}+C$

٧٥- $-\frac{2}{3}(\cos x)^{3/2}+C$

٧٧- $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$

٧٩- $\frac{-1}{3\sin 3x}+C$

٨١- $-\frac{1}{2}\left(\cos 2t-\frac{\cos^5 2t}{5}\right)+C$

٨٣- $\frac{1}{3}(1+\sin y)^3+C$

٨٥- $\sin y=x+C$

٨٧- $s^2+t^2-2\cos s=C$

٨٩- 90°

٩١- عظمى: $110\sqrt{2}$ watts عندما $t=(8n+1)/480$sec , n عدد صحيح موجب ، صغرى : $-110\sqrt{2}$ volts عندما $t=(8n+5)/480$sec .

٩٣- $\pi/8$ hr, $\frac{1}{24}(6\sqrt{3}+\pi)$ hr

٩٥- $\sqrt{2}$ زاوية نصف قطرية

٩٧- 2

٩٩- $\pi(1-\pi/4)$

١٠١- $-\frac{1}{4}\cos 2x=\frac{1}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}$

بند ٦ - ٤

٣- $-5\cos 3\sqrt{2}\approx 2.2635$ الى يمين نقطة الأصل

٧- $320\pi^2$

٩- g/π^2 ft, $g/4\pi^2$ ft

بند ٦ - ٥

٣ - الجذر الوحيد يقع بين 2 , 1

بند ٦ - ٦

٥ - $45^\circ, \pi/4$ ‏ ٧ - $0^\circ, 0$ ‏ ٩ - $-60^\circ, -\pi/3$ ‏ ١١ - $210^\circ, 7\pi/6$

١٣ - $78^\circ30', 1.370$ ‏ ١٥ - $68^\circ12', 1.190$ ‏ ١٧ - 47° ‏ ١٩ - $1/\sqrt{2}$

٢١ - 60° ‏ ٢٣ - 0.8 ‏ ٢٥ - $a/\sqrt{1-a^2}$ ‏ ٢٧ - $1/\sqrt{1+4x^2}$

٢٩ - 0.96 ‏ ٣١ - $2x^2-1$

٣٣ - النطاق هو $(-\infty, \infty)$ ، المدى هو $(-\pi/2, \pi/2)$

٣٥ - (أ) النطاق هو $[-1, 1]$ ، المدى هو $[0, \pi]$.

٣٧ - (ب) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$ ، فردية

بند ٦ - ٧

١ - $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ ‏ ٣ - $\frac{abx}{\sqrt{1-b^2x^2}}$ ‏ ٥ - $\frac{-4}{\sqrt{2-x^2}}$

٧ - $2\sqrt{1-x^2}$ ‏ ٩ - $\frac{-24x}{x^4+4}$ ‏ ١١ - $\tan^{-1} z + \frac{z}{1+z^2}$

١٣ - $\frac{1}{x^2}\tan^{-1} x - \frac{1}{x(1+x^2)}$ ‏ ١٥ - $\frac{(a-b)(x^2-ab)}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)}$ ‏ ١٧ - $\frac{5}{2\sqrt{-6+25x-25x^2}}$

١٩ - $\frac{1}{3(1+2t+2t^2)}$ ‏ ٢١ - $\frac{-cx}{(c^2-x^2)\sqrt{c^2-x^2-1}}$ ‏ ٢٣ - $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

٢٥ - 27. $\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} - 2x$ ‏ ٢٩ - $\frac{y^2}{(a^2-y^2)^{3/2}}$ $\frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}$

٣١ - $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$ ‏ ٣٣ - ‏ ٣٥ - $\frac{\sec^2(z/2)}{1+4\tan^2(z/2)}$ $-\frac{2}{3\sqrt{5}}$

٣٧ - $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y+y(x-y)^2}{1-x-x(x-y)^2}$ ‏ ٣٩ - $2x - \sqrt{3}y - 1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3} = 0$ ‏ ٤٥ - $\frac{1}{3}\tan^{-1} 3y$ ‏ ٤٧ - $\frac{\pi}{3}$

49. π ‏ ٥١ - $\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}$ ‏ ٥٣ - $\frac{\pi}{9}$ ‏ ٥٥ - $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

٥٧ - $\frac{1}{b}\sin^{-1}\frac{bs}{a}$ ‏ ٥٩ - $-\frac{1}{t}\sqrt{1-t^2}$ ‏ ٦١ - $\tan^{-1}(3+x)$ ‏ ٦٣ - $\sin^{-1}\frac{1+y}{2}$

٦٥ - $\frac{x}{2}\sqrt{4-3x^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{2}$ ‏ ٦٧ - $b(a+b)$ ft ‏ ٦٩ - $\frac{3\pi}{4}$ ‏ ٧٣ - $2\pi^2$

٧٥ - (أ) $5\tan^{-1}\frac{2}{3} \approx 2.94$, (ب) 14.4 ft, (ج) لا ، أكبر مقدار هو $5\pi/2 \approx 7.85$.

الفصل السابع

بند ٧ ـ ١

١ ـ 1 ٣ ـ -5 ٥ ـ ٧ ـ $\frac{1}{2}$ ٩ ـ $2 < x < 3$ ١١ ـ $-2 < x < -1$ ـ $(\frac{1}{4})^3$

١٣ ـ $5^{3/4}$ ١٥ ـ 5^{-5} ١٧ ـ $1.2^{-1/4}$ ١٩ ـ $(2\sqrt{3}-3)^{-1}$ ٢١ ـ $(\sqrt{2})^{-\sqrt{5}}$ ٢٣ ـ 2^5

٢٥ ـ *8.83* (صحيح الى رقمين عشريين) ٢٧ ـ *0.10* (صحيح الى رقمين عشريين)

٤٣ ـ $4000, 256{,}000, 250$ ٤٥ ـ (أ) $A/\sqrt{2}; A/8$

بند ٧ ـ ٢

٥ ـ (أ) *1.946* ، (ب) *0.981* (صحيحة الى ثلاثة أرقام عشرية) .

٩ ـ L دالة متزايدة .

١١ ـ القاعدة $Dx^r = rx^{r-1}$ قد أثبتت فقط عندما تكون r كسرية .

بند ٧ ـ ٣

١ ـ $-5e^{-5x}$ ٣ ـ ae^{ax+b} ٥ ـ $\frac{1}{2}(e^{x/c}+e^{-x/c})$

٧ ـ $e^{-t}(2t-t^2)$ ٩ ـ $(20x-19)e^{-5x}$ ١١ ـ $(2z-az^2)e^{-az}$

١٣ ـ $-\frac{1}{4}e^{-x/4}$ ١٥ ـ $-2e^{-2x+7}$ ١٧ ـ $2e^x(2+e^x)$

١٩ ـ $\dfrac{(2-3x)e^{-3x}}{(x-1)^2}$ ٢١ ـ $(e^x-e^{-x})[e^x(2x+1)+e^{-x}(2x-1)]$

٢٣ ـ $-\dfrac{1}{s^2}e^{1/s}$ ٢٥ ـ $\dfrac{4}{(e^t+e^{-t})^2}$ ٢٧ ـ $\dfrac{\sqrt{3}(e^x-e^{-x})}{2\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

٢٩ ـ $\dfrac{-e^{3u}+e^{2u}-1}{(e^{-u}-1)^{3/2}}$ ٣١ ـ $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$ ٣٣ ـ $-2e^{-2x}e^{e^{-2x}}$

٣٥ ـ $\dfrac{dy}{dx}=e^{-y}\cos x$ ٣٧ ـ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2(x+1)}{e^y y(y+2)}$ ٣٩ ـ 1.065

٤١ ـ 65.912 ٤٣ ـ 5.389 ٤٥ ـ $y=2e^x+e^{-x}$

٤٧ ـ $x=e^{-t}\cos t$ ٤٩ ـ *(1, e)* ٥١ ـ لا توجد نقطة انقلاب ٥٣ ـ *(0, 0)*

٥٥ ـ الأجزاء المقطوعة : $(n\pi, 0)$ حيث n أي عدد صحيح ؛ نهاية عظمى محلية عند $\frac{8n+1}{4}\pi$ ؛ نهاية صغرى محلية عند $\frac{8n+5}{4}\pi$ نقط الانقلاب :

$$\left(\frac{2n+1}{2}\pi,\ (-1)^n e^{-[(2n+1)/2]\pi}\right)$$

٥٧ - $\frac{1}{a}e^{ax}+C$ ٥٩ - $-2e^{-t/2}+C$ ٦١ - $e^{\sin x}+C$ ٦٣ - $\sin e^{x}+C$

٦٥ - $z+2e^{-z}+C$ ٦٧ - $-\frac{1}{4}e^{-4x-1}+C$ ٦٩ - $\tan^{-1}e^{x}+C$ ٧١ - $\frac{1}{2}e^{x^2+6x}+C$

٧٣ - -2.583 ٧٥ - $\frac{1}{2}(1-1/e^{4})$ ٧٩ - $e^{y}=e^{-x}+C$ ٨١ - -0.6

٨٣ - e^{4} ٨٥ - $e^{-1/4}$

بند ٧ - ٤

١ - 1.6284 ٣ - -2.5272 ٥ - 7.785 ٧ - 100.2 ٩ - 0.0163 .

١١ - 0.2162 ١٣ - 0.2776 ١٥ - 59.47 ١٧ - 17.6

١٩ - (أ) 3.639 sec (ب) 6.17 ft   ٢١ - 9.729 mg.   ٢٣ - $2\log 2+2\log 3$.

٢٥ - 1 ٢٧ - $\frac{998}{3}$ ٢٩ - 25.20 ٣١ - $x \geqslant 100$ ٣٣ - $-5<z<-4$

٣٥ - 3.907 ٣٧ - 2 ٣٩ - 4.117 ٤١ - $1, (\log 6)/(\log 2) \approx 2.585$

٤٣ - $\log 23.7^2 = 2.7495,\ (\log 23.7)^2 = 1.8898$.

٤٥ - 4 ٤٧ - $\frac{1}{4}$.   ٤٩ - $-\frac{3}{2}$ ٥١ - صفر   ٥٣ - 2

٥٥ - 2 ٥٧ - $1/e^2$ ٥٩ - $\frac{1}{8}$

٦١ - $\log_{1/2} 13 < \log_{10} 13 < \log_{7} 13$ ٦٣ - $1 < \log_{10} 29 < 2$

٦٥ - $-2 < \log_{2}\frac{1}{3} < -1$ ٦٧ - $2 < \log_{e} 12 < 3$

٦٩ - 1.976 ٧١ - 1.38 ٧٣ - $\frac{1}{2}$ ٧٥ - -1

٧٧ - (أ) 0.6335 ، (ب) 1.5441 ، (ج) 0.6021

٧٩ - $\frac{1}{2}(e^2-4)$ ٨١ - e^{2b+c} ٨٣ - $x \geqslant e^2$ ٨٥ - $-5<x<-4$

٨٧ - $C=-2+\log_e \frac{2}{3}$ ٨٩ - $k=-\frac{1}{9}\log_e 2$ ٩١ - $y=e^{2x-3}$ ٩٣ - $-(2x+3)$

٩٥ - $\frac{1}{2}$ ٩٧ - te^{t} ١٠١ - لأن $1^x = 1$ لجميع x

بند ٧ - ٥

٣ - (أ) $100, 1000, x>10^{100}, x>10^{1{,}000{,}000}$ ، (ب) $e^2, e^3, x>e^{100}, x>e^{1{,}000{,}000}$.

٥ - $\dfrac{3}{3x-5}$ ‏ ٧ - $\dfrac{2at}{at^2+b}$ ‏ ٩ - $\dfrac{14z}{7z-4}$ ‏ ١١ - $x(2\ln x+1)$

١٣ - $-\dfrac{2}{r}$ ‏ ١٥ - $\dfrac{u(2\ln u-1)}{(\ln u)^2}$ ‏ ١٧ - $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+5}$ ‏ ١٩ - $\dfrac{x}{x^2+7}$

٢١ - $\dfrac{1}{2}\left[\ln(x+3)+\dfrac{x+1}{x+3}\right]$ ‏ ٢٣ - $(2+\ln x)\ln x.$ ‏ ٢٥ - $a\cot ax.$

٢٧ - $\sec\theta$ ‏ ٢٩ - $\dfrac{1}{y}+1$ ‏ ٣١ - $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

٣٣ - $\dfrac{1}{x\ln 3x}$ ‏ ٣٥ - $\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x^2-a^2}$ ‏ ٣٧ - $\dfrac{-3}{(3x+10)\ln 2}$

٣٩ - $\dfrac{y}{(y^2+c^2)\ln 10}$ ‏ ٤١ - $-\dfrac{1}{x^2}$ ‏ ٤٣ - $\dfrac{-12a^3x}{(a^2x^2-9)^2}$

٤٥ - $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y-1}$ ‏ ٤٧ - $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$ ‏ ٥٩ - $2\ln|3x+5|+C$

٦١ - $\frac{1}{2}\ln|u^2+2u+11|+C$ ‏ ٦٣ - $\dfrac{-1}{2(2x+3)}+C$ ‏ ٦٥ - $\ln|x^3-x^2|+C$

٦٧ - $\ln\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ‏ ٦٩ - $-\dfrac{3}{x}-\dfrac{x^3}{3}+C$

٧١ - $\frac{1}{2}\ln(z^2+3)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{z}{\sqrt{3}}+C$ ‏ ٧٣ - $v+\ln|v-4|+C$

٧٥ - $\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{3y^2}{2}+3\ln|y|+\dfrac{1}{2y^2}+C$ ‏ ٧٧ - $\ln(e^u+e^{-u})+C$

٧٩ - 0.2118 ‏ ٨١ - 0.9282 ‏ ٨٣ - $2^{3x+1}3\ln 2$ ‏ ٨٥ - $6^{t}\left(-\dfrac{1}{t^2}+2\ln 6\right)$

٨٧ - $(1+e)t^e$ ‏ ٨٩ - $e^xe^{e^x}$ ‏ ٩١ - $e^{\sqrt{u}}\dfrac{\ln u+2}{2\sqrt{u}}$ ‏ ٩٣ - $2x^{\ln x-1}\ln x$

٩٥ - 1.801 ‏ ٩٧ - $\dfrac{5^{3t}}{3\ln 5}+C$ ‏ ٩٩ - $\dfrac{4^{t^2-6}}{2\ln 4}+C$ ‏ ١٠١ - $\dfrac{(1+e)^x}{\ln(1+e)}+C$

١٠٣ - $(0,2)$ ‏ ١٠٥ - e^{-1} ‏ ١٠٩ - $\pi^e<e^\pi$ ‏ ١١١ - $\dfrac{-2}{x^2\sqrt{x^2+4}}$

١١٣ - $\dfrac{x^4+12x^2-36}{x^2(6-x^2)\sqrt{36-x^4}}$ ‏ ١١٥ - $-\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{(1-x)^n},\ n\geqslant 2$

١١٩ - $\ln\sqrt{28}$ ؛ اذا كانت g متصلة عند a .

١٢٣ - نطاقا $\ln x$ ، $\ln(-x)$ مختلفان .

بند ٧ - ٦

١ - $y=-3e^{2(x-2)}$ ‏ ٣ - $y=-2/(x^2+2C)$ ‏ ٥ - $u=Ct$

٧ - $y = Ae^{5x} - b$ ‏ ٩ - $y = a \ln|x-3| + C$ ‏ ١١ - $y^2 = -\frac{2}{3}x^3 + 2\ln|x| + C$

١٣ - $z^{3/2} = (3/\sqrt{2})\sqrt{r} + C$ ‏ ١٥ - $y + \ln|y| = -\cos x + C$ ‏ ١٧ - $y = e^{2x}$

١٩ - $y = -e^{x/3}$ ‏ ٢١ - $y = -3e^{x^2/6}$ ‏ ٢٣ - $f(x) = e^{x \ln 6} = 6^x$

٢٥ - $f(x) = 4e^{[(x-1)\ln 3]/2} = (4)3^{(x-1)/2}$

٢٧ - (أ) 80.68 mg; 12.5 mg; 200 mg; 124.17 mg ، (ب) *3200* سنة

٣١ - 131.9 mg. ‏ ٣٣ - 40,500; 28.9 بعد الابتداء ‏ ٣٧ - *10.29* in ، ٣٩ - *8.312* hr

٤١ - 2.5 hr ‏ ٤٣ - 4.628 ‏ ٤٥ - (ج) c

٤٧ - 6,030,000 . 9,460,000. $f(x) = 10^8 \left(\frac{x}{2000}\right)^{-(\ln 5)/\ln 3}$.

الفصل الثامن

بند ٨ - ١

١٥ - $(-2,-135°)$, $(2,45°)$ ‏ ١٧ - $(1,-5\pi/3)$, $(-1,-2\pi/3)$ ‏ ١٩ - $(-\frac{4}{3},413°)$, $(\frac{4}{3},233°)$

٢١ - $(0,\pi/6)$, $(0,-13°)$ ‏ ٢٣ - $(0,1)$. ‏ ٢٥ - $(0,0)$ ‏ ٢٧ - $(0,-2)$

٢٩ - $(-\frac{1}{2},3\sqrt{3}/2)$ ‏ ٣١ - $(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$ ‏ ٣٣ - $(-\sqrt{3}/2,-\frac{1}{2})$ ‏ ٣٥ - $(0,0°)$

٣٧ - $(1,90°)$ ‏ ٣٩ - $(2,\pi)$ ‏ ٤١ - $(4\sqrt{2},-45°)$ ‏ ٤٣ - $(2,120°)$

٤٥ - $(8,5\pi/6)$ ‏ ٤٧ - $(\sqrt{73},-20°33')$

بند ٨ - ٢

٢٧ - $(2,\pi/6)$, $(2,5\pi/6)$

٢٩ - $(0,0)$, $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a, \frac{7\pi}{4}\right)$ ‏ ٣١ - $(0,0)$, $(2\sqrt{3},60°)$, $(2\sqrt{3},300°)$

٣٥ - المركز عند *(a/2, 0)* ، القطر *a* . ٣٧ - الشكل البيانى يدور بزاوية °*45* ضد عقرب الساعة

٣٩ - $\tan\theta = 4$ ‏ ٤١ - $r = 4$ ‏ ٤٣ - $r^2 \sin 2\theta = 4$

٤٥ - $x^2 + y^2 - 5x = 0$ ‏ ٤٧ - $x^2 + y^2 = 25$

٤٩ - $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 6x^3 + 6xy^2 - 7x^2 - 16y^2 = 0$ ‏ ٥١ -

٥٣ - $x^2 - y^2 = 9$ ‏ ٥٥ - $r = Ae^{k\theta}$, A حيث *k,A* ثابتان

٥٧ - $90°$ عند $(0, 0)$ وعند $(\sqrt{1/\sqrt{2}}, 45)$ ٥٩ - $90°$ عند $(a, 90°)$ وعند $(a, 270°)$

٦١ - (أ) $\frac{1}{4}$ ، (ب) $(0, 0°)$, $(\frac{3}{2}, 240°)$, $(\frac{3}{2}, 120°)$ ، (ج) $45°$.

بند ٨ - ٣

١ - $\frac{1}{6}\pi^3$. ٣ - $\frac{9}{2}$. ٥ - $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3} - \pi/12)$. ٧ - $(\pi + 1)/4$.

٩ - πa^2 . ١١ - $3\pi/2$. ١٣ - 27π . ١٥ - $\pi a^2/2$.

١٧ - $\pi a^2/2$ اذا كانت n زوجية ، $\pi a^2/4$ اذا كانت n فردية .

١٩ - $(e^{5a\pi} + 1 - e^{4a\pi} - e^{a\pi})/4a$.

٢١ - r; 4 تخيلية لـ $\pi/4 < \theta < 3\pi/4$ و $5\pi/4 < \theta < 7\pi/4$

٢٣ - $3\pi + 9\sqrt{3}/2$. ٢٥ - $\frac{1}{8}(\pi - 2)$. ٢٧ - $4(\sqrt{3} - \pi/3)$.

٢٩ - (أ) 4π ، (ب) 5π ، (ج) π

بند ٨ - ٤

١ - $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$. ٣ - $r = \dfrac{6}{2 - \cos\theta}$. ٥ - $r = \dfrac{9}{1 - 3\cos\theta}$.

٧ - قطع مكافىء ، الرأس عند $(1, 0)$ ، البؤرة عند $(0, 0)$.

٩ - قطع ناقص ، رأساه عند $(1, \pi)$ و (50) ، المركز عند $(2, 0)$.

١١ - قطع زائد ، رأساه عند $(2, 3\pi/2)$ و $(4, \pi/2)$ ، المركز عند $(1, \pi/2)$.

١٣ - $a = 3, b = \sqrt{5}, c = 2$ ، البؤرتان عند $(4, \pi)$ و $(0, 0)$ ، المركز عند $(2, \pi)$.

١٥ - $a = 2, b = 2\sqrt{3}, c = 4$ ، البؤرتان عند $(8, 3\pi/2)$ و $(0, 0)$ المركز عند $(4, 3\pi/2)$.

١٧ - $16x^2 + 25y^2 + 96x - 256 = 0$. ١٩ - $y^2 = 4p(x + p)$.

٢١ - $\pm\sqrt{e^2 - 1}$. ٢٣ - 600 miles, 200 miles .

الفصل التاسع

بند ٩ - ١

١ - مستقيم ، من اليسار الى اليمين . ٣ - جزء من قطع مكافىء ، الى أعلى .

٥ - النصف الأعلى من دائرة ، من اليمين الى اليسار . ٧ - دائرة ، مرتين ضد عقرب الساعة .

٩ - قطع مكافىء ما عدا الرأس ، من اليسار الى اليمين على النصف الأسفل ، ثم من اليمين الى اليسار على النصف العلوى .

١١ - قطع ناقص ؛ مع عقرب الساعة . ١٣ - قطع ناقص ؛ مع عقرب الساعة .

١٥ - جزء من قطع مكافىء ؛ يتذبذب .

١٧ - دائرة ما عدا النقطة $(-1, 0)$ ؛ مرة حولها ضد عقرب الساعة .

١٩ - النقطة تتحرك على خط مستقيم من $(4, -3)$ الى $(0, 1)$ والعودة مرة أخرى .

٢١ - النقطة تتحرك مع عقرب الساعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 3$ من $(0, \sqrt{3})$ إلى $(\sqrt{3}, 0)$.

٢٣ - النقطة تتحرك على القطع المكافىء $y = 1 - x^2$ من $(0, 1)$ الى $(1, 0)$ إلى $(0, 1)$ إلى $(-1, 0)$ إلى $(0, 1)$.

٢٥ - $\frac{3}{2}$. ٢٩ - $y = 2x$ ٣١ - $x = -2t, y = t^2$.

٣٣ - $x = h + r\cos t, y = k + r\sin t$. ٣٥ - $y = t$ و $x = -t^2$

٣٧ - $x = a\cos\theta\,(1-\cos\theta), y = a\sin\theta\,(1-\cos\theta)$.

بند ٩ - ٢

١ - $2x - y - 5 = 0$. ٣ - $2x + y + 4 = 0$. ٥ - $2x + 4\sqrt{3}y - 5 = 0$.

٧ - لاتوجد مماسات أفقية أو رأسية .

٩ - مماس أفقى عند $(0, \pm b)$ ؛ مماس رأسى عند $(\pm b, 0)$.

١١ - مماس أفقى عند $(0, 1)$ ؛ لا يوجد مماس رأسى .

١٣ - لا يوجد مماس أفقى ؛ مماس رأسى عند $(\pm a, b)$.

١٧ - مماس أفقى عند $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ و $(0,0)$ ؛ مماس رأسى عند $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

١٩ - $2t$ ٢١ - $-2/9z^4$ ٢٣ - $[-2\sin t\,(1 + 2\cos^2 t)]/\cos^3 t$.

بند ٩ - ٣

١ - $2\pi a$ ٣ - $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$. ٥ - $\sqrt{2}$ ٧ - $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 z + b^2\cos^2 z}\,dz$.

٩ - $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + w^2}\,dw$ ١٥ - $2\int_1^4 \sqrt{1 + t^2}\,dt$ ١٧ - $6 + \frac{1}{2}\ln 5$.

١٩ - $\int_0^a \sqrt{1+4x^2}\,dx$.   ٢١ - $\int_0^{1/2} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$.   ٢٣ - $\int_{-3}^{3} \frac{\sqrt{81-5x^2}}{3\sqrt{9-x^2}}\,dx$.

٢٥ - $\frac{4}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx$.

٢٩ - 3.28 (بقاعدة شبه المنحرف لأربعة أقسام جزئية)

٣١ - 3.82 (بقاعدة شبه المنحرف لأربعة أقسام جزئية)

٣٣ - $\frac{14}{3}$.   ٣٥ - $\pi/2$ ٣٧ - $(a/3)[(4+\pi^2)^{3/2}-8]$.   ٣٩ - $\frac{1}{8}(4\pi-3\sqrt{3})$.

٤١ - $8a$ ٤٣ - الطول يقترب من $\sqrt{2}$ ٤٥ - $L=\int_c^d \sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\,dr$.

٤٧ - الزورق يجب أن يبحر 6 min فى اتجاه الموضوع حيث رئى المهرب اذا كان المهرب يبحر فى اتجاهه ، فسيقبض عليه هناك اذا لم يقبض على المهرب هناك ، فالكابتن عندئذ يغير مسيره ويتبع المسير الحلزونى $r = 2e^{2\theta/\sqrt{3}}$ ، حيث نقطة الأصل هى الموضع الأصلى للمهرب والمحور القطبى هو المستقيم الواصل بين هذه النقطة والزورق .

٤٩ - الاتصال يؤكد وجود التكامل فى (٤)

بند ٩ - ٤

١ - $3, 2\sqrt{10}$ لأعلى .   ٣ - $4\sqrt{10}$, $\frac{1}{3}$ لأعلى   ٥ - 4 ، رأسياً لأعلى

٧ - $\sqrt{17}, 1$ ١١ - 156.25 ft, 6.25 sec .

١٣ - مقدار السرعة يساوى مقدار السرعة يساوى مقدار السرعة الابتدائية

٢١ - سيصلان الى الأرض فى نفس الوقت .

٢٥ - $x = -\frac{1}{2}ct^2 + v_0 \cos \alpha t,\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$.   ٢٧ - 54 ft .

٢٩ - $x(t) = 1 + t^2/2,\ y(t) = t$.   ٣١ - $x(t) = 2e^t,\ y(t) = 2e^{2t} + 1$.

٣٣ - $a^3/3 + 4a$ $x(t) = t^3/3 - 4t,\ y(t) = 2t^2$.

الفصل العاشر

بند ١٠ - ١

١ - $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$.   ٣ - $\sin\theta + C$ ٥ - $t - 2e^{-t} + C$.

٧ - $2(y - \ln|y+1|) + C$.   ٩ - $\frac{1}{4}(x - \frac{5}{4}\ln|4x+5|) + C$.

۱۱- $\frac{-6u+1}{18(3u-1)^2}+C$.

۱۳- $\frac{1}{7}(2y+5)^{3/2}(y-1)+C$.

۱۵- $\ln|2+v|-\frac{1+v}{2+v}+C$.

۱۷- $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$.

۱۹- $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

۲۱- $\frac{a}{2bc}\ln\left|\frac{bx-c}{bx+c}\right|+C$.

۲۳- $-\frac{3}{2}\ln|9-\theta^2|-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+\theta}{3-\theta}\right|+C$.

۲۵- $e^{\sin z}+C$.

۲۷- $-\frac{1}{2}\cos e^{2x}+C$.

۲۹- $\frac{-1}{1+\tan u}+C$.

۳۱- $\frac{1}{2c^2}\tan^{-1}\frac{y^2}{c^2}+C$.

۳۳- $\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{v+1}{2}+C$.

۳۵- $\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{7}}+C$.

۳۷- $\frac{1}{2}\tan^{-1}(2y+1)+C$.

۳۹- $\ln\left|\frac{5+z}{1-z}\right|+C$.

۴۱- $\frac{1}{2}(5\ln|2x-5|-\ln|2x-1|)+C$.

۴۳- $\frac{1}{12}[(3\sqrt{2}-2)\ln|3u+1-\sqrt{2}|-(3\sqrt{2}+2)\ln|3u+1+\sqrt{2}|]+C$.

۴۵- $-\frac{1}{3}[\ln|3y^2-y+\frac{1}{6}|+20\tan^{-1}(6y-1)]+C$.

بند ۱۰-۲

۱- $-(x/a)\cos ax+(1/a^2)\sin ax+C$.

۳- $y\sin^{-1}3y+\frac{1}{3}\sqrt{1-9y^2}+C$.

۵- $\frac{1}{12}(2x-1)\sqrt{4x+1}+C$.

۷- $2\ln 2-\frac{3}{4}$.

۹- $\frac{1}{2}[1-(\ln 2)^2]$.

۱۱- e

۱۳- $z\left[\left(1-\frac{z}{2}\right)\ln z+\frac{z}{4}-1\right]+C$.

۱۵- $w\cos^{-1}w-\sqrt{1-w^2}+C$.

۱۷- $-(z+1)^2e^{-z}+C$.

۱۹- $2\left(\frac{9}{e}-e\right)$.

۲۱- $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}+4\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

۲۳- $x(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x+C$.

۲۵- $\frac{t}{2}[\sin(\ln t)-\cos(\ln t)]+C$.

۲۷- $x\tan^{-1}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)+C$.

۲۹- $\frac{\pi}{2}-1$.

۳۱- $\frac{1}{1+b^2}(1+be^{-\pi/2b})$.

۳۳- $\int x^n\sin x\,dx=x^{n-1}(-x\cos x+n\sin x)-n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx$. $\int x^6\sin x\,dx=-x^6\cos x+6x^5\sin x+30x^4\cos x-120x^3\sin x-360x^2\cos x+720x\sin x+720\cos x+C$, $\int x^5\sin x\,dx=-x^5\cos x+5x^4\sin x+20x^3\cos x-60x^2\sin x-120x\cos x+120\sin x+C$.

۳۷- $\frac{1}{2}[(x^2+1)\tan^{-1}x-x]+C$.

بند ۱۰-۳

۱- 2 ‏ ۳- $-\frac{1}{6}\cos^6 u + C$ ‏ ۵- $-\frac{1}{2}\cot^2 z + C$ ‏ ۷- $(1/a)\tan at + C$

۹- $-2\cos\sqrt{y} + C$ ‏ ۱۱- $2\cos(x/2) + 2\cos^3(x/2) - \frac{6}{5}\cos^5(x/2) + \frac{2}{7}\cos^7(x/2) + C$

۱۳- $\ln|\alpha - \cos\alpha| + C$. ‏ ۱۵- $\ln|\tan u| + C$.

۱۷- $\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$. ‏ ۱۹- $+ \tan x - 2\ln|\sec x + \tan x| + C$

۲۱- $\frac{1}{2}\sec^2 x + C$. ‏ ۲۳- $-\frac{1}{2}\sqrt{2\cot 2\phi + 4} + C$.

۲۵- $-\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot 3x + x + C$. ‏ ۲۷- $\frac{1}{2}\tan^4(\theta/2) + \frac{1}{3}\tan^6(\theta/2) + C$.

۲۹- $\sqrt{2} - 1$. ‏ ۳۱- $(\sin x - 1)/\cos x + C$ ‏ ۳۳- $\ln|\tan x| + C$.

۳۵- $\frac{1}{2}(\sec y \tan y + \ln|\sec y + \tan y|) + C$. ‏ ۳۷- $\frac{2}{7}\sec^{7/2}\theta - \frac{2}{3}\sec^{3/2}\theta + C$.

۳۹- $\frac{1}{8}\sin^7 x\cos x - \frac{1}{48}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{192}\sin^3 x\cos x - \frac{15}{384}\sin x\cos x + \frac{15}{384}x + C$.

۴۱- $\sqrt{a^2 + x^2} + C$. ‏ ۴۳- $\ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 8}| + C$. ‏ $\frac{1}{5}\tan^5 t + C$.

۴۷- $\ln(2 + \sqrt{3})$. ‏ ۴۹- $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$. ‏ ۵۱- $x/2 - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

۵۳- $\frac{5}{16}z - \frac{1}{2}\sin z + \frac{3}{32}\sin 2z + \frac{1}{24}\sin 3z + C$.

۵۵- $\frac{1}{16}(\alpha + \frac{1}{4}\sin 4\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha + \frac{1}{8}\sin^2 4\alpha) + C$.

۶۵- $\int \sin^2 mx\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C$ ‏ $\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C$, $m^2 \neq n^2$.

۶۷- $\int \sin mx \cos mx\, dx = \frac{1}{2m}\sin^2 mx + C$ ‏ $-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + C$, $m^2 \neq n^2$.

۶۹- $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{3} + C$. ‏ ۷۱- $\sqrt{x+6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{\sqrt{x+6} + \sqrt{6}}\right| + C$

۷۳- $-\frac{2\sqrt{6}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - 3x^2}}{\sqrt{3}x}\right| + C$ ‏ ۷۵- $\frac{x}{\sqrt{1 - 4x^2}} + C$

۷۷- $9\sin\frac{\alpha}{3} - 3\alpha\cos\frac{\alpha}{3} + C$. ‏ ۷۹- $\ln(y^2 + 2y + 3) - \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{y+1}{\sqrt{2}} + C$

۸۱- $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{4})\sqrt{2x^2 + x + 1} + \frac{7}{16\sqrt{2}}\ln\left|x + \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2x^2 + x + 1}\right| + C$.

۸۳- $-\frac{2}{3}\cot^3\frac{x}{2} + 2\cot\frac{x}{2} + x + C$. ‏ ۸۵- $(\cos^4 3y + \frac{4}{3}\cos^2 3y + \frac{8}{3})\sin 3y + C$

۸۷- $-\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\sin x| + C$.

۸۹- $z[(\ln 3z)^4 - 4(\ln 3z)^3 + 12(\ln 3z)^2 - 24\ln 3z + 24] + C$ ‏ ۹۱- $(5\ln 6x - 1)$

بند ۱۰ ـ ٤

۱ـ $-\sqrt{10-x^2}+C$. ٥ـ $\frac{1}{3}\sin^{-1}3t+C$. ۳ـ $\frac{1}{\sqrt7}\sin^{-1}\frac{\sqrt7 z}{\sqrt3}+C$.

۷ـ $-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$. ۹ـ $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{c^2-x^2}+c^2\sin^{-1}\frac{x}{c}\right)+C$.

۱۱ـ $-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right|+C$. ۱۳ـ $\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C$.

۱٥ـ $\frac{1}{9}\sqrt{9x^2-4}+C$. ۱۷ـ $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{3x}{2}+C$. ۱۹ـ $\frac{c^2}{2}[\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)]+C$.

۲۱ـ $\frac{1}{2}\ln(6+x^2)+C$. ۲۳ـ $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x+b}{a}+C$. ۲٥ـ $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{4x-1}{4x+1}\right|+C$.

۲۷ـ $2\sqrt{55}-\sqrt7-\frac{9}{4}\ln\frac{8+\sqrt{55}}{4+\sqrt7}$. ۲۹ـ $-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$.

۳۱ـ $\frac{2}{\sqrt3}-1$. ۳۳ـ $\frac{y}{4}(y^2+a^2)^{3/2}-\frac{a^2y}{8}\sqrt{y^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|y+\sqrt{y^2+a^2}|+C$.

۳٥ـ $\frac{6}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$. ۳۷ـ $-\frac{1}{36}\left(\frac{2t}{t^2-9}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right)+C$. $3\sin^{-1}e^y+C$.

٤۱ـ $\sqrt{a^2+x^2}+C$. ٤۳ـ $\ln|x+3+\sqrt{x^2+6x+8}|+C$. ٤٥ـ $\sin^{-1}\frac{x-1}{2}+C$.

٤۷ـ $\sin^{-1}\frac{2x-5}{7}+C$. ٤۹ـ $\frac{1}{2}[(z-1)\sqrt{2z-z^2}+\sin^{-1}(z-1)]+C$.

٥۱ـ $\frac{1}{2}(y+1)\sqrt{3-2y-y^2}+2\sin^{-1}\frac{y+1}{2}+C$ ٥۳ـ $\sqrt{x^2+4}+5\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C$.

٥٥ـ $\sqrt{y^2+4y+5}-2\ln|y+2+\sqrt{y^2+4y+5}|+C$.

٥۷ـ $\frac{1}{4}(3\sqrt{4u^2-4u+5}+\ln|2u-1+\sqrt{4u^2-4u+5}|)+C$.

٥۹ـ $6\sin^{-1}\frac{x-2}{2}-\sqrt{4x-x^2}+C$. ٦۱ـ $\frac{1}{16}\left(\tan^{-1}\frac{x+1}{2}+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right)+C$.

٦۳ـ $\frac{1}{4}[x\sqrt{1-x^2}+(2x^2-1)\sin^{-1}x]+C$. ٦٥ـ $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\sin^{-1}x}{x}+C$.

٦۷ـ $\frac{\pi}{4}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pi}{2}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)$. ٦۹ـ $\sqrt5-\sqrt2+\ln\frac{2(1+\sqrt2)}{1+\sqrt5}$.

۷۱ـ $\frac{\sqrt{4+\pi^2}-\sqrt{1+\pi^2}}{\pi}+\ln\frac{2(\pi+\sqrt{1+\pi^2})}{\pi+\sqrt{4+\pi^2}}$.

بند ۱۰ ـ ٥

۱ـ $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. ۳ـ $x-\ln|x+1|+C$. ٥ـ $\frac{1}{2}\ln|x^2-9|+C$.

۷ - $\ln \frac{(t-1)^2}{|t|} + C$. ۹ - $\ln \frac{(x-3)^{14}}{|x-1|} + 4x + \frac{x^2}{2} + C$. ۱۷ - $\frac{1}{b-a} \ln \left|\frac{x-b}{x-a}\right| + C$.

۱۳ - $\ln \left|\frac{(y+2)(y-1)}{y}\right| + C$. ۱۰ - $5 \ln \left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{4}{x} + C$. ۱۱ - $z - \tan^{-1} z + C$.

۱۹ - $\frac{1}{2} \ln |x| - \frac{1}{4} \ln |x^2 + x + 2| - \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$.

۲۱ - $\frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left|\frac{x+2-\sqrt{7}}{x+2+\sqrt{7}}\right| + C$. ۲۳ - $7 - \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$.

۲۵ - $-\ln |1-x| + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$. ۲۷ - $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

۲۹ - $4 \ln |x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{3(x+1)^3} + C$. ۳۱ - $t - \frac{3}{2} \tan^{-1} t + \frac{t}{2(1+t^2)} + C$.

۳۳ - $\frac{1}{32} \ln |4z^2 + 1| + \frac{1}{4} \tan^{-1} 2z + \frac{16z+1}{32(1+4z^2)} + C$. ۳۵ - $\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$.

۳۷ - $2 \ln 2 + \frac{\pi}{4}$. ۳۹ - $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \tan^{-1} \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + C$

۴۱ - $\frac{2}{(a-b)^3} \ln \left|\frac{x-b}{x-a}\right| - \frac{1}{(a-b)^2} \left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right) + C$.

۴۵ - $\frac{ab(e^{kat} - e^{kbt})}{ae^{kat} - be^{kbt}}$ if $a \neq b$, $\frac{a^2kt}{akt+1}$ if $a = b$.

۴۷ - $\frac{1}{3}\left[x^3 \tan^{-1} \frac{x}{2} - x^2 + 4 \ln (x^2+4)\right] + C$. ۴۹ - $-\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$.

بند ۱۰ - ٦

۱ - $6 - \ln 16$. ۳ - $(z+1) + 8\sqrt{z+1} + 16 \ln |\sqrt{z+1} - 2| + C$.

۵ - $\frac{y-2}{y} \sqrt{3y+2} + C$. ۷ - $-\left(\sec^{-1} \frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}\right) + C$.

۹ - $\frac{1}{27}(17\sqrt{5} - 5\sqrt{2})$. ۱۱ - $2\sqrt{t+2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left|\frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{t+2}+\sqrt{2}}\right| + C$.

۱۳ - $\frac{2}{9} x^{9/4} + \frac{6}{13} x^{13/12} + C$. ۱۵ - $(2\sqrt{x} - 2)e^{\sqrt{x}} + C.$.

۱۷ - $\frac{1}{9}(9x^{2/3} + 4)^{3/2} + C$. ۱۹ - $\ln |w + 2\sqrt{w} + 2| - 2 \tan^{-1} (\sqrt{w} + 1) + C$.

۲۱ - $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2+x+x^2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + C$. ۲۳ - $\frac{1}{\sqrt{6}} \sin^{-1} \frac{5z-12}{z} + C$.

۲۵ - $\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2}\right) + C$. ۲۷ - $108 + 14\sqrt{21}$.

۲۹ - $\sqrt{e^4+1} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\left[\ln \frac{\sqrt{e^4+1}-1}{\sqrt{e^4+1}+1} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right]$.

مسائل متنوعة

١ - $-\frac{1}{b}\cos(a+bx)+C$. ٣ - $\frac{1}{11}\ln|8+11\sin x|+C$. ٥ - $\frac{1}{2}\sec 2\theta+C$.

٧ - $\frac{1}{4}(3\sqrt{3}\pi-9)$. ٩ - $-5\ln\left|\cos\frac{t}{5}\right|+C$. ١١ - $\ln\left|\frac{u-1}{u}\right|+C$.

١٣ - $-\frac{v^2}{2}-v\cot v+\ln|\sin v|+C$. ١٥ - $-\frac{1}{x}(1+\ln x)+C$.

١٧ - $2\ln\left|\csc\frac{w}{2}-\cot\frac{w}{2}\right|+C$.

١٩ - $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}-1}{\sqrt{2x}+1}\right|-\sqrt{1-x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2(1+x)}}{1-\sqrt{2(1-x)}}\right|+C$.

٢١ - $\frac{1}{2}(3\ln|b+x|+\ln|b-x|)+C$. ٢٣ - $\ln(2+\sqrt{3})$. ٢٥ - $\frac{1}{6}(6+4\tan x)^{3/2}+C$.

٢٧ - $\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$. ٣٧ - $\frac{1-\cos x}{\sin x}+C$.

٣١ - $\tan^{-1}e^{r}+C$. ٤١ - $\frac{1}{2}\ln|u^2+1|-\frac{1}{u^2+1}+C$.

٣٥ - $\frac{1}{3}\ln|\sqrt{2+9z+9z^2}+3z+\frac{3}{2}|+C$. ٤٥ - $-\ln|e^{-y}-4|+C$.

٣٩ - $e^{-\cos t}+C$. ٢٩ - $\frac{2}{9}(x^3-1)\sqrt{x^3+1}+C$.

٤٣ - $-\frac{(a^2-y^2)^{3/2}}{3a^2y^3}+C$. ٣٣ - $-\frac{1}{6}\ln|b^6-x^6|+C$.

٤٧ - $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3x}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2x}+\sqrt{3+2x})+C$. ٤٩ - $\ln|\sqrt{x^2+x-1}+x+\frac{1}{2}|+C$.

٥١ - $e^u+2e^{-u}-\frac{1}{3}e^{-3u}+C$. ٥٣ - $-\ln|1+\sin t+\cos t|+C$.

٥٥ - $\frac{1}{2}[\sqrt{(2+t^2)(3+t^2)}+\ln(\sqrt{3+t^2}-\sqrt{2+t^2})]+C$. ٥٧ - $\ln|1+\ln x|+C$.

الفصل الحادى عشر

بند ١ - ١١

k ثابت التناسب .

١ - 144 . ٣ - (أ) $2p^3$ (ب) $\frac{16}{15}p^3$ ٥ - $4608\pi/5$.

٧ - $8/7\,\pi k a^{7/2}$ ، حيث a نصف قطر الكرة . ٩ - $4r^2$

بند ١١ ـ ٢

١ ـ $M_2=-36, \bar{x}=-\frac{38}{17}$. ٣ ـ $M_0=-13, \bar{x}=-\frac{13}{37}$. ٥ ـ $\frac{6}{25}$ على يمين الثقل 2 lb

٧ ـ (أ) 4 ft من نقطة الارتكاز ، (ب) $\frac{36}{5}$ ft من المركز نحو الطفل الأثقل

٩ ـ $(\frac{5}{17},\frac{1}{17})$. ١١ ـ $(\frac{11}{6},\frac{7}{10})$.

بند ١١ ـ ٣

١ ـ $(\frac{6}{5},\frac{3}{2})$. ٣ ـ $(\frac{4}{5},\frac{32}{7})$.

٥ ـ $\left(\frac{(\ln 2)^2-\ln 4+1}{\ln 4-1}, \frac{\ln 4-\frac{3}{4}}{\ln 4-1}\right)$. ٧ ـ $\left(\frac{2(15^{3/2})}{3[4\sqrt{15}-\ln(4+\sqrt{15})]}, 0\right)$.

٩ ـ $\left(\frac{9}{15-8\ln 4}, \frac{9}{15-8\ln 4}\right)$. ١١ ـ $(1,\frac{12}{5})$.

١٣ ـ $\left(\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right)$. ١٥ ـ $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$. ١٧ ـ $(\frac{50}{21},5)$.

بند ١١ ـ ٤

١ ـ $(3,\frac{18}{5})$. ٣ ـ $(\frac{3}{16},\frac{15}{4})$. ٥ ـ $\left(0, \frac{e^2+1}{4e}\right)$. ٧ ـ $(\frac{3}{2},\frac{12}{5})$.

٩ ـ $\left(0, \frac{2(10\sqrt{10}-1)}{3[3\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})]}\right)$. ١١ ـ $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$. ١٣ ـ $(0,\frac{1}{4})$.

١٧ ـ $\bar{x}=2-\frac{48}{\pi^2}+\frac{96}{\pi^3}, \bar{y}=\frac{12}{\pi}-\frac{96}{\pi^3}$. ١٩ ـ $\bar{x}=\frac{1}{4}, \bar{y}=\frac{1}{4}$.

٢٣ ـ $4\sqrt{2}\pi$. ٢٥ ـ $\frac{32\pi p^3}{15}$. ٢٧ ـ $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

٢٩ ـ $\frac{17}{4}$ من القمة على خط التماثل .

٣١ ـ $\frac{69}{11}$ من الحافة اليسرى على الخط الأفقى للتماثل .

٣٣ ـ $\frac{45}{91}$ يسار المركز على الخط الأفقى للتماثل .

٣٥ ـ $3\pi r/16$ من المركز على خط التماثل .

٣٧ ـ (2, 0) .

بند ١١ ـ ٥

١ ـ $(4\ln 2, 0)$. ٣ ـ $\left(\frac{e^{2b}(2b-1)+1}{2(e^{2b}-1)}, 0\right)$. ٥ ـ $\left(\frac{e^2-1}{4(e-2)}, 0\right)$.

$(\frac{5}{6},0)$. ٩ ـ $(0,7)$. ١١ ـ $\left(0, \frac{5c}{6}\right)$.

١٣ - $\left(0, \dfrac{e^2-3}{8e(e-2)}\right)$. ١٥ - $(0, \frac{14}{11})$. ١٧ - $h/4$ من القاعدة على المخروط

١٩ - $\left(\dfrac{\pi^2-4}{4\pi}, 0\right)$. ٢١ - $\left(2, \dfrac{3+2\ln 2}{15-16\ln 2}\right)$. ٢٣ - أكبر من $\frac{1}{3}$.

٢٥ - $8r/15$ من المركز على محور التماثل .

بند ١١ - ٦

σ وزن وحدة الحجم من السائل .

١ - 14 lb; 33 in.-lb . ٣ - 1440 ft-lb . ٥ - $ch + \frac{1}{2}bh^2$ ft-lb .

٧ - (أ) $5k/72$ ، حيث $k > 0$ ثابت التناسب ، (ب) $159k/208$

٩ - $c \ln[(h-x_1)/(h-x_2)]$. ١١ - 450σ ft-lb .

١٣ - (أ) $\pi r^2 h^2 \sigma/2$ ft-lb ، (ب) $\pi r^2 h^2 \sigma/8$ ft-lb ، (ج) $3\pi r^2 h^2 \sigma/8$ ft-lb

١٥ - $\pi r^4 \sigma/4$ ft-lb . ١٧ - $2400(1+3\pi)$ ft-lb .

بند ١١ - ٧

σ وزن وحدة الحجم من السائل .

١ - (أ) $\frac{165}{2}\sigma$ ، (ب) $\frac{45}{2}\sigma$ ، (ج) 10σ

٣ - $\frac{4}{3}\sqrt{2}\sigma$. ٥ - $\frac{768}{5}\sigma$.

٧ - $\frac{63}{4}\sqrt{2}\sigma$. ٩ - 48σ . ١١ - $32\pi\sigma$.

١٣ - $F = \frac{1}{6}bc(3d+2c)\sigma$. ١٥ - $28\sigma, 6\sigma$ lb/day . ١٩ - 180σ .

الفصل الثانى عشر

بند ١٢ - ١

١ - 3 . ٣ - 0 . ٥ - 1 . ٧ - 0 . ٩ - 0 .

١١ - ∞ . ١٣ - 1 . ١٥ - ∞ . ١٧ - 0 . ١٩ - $\frac{11}{3}$.

٢١ - 2 . ٢٣ - $-\frac{1}{8}$. ٢٥ - $\frac{2}{9}$. ٢٧ - $\ln 2 - 1$. ٢٩ - $\frac{1}{6}$.

٣١ - -1 . ٣٣ - 3 . ٣٥ - $1/\sqrt{2}$. ٣٧ - $\frac{1}{12}$. ٣٩ - لا توجد نهاية

٤١ - 1 . ٤٣ - $-\frac{1}{2}$. ٤٥ - $1/[(n+1)!]$. ٤٧ - 0 . ٤٩ - $-\frac{1}{3}$.

٥١ - 0 . ٥٣ - $\frac{3}{2}$. ٥٥ - 0. ٥٧ - 1 . ٥٩ - 0 .

٦١ - -1 .　　٦٣ - ∞ if $b < e$, 1 if $b = e$, 0 if $b > e$.

٧٣ - $v(t) = \begin{cases} \frac{mg}{k} + \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) e^{-kt/m}, & k \neq 0. \\ gt + v_0, & k = 0 \end{cases}$.

٧٥ - z قد تختلف فى المعادلتين .

٧٧ - اذا كانت $g(b) = g(a)$ ، سوف توجد z فى (a, b) بحيث أن $g'(z) = 0$ بنظرية رول .

بند ١٢ - ٢

١ - $\frac{1}{4}$.　٣ - 0 .　٥ - 0 .　٧ - 1 .　٩ - 1 .

١١ - e^a .　١٣ - e^a .　١٥ - 1 .　١٧ - $1/\sqrt{e}$.　١٩ - 1 .

٢١ - 1 .　٢٣ - 1 .　٢٥ - e^a .　٢٧ - 0 .　٢٩ - 0 .

٣١ - $\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x = \begin{cases} -\infty, & p \leqslant 0, \\ 0, & p > 0. \end{cases}$.

٣٥ - صفر .　٣٧ - ∞ .　٣٩ - صفر .　٤١ - $\frac{1}{2}$.　٤٣ - -1 .　٤٥ - $\frac{1}{2}$.

٤٧ - $-\infty$ if $n < 1$, 0 if $n = 1$, ∞ if $n > 1$　٤٩ - $\frac{1}{3}$.　٥١ - $\frac{1}{2}$.

الفصل الثالث عشر

بند ١٣ - ١

١ - 2 .　٣ - $\sqrt{2}$.　٥ - $\frac{1}{4}$.　٧ - يتباعد　٩ - ∞ .

١١ - $\frac{1}{2}$.　١٣ - $\frac{1}{2} \ln 2$.　١٥ - $\frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$.　١٧ - 1　١٩ - π .

٢١ - $5\pi/(6\sqrt{3})$.　٢٣ - $\sqrt{2}$.

٢٥ - طبقة الدهان ستكون أرفع فأرفع عندما تصبح x كبيرة ، بعكس عملية الدهان العادية .

٢٧ - $(1, \frac{1}{4})$.　٢٩ - $n > 1$

بند ١٣ - ٢

١ - 3 .　٣ - 100　٥ - $\pi/2$　٧ - $-\frac{1}{4}$.　٩ - ∞

١١ - ∞ .　١٣ - $3(1 + \sqrt[3]{4})$.　١٥ - ∞　١٧ - يتباعد .　١٩ - يتباعد .

٢١ - 0 .　٢٣ - يتباعد .　٢٥ - يتباعد .　٢٧ - ∞　٢٩ - ∞

٣١ - ∞ .　٣٣ - يتباعد .　٣٥ - $p < 1$　٣٧ - $\frac{1}{4}$.

الفصل الرابع عشر

بند ١٤ - ١

١ - $(3,6), (1,-4)$. ٣ - $(-\frac{1}{2},0), (-\frac{32}{2},-8)$. ٥ - $2\epsilon_1 + 6\epsilon_2, 4\epsilon_1 + 4\epsilon_2$.

٧ - $(-1,-18)$. ٩ - $(0,0)$. ١١ - $(-3\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), (-3,\frac{1}{2}), (\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$.

١٣ - لا معنى له ١٥ - لا معنى له ١٧ - لا معنى له ١٩ - لا معنى له

٢١ - متجه ٢٣ - متجه ٢٥ - لا معنى له ٢٧ - $(-3,-\frac{4}{3})$. .

٢٩ - $3\delta - \frac{3}{2}\beta$. ٣١ - 9. . ٣٣ - $\sqrt{a^2 + b^2 + 2b + 1}$. ٣٩ - لا

٤٣ - 6 . ٤٥ - $\frac{10}{7}$. ٤٧ - $\frac{2}{3}$. ٥١ - $(-1,7)$.

٥٣ - $(4,-\frac{13}{2})$. ٥٥ - $(c - a, d - b)$. ٥٩ - $(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$. ٦١ - $\left(\frac{5}{2}, \frac{-2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)$

٦٣ - 83°6′, 249.84 mph .

بند ١٤ - ٢

٧ - $90°$. $180°$ ١١ - $A = 101°19', B = 33°41', C = 45°$. ١٣ - $\frac{30 \pm 39\sqrt{3}}{37}$.

١٧ - $(-bc, ac)$ ، c أي عدد ، (ب) $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

٢٧ - أقصر متجه هو $\alpha - \frac{\alpha \cdot \beta}{|\beta|^2}\beta$ ٢٩ - $-6\epsilon_1 + 2\epsilon_2$. ٣١ - $-\alpha - 2\beta$.

بند ١٤ - ٣

٩ - (ب) $t = -2$: $(-8,4), (12,-4), 4\sqrt{10}$; $t = 0$: $(0,0), (0,0), 0$; $t = 1$: $(1,1), (3,2), \sqrt{13}$

(ج) $t = -2$: $(-12,2)$; $t = 0$: $(0,2)$; $t = 1$: $(6,2)$

١١ - $(2t - 1)\epsilon_1 + (2t + 2)\epsilon_2, 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2, \sqrt{8t^2 + 4t + 5}$.

١٣ - $(-4 \sin 2t, 6 \cos 2t), (-8 \cos 2t, -12 \sin 2t), 2\sqrt{4 \sin^2 2t + 9 \cos^2 2t}$.

١٥ - $-e^{-t}(\sin t + \cos t)\epsilon_1 + e^{-t}(\cos t - \sin t)\epsilon_2$, .
$(2e^{-t} \sin t)\epsilon_1 - (2e^{-t} \cos t)\epsilon_2, \sqrt{2}e^{-t}$

١٧ - $(0,4), (0,0), 4$. ١٩ - $-3\epsilon_2, -4\epsilon_1, 3$. ٢٣ - $\frac{\sqrt{5}t(2 + 4t^2)}{\sqrt{1 + 2t^2 + 2t^4}}$.

٢٥ - $\frac{2 \sin 2t \cos 2t - 3 \cos 3t \sin 3t}{\sqrt{\cos^2 3t + \sin^2 2t}}$

٢٩ - (أ) $x=(2-y)^2,\ \sqrt{101},\ 1$ ، (ب) $\frac{1}{4}\left[10\sqrt{101}+4\sqrt{17}+\ln\frac{10+\sqrt{101}}{\sqrt{17}-4}\right]$.

٣١ - $\alpha(t)=(a\cos kt,\ b\sin kt),\ \alpha''(t)=-k^2\alpha(t)$.

٣٣ - $4+40/t^6$.   ٣٩ - عند أعلى نقطة   ٤٧ - $f(\theta)/\alpha(t)$ لا معنى لها

الفصل الخامس عشر

بند ١٥ - ١

١ - $36, 49, 64;\ n^2$.

٣ - $\frac{1}{8(9)}, \frac{1}{9(10)}, \frac{1}{10(11)}; \frac{1}{(n+3)(n+4)}$.

٥ - $\sqrt{9}, 0, \sqrt{11};\ s_n=\begin{cases}\sqrt{n}, & n \text{ فردية} \\ 0, & n \text{ زوجية}\end{cases}$ أو $s_n=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]\sqrt{n}$

٧ - $1-\frac{6}{64}, 1-\frac{7}{128}, 1-\frac{8}{256}; 1-\frac{n}{2^n}$.

٩ - $5, 0, 6;\ s_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, & n \text{ فردية} \\ 0, & n \text{ زوجية}\end{cases}$. أو $s_n=\frac{1}{2}[1-(-1)^n]\frac{n+1}{2}$

١٥ - 2 ١٧ - لاتوجد نهاية .   ١٩ - ∞ ٢١ - $1/\sqrt{2}$ ٢٣ - $-\frac{3}{2}, -1, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{11}; -\frac{2}{3}$

٢٥ - $\frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{9}{10}, \frac{11}{17}; 0$.   ٢٧ - 0 ; $-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{18}, \frac{1}{32}$.   ٢٩ - 0 ; $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{17}}$.

٣١ - $0, \frac{\ln 2}{4}, \frac{\ln 3}{6}, \frac{\ln 4}{8}; 0$.   ٣٣ - $\frac{35}{6}, \frac{77}{18}, \frac{15}{4}, \frac{209}{60}; \frac{8}{3}$.   ٣٥ - $e, e^{1/2}, e^{1/3}, e^{1/4}; 1$.

٣٧ - $1, c, c^2, c^3; \infty$ if $c>1$, 1 if $c=1$, 0 if $-1<c<1$ ، لا توجد نهاية اذا كانت $c\leqslant -1$.

٣٩ - لا توجد نهاية $\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4$. ٤١ - 1 ; $\sin 1, 2\sin\frac{1}{2}, 3\sin\frac{1}{3}, 4\sin\frac{1}{4}$.

٤٣ - $2, 2, 2, 2; 2$.   ٤٥ - 1 ; $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$.   ٤٧ - تتباعد لكن ليس الى مالا نهاية .

٤٩ - $\lim_{n\to\infty} s_n=3$.   ٥١ - تتباعد لكن ليس الى مالا نهاية . ٥٣ - تتباعد الى مالا نهاية .

٥٥ - 3 ٥٧ - لا توجد نهاية . ٥٩ - ∞ ٧١ - لا

٨١ - $s_n=1/n,\ g(x)=\begin{cases}1/x, & x \text{ عدد صحيح} \\ 1, & x \text{ ليست عددا صحيحا}\end{cases}$.

بند ١٥ ـ ٢

١ - $1 ; \cdots + \frac{3}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2}-$.   ٣ - $0 ; \cdots + \frac{5}{4^4} + \frac{4}{4^3} - \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4} - 1$.

٥ - $x ; \cdots + \frac{127}{6} + \frac{66}{5} + \frac{29}{4} + \frac{10}{3} + \frac{3}{2}$.

٧ - $0 ; \cdots + \frac{\cos^2 4}{2^4} - \frac{\cos^2 3}{2^3} + \frac{\cos^2 2}{2^2} - \frac{\cos^2 1}{2} + 1-$.

٩ - $\frac{t^4}{\sqrt{3}} + \frac{t^5}{\sqrt{4}} + \frac{t^6}{\sqrt{5}} + \frac{t^7}{\sqrt{6}} + \frac{t^8}{\sqrt{7}} + \cdots$; ∞ if $t > 1$, 0 if $-1 \leq t \leq 1$, no limit if $t < -1$.

١١ - $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$.   ١٣ - $32 + 64 + 128; 2^n$.

١٥ - $\frac{x^6}{4!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^8}{6!}; \frac{x^{n+2}}{n!}$.   ١٧ - $-\frac{15}{7} + \frac{17}{8} - \frac{19}{9}; (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{n+1}$.

٢١ ـ تتباعد   ٢٣ ـ تتباعد .   ٢٥ ـ تتباعد .   ٢٧ ـ تتباعد .

٢٩ - $\frac{35}{6}$.   ٣١ - $\frac{1}{4}$.   ٣٣ - $\frac{3}{5}$.   ٣٥ - $\frac{713}{999}$.   ٣٧ - b .

٣٩ - $\frac{r(1+r)}{(1-r)^3}$.   ٤٣ - $\frac{1}{n+1}$.   ٤٥ - $(\frac{2}{3})^n$.   ٤٩ - $\frac{1}{2}$.   ٥١ - $\frac{1}{4}$.

٥٣ - (أ) 20, 28, 28, 1, 1

بند ١٥ ـ ٣

٣ ـ تتباعد .   ٥ ـ تتقارب .   ٧ ـ تتقارب .   ٩ ـ تتباعد .

١١ ـ تتقارب .   ١٣ ـ الباقي هو $x^n/(1-x)$.   ١٥ ـ نعم ؛ لا .

بند ١٥ ـ ٤

١ ـ تتباعد .   ٣ ـ تتقارب .   ٥ ـ تتباعد .   ٧ ـ تتقارب .

٩ ـ تتباعد .   ١١ ـ تتباعد .   ١٣ ـ تتباعد .   ١٥ ـ تتباعد .

١٧ ـ تتقارب .

بند ١٥ ـ ٥

١ ـ تتقارب .   ٣ ـ تتباعد .   ٥ ـ تتباعد .   ٧ ـ تتقارب .

٩ ـ تتقارب .   ١١ ـ تتقارب .   ١٣ ـ تتقارب .   ١٥ ـ تتباعد .

١٧ ـ تتباعد .　　١٩ ـ تتباعد .　　٢١ ـ تتباعد .　　٢٣ ـ تتقارب .

٢٥ ـ تتقارب .　　٢٧ ـ تتقارب .　　٢٩ ـ تتقارب .　　٣١ ـ تتباعد .

٣٣ ـ تتباعد .　　٣٥ ـ تتباعد اذا كانت $x \leqslant \frac{1}{2}$ ، تتقارب اذا كانت $x > \frac{1}{2}$.

٣٧ ـ تتباعد　　٣٩ ـ تتباعد اذا كانت $0 \leqslant a \leqslant 1$، تتقارب اذا كانت $a > 1$.

٤١ ـ تتقارب .　　٤٣ ـ تتباعد .　　٤٥ ـ تتباعد .　　٤٧ ـ تتباعد .

٤٩ ـ $\alpha > 1$.　　٥٣ ـ $\ln 100 + \gamma \approx 5.182$.　　٥٥ ـ $\ln \ln n + 0.367$.

٥٧ ـ فى الجملة بعد المتساوية (٣) وبعدها .

بند ١٥ ـ ٦

١ ـ تتقارب　　٣ ـ تتباعد　　٥ ـ تتباعد　　٧ ـ تتقارب

٩ ـ تتقارب　　١١ ـ تتقارب　　١٣ ـ تتباعد　　١٥ ـ تتباعد

١٧ ـ تتباعد　　١٩ ـ تتباعد　　٢١ ـ تتقارب　　٢٣ ـ تتباعد

٢٥ ـ تتباعد　　٢٧ ـ تتباعد　　٢٩ ـ 5 ؛ $1/(8!)$

٣١ ـ (أ) 10 ، (ب)　　٣٣ ـ 0.37　　٣٥ ـ 0.97　　٣٧ ـ $p < 0$

بند ١٥ ـ ٧

١ ـ مقيدة التقارب .　　٣ ـ مقيدة التقارب .

٥ ـ تباعدية .　　٧ ـ مطلقة التقارب .

٩ ـ تباعدية .　　١١ ـ مطلقة التقارب .

١٣ ـ مقيدة التقارب .　　١٥ ـ تباعدية .

١٧ ـ مقيدة التقارب

بند ١٥ ـ ٨

١ ـ تتقارب .　　٣ ـ تتقارب ..　　٥ ـ تتقارب .　　٧ ـ تتباعد .

٩ ـ تتقارب .　　١١ ـ تتقارب .　　١٣ ـ تتقارب .　　١٥ ـ تتباعد .

١٧ ـ تتباعد .　　١٩ ـ تتقارب .　　٢١ ـ تتباعد .　　٢٣ ـ تتقارب .

٢٥ ـ تتقارب . ٢٧ ـ تتقارب . ٢٩ ـ تتقارب . ٣١ ـ تتقارب .

٣٣ ـ تقاربية . ٣٥ ـ تقاربية . ٣٧ ـ تقاربية . ٣٩ ـ تباعدية .

٤١ ـ تباعدية . ٤٩ ـ تقاربية . ٥١ ـ تقاربية .

مسائل متنوعة

١ ـ تقاربية اذا كانت $|r| < 1$، تباعدية اذا كانت $|r| \geqslant 1$ ٣ ـ تقاربية ٥ ـ تقاربية

٧ ـ تقاربية . ٩ ـ تقاربية . ١١ ـ تباعدية . ١٣ ـ تقاربية .

١٥ ـ تباعدية . ١٧ ـ تقاربية . ١٩ ـ تباعدية . ٢١ ـ تقاربية .

٢٣ ـ تباعدية . ٢٥ ـ تقاربية . ٢٧ ـ تقاربية . ٢٩ ـ تباعدية .

٣١ ـ تقاربية . ٣٣ ـ تباعدية . ٣٥ ـ تباعدية . ٣٧ ـ تباعدية .

٣٩ ـ تقاربية . ٤١ ـ تباعدية . ٤٣ ـ تباعدية . ٤٥ ـ تباعدية .

٤٧ ـ تقاربية . ٤٩ ـ تقاربية اذا كان $|a| < 1$.، تباعدية اذا كان $-1 < a \leqslant 1$

٥١ ـ تباعدية إذا كانت $a \leqslant 1$ ٥٣ ـ تباعدية .

الفصل السادس عشر

بند ١٦ ـ ١

١ ـ $(-1,1)$. ٣ ـ $[-1,1]$. ٥ ـ $[0,2)$. ٧ ـ $[-1,1]$. ٩ ـ $(-2,2]$.

١١ ـ $(-\infty,\infty)$. ١٣ ـ $[-2,2)$. ١٥ ـ $(-2,2)$. ١٧ ـ $(-\infty,\infty)$. ١٩ ـ $(-1,1)$.

٢١ ـ $(-2,0]$. ٢٣ ـ $(-\infty,\infty)$. ٢٥ ـ $(-3, 3)$ ٢٧ ـ $(-\infty, \infty)$ ٢٩ ـ $(-\infty, \infty)$

٣١ ـ $[-2,1)$. ٣٣ ـ $(-\infty,\infty)$. ٣٥ ـ $[4 - 1/\sqrt{3}, 4 + 1/\sqrt{3}]$.

٣٧ ـ $[-\frac{5}{2},-\frac{1}{2})$. ٣٩ ـ $[1,5)$. ٤١ ـ $(-1, 1)$ ٤٣ ـ $[-4, 0]$

٤٥ ـ $[-1,1)$. ٤٧ ـ جميع x ٤٩ ـ $x > 1$ أو $x < -1$.

٥١ ـ $x \leqslant -1$ أو $x \geqslant 1$ ٥٣ ـ جميع $x \neq 0$ ٥٥ ـ تباعدية لجميع x

٥٧ ـ المتسلسلة ليست متسلسلة قوى فى $x - a$.

بند ١٦ - ٢

١ - -0.223

٣ - $1/(1+x^2)$. (أ) $-1 < x \leqslant 1$. (ب) 0.464.

(ج) $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2,\ 1.107$

٥ - $[-1,1];\ 0.0976$. ٧ - الواحد الصحيح هو النقطة الطرفية لفترة التقارب

٩ - $f(x) = \begin{cases} x + 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

١١ - (أ) $(-\infty,\infty),\ (-\infty,\infty)$ (a) . (د) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x$

بند ١٦ - ٣

٣ - $\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \cdots,\ [-1,1)$

٥ - $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,\ (-\infty,\infty)$

٧ - $2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{(x\ln 2)^2}{2!} + \frac{(x\ln 2)^3}{3!} + \cdots,\ (-\infty,\infty)$

٩ - $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,\ (-1,1)$

١١ - $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^3}{3!2^3} - \cdots,\ [-1,1]$

١٣ - $\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = 1 + x + \frac{1\cdot 3}{2!}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^3 + \cdots,\ (-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]$

١٥ - $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \cdots$

١٧ - $\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots$

١٩ - $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \cdots$

٢١ - $e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots\right]$, all x

٢٣ - $\ln|x| = -(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^3}{3} - \cdots,\ -2 \leqslant x < 0$

٢٥ - $\sin x = \sin c + (\cos c)(x-c) - \frac{\sin c}{2!}(x-c)^2 - \frac{\cos c}{3!}(x-c)^3 + \frac{\sin c}{4!}(x-c)^4 +$ لجميع x

٢٧ - $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)^4 + \cdots\right]$, all x.

٢٩ - $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{2!2^5}(x-4)^2 + \frac{1\cdot 3}{3!2^8}(x-4)^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4!2^{11}}(x-4)^4 + \cdots,\ 0 \leqslant x \leqslant 8.$

٣٣- $e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots$ ٣٥- $\cos 2x=1-\frac{x^2}{2!2^2}+\frac{x^4}{4!2^4}-\frac{x^6}{6!2^6}+\cdots$

٣٧- $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$ ٣٩- $\frac{\ln(1-x)}{x}=-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}-\cdots$

٤١- $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\cdots$ ٤٧- $\ln x$ ليس لها مشتقة عند 0

٤٩- ضع $x-a=h$ فى (١٤) واستبدل a بـ x

$$\cos(x+h)=\cos x-(\sin x)h-(\cos x)\frac{h^2}{2!}+(\sin x)\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

٥٣- $x^3-3x^2+8x-5=1+5(x-1)+(x-1)^3$

٥٥- $x^{10}=1-10(x+1)+45(x+1)^2-120(x+1)^3+210(x+1)^4-252(x+1)^5+210(x+1)^6-120(x+1)^7+45(x+1)^8-10(x+1)^9+(x+1)^{10}$

بند ١٦ - ٤

١ - $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\ (-\infty,\infty)$ ٣ - $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\ (-1,1]$.

٥ - $e^x=\frac{1}{e}\left[1+(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2!}+\frac{(x+1)^3}{3!}+\cdots\right],\ (-\infty,\infty)$

٧ - $\sin x=\sin c+(\cos c)(x-c)-\frac{\sin c}{2!}(x-c)^2-\frac{\cos c}{3!}(x-c)^3+\frac{\sin c}{4!}(x-c)^4+\cdots\ (\infty,\infty)$.

١١- ضع $n=0$ فى (٤).

بند ١٦ - ٥

١ - $T_0(x)=T_1(x)=1,\ T_2(x)=T_3(x)=1-x^2/2,\ T_4(x)=1-x^2/2+x^4/24$

٣ - $T_0(x)=0,\ T_1(x)=x-1,\ T_2(x)=(x-1)-(x-1)^2/2,\ T_3(x)=(x-1)-(x-1)^2/2+(x-1)^3/3$

٥ - $T_1(x)=11+6(x-2),\ T_2(x)=T_3(x)=T_{10}(x)=11+6(x-2)+(x-2)^2$

٧ - $T_1(x)=-7+12(x+2),\quad T_2(x)=-7+12(x+2)-6(x+2)^2,\quad T_3(x)=T_4(x)=-7+12(x+2)-6(x+2)^2+(x+2)^3$

٩ - $T_1(x)=3-15(x+1),\ T_2(x)=3-15(x+1)+16(x+1)^2,\ T_4(x)=T_6(x)=3-15(x+1)+16(x+1)^2-7(x+1)^3+(x+1)^4$

١١- $T_0(x)=T_1(x)=-1,\ T_2(x)=-1-x^2$

١٣- $T_0(x)=1,\ T_1(x)=1+x/2,\ T_2(x)=1+x/2-x^2/8$

١٥- $\pi\approx 2.83,\ \pi\approx 3.18$ ١٧- 0.08 ١٩- 0.005 ٢١- $0\le x\le 25°36',\ 0\le x\le 71°19'$

٢٣- $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4\right]$

٢٥ - أربعة ، ستة   ٢٧ - أربعة   ٢٩ - 1.6484   ٣١ - 0.1974   ٣٣ - 0.7432

٣٥ - 3.3192 الخطأ < 0.0028 ٣٧ - 0.9801 الخطأ < 0.0000 ٣٩ - 0.0487; error < 0.0000

٤١ - 0.8192 الخطأ < 0.0000 ٤٣ - 0.3679   ٤٥ - 0.9986   ٤٧ - 0.2915

٤٩ - $\ln x + a(x-1) + \frac{a^2}{2!2}(x^2-1) + \frac{a^3}{3!3}(x^3-1) + \cdots$.

٥١ - 0.20   ٥٣ - 1.12   ٥٥ - 0.0996677   ٥٧ - 0.31028   ٥٩ - 0.4514   ٦١ - 1

٦٣ - $-\frac{1}{8}$ ٦٥ - 0   ٦٧ - $\frac{1}{2}$ ٦٩ - 2   ٧١ - 0   ٧٣ - -1

بند ١٦ - ٦

١ - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ٣ - $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

٥ - $(2-c)^9 = 512 - 2304c + 4608c^2 - 5376c^3 + 4032c^4 - 2016c^5 + 672c^6 - 144c^7 + 18c^8 - c^9$

٧ - $\frac{77 \cdot 76 \cdot 75 \cdots 55}{23!}$ ١١ - $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots,\ (-1,1)$

١٣ - $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,\ (-1,1)$

١٥ - $\left(1+\frac{y}{3}\right)^{3/2} = 1 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2!2^2}\frac{y^2}{3} - \frac{1}{3!2^3}\frac{y^3}{3^2} - \frac{1\cdot 3}{4!2^4}\frac{y^4}{3^3} + \cdots,\ [-3,3]$

١٧ - $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2!2^2}x^6 + \frac{1}{3!2^3}x^9 - \cdots,\ [-1,1]$

١٩ - $(1+u)^{-3/5} = 1 - \frac{3}{5}u + \frac{3\cdot 8}{2!5^2}u^2 - \frac{3\cdot 8\cdot 11}{3!5^3}u^3 + \cdots,\ (-1,1]$

٢١ - $\frac{1}{(1+3t)^3} = 1 - 3\cdot 3t + \frac{3\cdot 4\cdot 3^2}{2!}t^2 - \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 3^3}{3!}t^3 + \cdots,\ (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$

٢٣ - $\frac{(1-w^2)^{4/3}}{w} = \frac{1}{w} - \frac{4}{3}w + \frac{4}{2!3^2}w^3 + \frac{4\cdot 2}{3!3^3}w^5 + \cdots,\ [-1,1].$

٢٥ - $\sqrt[3]{y+2} = \sqrt[3]{2}\left(1 + \frac{1}{6}y - \frac{2}{2!6^2}y^2 + \frac{2\cdot 5}{3!6^3}y^3 - \cdots\right),\ [-2,2]$

٢٧ - $u^2\sqrt{2+5u} = \sqrt{2}\left(u^2 + \frac{5}{2^2}u^3 - \frac{5^2}{2!2^4}u^4 + \frac{3\cdot 5^3}{3!2^6}u^5 - \cdots\right),\ [-\frac{2}{5},\frac{2}{5}]$

٢٩ - $\frac{u+2}{u-1} = -2 - 3u - 3u^2 - 3u^3 - \cdots,\ (-1,1)$

٣١ - $\sqrt{3+\sin^2 x} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{6}\sin^2 x - \frac{1}{2!6^2}\sin^4 x + \frac{1\cdot 3}{3!6^3}\sin^6 x - \cdots\right)$, all x

٣٣ - $(x-3)^{1/2}=x^{1/2}\left[1-\frac{1}{2}\frac{3}{x}-\frac{1}{2!2^2}\left(\frac{3}{x}\right)^2-\frac{3}{3!2^3}\left(\frac{3}{x}\right)^3-\frac{3\cdot5}{4!2^4}\left(\frac{3}{x}\right)^4-\cdots\right],\ x\geqslant3$

٣٥ - 2.7071 ٣٧ - ضع $x=1$ فى (١) ٣٩ - 0.61 ٤١ - 1.00.

٤٣ - 0.18 ٤٥ - 330.87 ٤٧ - $\frac{1}{2}$ ٤٩ - $\frac{1}{6}$

٥١ - 9.899 ٥٣ - 5.066 ٥٥ - 0.508 ٥٧ - 0.481

٥٩ - 0.049 ٦١ - 0.494 ٦٣ - 4.990

تذييل

بند ت ـ ١

٣ - (أ) $(2,-3),\ (1,5),\ (0,3)$ (ب) $(-2,3),\ (-1,-5),\ (0,-3)$ (ج) $(-2,-3),\ (-1,5),\ (0,3)$

٥ - (أ) $2, 6, -6, -6, 3$ (ب) $3, -3, 6, 9, -3.$ ٧ - لا ٩ - 15

١١ - $(3,6)$ ١٣ - $(-\frac{9}{2},\frac{5}{2})$ ١٥ - 5 ١٧ - $\sqrt{305}/2$

١٩ - 5 ٢١ - لا ٢٣ - لا ٢٥ - $\frac{39}{2}$

٣٣ - 4 or -3 ٣٥ - $(0,\pm a).$ ٣٧ - $5x+3y=1$ ٣٩ - $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

٤١ - $(4,-1),\ (1,2).$ ٤٣ - $(4,13),\ (4,-3).$

بند ت ـ ٢

٣٩ - $a<0,\ x^4+y^2=-3$ ٥٣ - متكافئتان ٥٥ - غير متكافئتين ٥٧ - متكافئتان

بند ت ـ ٣

١ - $x^2+y^2=49$ ٣ - $(x+6)^2+(y+1)^2=1.$ ٥ - $(x-a)^2+y^2=a^2$

٧ - $x^2+y^2=80$ ٩ - $(x-2)^2+(y-4)^2=17.$ ١١ - $(x+3)^2+(y-3)^2=9.$

١٣ - $x^2+y^2-4x-2y=0$ ١٥ - $(0,5),5$ ١٧ - لا يوجد شكل بيانى

١٩ - $(0,-\frac{1}{3}),\ \sqrt{6}$ ٢٧ . $(4,0)$ ٣١ - $10-5\sqrt{2}$

٣٣ - $x^2+y^2-4x+4y=49\pm12\sqrt{13}$ ٣٥ - $\sqrt{22}$

٣٧ - دائرة ، المركز عند $(\frac{5}{2},-1)$ ، نصف القطر $\frac{1}{2}$.

٣٩ - دائرة ، المركز عند $(r, 0)$ ، نصف القطر $2r$.

٤١ - $k \geqslant 4\sqrt{2}$. ٤٣ - $2x^2 + y^2 - 16x \pm \sqrt{7}x + 14 = 0$.

٤٥ - $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25,\ (x-29)^2 + (y-29)^2 = 29^2$.

٤٧ - دائرة ، المركز عند $(-2, 4)$ ، نصف القطر $\sqrt{17}$ ، فيما عدا الجزء داخل الدائرتين المعطيتين .

٤٩ - $x^2 + y^2 + 3x + 3y = 0$. ٥١ - $2x^2 + 2y^2 - x + 4y - 6 = 0$.

بند ت - ٤

١ - $1, \pi/4$. ٣ - $-1, 3\pi/4$. ٥ - $1/\sqrt{3}, \pi/6$ ٧ - $\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}$

٩ - $-c/b, b/c$. ١١ - لا يوجد ميل ، ٢١ - 0 Yes. ٢٣ - Yes.

٢٥ - لا ٢٧ - نعم ٢٩ - Yes ٣٧ - $\frac{17}{3}$

٣٩ - 2 . ٤١ - $(-6,-3)$. ٤٣ - $(7,-2), (1,-6)$

بند ت - ٥

١ - $2x - y + 4 = 0$. ٣ - $7x - 4y + 8 = 0$. ٥ - $mx - y - ma = 0$.

٧ - $x = -6$. ٩ - $x = 2$. ١١ - $hx + ry - hr = 0$.

١٣ - $2x + 2y - 9 = 0$. ١٥ - $2x - 5y - 6 = 0,\ 5x + 2y - 15 = 0$.

١٧ - $x = 0,\ y = 0$. ١٩ - $ax + by - 5b = 0,\ bx - ay + 5a = 0$.

٢١ - $\frac{3}{4};\ x = 4,\ y = -3$. ٢٣ - $\frac{1}{3};\ x = -11,\ y = \frac{11}{3}$.

٢٥ - 0 ؛ لا يوجد جزء مقطوع من المحور x ، $y = \frac{2}{3}$ ٢٧ - $-a/b;\ x = -c/a,\ y = -c/b$.

٢٩ - $1/m,\ x = b,\ y = -b/m$. ٣١ - $(10, -\frac{2}{3})$. ٣٣ - $(2, 2)$

٣٩ - (أ) $5x - 2y + 5 = 0$ (ب) $2x + 5y - \frac{25}{2} = 0$ ، (ج) $x = 1$ (د) $2x - y + 3 = 0$

٤١ - $(-3, 4)$ ٤٣ - لا يوجد ٤٥ - الخطان ينطبقان .

٤٧ - (أ) $2x - y + 8 = 0$ ، (ب) $x + 2y + 9 = 0$ ٤٩ - $A'B = B'A$.

٥١ - $(0,-8), (10,2)$. ٥٣ - لا يوجد ٥٥ - $x + 3y = 0$.

٥٧ - $2x - 3y + 2 = 0$. ٥٩ - $x + y \pm 10\sqrt{2} = 0$. ٦١ - $Ax + By - Ax_1 - By_1 = 0$.

٦٣ - 1 . ٦٥ - $\frac{8}{5}$. ٦٧ - $6/\sqrt{5}$. ٦٩ - 76 .

٧١ - $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 21 = 0$.   ٧٣ - $(5x-4)^2 + 25y^2 = 221$.

٧٥ - $4x^2 + 4y^2 - 48x + 4y = 0$.   ٧٧ - $x + y - 8 = 0$.

٧٩ - خط عمودى على الخط الواصل بين النقطتين الثابتتين .

٨١ - $4x - y - 18 = 0$.

بند ت - ٦

١ - $x - 2y = 0,\ x - 2y = 0$. ، متماثل فى نقطة الأصل .

٣ - $x = 3,\ x = -3$. متماثل فى المحور x .

٥ - $y = -x^4,\ y = x^4$ متماثل فى المحور y .

٧ - $y = -x^3,\ y = -x^3$ متماثل فى نقطة الأصل .

٩ - $y = -x/(x^2+1),\ y = -x/(x^2+1)$ ، متماثل فى نقطة الأصل .

١١ - $y = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n},\ y = -(1 + x^2 + \cdots + x^{2n})$ ، متماثل فى المحور y .

١٣ - $y = \cos x,\ y = -\cos x$ ، متماثل فى المحور y .

١٥ - نعم   ١٩ - $x - y + 4 = 0$.   ٢١ - $x = \frac{1}{3}y$.   ٢٣ - $x = 0$

٢٥ - $x = \frac{3}{2}y - 5$.   ٢٧ - $xy = 1$.   ٢٩ - $-m, -m$.

بند ت - ٧

١ - $y^2 = 24x$.   ٣ - $y^2 = -10x$.   ٥ - $y^2 = 4ax$

٧ - $(0,0),\ (0,-\frac{5}{2}),\ y = \frac{5}{2}$.   ٩ - $(0,0),\ (0, 1/4c),\ y = -1/4c$

١١ - $y^2 = 12x - 24$.   ١٣ - $y^2 + 8y + 16x + 80 = 0$ ٢٣ - $|a + k|\ 4|$

٣٥ - (أ) $y = -\frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ ، (ب) $x = \frac{7}{6}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{2}{3}$.

٤١ - $x^2 = 32y$ ٤٣ - القطع المكافىء $y^2 = 2px$

٤٥ - $(10 + \sqrt{34}, -2 - \sqrt{34}),\ (10 - \sqrt{34}, -2 + \sqrt{34})$:

٤٧ - $(0,0),\ (4p, 4p)$ ٤٩ - $(\pm 3, 4),\ (\pm 2\sqrt{6}, -1)$.   ٥٣ - $2ax - y - a^2 = 0$.

بند ت ـ ٨

١ ـ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. ٣ ـ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{29}=1$. ٥ ـ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. ٧ ـ $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$.

٩ ـ $(\pm1,0)$, $(0,\pm2\sqrt{2})$, $(0,\pm3)$. ١١ ـ $(0,\pm3)$, $(\pm4,0)$, $(\pm5,0)$ ..

١٣ ـ دائرة ١٥ ـ $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0,\pm1)$. ١٧ ـ $\frac{3}{5}$, $y=\pm\frac{25}{3}$.

١٩ ـ $1/\sqrt{5}$, $x=\pm5$. ٢١ ـ 0 ، لا توجد أدلة اذ أن المنحنى دائرة

٢٣ ـ $2x^2+y^2-8x=0$. ٢٩ ـ $x^2/12+y^2/6=1$. ٣١ ـ $x^2+4y^2=64$.

بند ت ـ ٩

١ ـ $x^2/16-y^2/20=1$. ٣ ـ $y^2/36-x^2/64=1$. ٥ ـ $y^2-x^2=8$.

٧ ـ $x^2-y^2=a^2$. ٩ ـ $(\pm3,0)$, $(\pm\sqrt{13},0)$, $y=\pm2x/3$.

١١ ـ $(0,\pm\sqrt{12})$, $(0,\pm\sqrt{14})$, $y=\pm\sqrt{6}x$. ١٣ ـ $(\pm\sqrt{5},0)$, $(\pm\sqrt{7},0)$, $y=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}x$.

١٥ ـ $(0,\pm\frac{2}{3})$, $(0,\pm2\sqrt{2}/3)$, $y=\pm x$. ١٧ ـ $(\pm a,0)$, $(\pm\sqrt{2}a,0)$, $y=\pm x$.

١٩ ـ $\sqrt{41}/4$, $x=\pm16/\sqrt{41}$. ٢١ ـ $\sqrt{13}/3$, $y=\pm9/\sqrt{13}$.

٢٣ ـ $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x=\pm3\sqrt{\frac{2}{3}}$. ٢٧ ـ $3x^2-y^2-18x+24=0$.

٢٩ ـ $y^2/5-x^2/2=1$.

٣٣ ـ طويل وضيق . عندما تزداد e ، القطع الزائد يتسع أكثر .

بند ت ـ ١٠

١ ـ $x^2=6(y-1)$. ٣ ـ $(x-5)^2=-8(y-3)$. ٥ ـ $(y-b)^2=-4ax$.

٧ ـ $\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. ٩ ـ $\frac{4(x-3)^2}{225}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$.

١١ ـ $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{(x+3)^2}{5}=1$. ١٣ ـ $\frac{(y-2)^2}{4}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$.

١٥ ـ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$.

١٧ ـ (أ) قطع مكافىء ، (ب) $(6, 0)$ ، (ج) $(6, 1/32)$.

١٩ ـ (أ) قطع زائد ،(ب) $(-5, 3-\sqrt{2})$, $(-5, 3+\sqrt{2})$ ،

(ج) $(-5, 3-3\sqrt{3})$, $(-5, 3+3\sqrt{3})$ ، (د) $y-3=\pm(\sqrt{2}/5)(x+5)$

٢١ ـ (أ) قطع ناقص ، (ب) $(-2,3)$, $(4,3)$ (ج) $(1-\sqrt{5}, 3)$, $(1+\sqrt{5}, 3)$

٢٣ ـ (أ) قطع مكافىء ، (ب) $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ ، (ج) $(0,-\frac{1}{2})$

٢٥ ـ (أ) دائرة ، (ج) $(0,-\frac{1}{2})$

٢٧ ـ (أ) قطع زائد ، (ب) $(-1,-4)$ ، $(-1,-2)$.

(ج) $(-1, -3-\sqrt{2})$، $(-1, -3+\sqrt{2})$ ، (د) $y+3=\pm(x+1)$

٢٩ ـ (أ) قطع زائد ، (ب) $(1,-\sqrt{3})$، $(1,\sqrt{3})$ ، (ج) $(1,-\sqrt{\frac{11}{2}})$، $(1,\sqrt{\frac{11}{2}})$ ،
(د) $y=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}\,(x-1)$

٣١ ـ (أ) خطان متقاطعان .

٣٣ ـ (أ) خطان متوازيان .

٣٥ ـ (أ) لا يوجد شكل بيانى .

٣٧ ـ $y-y_1=m(x-x_1)$.

٤١ ـ $5x^2+9y^2+6x-72y+117=0$

٤٣ ـ $x'^2+y'^2=6$.

٤٥ ـ $y'=x'^3$.

٤٩ ـ $(-4,1)$.

بند ت ـ ١١

١ ـ $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

٣ ـ $(-\frac{1}{2},\sqrt{3}/2)$.

٥ ـ $y'=(8-5\sqrt{3})x'$.

٧ ـ $y'=-x'/m$.

٩ ـ $5x^2+26xy+5y^2-288=0$.

١١ ـ $7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2+(28-6\sqrt{3})x+(26-12\sqrt{3})y-(23-12\sqrt{3})=0$

١٣ ـ قطع ناقص ، $3x'^2+y'^2=2$

١٥ ـ خطان مستقيمان ؛ $x'=\pm3/\sqrt{10}$

١٧ ـ قطع زائد ؛ $2y'^2-2x'^2=1$

١٩ ـ قطع ناقص ؛ $x''^2+3y''^2=8$

٢١ ـ قطع زائد ؛ $3x''^2-2y''^2=\frac{54}{12}$

٢٣ ـ قطع ناقص ؛ $x'^2+6y'^2=6$

٢٥ ـ خطان مستقيمان ؛ $x'=\pm3/\sqrt{2}$

٢٧ ـ خطان مستقيمان ، $x'=0,\ y'=0$

٢٩ ـ $(\frac{3}{2},-1)$، $(\frac{1}{2},1)$.

٣١ ـ $(9,3)$، $(1,-3)$.

٣٣ ـ $x=0,\ y=0$.

٣٥ ـ $y=\left(-1\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x$.

٣٧ ـ $\sqrt{2}$.

قائمة المصطلحات العلمية

(أ)

Union	اتحاد
Continuity	اتصال
Intercepts	اجزاء مقطوعة
Probability	احتمال
Abscissa	احداثى سينى
Ordinate	احداثى صادى
Polar coordinate	احداثيات قطبية
Cartesian coordinate	احداثيات كارتيزية
Rectangular coordinate	احداثيات متعامدة
Statistics	احصاء
Asymptotic test	اختبار التقرب
Integral test	اختبار التكامل
Cauchy's root test	اختبار كوشى للجذر النونى
Ratio test	اختبار النسبة
Eccentricity	اختلاف مركزى
Adiabatic	ادياباتى ـ لاتبادلى
Quadrants	أرباع
Decimals	أرقام عشرية
Mathematical induction	استنتاج رياضى
Real numbers	أعداد حقيقية
Natural numbers	أعداد طبيعية
Rational number	أعداد كسرية
Complex numbers	أعداد مركبة
Steepness	انحدار
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار

أوتار بؤرية عمودية	Latera recta
أوليات	Preliminaries
ايبسيكلويد	Epicycloid

(ب)

بديل	Replica
بسط	Numerator
بكتيريا	Bacteria
بندول بسيط	Simple pendulum
بؤرة	Focus
بولونيوم	Polonium

(ت)

تبادل حرارى	Heat exchange
تباعدية	Divergent
تخيلى	Imaginary
تداخل	Overlap
تذييل	Supplement
تردد	Frequency
تركيبة خطية	Linear combination
ترليون (10^{18} فى انجلترا ، 10^{12} فى أمريكا)	Trillion
تروشويد	Trochoid
تفاضل ضمنى	Implicit differentiation
تفاضل لوغاريتمى	Logarithmic differentiation
تقاربية	Convergent
تقاربية تقاربا مطلقا	Absolutely convergent
تقاربية تقاربا مقيدا	Conditionally convergent
تقاطع	Intersection
تقدير دائرى	Radian measure
تقعر	Concavity
تكامل	Integration
تكاملات معتلة	Improper integrals
تكامل بالتجزىء	Integration by parts

Indefinite integral	تكامل غير محدود
Definite integral	تكامل محدد (تكامل معين)
Lemma	تمهيدية

(ث)

Euler's constant	ثابت أويلر
Thorium	ثوريوم

(ج)

Gravity	جاذبية أرضية
Radical	جذر
Solid	جسم
Solid of revolution	جسم دورانى
Neighborhood	جوار
Deleted neighborhood	جوار منقوص

(ح)

Riemann sum	حاصل جمع ريمان
Inner product	حاصل ضرب داخلى
Scalar product	حاصل ضرب عددى
Greatest lower bound	حد أدنى أكبر
Least upper bound	حد أعلى أصغر
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Trigonometry	حساب المثلثات
Spiral	حلزون
Spiral of Archimedes	حلزون ارشميدس
Partial sums	حواصل جمع جزئية

(خ)

Rounding off error	خطأ تقريب الأرقام
Asymptote	خط تقاربى

(د)

Function	دالة
Exponential function	دالة أسية
Signum function	دالة الاشارة
Bessel function	دالة بسل
Vector-valued function	دالة بقيم متجهة
Composite function	دالة تركيبية
Total cost function	دالة التكلفة الكلية
Total revenue function	دالة الدخل الكلى
Marginal revenue function	دالة الدخل الهامشى
Even function	دالة زوجية
Explicit function	دالة صريحة
Odd function	دالة فردية
Rational function	دالة كسرية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة
Trigonometric function	دالة مثلثية
Inverse trigonometric function	دالة مثلثية عكسية
Transcendental function	دالة مسترسلة
Monotonic function	دالة مطردة
Integrand	دالة مكاملة
Degree	درجة
Directrix	دليل
Rotation of axes	دوران المحاور

(ر)

Radium	راديوم
Vertex	رأس

(ز)

Angle of elevation	زاوية الارتفاع

Phase angle	زاوية الطور
Inclination angle	زاوية الميل

(س)

Velocity	سرعة
Instantaneous velocity	سرعة لحظية
Average velocity	سرعة متوسطة
Conoid	سطح شبه مخروطى
Ellipsoid	سطح ناقص
Amplitude	سعة

(ش)

Trapezoid	شبه منحرف
Boundary cond:tion	شرط حدى
Work	شغل
Rhombus	شكل معيّن

(ص)

Stifness	صلابة
Image	صورة
Indeterminate forms	صور غير محددة
Point-slope form	صور ميل ونقطة
Formula	صيغة
Reduction formula	صيغة الاختزال

(ط)

Kinetic energy	طاقة الحركة

(ع)

Factor	عامل
Acceleration	عجلة
Deceleration	عجلة تقصيرية

Scalar	عدد (مقدار عددى)
Prime number	عدد أولى
Cluster number	عدد تجمع
Multiplicity	عدد مرات التكرار
Moment	عزم
Torque	عزم دوران
Astronomy	علم الفلك
Collinear	على استقامة واحدة
Half-life	عمر النصف
Normal, Perpendicular, Orthogonal	عمودى
Elements	عناصر
Differentials	عناصر تفاضلية

(غ)

Not continuous	غير متصل

(ف)

Sets	فئات
Subset	فئة جزئية
Empty set	فئة خاوية
Closed set	فئة مقفلة
Interval	فترة
Interval of convergence	فترة التقارب
Hypothesis	فرض
Vector space	فضاء متجه

(ق)

Differentiable	قابلة للتفاضل
Strict	قاطع
Chain rule	قاعدة سلسلة
Simpson's rule	قاعدة سمسون
Trapezoidal rule	قاعدة شبه المنحرف

L'Hospitals rule	قاعدة لوبيتال
Projectile	قذيفة
Pole	قطب
Hyperbola	قطع زائد
Conic section	قطع مخروطى
Parabola	قطع مكافىء
Semicubical parabola	قطع مكافىء نصف تكعيبى
Ellipse	قطع ناقص
Turning force	قوة دوران
Resultant force	قوة محصلة
Absolute value	قيمة مطلقة

(ك)

Catenary	كتينة
Density	كثافة
Polynomials	كثيرات حدود
Partial fraction	كسر جزئى

(ل)

Irreducible	لاتقبل التحليل
Natural logarithms	لوغاريتمات طبيعية
Common logarithms	لوغاريتمات عادية
Limacon	ليماسون

(م)

Fluid	مائع
Inequality	متباينة
Couchy-Schwars inequality	متباينة كوشى شفاتز
Sequences	متتابعات
Oscillating sequences	متتابعة تذبذبية
Homogeneous	متجانس
Vector	متجه
Position vector	متجه الموضع
Plane vectors	متجهات مستوية

Taylor's series	متسلسلة تايلور
Telescopic series	متسلسلة تلسكوبية
Harmonic series	متسلسلة توافقية
Alternating series	متسلسلة متبدلة الاشارة
Maclourin's series	متسلسلة مكلورين
Geometrical series	متسلسلة هندسية
Power series	متسلسلات القوى
Continuous	متصل
Independent variable	متغير مستقل
Geometrical progression	متوالية هندسية
Arithmatic mean	متوسط حسابى
Isosceles triangle	مثلث متساوى الساقين
Locus	محل هندسى
Axis	محور
Main axis	محور أساسى
Minor axis	محور أصغر
Major axis	محور أكبر
Transverse axis	محور قاطع
Range	مدى
Least squares	مربعات صغرى
Centre of gravity	مركز الثقل
Centre of mass	مركز الكتلة
Centroid	مركز متوسط
Projection	مسقط
Derivatives	مشتقات
n-factorial	مضروب n
Polygon	مضلع
Parametric equations	معادلات بارامترية
Differential equations	معادلات تفاضلية
Separable differential equation	معادلات تفاضلية قابلة للفصل
Non-parametric equations	معادلات غير بارامترية
Quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية

Coefficient	**معامل**
Coefficient of friction	**معامل الاحتكاك**
Related rates	**معدلات مرتبطة ببعضها**
Antiderivatives	**معكوس تفاضلى**
Norm	**معيار**
Denominator	**مقام**
Magnitude	**مقدار**
Speed	**مقدار السرعة**
Cross-section	**مقطع**
Reciprocal	**مقلوب**
Restricted	**مقيد**
Tangent	**مماس**
Cardoid	**منحنى قلبى (كاردويد)**
Lemniscate	**منحنى الليمنسكيت**
Equiangular curve	**منحنى متساوى الزوايا**
Smooth curve	**منحنى منسق (منحنى سلس)**
Involute	**منشأ**
Region	**منطقة**
Discontinuous	**منفصل**

(ن)

Corollary	**نتيجة**
Radius of convergence	**نصف القطر التقارب**
Radius vector	**نصف القطر المتجه**
Domain	**نطاق**
Cartisian corrdinate system	**نظام احداثيات كرتيزى**
Rectangular system	**نظام قائم**
Probability theory	**نظرية الاحتمالات**
Binomial theorem	**نظرية ذات الحدين**
Mean value therorem	**نظرية القيمة المتوسطة**
Intermediate value theorem	**نظرية القيمة الوسط**
Fulcrum	**نقطة ارتكاز**

Origin	نقطة أصل
Point of inflection	نقطة انقلاب
Interior point	نقطة داخلية
End point	نقطة طرفية
Translation of axes	نقل المحاور
Limit	نهاية
Lower limit of integration	نهاية أدنى للتكامل
Minima	نهاية صغرى
Maxima	نهاية عظمى
Local maxima and minima	نهاية عظمى وصغرى محلية (موضعية)
Relative maximum and minimum	نهاية عظمى وصغرى نسبية
Upper limit of intergration	نهاية عليا للتكامل

(هـ)

Analytical geometry	هندسية تحليلية
Hypocycloid	هيبوسيكلويد
Four-cusped hypocycloid	هيبوسيكلويد ذات أربعة أنياب

(و)

Chord	وتر
Latus Rectum	وتر بؤرى عمودى
Four-leaved rose	وردة بأربع ورقات
Three-leaved rose	وردة ذات ثلاث ورقات

(ى)

refine	ينقح

المصطلحات العلمية

Glossary

(A)

Abscissa	احداثى سينى
Absolutely convergent	تقاربية تقاربا مطلقا
Absolute value	قيمة مطلقة
Acceleration	عجلة
Adiabatic	ادياباتى - لاتبادلى
Alternating series	متسلسلات متبدلة الاشارة
Amplitude	سعة
Analytic geometry	هندسة تحليلية
Angle of elevation	زاوية الارتفاع
Angular velocity	السرعة الزاوية
Antiderivative	معكوس تفاضلى
Astronomy	فلك
Asympote	خط تقاربى
Asymtotic test	اختبار التقارب
Average velocity	سرعة متوسطة
Axis	محور

(B)

Bacteria	بكتيريا
Bessel function	دالة بسل
Binomial theorem	نظرية ذات الحدين
Boundary condition	شرط حدى

(C)

Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Cardoid	المنحنى القلبى (كاردويد)

Cartesian coordinates	الاحداثيات الكارتيزية
Catenary	منحنى الكتينة
Cauchy-Schwarz inequality	متباينة كوشى - شفارتز
Cauchy's root test	اختبار كوشى للجذر
Centre of gravity	مركز الثقل
Centre of mass	مركز الكتلة
Centroid	مركز متوسط
Chain rule	قاعدة السلسلة
Chord	وتر
Coefficient	معامل
Coefficient of friction	معامل الاحتكاك
Common logarithms	لوغاريتمات عادية
Comparison test	اختبار مقارنة
Complex numbers	اعداد مركبة
Concavity	تقعر
Conditionally convergent	تقاربية تقاربا مقيدا
Conoid	سطح شبه مخروطى
Continuity	اتصال
Convergent	تقاربية
Corollary	نتيجة
Cross-section	مقطع

(D)

Decerleration	عجلة تقصيرية
Decimals	أرقام عشرية
Decreasing function	دالة متناقصة
Definite integral	تكامل محدد (التكامل المعين)
Degree	درجة
Deleted neighborhood	جوار ناقص
Denominator	مقام
Density	كثافة
Derivatives	مشتقات

Differentiable	قابلة للتفاضل
Differential equations	معادلات تفاضلية
Differentials	عناصر تفاضلية
Directix	دليل
Divergent	تباعدية
Divisor	قاسم
Domain	نطاق

(E)

Eccentricity	اختلاف مركزى
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	سطح ناقص
Empty set	فئة خاوية
End point	نقطة طرفية
Euler's constant	ثابت اويلر
Even function	دالة زوجية
Explicit function	دالة صريحة
Exponents	اسس
Exponential function	دالة أسية

(F)

Factor	عامل
Fluid	مائع
Focus	بؤرة
Formula	صيغة
Four-cusped hypocycloid	هيبوسيكلويد ـ ذات أربعة أنياب
Four-leaved rose	وردة أربع ورقات
Fulcrum	نقطة ارتكاز
Function	دالة

(G)

Geometrical progression	متوالية هندسية
Geometical series	متسلسلة هندسية

Gravity	جاذبية أرضية
Greatest lower bound (G.L.B.)	حد أدنى أكبر

(H)

Half life	عمر النصف
Harmonic series	متسلسلة توافقية
Heat-exchange	تبادل حرارى
Homogeneous	متجانس
Hypocycloid	هيبوسيكلويد
Hyperbola	قطع زائد
Hypothesis	فرض

(I)

Image	صورة
Imaginary	تخيلى
Implicit differentiation	تفاضل ضمنى
Improper integrals	تكاملات معتلة
Inclination angle	زاوية الميل
Increasing function	دالة متزايدة
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Independent variable	متغير مستقل
Inequality	متباينة
Infinite series	متسلسل لانهائية
Integral test	اختبار تكامل
Integration	تكامل
Integration by parts	تكامل بالتجزىء
Intercepts	اجزاء مقطوعة
Interior point	نقطة داخلية
Intersection	تقاطع
Interval of convergence	فترة تقارب
Involute	منشأ
Isolated point	نقطة منعزلة
Isosceles triangle	مثلث متساوى الساقين

(K)

Kinetic energy	طاقة الحركة

(L)

Latera recta	أوتار بؤرية عمودية
Latus rectum	وتر بؤرى عمودى
Least squares	مربعات صغرى
Least upper bound (L.U.B)	حد أعلى أصغر
Lemma	تمهيدية
Lemniscate	ليمنسكيت
L'Hospitals' rule	قاعدة لوبيتال
Limacon	ليماسون
Limit	نهاية
Linear combination	تركيبة خطية
Local maxima and minima	نهايات عظمى وصغرى محلية
Locus	محل هندسى
Logarithmic differentiation	تفاضل لوغاريتمى
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Lower limit of integration	الحد الأدنى للتكامل

(M)

Maclaurin series	متسلسلة مكلورين
Magnitude	مقدار
Main axis	محور أساسى
Major axis	محور أكبر
Marginal revenue function	دالة الدخل الهامشى
Mathematical induction	الاستنتاج الرياضى
Maxima	نهايات عظمى
Mean value theorem	نظرية القيمة المتوسطة
Minima	نهاية صغرى
Minor axis	محور أصغر
Moment	عزم

Monotonic function	دالة مطردة
Multiplicity	عدد مرات التكرار

(N)

Natural logarithms	لوغاريتمات طبيعية
Natural numbers	أعداد طبيعية
Neighborhood	جوار
n-factorial	مضروب n
Non-parametric equation	معادلة غير بارامترية
Norm	معيار
Normal	عمودى
Not continuous	غير متصل
Numerator	بسط

(O)

Odd function	دالة فردية
Point-slope form	صورة الميل ونقطة
Ordinate	احداثى صادى
Origin	نقطة الاصل
Orthogonal	عمودى
Oscillating sequence	متتابعة تذبذبية
Overlap	تداخل

(P)

Parabola	قطع مكافىء
Parametric function	دالة بارامترية
Partial fraction	كسور جزئية
Partial sums	حواصل جمع جزئية
Perpendicular	عمودى
Phase angle	زاوية السطور
Plane vectors	متجهات مستوية

Point of inflection	نقطة الانقلاب
Polar coordinates	احداثيات قطبية
Pole	قطب
Polonium	بولونيوم
Polygon	مضلع
Polynomials	كثيرات حدود
Position vector	متجه الموضع
Power function	دالة قوى
Power series	متسلسلة قوى
Prelimiaries	أوليات
Probability theory	نظرية احتمالات
Projectile	قذيفة
Projection	مسقط

(Q)

Quadratic equation	معادلة من الدرجة الثانية
Quadrants	أرباع

(R)

Radian measure	تقدير دائرى
Radical	جذر
Radium	راديوم
Radius of convergence	نصف قطر التقارب
Radius vector	نصف القطر المتجه
Range	مدى
Rational fraction	كسور جزئية
Rational numbers	أعداد كسرية
Real numbers	أعداد حقيقية
Reciprocal	مقلوب ـ معكوس
Rectangular coordinates	احداثيات متعامدة
Reduction formula	صيغة اختزال
Reflection	انعكاس
Refraction	انكسار

Region	منطقة
Related rates	معدلات مرتبطة ببعضها
Relative maximum and minimum	نهاية عظمى وصغرى نسبية
Remainder term	الحد الباقى
Replica	بديل
Restricted	مقيد
Resultant force	قوة محصلة
Riemann sum	حاصل جمع ريمان
Rhombus	شكل معين
Rotation of axes	دوران المحاور
Runding off error	خطأ تقريب الأعداد

(S)

Scalar	عدد (مقدار عددى)
Scalar product	حاصل ضرب عددى
Semicubical parabola	قطع نصف تكعيبى
Sequence	متتابعة
Separable differential equations	معادلات تفاضلية قابلة للفصل
Sets	فئات
Signum function	دالة الاشارة
Simple harmonic motion	حركة توافقية بسيطة
Simple pendulum	بندول بسيط
Simpson's rule	قاعدة سمسون
Slope	ميل
Smooth curve	منحنى منسق (منحنى سلس)
Solid	جسم
Solid of revolution	جسم دورانى
Speed	مقدار السرعة
Spiral	حلزون
Spiral of Archimedes	حلزون أرشميدس
Squeeze theorem	نظرية الحصر
Statistics	احصاء
Steepness	انحدار
Stiffness	صلابة
Strict	قاطع

(T)

Tangent	مماس
Taylor's series	متسلسلة تايلور
Telescopic series	متسلسلة تلسكوبية
Thorium	ثوريوم
Torque	عزم دوران
Total cost function	دالة التكلفة الكلية
Total revenue function	دالة دخل كلى
Transcendental function	دالة مسترسلة
Translation of axes	نقل المحاور
Transverse axis	محور قاطع
Trapezoid	شبه منحرف
Trapezoidal rule	قاعدة شبه المنحرف
Trigonometric function	دالة مثلثية
Trigonometry	حساب مثلثات
Trillion	ترليون ($١٠^{١٨}$ فى انجلترا ، $١٠^{١٢}$ فى أمريكا)
Trochoid	تروشويد
Turning force	قوة دوران

(U)

Union	اتحاد
Upper limit of integration	النهاية العليا للتكامل

(V)

Vector	متجه
Vector space	فضاء متجه
Vector-valued function	دالة بقيم متجهة
Velocity	سرعة
Vertex	رأس

Work	(W)	شغل
X-axis	(X)	المحور السينى
Y-axis	(Y)	المحور الصادى

الفهرس الأبجدى

(أ)

(ب)

(ت)

رقم الايداع بدار الكتب

٢٦٥٣ / ١٩٨٣

مطابع الدار الهندسية